

Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 7

Abschnitt 7.1

Aufgabe 1

Der Punkt $(\frac{1}{2}, 0)$ erfüllt die Gleichung $F(x, y) = \frac{3}{4}\pi$. Die partiellen Ableitungen von F sind:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\pi x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi x \operatorname{arccot} \frac{y}{x}}} \left(\pi \operatorname{arccot} \frac{y}{x} + \frac{\pi y}{x \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} \right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\pi y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{2\sqrt{\pi x \operatorname{arccot} \frac{y}{x}}} \cdot \frac{\pi}{1 + \frac{y^2}{x^2}}.$$

Setzen wir in die partiellen Ableitungen den Punkt ein, so erhalten wir:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \pi \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -1 \neq 0.$$

Nach Satz 7.1.3 definiert also die Gleichung in einer Umgebung des Punktes implizit y als Funktion von x , und es gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, 0\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, 0\right) y' \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \implies \pi - y' \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \implies y' \left(\frac{1}{2}\right) = \pi.$$

Die Tangente an Γ in $(\frac{1}{2}, 0)$ hat also die Steigung π und geht durch den Punkt $(\frac{1}{2}, 0)$. Ihre Gleichung lautet somit:

$$y = \pi \left(x - \frac{1}{2}\right) = \pi x - \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 2

Der Punkt $(2, 1, 1)$ erfüllt die Gleichung $F(x, y, z) = 5$. Die partiellen Ableitungen von F und ihre Werte in $(2, 1, 1)$ sind:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = z^2 + 2y^2z \implies \frac{\partial F}{\partial x}(2, 1, 1) = 3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = -z^5 + 4xyz \implies \frac{\partial F}{\partial y}(2, 1, 1) = 7,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2xz - 5yz^4 + 2xy^2 \implies \frac{\partial F}{\partial z}(2, 1, 1) = -5 \neq 0.$$

Die Gleichung definiert also in einer Umgebung des Punktes $(2, 1, 1)$ implizit z als Funktion von x, y .

Bestimmung der partiellen Ableitungen dieser Funktion:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(2, 1, 1) + \frac{\partial F}{\partial z}(2, 1, 1) \frac{\partial z}{\partial x}(2, 1) = 0 \implies 3 - 5 \frac{\partial z}{\partial x}(2, 1) = 0 \implies \frac{\partial z}{\partial x}(2, 1) = \frac{3}{5},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(2, 1, 1) + \frac{\partial F}{\partial z}(2, 1, 1) \frac{\partial z}{\partial y}(2, 1) = 0 \implies 7 - 5 \frac{\partial z}{\partial y}(2, 1) = 0 \implies \frac{\partial z}{\partial y}(2, 1) = \frac{7}{5}.$$

Aufgabe 3

Die partiellen Ableitungen von F sind:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 3(y + z)^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 1 + 3(y + z)^2 \neq 0 \quad \text{für alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Die Gleichung definiert also in einer Umgebung jedes Punktes (x, y, z) , der die Gleichung erfüllt, implizit z als Funktion von x, y .

Wir bestimmen die partiellen Ableitungen dieser Funktion:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 0 \implies 1 + (1 + 3(y + z)^2) \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 0$$

$$\implies \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{1 + 3(y + z)^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 0 \implies$$

$$3(y + z)^2 + (1 + 3(y + z)^2) \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 0$$

$$\implies \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{3(y + z)^2}{1 + 3(y + z)^2}.$$

Abschnitt 7.2

Aufgabe 1

Mit dem Einheitsvektor $\mathbf{e}(x, y, z) = \frac{1}{\|\mathbf{v}(x, y, z)\|} \mathbf{v}(x, y, z)$ in Richtung von $\mathbf{v}(x, y, z)$ ist die Richtungsableitung von f in Richtung des Vektors $\mathbf{v}(x, y, z)$ gegeben durch das Skalarprodukt

$$\text{grad } f(x, y, z) \cdot \mathbf{e}(x, y, z).$$

Das Gradientenfeld von f ist

$$\text{grad } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \cos(yz) \\ \cos(yz) - z(x^2 + y) \sin(yz) \\ -y(x^2 + y) \sin(yz) \end{pmatrix}.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x, y, z) \cdot \mathbf{e}(x, y, z) &= \frac{1}{\|\mathbf{v}(x, y, z)\|} \cdot \\ &\cdot (2xy \cos(yz) - 2xy \cos(yz) + 2xyz(x^2 + y) \sin(yz) - 2xyz(x^2 + y) \sin(yz)) = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Wir berechnen zuerst den Gradienten von f im Punkt $(2, 2, 1)$:

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{yz} - \frac{y}{xz}\right)^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{yz} + \frac{y}{x^2z} \\ -\frac{x}{y^2z} - \frac{1}{xz} \\ -\frac{x}{yz^2} + \frac{y}{xz^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{grad} f(2, 2, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\mathbf{e}$ ein zu $\operatorname{grad} f(2, 2, 1)$ paralleler Einheitsvektor, also nach Folgerung 7.2.4 die Ableitung von f an der Stelle $(2, 2, 1)$ in Richtung von $\mathbf{e}$ maximal.

Aufgabe 3

Mit $F(x, y) = x^2y + \tan(xy - y^2)$ gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2xy + y(1 + \tan^2(xy - y^2)), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x^2 + (x - 2y)(1 + \tan^2(xy - y^2))$$

und daher

$$\frac{\partial F}{\partial x}(2, 2) = 10, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(2, 2) = 2 \neq 0.$$

Also definiert die Gleichung $F(x, y) = 8$ in einer Umgebung des Punktes $(2, 2)$ implizit eine Kurve Γ . Differenzieren wir die Gleichung implizit nach x und setzen dann den Punkt $(2, 2)$ ein, so erhalten wir:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(2, 2) + \frac{\partial F}{\partial y}(2, 2)y'(2) = 0 \Rightarrow 10 + 2y'(2) = 0 \Rightarrow y'(2) = -5.$$

Der Tangenteneinheitsvektor an Γ im Punkt $(2, 2)$ ist somit

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Das Gradientenfeld von f ist gegeben durch

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 2}} \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und daher

$$\operatorname{grad} f(2, 2) = \frac{3}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{6}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Richtungsableitung von f in Richtung Γ im Punkt $(2, 2)$ ist dann gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(2, 2) = \operatorname{grad} f(2, 2) \cdot \mathbf{e} = \frac{6}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{6}{26} (1 - 5) = -\frac{12}{13}.$$

Abschnitt 7.3

Aufgabe 1

Es sei $F(x, y, z) = z \sin(x + y) + x \cos(y + z)$. Der Punkt $(\pi, \pi, \frac{\pi}{2})$ erfüllt die Gleichung $F(x, y, z) = 0$. Wir bestimmen die partiellen Ableitungen von F in diesem Punkt:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = z \cos(x + y) + \cos(y + z) \implies \frac{\partial F}{\partial x}\left(\pi, \pi, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = z \cos(x + y) - x \sin(y + z) \implies \frac{\partial F}{\partial y}\left(\pi, \pi, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = \sin(x + y) - x \sin(y + z) \implies \frac{\partial F}{\partial z}\left(\pi, \pi, \frac{\pi}{2}\right) = \pi \neq 0.$$

Damit folgt:

$$\text{grad } F\left(\pi, \pi, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

Nach Satz 7.3.1 definiert daher die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung von $(\pi, \pi, \frac{\pi}{2})$ implizit eine Fläche, und die Tangentialebene hat die Gleichung:

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix} &= 0 \iff \frac{\pi}{2}(x - \pi) - \frac{\pi}{2}(y - \pi) + \pi\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ &\iff \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y + \pi z = \frac{\pi^2}{2} \iff x - y + 2z = \pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Es sei $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$. Dann gilt:

$$\text{grad } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2(z - 1) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \iff (x, y, z) = (0, 0, 1).$$

Da der Punkt $(0, 0, 1)$ nicht die Gleichung $F(x, y, z) = 2$ erfüllt, bedeutet das: Für alle Punkte (x, y, z) , die der Gleichung $F(x, y, z) = 2$ genügen, ist $\text{grad } F(x, y, z) \neq \mathbf{0}$. Daher definiert die Gleichung $F(x, y, z) = 2$ in einer Umgebung jedes Punktes implizit eine Fläche.

Um die Schnittpunkte der Kurve Γ mit der Fläche zu bestimmen, setzen wir die Parameterdarstellung in die Gleichung $F(x, y, z) = 2$ ein:

$$F(\mathbf{x}(t)) = 2 \iff \cos^2 t + \sin^2 t + (t - 1)^2 = 2 \iff (t - 1)^2 = 1 \iff t_0 = 0, t_1 = 2.$$

Die beiden Schnittpunkte sind daher $P_0 = (1, 0, 0)$ und $P_1 = (\cos 2, \sin 2, 2)$.

Die Tangentialebenen an die Fläche in diesen beiden Punkten sind gegeben durch die Gleichungen

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

und

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos 2 \\ \sin 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \cos 2 \\ 2 \sin 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Wir berechnen die Tangentenvektoren an die Kurve Γ in den Punkten P_0 und P_1 :

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \implies \mathbf{x}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'(2) = \begin{pmatrix} -\sin 2 \\ \cos 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen den Winkel zwischen den Tangentenvektoren und den Normalenvektoren der Tangentialebenen:

$$\mathbf{x}'(0) \cdot \text{grad } F(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \implies \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{10}},$$

$$\mathbf{x}'(2) \cdot \text{grad } F(\cos 2, \sin 2, 2) = \begin{pmatrix} -\sin 2 \\ \cos 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cos 2 \\ 2 \sin 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \implies \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{1}{2}.$$

Mathematik für Chemiker

Brunner, G.; Brück, R.

2013, IX, 374 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-37504-0