

Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 9

Abschnitt 9.1

Aufgabe 1

- (a) Wir bestimmen die ersten Ableitungen von f , die uns dann das Aussehen der k -ten Ableitung erkennen lassen:

$$f(x) = x + e^{-2x} - xe^{-2x},$$

$$f'(x) = 1 - 2e^{-2x} - e^{-2x} - (-2)xe^{-2x} = 1 - 3e^{-2x} - (-2)xe^{-2x},$$

$$f''(x) = -3(-2)e^{-2x} - (-2)e^{-2x} - (-2)^2xe^{-2x} = -4(-2)e^{-2x} - (-2)^2xe^{-2x},$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -4(-2)^2e^{-2x} - (-2)^2e^{-2x} - (-2)^3xe^{-2x} \\ &= -5(-2)^2e^{-2x} - (-2)^3xe^{-2x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= -5(-2)^3e^{-2x} - (-2)^3e^{-2x} - (-2)^4xe^{-2x} \\ &= -6(-2)^3e^{-2x} - (-2)^4xe^{-2x}. \end{aligned}$$

Allgemein gilt für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$

$$f^{(k)}(x) = -(k+2)(-2)^{k-1}e^{-2x} - (-2)^kxe^{-2x}.$$

Hieraus folgt

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = -2 \quad \text{und} \quad f^{(k)}(0) = -(k+2)(-2)^{k-1} \quad \text{für} \quad k \geq 2.$$

Nach Definition 9.1.7 lautet damit die Taylorreihe von f um $a = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 - 2x - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k+2)(-2)^{k-1}}{k!} x^k.$$

- (b) Wir bestimmen die ersten Ableitungen von f , die uns dann das Aussehen der k -ten Ableitung erkennen lassen:

$$f(x) = \frac{x}{1-2x},$$

$$f'(x) = \frac{1-2x+2x}{(1-2x)^2} = \frac{1}{(1-2x)^2},$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot 2}{(1-2x)^3},$$

$$f'''(x) = \frac{2^2 \cdot 2 \cdot 3}{(1-2x)^4},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{2^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(1-2x)^5}.$$

Allgemein gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x) = \frac{2^{k-1}k!}{(1-2x)^{k+1}}.$$

Hieraus folgt

$$f(1) = -1 \text{ und } f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}2^{k-1}k! \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Daher lautet nach Definition 9.1.7 die Taylorreihe von f um $a = 1$

$$-1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}2^{k-1}(x-1)^k.$$

Aufgabe 2

Bestimmung des Taylorpolynoms $T_5(x, 0)$ von f um $a = 0$:

Für die Angabe des Taylorpolynoms und des Fehlergliedes benötigen wir die Ableitungen von f bis zur Ordnung 6:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2 x, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= -2 \sin x \cos x = -\sin 2x, & f'(0) &= 0, \\ f''(x) &= -2 \cos 2x, & f''(0) &= -2, \\ f'''(x) &= 4 \sin 2x, & f'''(0) &= 0, \\ f^{(4)}(x) &= 8 \cos 2x, & f^{(4)}(0) &= 8, \\ f^{(5)}(x) &= -16 \sin 2x, & f^{(5)}(0) &= 0, \\ f^{(6)}(x) &= -32 \cos 2x. \end{aligned}$$

Nach Satz 9.1.3 lautet damit das 5. Taylorpolynom von f um $a = 0$:

$$T_5(x, 0) = \sum_{k=0}^5 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 - \frac{2}{2!} x^2 + \frac{8}{4!} x^4 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3}.$$

Abschätzung des Fehlers auf dem Intervall $[-1, \frac{1}{2}]$:

Nach Satz 9.1.3 ist das Fehlerglied gegeben durch $E_5(x, 0) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} x^6$. Wegen $x \in [-1, \frac{1}{2}]$ ist $|x| \leq 1$. Weiter ist immer $|\cos 2\xi| \leq 1$. Damit folgt

$$|f(x) - T_5(x, 0)| = |E_5(x, 0)| = \left| \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} x^6 \right| = \frac{32}{6!} |\cos 2\xi| |x|^6 \leq \frac{2}{45} < 0.045.$$

Aufgabe 3

Die Ableitungen von f lauten

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1,$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3 - 36x^2 + 88x + 2, \\
f''(x) &= 12x^2 - 72x + 88, \\
f'''(x) &= 24x - 72, \\
f^{(4)}(x) &= 24.
\end{aligned}$$

Alle höheren Ableitungen sind 0. Bilden wir in der Taylorschen Formel (Satz 9.1.3) die Summe bis $n = 4$, so ist daher auch das Fehlerglied gleich 0. Die Funktion f ist somit gleich dem Taylorpolynom von f um $a = 3$.

Für das Taylorpolynom von f um $a = 3$ benötigen wir die Werte der Ableitungen an der Stelle $a = 3$:

$$f(3) = 160, \quad f'(3) = 50, \quad f''(3) = -20, \quad f'''(3) = 0, \quad f^{(4)}(3) = 24.$$

Damit folgt (Satz 9.1.3)

$$f(x) = (x - 3)^4 - 10(x - 3)^2 + 50(x - 3) + 160.$$

Aufgabe 4

Nach Satz 9.1.3 lautet die Taylorformel für die Funktion $f(x) = \cos x$, wenn wir $a = 0$ und $x = 1$ und damit $x - a = 1$ setzen

$$\cos 1 = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} 1^{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \text{ mit } 0 < \xi < 1.$$

Da die Ableitungen von f gleich $\pm \cos x$ oder $\pm \sin x$ sind, ist $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq 1$. Damit folgt

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{500}, \text{ falls } (n+1)! > 500,$$

und dies gilt für $n \geq 5$.

Einen Näherungswert für $\cos 1$ mit einem Fehler $< \frac{1}{500}$ erhalten wir also, wenn wir in der Summe oben $n = 5$ wählen. Wir schreiben zuerst die erforderlichen Werte $f^{(k)}(0)$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ auf:

$$\begin{aligned}
f(0) &= \cos 0 = 1, & f'(0) &= -\sin 0 = 0, & f''(0) &= -\cos 0 = -1, \\
f'''(0) &= \sin 0 = 0, & f^{(4)}(0) &= \cos 0 = 1, & f^{(5)}(0) &= -\sin 0 = 0.
\end{aligned}$$

Der gesuchte Näherungswert für $\cos 1$ ist lautet dann

$$\cos 1 \approx \sum_{k=0}^5 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24} \approx 0.54.$$

Aufgabe 5

Nach Satz 9.1.3 benötigen wir für das Taylorpolynom von f vom Grad 6 die Ableitungen von f an der Stelle $a = 0$ bis zur Ordnung 6 und für das zugehörige Fehlerglied die Ableitung von f der Ordnung 7:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'(0) = -1,$$

$$f''(x) = \frac{2!}{(1+x)^3}, \quad f''(0) = 2!,$$

$$f'''(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4}, \quad f'''(0) = -3!,$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{4!}{(1+x)^5}, \quad f^{(4)}(0) = 4!,$$

$$f^{(5)}(x) = -\frac{5!}{(1+x)^6}, \quad f^{(5)}(0) = -5!,$$

$$f^{(6)}(x) = \frac{6!}{(1+x)^7}, \quad f^{(6)}(0) = 6!,$$

$$f^{(7)}(x) = -\frac{7!}{(1+x)^8}.$$

Das Taylorpolynom vom Grad 6 um $a = 0$ lautet dann nach Satz 9.1.3

$$T_6(x, 0) = \sum_{k=0}^6 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6.$$

Die Abweichung des Taylorpolynoms von der Funktion ist nach Satz 9.1.3 gegeben durch $|E_6(x)|$ mit

$$|E_6(x)| = \left| \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!} x^7 \right| = \left| \frac{7!}{7!(1+\xi)^8} x^7 \right| = \frac{1}{|1+\xi|^8} |x|^7 \leq \frac{1}{(1+\xi)^8} d^7$$

für $x \in [-d, d] \subset (-1, 1)$. Da ξ zwischen 0 und x liegt, folgt $\xi \in [-d, d]$. Die Funktion $\xi \mapsto \frac{1}{(1+\xi)^8}$ ist auf dem Intervall $[-d, d]$ streng monoton fallend und nimmt daher ihren maximalen Wert für $\xi = -d$ an. Also folgt für $x \in [-d, d]$

$$|E_6(x)| \leq \frac{d^7}{(1-d)^8} = E(d).$$

Die Funktion $d \mapsto E(d)$ ist auf dem Intervall $[0, 1)$ streng monoton wachsend, denn für $d \in (0, 1)$ gilt

$$E'(d) = \frac{d^6(d+7)}{(1-d)^9} > 0.$$

Wegen $E(0.08) < 10^{-7}$ können wir also $d = 0.08$ wählen.

Aufgabe 6

Wir bestimmen die ersten Ableitungen von f , die uns dann das Aussehen der k -ten Ableitung erkennen lassen:

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right),$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} = \frac{1}{2+x},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2},$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(2+x)^3},$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{(2+x)^4}.$$

Allgemein gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(2+x)^k}.$$

Damit folgt

$$f(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

und daher

$$\frac{f(0)}{0!} = 0, \quad \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 9.1.3 lautet das Taylorpolynom von f der Ordnung n um $a = 0$

$$T_n(x, 0) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k} x^k.$$

Das zugehörige Fehlerglied ist gegeben durch (ebenfalls nach Satz 9.1.3)

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)(2+\xi)^{n+1}} x^{n+1}.$$

Wir schätzen nun das Fehlerglied ab. Wegen $x \in [0, 2]$ ist $|x|^{n+1} \leq 2^{n+1}$. Weiter liegt ξ nach Satz 9.1.3 zwischen 0 und x . Daher ist $0 < \xi < 2$, und es gilt

$$|E_n(x)| = \frac{1}{(n+1)|2+\xi|^{n+1}} |x|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} 2^{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Daher gilt $|E_n(x)| \leq 10^{-3}$, falls $\frac{1}{n+1} \leq 10^{-3}$, d.h. für $n \geq 10^3 - 1 = 999$.

Abschnitt 9.2

Aufgabe 1

(a) Wir bestimmen zuerst die Nullstellen der Ableitung von f mit $f(x) = 2x^4 - 4x^3$:

$$f'(x) = 8x^3 - 12x^2 = 4x^2(2x - 3) = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x = \frac{3}{2}.$$

Nach Satz 9.2.1 sind diese beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{3}{2}$ von f' die möglichen Stellen, in denen f ein lokales Extremum oder einen Sattelpunkt besitzen kann. Die Funktionswerte an diesen beiden Stellen sind $f(0) = 0$ und $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}$.

Die zweite Ableitung von f lautet:

$$f''(x) = 24x^2 - 24x = 24x(x - 1).$$

Es ist $f''(x_2) = 18 > 0$ und daher hat f nach Satz 9.2.1 in x_2 ein lokales Minimum. Dieses ist $f(x_2) = -\frac{27}{8}$.

Wegen $f''(0) = 0$ müssen wir weitere Ableitungen von f bilden (Satz 9.2.1). Es ist

$$f'''(x) = 48x - 24$$

und daher $f'''(0) = -24 \neq 0$. Da die Ordnung 3 dieser Ableitung eine ungerade Zahl ist, hat f nach Satz 9.2.1 in 0 einen Sattelpunkt mit $f(0) = 0$.

- (b) Die partiellen Ableitungen der Funktion f mit $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ lauten

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3y = 3(x^2 - y), \quad f_y(x, y) = 3y^2 - 3x = 3(y^2 - x).$$

Wir bestimmen zuerst die Punkte (x, y) , in denen $f_x(x, y) = 0$ und $f_y(x, y) = 0$ gilt (Satz 9.2.5). Diese beiden Bedingungen liefern die beiden Gleichungen

$$x^2 = y \quad \text{und} \quad y^2 = x.$$

Wir setzen die erste in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$x^4 = x \iff x = 0 \text{ oder } x = 1.$$

Aus der ersten Gleichung $x^2 = y$ folgt $y = 0$ für $x = 0$ und $y = 1$ für $x = 1$, und $(0, 0)$ und $(1, 1)$ erfüllen auch die zweite Gleichung $y^2 = x$. Als Stellen, in denen f ein lokales Extremum oder einen Sattelpunkt besitzt, kommen also nur die beiden Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$ in Frage. Um dies entsprechend Satz 9.2.5 herauszufinden, bilden wir die partiellen Ableitungen der Ordnung 2:

$$f_{xx}(x, y) = 6x, \quad f_{yy}(x, y) = 6y, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -3.$$

Überprüfung für den Punkt $(0, 0)$:

$$\Delta(f; (0, 0)) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0.$$

Daher hat f in $(0, 0)$ nach Satz 9.2.5 einen Sattelpunkt mit $f(0, 0) = 0$.

Überprüfung für den Punkt $(1, 1)$:

$$\Delta(f; (1, 1)) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0.$$

Wegen $f_{xx}(1, 1) = 6 > 0$ hat f in $(1, 1)$ nach Satz 9.2.5 ein lokales Minimum mit $f(1, 1) = -1$.

(c) Die partiellen Ableitungen der Funktion f mit $f(x, y) = xye^{2-x-y}$ lauten

$$f_x(x, y) = ye^{2-x-y} - xye^{2-x-y} = y(1-x)e^{2-x-y},$$

$$f_y(x, y) = xe^{2-x-y} - xye^{2-x-y} = x(1-y)e^{2-x-y}.$$

Wir bestimmen zuerst die Punkte (x, y) , in denen $f_x(x, y) = 0$ und $f_y(x, y) = 0$ gilt (Satz 9.2.5). Diese beiden Bedingungen liefern wegen $e^{2-x-y} > 0$ die beiden Gleichungen

$$y(1-x) = 0 \quad \text{und} \quad x(1-y) = 0.$$

Die erste Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $x = 1$ oder $y = 0$ ist. Die zweite Gleichung liefert für $x = 1$ den Wert $y = 1$ und für $y = 0$ den Wert $x = 0$. Als Stellen, in denen f ein lokales Extremum oder einen Sattelpunkt besitzt, kommen also nur die beiden Punkte $(1, 1)$ und $(0, 0)$ in Frage. Um dies entsprechend Satz 9.2.5 herauszufinden, bilden wir die partiellen Ableitungen der Ordnung 2:

$$f_{xx}(x, y) = y(x-2)e^{2-x-y},$$

$$f_{yy}(x, y) = x(y-2)e^{2-x-y},$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = (1-x-y+xy)e^{2-x-y}.$$

Überprüfung für den Punkt $(0, 0)$:

$$\Delta(f; (0, 0)) = \begin{vmatrix} 0 & e^2 \\ e^2 & 0 \end{vmatrix} = -e^4 < 0.$$

Daher hat f in $(0, 0)$ nach Satz 9.2.5 einen Sattelpunkt mit $f(0, 0) = 0$.

Überprüfung für den Punkt $(1, 1)$:

$$\Delta(f; (1, 1)) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Wegen $f_{xx}(1, 1) = -1 < 0$ hat f in $(1, 1)$ nach Satz 9.2.5 ein lokales Maximum mit $f(1, 1) = 1$.

Abschnitt 9.3

Aufgabe 1

(a) Nach Satz 9.3.5 hat die Potenzreihe wegen

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$$

den Konvergenzradius $r = \infty$.

(b) Der in der Potenzreihe bei $(x-1)^k$ stehende Faktor ist der Koeffizient a_k . Ersetzen wir in ihm k durch $k+1$, so erhalten wir a_{k+1} . Es gilt also

$$a_k = \frac{(k+2)^2}{2k+3} \quad \text{und} \quad a_{k+1} = \frac{(k+3)^2}{2k+5}.$$

Damit folgt

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+3)^2(2k+3)}{(2k+5)(k+2)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{k}\right)^2 \left(2 + \frac{3}{k}\right)}{\left(2 + \frac{5}{k}\right) \left(1 + \frac{2}{k}\right)^2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Nach Satz 9.3.5 hat daher die Potenzreihe den Konvergenzradius $r = \frac{1}{\alpha} = 1$.

- (c) Der in der Potenzreihe bei $(x-1)^{k+1}$ stehende Faktor ist der Koeffizient a_{k+1} . Daher folgt

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+2)^2(2k+1)}{(2k+3)(k+1)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{k}\right)^2 \left(2 + \frac{1}{k}\right)}{\left(2 + \frac{3}{k}\right) \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Nach Satz 9.3.5 hat daher die Potenzreihe den Konvergenzradius $r = \frac{1}{\alpha} = 1$.

Aufgabe 2

- (a) Die Potenzreihe hat die Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k (x+1)^k \text{ mit } q^k = \left(-\frac{5}{2}\right)^k \text{ für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Nach Folgerung 9.3.9 ist sie daher konvergent für

$$|x+1| < \frac{1}{|q|} = \frac{1}{\left|-\frac{5}{2}\right|} = \frac{2}{5},$$

hat also den Konvergenzradius $r = \frac{2}{5}$. Weiter hat sie nach Folgerung 9.3.9 die Summenfunktion

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{2}\right)^k (x+1)^k &= \frac{1}{1 - \left(-\frac{5}{2}\right)(x+1)} = \frac{1}{1 + \frac{5}{2}(x+1)} = \frac{2}{2 + 5(x+1)} \\ &= \frac{2}{5x+7}. \end{aligned}$$

- (b) Um Folgerung 9.3.9 anwenden zu können, formen wir die Potenzreihe zuerst um:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{5^{k-1}}{2^{k+2}} (x+1)^{k+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{5^{k+1}}{2^{k+4}} (x+1)^{k+3} \\ &= -\frac{5}{2^4} (x+1)^3 \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{2}\right)^k (x+1)^k. \end{aligned}$$

Hier ist jetzt $q = -\frac{5}{2}$ und die Potenzreihe hat daher wie in (a) den Konvergenzradius $r = \frac{2}{5}$. Weiter hat sie nach Folgerung 9.3.9 die Summenfunktion

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{5^{k-1}}{2^{k+2}} (x+1)^{k+1} = -\frac{5}{16} (x+1)^3 \frac{2}{5x+7} = -\frac{5}{8} \frac{(x+1)^3}{5x+7}.$$

Aufgabe 3

Die Stammfunktion von f lautet

$$F(x) = \int \frac{dx}{(2-3x)^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{2-3x} + C.$$

Wie im Anschluss an Folgerung 9.3.9 beschrieben, benutzen wir die Formel aus Folgerung 9.3.9 für die Summenfunktion einer Potenzreihe, um jetzt umgekehrt die Potenzreihe zu bestimmen, deren Summenfunktion F ist. Es gilt

$$\frac{1}{2-3x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{3}{2}x} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k x^k$$

und daher

$$F(x) = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k x^k + C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{2^{k+1}} x^k + C.$$

Nach Folgerung 9.3.9 hat diese Potenzreihe den Konvergenzradius $r = \frac{2}{3}$ und nach Satz 9.3.10 ist sie die Taylorreihe von F um $a = 0$.

Nach Satz 9.3.6 erhalten wir durch Differenzieren daraus die Potenzreihen-Entwicklung von f um $a = 0$:

$$f(x) = F'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}k}{2^{k+1}} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k(k+1)}{2^{k+2}} x^k.$$

Sie hat nach Satz 9.3.6 denselben Konvergenzradius $r = \frac{2}{3}$ wie die Taylorreihe von F .

Aufgabe 4

Nach Folgerung 9.3.9 gilt für $a = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2} = 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{2}x} = 1 - \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)x} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k x^k \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} x^k = 1 - 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} x^k. \end{aligned}$$

Wegen $q = -\frac{1}{2}$ gilt für den Konvergenzradius $r = \frac{1}{|q|} = 2$.

Nach Folgerung 9.3.9 gilt für $a = 2$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2} = 1 - \frac{2}{4+(x-2)} = 1 - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{4}(x-2)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)(x-2)} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k (x-2)^k \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} (x-2)^k = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}} (x-2)^k \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}} (x-2)^k.$$

Wegen $q = -\frac{1}{4}$ gilt für den Konvergenzradius $r = 4$.

Aufgabe 5

Nach Aufgabe 4 gilt für $x \in (-2, 2)$

$$f(x) = \frac{x}{x+2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} x^k,$$

da die Potenzreihe den Konvergenzradius $r = 2$ hat.

Durch Differenzieren folgt daraus nach Satz 9.3.6

$$\begin{aligned} \frac{2}{(x+2)^2} = f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{2^k} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2} (k+1)}{2^{k+1}} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)}{2^{k+1}} x^k \end{aligned}$$

und daher

$$g(x) = \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)}{2^{k+1}} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)}{2^{k+2}} x^k.$$

Dabei gilt diese Potenzreihen-Entwicklung ebenfalls im Intervall $(-2, 2)$ (Satz 9.3.6).

Wieder nach Aufgabe 4 gilt für $x \in (-2, 2)$

$$1 - \frac{2}{x+2} = \frac{x}{x+2} = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} x^k.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} x^k \right).$$

Durch Integration ergibt sich nach Satz 9.3.6 im Intervall $(-2, 2)$

$$\begin{aligned} F(x) = \ln(x+2) &= \int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{2} \int \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} x^k \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k (k+1)} x^{k+1} \right) + C = \frac{1}{2} \left(- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k (k+1)} x^{k+1} \right) + C \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{2^{k+1} (k+1)} x^{k+1} + C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k k} x^k + C \end{aligned}$$

Für $x = 0$ folgt dann $\ln 2 = 0 + C$, also $C = \ln 2$. Damit erhalten wir für $x \in (-2, 2)$

$$F(x) = \ln(x+2) = \ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k k} x^k.$$

Mathematik für Chemiker

Brunner, G.; Brück, R.

2013, IX, 374 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-37504-0