

Folgen und Reihen

1.1 Grundlegende Begriffe und Bezeichnungen

Wir stellen zunächst einige grundlegende Begriffe und Bezeichnungen zusammen (eine ausführliche Darstellung findet man in [3]).

Mengen

Der Begriff **Menge** wird nicht definiert.

Ist A eine Menge und x ein Element von A , so schreibt man $x \in A$. Wenn das Element x nicht in der Menge A liegt, schreibt man $x \notin A$.

Sind A und B Mengen, so heißt A Teilmenge von B , wenn gilt: Ist $x \in A$, so folgt $x \in B$; man schreibt dann $A \subset B$.

Für beliebige Mengen A und B bezeichnet man mit $A \cap B$ den **Durchschnitt** von A und B ; $A \cap B$ besteht aus allen Elementen, die sowohl zu A als auch zu B gehören, also

$$A \cap B := \{x \mid x \in A, x \in B\}.$$

Die **Vereinigungsmenge** $A \cup B$ besteht aus allen Elementen, die zu A oder zu B gehören, also

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

Für Mengen X, A, B mit $A \subset X, B \subset X$ setzt man

$$A \setminus B := \{x \in X \mid x \in A, x \notin B\}.$$

Mit $A \times B$ bezeichnet man die Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A, b \in B$;

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Die leere Menge, die kein Element enthält, bezeichnet man mit \emptyset .

Zahlen

Wichtige Mengen sind:

Die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$;

die Menge \mathbb{N}_0 der natürlichen Zahlen einschließlich Null $0, 1, 2, 3, \dots$;

die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$;

die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$;

die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen, die wir anschließend genauer behandeln werden, sowie

die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen, die in 1.3.1 definiert wird. Es ist

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Die Menge der positiven reellen Zahlen bezeichnen wir mit \mathbb{R}^+ , die der reellen Zahlen $\neq 0$ mit \mathbb{R}^* und die komplexen Zahlen $\neq 0$ mit \mathbb{C}^* ; also

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \quad \mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}, \quad \mathbb{C}^* := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}.$$

Abbildungen

Ein weiterer grundlegender Begriff ist der der **Abbildung**; auch dieser Begriff wird nicht näher definiert. Sind A und B Mengen und ist $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung, so wird jedem $x \in A$ ein eindeutig bestimmtes Element $f(x) \in B$ zugeordnet. Die Menge

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$$

bezeichnet man als den Graphen von f . Zu jedem $x \in A$ existiert genau ein $y \in B$ mit $(x, y) \in G_f$; nämlich $y = f(x)$.

Ist $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung, so heißt $\text{Bild } f := f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$ das Bild von f . Man bezeichnet A als Definitionsbereich und $f(A)$ als Wertebereich.

Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt **surjektiv**, wenn $f(A) = B$ ist.

Sie heißt **injektiv**, wenn aus $x, y \in A, x \neq y$, immer $f(x) \neq f(y)$ folgt.

Eine Abbildung, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist, bezeichnet man als **bijektiv**.

$f : A \rightarrow B$ ist genau dann bijektiv, wenn zu jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ existiert mit $y = f(x)$.

Bei einer bijektiven Abbildung $f : A \rightarrow B$ ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : B \rightarrow A$ definiert; für $y \in B$ ist $f^{-1}(y)$ das $x \in A$ mit $f(x) = y$.

Ist $f : A \rightarrow B$ eine beliebige Abbildung, so definiert man das **Urbild** einer Menge $M \subset B$ durch

$$f^{-1}(M) := \{x \in A \mid f(x) \in M\}.$$

Sind A, B, C Mengen und $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ Abbildungen, so definiert man eine Abbildung

$$g \circ f : A \rightarrow C, \quad x \mapsto g(f(x)),$$

also $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ für $x \in A$.

Funktionen

Eine Abbildung $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ einer Menge A in die reellen Zahlen bezeichnet man als (reelle) **Funktion**. Häufig hat man eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ und eine auf D definierte Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Ist f explizit gegeben, etwa $f(x) = 2x + 3$, so schreiben wir

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 3.$$

Wenn f, g reelle Funktionen auf D sind mit $f(x) > g(x)$ für alle $x \in D$, so schreiben wir: $f > g$.

Entsprechend ist $f \geq g$ definiert.

Eine Funktion f heißt **gerade**, wenn $f(-x) = f(x)$ ist; sie heißt **ungerade**, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt.

Das Kronecker-Symbol (LEOPOLD KRONECKER (1823-1891)) ist definiert durch

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

In gewissen Situationen, nämlich bei Übergang zum dualen Vektorraum, ist es zweckmässig, δ_i^j an Stelle von δ_{ij} zu schreiben.

1.2 Die reellen Zahlen

Grundlage der Mathematik sind die reellen und die komplexen Zahlen. Es dauerte jedoch etwa 2500 Jahre, bis am Ende des 19. Jahrhunderts eine befriedigende Definition der reellen Zahlen \mathbb{R} gelang. Die Schwierigkeit bestand vor allem in der Präzisierung der Lückenlosigkeit der Zahlengeraden, die man benötigt, um Aussagen wie das Cauchysche Konvergenzkriterium oder den Zwischenwertsatz zu beweisen. Diese Entwicklung wird in [3] ausführlich dargestellt. Dort findet man auch eine ausführliche Darstellung der Geschichte der komplexen Zahlen.

Wir nennen hier die Daten von Mathematikern, die wir noch mehrfach zitieren werden. Zuerst der „princeps mathematicorum“

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)

und

BERNHARD BOLZANO (1781-1848)

GEORG CANTOR (1845-1918)

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789-1857)

RICHARD DEDEKIND (1831-1916)

LEONHARD EULER (1707-1783)

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)

ISAAC NEWTON (1643-1727)

KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815-1897).

Einführung der reellen Zahlen

Man kann die reellen Zahlen definieren, indem man von den natürlichen Zahlen \mathbb{N} ausgeht, diese zum Ring \mathbb{Z} der ganzen Zahlen und zum Körper \mathbb{Q} der rationalen Zahlen erweitert; durch Vervollständigung von \mathbb{Q} erhält man \mathbb{R} .

Eine andere Möglichkeit ist die axiomatische Charakterisierung; dabei wird die Vollständigkeit durch Intervallschachtelungen oder Dedekindsche Schnitte oder durch die Existenz des Supremums definiert.

Wir schildern letzteren Zugang und führen die reellen Zahlen \mathbb{R} ein als angeordneten Körper, in dem das Vollständigkeitsaxiom gilt. Es gibt bis auf Isomorphie genau einen angeordneten Körper, der vollständig ist; diesen bezeichnet man als Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} (vgl. dazu [3]).

Körperaxiome

Definition 1.2.1 Es sei K eine nichtleere Menge, in der zwei Verknüpfungen $+$ und \cdot definiert sind. Jedem Paar (x, y) , $x \in K$, $y \in K$, wird also ein Element $x + y \in K$ und ein Element $x \cdot y \in K$ zugeordnet.

Die Menge K mit den Verknüpfungen $+$ und \cdot heißt ein **Körper**, wenn gilt:

$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
es gibt ein Nullelement $0 \in K$ mit $0 + x = x$ für alle $x \in K$	es gibt ein Einselement $1 \in K$, $1 \neq 0$, mit $1 \cdot x = x$ für alle $x \in K$
zu $x \in K$ existiert ein $-x$ mit $-x + x = 0$	zu $x \in K$, $x \neq 0$, existiert ein $x^{-1} \in K$ mit $x^{-1}x = 1$
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	

Bemerkungen. Man kann beweisen, dass es in einem Körper genau ein Nullelement 0 und genau ein Einselement 1 gibt. Auch das negative Element $-x$ und das inverse Element x^{-1} ist eindeutig bestimmt; man setzt $y - x := y + (-x)$ und $\frac{y}{x} := x^{-1}y$ falls $x \neq 0$.

Aus den Axiomen kann man nun Rechenregeln herleiten, etwa $-(-x) = x$ oder $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$; dies soll hier nicht ausgeführt werden.

Anordnungsaxiome

Definition 1.2.2 Ein Körper K heißt **angeordnet**, wenn eine Teilmenge K^+ von K vorgegeben ist, so dass gilt:

für jedes $x \in K$ ist entweder $x \in K^+$ oder $-x \in K^+$ oder $x = 0$
aus $x, y \in K^+$ folgt $x + y \in K^+$ und $x \cdot y \in K^+$

Statt $x \in K^+$ schreiben wir $x > 0$; dann besagen diese Axiome:

Für jedes $x \in K$ ist entweder $x > 0$ oder $-x > 0$ oder $x = 0$;

aus $x > 0$ und $y > 0$ folgt $x + y > 0$ und $x \cdot y > 0$.

Sind $x, y \in K$, so setzt man $y > x$, wenn $y - x > 0$ ist; $y \geq x$ bedeutet: $y > x$ oder $y = x$. Statt $y > x$ schreibt man auch $x < y$ und statt $y \geq x$ schreibt man $x \leq y$.

Bemerkungen. Man müßte nun Aussagen für das Rechnen in angeordneten Körpern herleiten. Zum Beispiel „darf man Ungleichungen addieren“, d.h. aus $y_1 > x_1$ und $y_2 > x_2$ folgt $y_1 + y_2 > x_1 + x_2$. Darauf wollen wir nicht näher eingehen.

Das Vollständigkeitsaxiom

Um dieses Axiom formulieren zu können, benötigen wir einige Vorbereitungen:

Definition 1.2.3 Ist K ein angeordneter Körper und X eine nicht-leere Teilmenge von K , so heißt ein Element $t \in K$ eine **obere Schranke** von X , wenn für alle $x \in X$ gilt:

$$x \leq t.$$

X heißt nach oben beschränkt, wenn es zu X eine obere Schranke gibt.

Die kleinste obere Schranke s von X wird, falls sie existiert, als **Supremum** von X bezeichnet; man schreibt

$$s = \sup X.$$

s ist also genau dann Supremum von X , wenn gilt:

- (1) Für alle $x \in X$ ist $x \leq s$ (d.h. s ist obere Schranke von X),
- (2) Ist $s' \in K$ und $s' < s$, so existiert ein $x \in X$ mit $s' < x$ (d.h. es gibt keine kleinere obere Schranke).

Analog dazu heißt $t \in K$ untere Schranke einer Teilmenge X von K , wenn für alle $x \in X$ gilt: $t \leq x$; die größte untere Schranke bezeichnet man als Infimum von X und schreibt dafür $\inf x$.

Das **Vollständigkeitsaxiom** lautet:

Jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge X von K besitzt ein Supremum.

Definition 1.2.4 Ein angeordneter Körper K heißt **vollständig**, wenn jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge X von K ein Supremum besitzt.

Man kann zeigen, dass es bis auf Isomorphie genau einen vollständig angeordneten Körper gibt (vgl. [3]); das bedeutet:

Sind K und \tilde{K} vollständig angeordnete Körper, so existiert eine bijektive Abbildung $f : K \rightarrow \tilde{K}$, so dass für alle $x, y \in K$ gilt:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

Daher ist es gerechtfertigt, von dem Körper der reellen Zahlen zu sprechen. Nun können wir definieren:

Definition 1.2.5 Ein vollständig angeordneter Körper heißt **Körper der reellen Zahlen**; er wird mit \mathbb{R} bezeichnet.

Wir können auf Einzelheiten nicht näher eingehen; eine ausführliche Darstellung findet man in [3] und [17].

Es soll noch skizziert werden, wie man die natürlichen Zahlen \mathbb{N} , die ganzen Zahlen \mathbb{Z} und die rationalen Zahlen \mathbb{Q} als Teilmengen von \mathbb{R} erhält:

Die natürlichen Zahlen \mathbb{N} bestehen aus den Elementen $1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots$; genauer: es ist $1 \in \mathbb{N}$ und wenn $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist auch $n + 1 \in \mathbb{N}$. Die Menge \mathbb{N} ist die kleinste Teilmenge von \mathbb{R} , die diese beiden Eigenschaften besitzt.

Eine Zahl $q \in \mathbb{R}$ heißt ganze Zahl, wenn $q \in \mathbb{N}$ oder $-q \in \mathbb{N}$ oder $q = 0$ ist; die Menge der ganzen Zahlen wird mit \mathbb{Z} bezeichnet.

Eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ heißt rational, wenn es ein $q \in \mathbb{Z}$ und ein $p \in \mathbb{N}$ gibt mit $r = \frac{q}{p}$; die Menge der rationalen Zahlen bezeichnet man mit \mathbb{Q} .

Man kann beweisen, dass \mathbb{Q} und auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in \mathbb{R} ist; in jedem Intervall $]a, b[$, $a < b$, liegen unendlich viele rationale und auch irrationale Zahlen.

Wir leiten nun aus den Axiomen eine Aussage her, die man als Satz des Archimedes bezeichnet (ARCHIMEDES (um 285-212)):

Satz 1.2.6 (Satz von Archimedes) *Die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt: Zu jeder reellen Zahl x existiert also eine natürliche Zahl n mit $n > x$.*

Beweis. Wir nehmen an, \mathbb{N} wäre nach oben beschränkt; dann existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom das Supremum $s := \sup \mathbb{N}$. Es ist also $n \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil $s - 1$ keine obere Schranke von \mathbb{N} ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s - 1 < n$. Dann folgt $s < n + 1$, und wegen $n + 1 \in \mathbb{N}$ ist dies ein Widerspruch.

Äquivalent zum Satz von Archimedes ist der von Eudoxos (EUDOXOS (408 - 355)):

Satz 1.2.7 (Satz von Eudoxos) *Zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl n mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Beweis. Nach dem Satz des Archimedes existiert zu $x := \frac{1}{\varepsilon}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$, also $\frac{1}{n} < \varepsilon$. \square

Wir bringen noch einige grundlegende Begriffe und Bezeichnungen. Im angeordneten Körper \mathbb{R} kann man den **Betrag** $|x|$ definieren. Für $x \in \mathbb{R}$ setzt man

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Es gilt:

Satz 1.2.8 (1) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $|x| \geq 0$ und $|x| = 0$ gilt genau dann, wenn $x = 0$ ist.*

(2) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.*

(3) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die **Dreiecksungleichung***

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Durch $|x|$ wird in \mathbb{R} eine Norm im Sinne von 7.9.11 definiert.

Beweis. Wir beweisen die Dreiecksungleichung. Nach Definition des Betrages ist $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$ und $y \leq |y|$, $-y \leq |y|$. Daraus folgt $x + y \leq |x| + |y|$ und $-(x + y) \leq |x| + |y|$, also $|x + y| \leq |x| + |y|$. \square

Setzt man in der Dreiecksungleichung $y - x$ an Stelle von y ein, so erhält man $|x + (y - x)| \leq |x| + |y - x|$, also $|y| - |x| \leq |y - x|$. Dann ist auch $|x| - |y| \leq |x - y|$, somit $||y| - |x|| \leq |y - x|$.

Nun kann man den Begriff der ε -**Umgebung** eines Punktes $a \in \mathbb{R}$ definieren:

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}.$$

Eine Teilmenge U von \mathbb{R} heißt **Umgebung** von $a \in \mathbb{R}$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subset U$.

Eine Teilmenge X von \mathbb{R} heißt **offen**, wenn zu jedem $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x) \subset X$. Wichtige Teilmengen von \mathbb{R} sind die **Intervalle**. Für $a, b \in \mathbb{R}$ setzt man

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} &]a, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ [a, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} &]a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \end{aligned}$$

$[a, b]$ heißt das **abgeschlossene Intervall** mit den Randpunkten a, b , das Intervall $]a, b[$ bezeichnet man als **offenes Intervall**. Die Intervalle $[a, b[$ und $]a, b]$ heißen halboffen. Es ist $U_\varepsilon(a) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$. Die folgenden Mengen bezeichnet man als **uneigentliche Intervalle**:

$$\begin{aligned} [a, +\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} &]a, +\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\]-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} &]-\infty, a[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}. \end{aligned}$$

1.3 Die komplexen Zahlen

Die Geschichte der komplexen Zahlen und deren Definition wird eingehend in [3] dargestellt. Bei der Behandlung vieler mathematischer Probleme erweist es sich als zweckmäßig, den Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen zu erweitern zum Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen. Zum Beispiel ist es wichtig, die Nullstellen von Polynomen zu bestimmen; aber das einfache Beispiel des Polynoms $x^2 + 1$ zeigt, dass es Polynome gibt, die in \mathbb{R} keine Nullstelle besitzen.

Beim Lösen von Gleichungen 2., 3. und 4. Grades treten Wurzeln auf und man möchte auch Wurzeln aus negativen Zahlen bilden.

Daher versucht man, \mathbb{R} so zu erweitern, dass ein Element i existiert mit $i^2 = -1$. Der Erweiterungskörper soll aus Elementen der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ bestehen. Mit diesen Elementen will man so rechnen:

$$\begin{aligned} (x + iy) + (u + iv) &= (x + u) + i(y + v) \\ (x + iy) \cdot (u + iv) &= xu + i(xv + yu) + i^2 yv \end{aligned}$$

und weil $i^2 = -1$ sein soll, ergibt sich für die Multiplikation

$$(x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Um die Existenz eines derartigen Körpers \mathbb{C} zu beweisen, betrachtet man statt $x + iy$ das Paar (x, y) reeller Zahlen; dies führt zu folgender Definition:

Definition 1.3.1 *Unter dem Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen versteht man die Menge \mathbb{R}^2 der Paare reeller Zahlen zusammen mit folgenden Verknüpfungen:*

$$\begin{aligned}(x, y) + (u, v) &= (x + u, y + v) \\ (x, y) \cdot (u, v) &= (xu - yv, xv + yu).\end{aligned}$$

Man rechnet nach, dass \mathbb{C} ein Körper ist. Für alle $x, u \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x, 0) + (u, 0) = (x + u, 0), \quad (x, 0) \cdot (u, 0) = (xu, 0).$$

Identifiziert man die reelle Zahl $x = x + i \cdot 0$ mit dem Paar $(x, 0)$, so kann man \mathbb{R} als Teilmenge (und Unterkörper) von \mathbb{C} auffassen.

Setzt man $i := (0, 1)$, so ist $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$ und da man $(-1, 0)$ mit -1 identifiziert, ist

$$i^2 = -1.$$

Für jedes Paar $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$, damit hat man die übliche Schreibweise. Man nennt x den Realteil und y den Imaginärteil von z und schreibt: $\operatorname{Re}(x + iy) := x$, $\operatorname{Im}(x + iy) := y$.
Ist $z = x + iy$ eine komplexe Zahl, so nennt man

$$\bar{z} := x - iy$$

die zu z konjugierte komplexe Zahl. Es gilt $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
Man kann leicht zeigen:

Hilfssatz 1.3.2 *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

- (1) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$,
- (2) $\overline{\bar{z}} = z$,
- (3) z ist genau dann reell, wenn $z = \bar{z}$ ist.

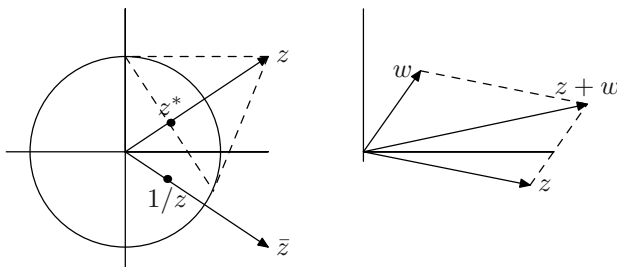
Den **Betrag** einer komplexen Zahl $z = x + iy$ definiert man so:

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Damit kann man für $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, die Zahl $\frac{1}{z}$ darstellen (und die Existenz von $\frac{1}{z}$ beweisen): man erweitert mit \bar{z} und erhält im Nenner die reelle Zahl $z \cdot \bar{z} = |z|^2$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Nützlich ist auch die Zahl $z^* := \frac{1}{\bar{z}}$. In der Abbildung sind diese Zahlen und die Addition komplexer Zahlen veranschaulicht.



Für die Veranschaulichung der Multiplikation sind Polarkoordinaten erforderlich. Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ kann man durch

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

darstellen; dabei ist $r = |z|$. Man nennt r, φ Polarkoordinaten von z ; wenn man φ so wählt, dass $0 \leq \varphi < 2\pi$ gilt, dann ist φ eindeutig bestimmt; die Existenz wird in 4.3.19 hergeleitet.

Mit Hilfe von Polarkoordinaten kann man die Multiplikation komplexer Zahlen beschreiben: Ist

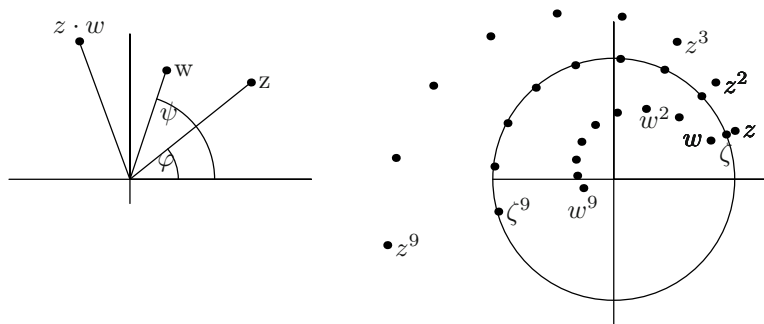
$$z = r \cdot e^{i\varphi} \quad \text{und} \quad w = s \cdot e^{i\psi},$$

so ist

$$z \cdot w = (r \cdot s) e^{i(\varphi + \psi)}.$$

Das Produkt zweier komplexer Zahlen erhält man also, indem man die Beträge multipliziert und die Winkel addiert.

Bei z^2 verdoppelt sich der Winkel. Damit kann man sich die Potenzen z^n veranschaulichen; in der folgenden Abbildung ist dies für $|z| > 1$, $|\zeta| = 1$, $|w| < 1$ dargestellt.



Beim Wurzelziehen halbiert sich der Winkel; sucht man etwa \sqrt{i} , also die Lösungen von $z^2 = i$, so liegt z auf der Winkelhalbierenden und hat den Betrag 1, also ist $z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

1.4 Folgen

Im Mittelpunkt der Analysis steht der Begriff des Grenzwerts. Bevor wir den Begriff des Grenzwerts einer Folge definieren, erläutern wir, was man unter einer Folge versteht.

Man erhält zum Beispiel durch fortgesetztes Halbieren die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ oder man betrachtet die Folge der Quadratzahlen $1, 4, 9, 16, 25, \dots$. Es ist also jeder natürlichen Zahl n eine reelle oder komplexe Zahl a_n zugeordnet:

$$a_1, a_2, a_3, \dots;$$

den Begriff der Folge kann man nun so präzisieren:

Definition 1.4.1 *Unter einer Folge reeller oder komplexer Zahlen versteht man eine Abbildung*

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n, \quad \text{oder} \quad \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, n \mapsto a_n.$$

Für diese Abbildung schreibt man

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{oder} \quad (a_n)_n \quad \text{oder} \quad (a_n).$$

Wir werden auch Folgen a_0, a_1, a_2, \dots oder auch a_5, a_6, \dots betrachten. Nun führen wir den Begriff des **Grenzwertes** einer Folge ein:

Definition 1.4.2 *Eine Folge $(a_n)_n$ komplexer Zahlen heißt **konvergent gegen** $a \in \mathbb{C}$, wenn es zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$ gilt:*

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Man bezeichnet dann a als **Grenzwert** der Folge $(a_n)_n$ und schreibt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

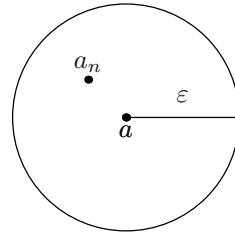
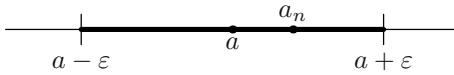
Wir schreiben dafür auch $a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$.

Eine Folge $(a_n)_n$ heißt **konvergent**, wenn es ein $a \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $(a_n)_n$ gegen a konvergiert. Andernfalls heißt sie **divergent**. Mit dem Begriff der ε -Umgebung $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x - a| < \varepsilon\}$ von a kann man die Konvergenz so formulieren: $(a_n)_n$ konvergiert genau dann gegen a , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ gibt mit

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ für } n \geq N(\varepsilon).$$

Jede beliebige Umgebung von a enthält eine ε -Umgebung; somit gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ genau dann, wenn zu jeder Umgebung U von a ein Index $N(U) \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a_n \in U \text{ für } n \geq N(U).$$



Nun zeigen wir, dass eine Folge höchstens einen Grenzwert besitzt:

Hilfssatz 1.4.3 Wenn die Folge $(a_n)_n$ gegen a und gegen b konvergiert, so folgt $a = b$.

Beweis. Wenn $a \neq b$ ist, so setzen wir $\varepsilon := \frac{|b-a|}{2}$; dann existiert ein $N_1(\varepsilon)$ und ein $N_2(\varepsilon)$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für } n \geq N_1(\varepsilon), \quad |a_n - b| < \varepsilon \text{ für } n \geq N_2(\varepsilon).$$

Für $n = N_1(\varepsilon) + N_2(\varepsilon)$ ist dann

$$|b - a| = |(b - a_n) + (a_n - a)| \leq |b - a_n| + |a_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = |b - a|,$$

also wäre $|b - a| < |b - a|$. □

Wir erläutern den Konvergenzbegriff an einigen Beispielen:

Beispiel 1.4.4 Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Zum Beweis verwenden wir den Satz von Eudoxos 1.2.7: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$. Für $n \geq N(\varepsilon)$ ist dann $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$. ■

Beispiel 1.4.5 Es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

denn $|\frac{n+1}{n} - 1| = \frac{1}{n}$ und nach dem vorhergehenden Beispiel existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ mit $\frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$; für $n \geq N(\varepsilon)$ ist dann $|\frac{n+1}{n} - 1| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$. ■

Beispiel 1.4.6 Die Folge $((-1)^n)$ ist divergent.

Denn aus der Konvergenz würde folgen, dass ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass es zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $N(\frac{1}{2})$ gibt mit $|(-1)^n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\frac{1}{2})$. Für $n \geq N(\frac{1}{2})$ wäre dann

$$2 = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| \leq |(-1)^{n+1} - a| + |(-1)^n - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

■

Beispiel 1.4.7 Wenn man die Folge (a_n) mit

$$a_n := \frac{8n^2 - 2n + 5}{3n^2 + 7n + 1}$$

untersuchen will, wird man vielleicht auf die Idee kommen, a_n so umzuformen:

$$a_n = \frac{8 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{7}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

Dann wird man vermuten, dass (a_n) gegen $\frac{8}{3}$ konvergiert; es dürfte aber nicht leicht sein, zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ explizit so anzugeben, dass für $n \geq N(\varepsilon)$ gilt:

$$\left| \frac{8n^2 - 2n + 5}{3n^2 + 7n + 1} - \frac{8}{3} \right| < \varepsilon.$$

■

Es ist daher zweckmäßig, Rechenregeln für Grenzwerte herzuleiten. Es gilt:

Satz 1.4.8 (Rechenregeln) *Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen in \mathbb{C} und $c \in \mathbb{C}$. Dann sind auch die Folgen $(a_n + b_n)_n$, $(c \cdot a_n)_n$, $(a_n \cdot b_n)_n$ konvergent und es gilt:*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) &= c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right). \end{aligned}$$

Wenn außerdem $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ ist, dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für $n \geq n_0$ und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Beweis. Wir beweisen nur die erste Aussage: Sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N_1(\frac{\varepsilon}{2})$ und $N_2(\frac{\varepsilon}{2})$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } n \geq N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } n \geq N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Setzt man $N(\varepsilon) := \max\{N_1(\frac{\varepsilon}{2}), N_2(\frac{\varepsilon}{2})\}$, so ist für $n \geq N(\varepsilon)$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und damit ist gezeigt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

□

Insbesondere gilt:

Satz 1.4.9 *Eine Folge komplexer Zahlen $(z_n)_n$, $z_n = x_n + iy_n$, konvergiert genau dann gegen $c = a + ib \in \mathbb{C}$, wenn $(x_n)_n$ gegen a und $(y_n)_n$ gegen b konvergiert.*

Definition 1.4.10 Eine Folge (a_n) heißt beschränkt, wenn eine reelle Zahl M existiert mit

$$|a_n| \leq M \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Hilfssatz 1.4.11 Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis. Sei (a_n) konvergent, $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Dann existiert zu $\varepsilon = 1$ ein Index $N(1)$ mit $|a_n - a| < 1$ für $n \geq N(1)$, also

$$|a_n| < |a| + 1 \text{ für } n \geq N(1).$$

Setzt man

$$M := \max\{|a_1|, \dots, |a_{N(1)-1}|, |a| + 1\}$$

so folgt $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Von grundlegender Bedeutung ist der Begriff der Cauchy-Folge (AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789-1857)):

Definition 1.4.12 Eine Folge $(a_n)_n$ in \mathbb{C} heißt **Cauchy-Folge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$, $k \geq N(\varepsilon)$ gilt:

$$|a_n - a_k| < \varepsilon.$$

Zunächst zeigen wir:

Satz 1.4.13 Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Wenn (a_n) gegen a konvergiert, so existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N(\frac{\varepsilon}{2})$. Für $n, k \geq N(\frac{\varepsilon}{2})$ ist dann

$$|a_n - a_k| \leq |a_n - a| + |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Nun behandeln wir Aussagen über reelle Folgen:

Satz 1.4.14 Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen in \mathbb{R} und es gelte $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

Beweis. Wir setzen $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ und nehmen an, es sei $b < a$. Zu $\varepsilon := \frac{a-b}{2}$ existiert dann ein n mit $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$. Dann ist $b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n$, also $b_n < a_n$; dies widerspricht der Voraussetzung. □
Daraus folgt

Satz 1.4.15 Sei $(x_n)_n$ eine konvergente Folge in \mathbb{R} und $a \leq x_n \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b.$$

Konvergenzkriterien

Wir leiten zunächst Konvergenzkriterien für reelle Folgen her.

Wir benötigen nun den Begriff der monotonen Folge: Eine reelle Folge $(a_n)_n$ heißt *monoton wachsend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n \leq a_{n+1}$$

also $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$;

sie heißt *streng monoton wachsend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n < a_{n+1}.$$

Analog heißt $(a_n)_n$ *monoton fallend*, falls $a_n \geq a_{n+1}$ gilt; sie heißt *streng monoton fallend*, falls $a_n > a_{n+1}$ ist ($n \in \mathbb{N}$).

Eine Folge heißt *monoton*, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} oder \mathbb{C} und ist $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so heißt $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_n$.

Ist zum Beispiel $n_k := 2k$, so erhält man die Teilfolge $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$, also die Folge a_2, a_4, a_6, \dots . Es gilt:

Hilfssatz 1.4.16 *Jede reelle Folge $(a_n)_n$ enthält eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Wir nennen ein Folgenglied a_s eine *Spitze*, wenn $a_s \geq a_n$ für alle $n \geq s$ ist. Wenn es unendlich viele Spitzen a_{s_1}, a_{s_2}, \dots gibt ($s_1 < s_2 < \dots$), so ist nach Definition der Spitze

$$a_{s_1} \geq a_{s_2} \geq a_{s_3} \geq \dots$$

und daher bildet die Folge der Spitzen eine monoton fallende Teilfolge. Wenn es keine oder nur endlich viele Spitzen gibt, so existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq n_1$ kein a_n eine Spitze ist. Weil a_{n_1} keine Spitze ist, existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 > n_1$ und $a_{n_1} < a_{n_2}$.

Weil a_{n_2} keine Spitze ist, gibt es ein n_3 mit $n_3 > n_2$ und $a_{n_2} < a_{n_3}$; auf diese Weise erhält man eine streng monoton wachsende Teilfolge $a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < \dots$. \square

Nun beweisen wir ein erstes Konvergenzkriterium.

Satz 1.4.17 *Jede beschränkte monotone Folge in \mathbb{R} ist konvergent.*

Beweis. Wir führen den Beweis für eine monoton wachsende Folge $a_n \leq a_{n+1}$. Nach Voraussetzung ist die Menge $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt; aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt, dass das Supremum

$$s := \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$$

existiert. Dann ist $a_n \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so ist $s - \varepsilon$ keine obere Schranke von $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ und daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $s - \varepsilon < a_N$. Wegen der Monotonie der Folge ist $a_N \leq a_n$ für $n \geq N$ und daher

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s,$$

also $|a_n - s| < \varepsilon$ für $n \geq N$. Somit ist gezeigt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$. \square

Aus 1.4.16 und 1.4.17 folgt der Satz von Bolzano-Weierstraß (BERNARD BOLZANO (1781-1848), KARL WEIERSTRASS (1815-1897)):

Satz 1.4.18 (Satz von Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Folge in \mathbb{R} enthält eine konvergente Teilfolge.*

Wir behandeln nun wieder Folgen in \mathbb{C} und zeigen, dass diese Aussage auch dafür gilt:

Satz 1.4.19 (Satz von Bolzano-Weierstraß in \mathbb{C}) *Jede beschränkte Folge in \mathbb{C} enthält eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Es sei $(z_n)_n$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen $z_n = x_n + iy_n$. Die Folge $(x_n)_n$ ist ebenfalls beschränkt und enthält somit eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Wählt man aus der beschränkten Folge $(y_{n_k})_k$ eine konvergente Teilfolge $(y_{n_{k_j}})_j$ aus, so erhält man eine konvergente Teilfolge $(x_{n_{k_j}} + iy_{n_{k_j}})_j$ von $(z_n)_n$. \square

Wenn eine Teilfolge von $(z_n)_n$ gegen p konvergiert, so heißt p ein Häufungspunkt oder auch eine Häufungsstelle von $(z_n)_n$; daher heißt dieser Satz auch das **Häufungsstellenprinzip von Bolzano-Weierstraß**. Es gilt auch im \mathbb{R}^n , aber nicht mehr im Unendlich-dimensionalen. Wir gehen darauf in 15.6 ein.

Nun können wir das wichtige Cauchysche Konvergenzkriterium beweisen: Jede Cauchy-Folge ist konvergent:

Satz 1.4.20 (Cauchysches Konvergenzkriterium) *Eine (reelle oder komplexe) Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass jede Cauchy-Folge $(a_n)_n$ in \mathbb{C} konvergent ist. Zunächst zeigt man, dass jede Cauchy-Folge $(a_n)_n$ beschränkt ist. Es gibt nämlich zu $\varepsilon = 1$ ein $N(1)$ mit $|a_n - a_k| < 1$ für alle $n, k \geq N(1)$, also ist $|a_n - a_{N(1)}| < 1$ oder $|a_n| < |a_{N(1)}| + 1$ für $n \geq N(1)$ und wie im Beweis von 1.4.11 folgt daraus die Beschränktheit von (a_n) .

Nach 1.4.19 enthält $(a_n)_n$ eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen ein a konvergiert. Wir zeigen, dass die Folge (a_n) gegen a konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben; dann gibt es, weil (a_n) eine Cauchy-Folge ist, ein $N(\frac{\varepsilon}{2})$ mit $|a_n - a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n, k \geq N(\frac{\varepsilon}{2})$. Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ gibt es ein k mit $n_k \geq N(\frac{\varepsilon}{2})$ und $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für alle n mit $n \geq N(\frac{\varepsilon}{2})$ ist dann

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit ist das Cauchysche Konvergenzkriterium bewiesen. \square

Wir behandeln noch ein Beispiel für eine konvergente Folge; dabei ergibt sich, dass für jede positive reelle Zahl a die *Quadratwurzel* \sqrt{a} existiert.

Beispiel 1.4.21 Sei $a > 0$; wir geben eine Folge (x_n) an, die gegen \sqrt{a} konvergiert. Wir wählen $x_0 > 0$ beliebig, setzen $x_1 := \frac{1}{2}(x_0 + \frac{a}{x_0})$, $x_2 := \frac{1}{2}(x_1 + \frac{a}{x_1})$ und, wenn x_n bereits definiert ist, sei

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Wir beweisen, dass die Folge (x_n) gegen eine positive reelle Zahl b mit

$$b^2 = a$$

konvergiert. Dazu zeigen wir zuerst die Monotonie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x_n > 0$ und

$$\begin{aligned} x_n^2 - a &= \frac{1}{4} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right)^2 - a = \frac{1}{4} \left(x_{n-1}^2 + 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2} - 4a \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(x_{n-1}^2 - 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2} \right) = \frac{1}{4} \left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}} \right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

daher $x_n^2 - a \geq 0$ und $x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - a) \geq 0$; somit

$$x_n \geq x_{n+1}.$$

Die Folge (x_n) ist also monoton fallend und somit ist $(\frac{a}{x_n})$ monoton wachsend. Aus $a \leq x_n^2$ folgt $\frac{a}{x_n} \leq x_n$, somit

$$\frac{a}{x_1} \leq \dots \leq \frac{a}{x_n} \leq x_n \leq \dots \leq x_1.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $0 < \frac{a}{x_1} \leq x_n$, daher existiert

$$b := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

und es gilt $b > 0$. Aus den Rechenregeln 1.4.8 folgt

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right),$$

somit $b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right)$ also $2b^2 = b^2 + a$ und $b^2 = a$.

Damit ist gezeigt: Zu jedem $a > 0$ existiert ein $b > 0$ mit $b^2 = a$. Die Zahl b ist eindeutig bestimmt, denn aus $c > 0$, $c^2 = a$, folgt

$$0 = b^2 - c^2 = (b + c) \cdot (b - c)$$

und wegen $b + c > 0$ ist $b - c = 0$, also $b = c$.

Zu $a \geq 0$ existiert also genau ein $b \geq 0$ mit $b^2 = a$ und man definiert nun

$$\sqrt{a} := b,$$

\sqrt{a} heißt die Quadratwurzel von a .

Dies läßt sich verallgemeinern: Ist $k \in \mathbb{N}$ und $a > 0$, so existiert genau ein $b > 0$ mit $b^k = a$ und man setzt $\sqrt[k]{a} := b$.

■

1.5 Reihen

Bei der Behandlung mathematischer Probleme stößt man häufig auf Ausdrücke der Form

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots,$$

etwa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad \text{oder} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots.$$

Derartige Ausdrücke bezeichnet man als Reihen (reeller oder komplexer Zahlen). Man führt die Theorie der Reihen zurück auf die der Folgen und fasst den Ausdruck $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ auf als Folge der „Partialsummen“

$$a_0, \quad a_0 + a_1, \quad a_0 + a_1 + a_2, \quad \dots$$

(Wir betrachten häufig Reihen, die mit a_0 beginnen). Dies wird folgendermaßen präzisiert: Es sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen, $n \in \mathbb{N}_0$, dann heißt

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

die zu $(a_n)_n$ gehörende n -te *Partialsumme*.

Die Folge der Partialsummen $(s_n)_n$ heißt die durch $(a_n)_n$ gegebene Reihe; man bezeichnet die Folge $(s_n)_n$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Definition 1.5.1 Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ heißt **konvergent**, wenn die Folge $(s_n)_n$ konvergiert; den Grenzwert von $(s_n)_n$ bezeichnet man ebenfalls mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Es gilt also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ gibt mit

$$|a_0 + \dots + a_n - s| < \varepsilon \text{ für } n \geq N(\varepsilon).$$

Aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Folgen leiten wir nun ein entsprechendes Kriterium für Reihen her. Man bezeichnet eine Reihe als **Cauchyreihe**, wenn die Folge ihrer Partialsummen eine Cauchyfolge ist.

Satz 1.5.2 (Cauchysches Konvergenzkriterium) Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ komplexer Zahlen ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m \geq N(\varepsilon)$ gilt:

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon.$$

Beweis. Die Folge $(s_n)_n$ ist genau dann konvergent, wenn es zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle Indizes $n, m \geq N(\varepsilon)$ gilt: $|s_n - s_m| < \varepsilon$. Für $n \geq m \geq N(\varepsilon) + 1$ ist dann $|s_n - s_{m-1}| < \varepsilon$ und aus

$$s_n - s_{m-1} = \sum_{k=m}^n a_k$$

folgt die Behauptung. □

Für $n = m$ ist $\sum_{k=n}^n a_k = a_n$ und somit ergibt sich

Satz 1.5.3 Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Aus den Rechenregeln für Folgen erhält man Rechenregeln für Reihen:

Satz 1.5.4 (Rechenregeln) Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent, und ist $c \in \mathbb{C}$, so sind auch die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ und $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$ konvergent und

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Wir behandeln nun ein besonders wichtiges Beispiel:

Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Zuerst zeigen wir

Hilfssatz 1.5.5 Ist $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$.

Beweis. Es ist $|z|^n \geq |z|^{n+1}$. Die Folge $(|z|^n)_n$ ist also monoton fallend und beschränkt und daher konvergent. Sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n$. Es gilt

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^{n+1} = |z| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = |z| \cdot a$$

und aus $a = |z| \cdot a$ und $|z| < 1$ folgt $a = 0$. □

Nun können wir beweisen:

Satz 1.5.6 (Geometrische Reihe) Für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Für $|z| \geq 1$ divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Beweis. Setzt man $s_n := \sum_{k=0}^n z^k$, so ist

$$(1-z)s_n = \sum_{k=0}^n z^k - \sum_{k=1}^{n+1} z^k = 1 - z^{n+1}.$$

Für $z \neq 1$ ist daher

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

und für $|z| < 1$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1} = 0$, also

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

Für $|z| \geq 1$ ist $|z^n| \geq 1$ und daher ist $(z^n)_n$ keine Nullfolge, also ist nach 1.5.3 die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ für $|z| \geq 1$ divergent. \square

Wir notieren noch:

Satz 1.5.7 Für $|z| < 1$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}.$$

Beispiel 1.5.8 Setzt man in der geometrischen Reihe $z = \frac{1}{2}$, so ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

also

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

■

Wir führen nun einen schärferen Konvergenzbegriff ein:

Definition 1.5.9 Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{C}$, heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium ergibt sich, dass jede absolut konvergente Reihe auch konvergiert.

Wir geben nun weitere wichtige Konvergenzkriterien an:

Satz 1.5.10 (Majorantenkriterium) Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen; wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n| \leq b_n$ und wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ existiert nach 1.5.2 ein $N(\varepsilon)$, so dass für $n \geq m \geq N(\varepsilon)$ gilt: $|\sum_{k=m}^n b_k| < \varepsilon$ und aus $|\sum_{k=m}^n a_k| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| \leq \sum_{k=m}^n b_k < \varepsilon$ für $n \geq m \geq N(\varepsilon)$ folgt mit 1.5.2 die Behauptung. \square

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit den angegebenen Eigenschaften nennt man **Majorante** zu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Daraus ergibt sich ein weiteres Konvergenzkriterium:

Satz 1.5.11 (Quotientenkriterium) Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn ein $q \in \mathbb{R}$ existiert mit $0 < q < 1$ und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Beweis. Es ist $|a_1| \leq |a_0| \cdot q$, $|a_2| \leq |a_1| \cdot q \leq |a_0| \cdot q^2$ und

$$|a_{n+1}| \leq |a_n| \cdot q \leq \dots \leq |a_0| \cdot q^{n+1}.$$

Daher ist $|a_0| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ eine konvergente Majorante zu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. \square

Wir beweisen noch das Leibnizsche Konvergenzkriterium für alternierende Reihen (GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716))

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

Satz 1.5.12 (Leibnizsches Konvergenzkriterium) Es sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Folge in \mathbb{R} mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

und es gilt

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n - \sum_{n=0}^k (-1)^n a_n \right| \leq a_{k+1}.$$

Man kann also den Fehler, der entsteht, wenn man die Reihe bei a_k abbricht, durch a_{k+1} abschätzen.

Beweis Wir setzen $s_k := \sum_{n=0}^k (-1)^n a_n$; dann ist $s_{2k+2} \geq s_{2k+1}$,

$$s_{2k+2} - s_{2k} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0; \quad s_{2k+1} - s_{2k-1} = -a_{2k+1} + a_{2k} \geq 0.$$

Daher ist

$$s_1 \leq s_3 \leq \dots \leq s_{2k-1} \leq s_{2k+1} \leq s_{2k+2} \leq s_{2k} \leq \dots \leq s_2 \leq s_0.$$

Die Folgen $(s_{2k+1})_k$ und $(s_{2k})_k$ sind also monoton und beschränkt und daher konvergent; wegen $s_{2k+2} - s_{2k+1} = a_{2k+2}$ und $\lim a_n = 0$ konvergieren sie gegen den gleichen Grenzwert s und s liegt zwischen s_{k+1} und s_k . Daraus folgt $|s - s_k| \leq a_{k+1}$. \square

Es soll noch kurz die Multiplikation zweier Reihen behandelt werden. Dazu erinnern wir daran, dass man Summen so ausmultipliziert:

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_r) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots + a_m b_r.$$

Für Reihen gilt der folgende Satz, den wir ohne Beweis angeben (ein Beweis findet sich in [6],[24]):

Satz 1.5.13 Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ seien absolut konvergent. Setzt man

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0,$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ebenfalls absolut und es gilt:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Bei Konvergenzuntersuchungen sollte man beachten, dass es das Konvergenzverhalten einer Folge oder Reihe nicht beeinflusst, wenn man endlich viele Glieder abändert. Daher kann man zum Beispiel das Quotientenkriterium verallgemeinern:

Wenn zu einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ein q mit $0 < q < 1$ und ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a_n \neq 0 \text{ für } n \geq m \text{ und } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \text{ für } n \geq m, \text{ so konvergiert } \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Wir erläutern dies an einem Beispiel:

Beispiel 1.5.14 Für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

konvergent. Dies ergibt sich so: Sei $0 < |z| < 1$; dann wählt man ein $q \in \mathbb{R}$ mit $|z| < q < 1$. Nun wenden wir das Quotientenkriterium auf $a_n := n z^{n-1}$ an. Es ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n+1}{n} \cdot |z| = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot |z|.$$

Weil $\frac{q}{|z|} > 1$ ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $1 + \frac{1}{m} \leq \frac{q}{|z|}$. Daher ist für $n \geq m$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot |z| \leq q$$

und daraus folgt die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$. Den Grenzwert können wir noch nicht berechnen; in 4.1.3 zeigen wir, dass man konvergente Potenzreihen gliedweise differenzieren darf. Damit ergibt sich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

■

Wir behandeln nun weitere wichtige Beispiele. Zunächst eine Definition: Es sei $0! := 1$ und für $n \in \mathbb{N}$ setzt man

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Beispiel 1.5.15 Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \dots$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$. Dies beweist man mit dem Quotientenkriterium 1.5.11. Es sei $z \in \mathbb{C}$; $z \neq 0$; setzt man $a_n := \frac{z^n}{n!}$, so ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{z^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1}.$$

Wählt man ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2 \cdot |z|$, so ist für $n \geq k$:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|z|}{n+1} \leq \frac{|z|}{k} \leq \frac{1}{2}$$

und nach dem Quotientenkriterium konvergiert $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ und daher auch $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ heißt die Exponentialreihe, man bezeichnet sie mit e^z oder $\exp(z)$:

$$\exp(z) := e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Die Exponentialfunktion $z \mapsto e^z$ untersuchen wir in 4.2. ■

Beispiel 1.5.16 Die sogenannte harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ist divergent. Um dies zu zeigen, schätzen wir die Partialsummen $s_k := \sum_{n=1}^k \frac{1}{n}$ so ab:

$$\begin{aligned} s_2 &= 1 + \frac{1}{2}, \\ s_4 &= s_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \geq s_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = s_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}, \\ s_8 &= s_4 + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) \geq s_4 + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right) = s_4 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}, \\ s_{16} &= s_8 + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) \geq s_8 + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) = s_8 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2}. \end{aligned}$$

Auf diese Weise zeigt man

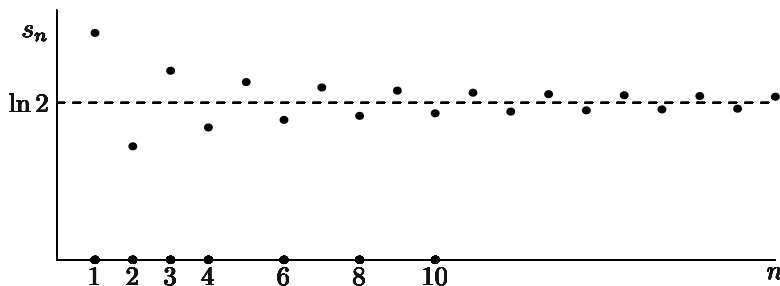
$$s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2},$$

daher ist die Folge (s_k) divergent, somit divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. ■

Beispiel 1.5.17 Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ist nach dem Leibniz-Kriterium 1.5.12 konvergent. Den Grenzwert können wir noch nicht ausrechnen; in 6.2.10 werden wir zeigen, dass diese Reihe gegen $\ln 2$ konvergiert.



Beispiel 1.5.18 Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ist konvergent; um dies zu zeigen, geben wir eine konvergente Majorante an: Für $n \geq 2$ ist

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$$

und die k -te Partialsumme ($k \geq 2$)

$$s_k = \sum_{n=2}^k \frac{1}{n(n-1)}$$

lässt sich folgendermaßen berechnen: Für $n \geq 2$ ist

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n \cdot (n-1)}$$

und daher

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=2}^k \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^k \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=2}^k \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^k \frac{1}{n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k-1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k} \right) = 1,$$

also

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1.$$

Daher ist diese Reihe eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und nach dem Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Aus dem Majorantenkriterium folgt weiter, dass für jedes $s \in \mathbb{N}$ mit $s \geq 2$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergent ist. Es ist ziemlich schwierig, den Grenzwert von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ zu bestimmen; für ungerades s ist keine Formel bekannt; für gerades s werden wir in 14.11.9 den Grenzwert bestimmen.

■

1.6 Vollständige Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Wenn man zeigen will, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, geht man häufig so vor: Man zeigt, dass $A(1)$ richtig ist und dass aus $A(1)$ die Aussage $A(2)$ folgt. Dann zeigt man: Aus $A(2)$ folgt $A(3)$ „und so weiter“, d.h. aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$. Diese Schlussweise wird präzisiert im Beweisprinzip der vollständigen Induktion:

Satz 1.6.1 (Vollständige Induktion) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage; es gelte:

(1) $A(1)$ ist richtig.

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte: wenn $A(n)$ richtig ist, dann auch $A(n+1)$;

dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Bemerkung. Man kann die Bedingung (2) auch ersetzen durch

(2') Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte: wenn $A(j)$ für alle $j \leq n$ richtig ist, dann auch $A(n+1)$.

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion folgt aus einer grundlegenden Eigenschaft der natürlichen Zahlen: Wenn für eine Teilmenge M von \mathbb{N} gilt: $1 \in M$ und aus $n \in M$ folgt: $n+1 \in M$, so ist $M = \mathbb{N}$.

Wir erläutern die vollständige Induktion zunächst an einem einfachen Beispiel; anschließend beweisen wir mit Hilfe der vollständigen Induktion den binomischen Lehrsatz.

Beispiel 1.6.2 Wir beweisen mit vollständiger Induktion die Formel

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

Für $n = 1$ steht auf der linken Seite dieser Formel $\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 1$ und rechts $1^2 = 1$; also ist $A(1)$ richtig. Nun sei $A(n)$ richtig, also $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$. Zu zeigen ist, dass auch $A(n+1)$ richtig ist, nämlich $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Damit ist $A(n+1)$ hergeleitet und aus 1.6.1 folgt, dass $A(n)$ für alle n richtig ist. ■

Um die vollständige Induktion zu erläutern, behandeln wir zuerst den binomischen Lehrsatz und anschließend Polynome.

Der binomische Lehrsatz

Bekannt sind die Formeln

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x + y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.\end{aligned}$$

Wir suchen eine allgemeine Formel für $(x + y)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dazu definiert man:

Definition 1.6.3 Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ sei

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}.$$

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ heißen **Binomialkoeffizienten**.

Wir zeigen zuerst

Hilfssatz 1.6.4 Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ und $k = 1, \dots, n-1$ gilt

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}.$$

Außerdem ist

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \\ &= \frac{(n-1)! \cdot k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)! \cdot (n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} \cdot (k + n - k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

□

Auf die Bedeutung dieses Hilfssatzes gehen wir später ein. Nun zeigen wir:

Satz 1.6.5 (Binomischer Lehrsatz) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\boxed{(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k}$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang

$$(x + y)^1 = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}y$$

ist offensichtlich richtig. Nun setzen wir voraus, dass

$$(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-1-k} y^k$$

gilt. Multipliziert man diese Gleichung mit $x+y$, so erhält man

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= (x+y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-1-k} y^k = \\ &= x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-1-k} y^k + y \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-1-k} y^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-(k+1)} y^{k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-k} y^k + \sum_{l=1}^n \binom{n-1}{l-1} x^{n-l} y^l = \\ &= \binom{n-1}{0} x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] x^{n-k} y^k + \binom{n-1}{n-1} y^n. \end{aligned}$$

Es ist $\binom{n-1}{0} = 1 = \binom{n}{0}$ und $\binom{n-1}{n-1} = 1 = \binom{n}{n}$; der erste Summand ist also $\binom{n}{0} x^n$ und der letzte ist $\binom{n}{n} y^n$. Für die in der Mitte stehende Summe ist nach Hilfssatz 1.6.4

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k};$$

und daher ergibt sich

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + \binom{n}{n} y^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Damit ist der binomische Lehrsatz bewiesen. \square

Nun soll gezeigt werden, wie man Hilfssatz 1.6.4 zur Berechnung der Binomialkoeffizienten verwenden kann.

Wählt man eine natürliche Zahl $n > 1$ und schreibt die zu $n-1$ gehörenden Binomialkoeffizienten in eine Zeile, so erhält man durch Addition der nebeneinander stehenden Koeffizienten $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ den Koeffizienten $\binom{n}{k}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{k-1} & \binom{n-1}{k} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \\ & & & \swarrow & \searrow & & \\ & & & \binom{n}{k} & & & \end{array}$$

Beginnt man mit $\binom{0}{0} = 1$, so ist die nächste Zeile $\binom{1}{0} = 1$, $\binom{1}{1} = 1$, und man erhält auf diese Weise das **Pascalsche Dreieck** (BLAISE PASCAL (1623-1662)):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & & 1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
 \end{array}$$

Die vorletzte Zeile liefert z.B. die Formel

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

Wir zeigen noch:

Satz 1.6.6 Für $n, k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq n$ gilt:

Die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge M ist $\binom{n}{k}$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über n . Der Induktionsanfang $n = 0$ ist klar; für $n = 0$ ist $M = \emptyset$.

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ und die Aussage sei für $n - 1$ richtig. Ist dann M eine Menge mit n Elementen, so wählen wir ein $p \in M$.

Die Anzahl der k -elementigen Teilmengen $A \subset M$ mit $p \notin A$ ist wegen $A \subset M \setminus \{p\}$ nach Induktionsannahme gleich $\binom{n-1}{k}$.

Alle k -elementigen Teilmengen A von M mit $p \in A$ erhält man so: man wählt eine $(k-1)$ -elementige Teilmenge von $M \setminus \{p\}$ und fügt p hinzu; die Anzahl der $(k-1)$ -elementigen Teilmengen von $M \setminus \{p\}$ ist $\binom{n-1}{k-1}$.

Die Anzahl aller k -elementigen Teilmengen von M ist also $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, und dies ist nach 1.6.4 gleich $\binom{n}{k}$. \square

Polynome

Ist

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

ein Polynom mit Koeffizienten $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$, und ist $a_n \neq 0$, so ist $gr(p) := n$ der Grad von p . Es gilt $gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q)$.

Nun zeigen wir:

Satz 1.6.7 Ist p ein Polynom n -ten Grades, $n > 1$, und ist c eine Nullstelle von p , so existiert ein Polynom q vom Grad $(n - 1)$ mit

$$p(X) = (X - c)q(X).$$

Beweis. Zunächst sei $p(c)$ beliebig; wir zeigen, dass $p(X) - p(c)$ durch $X - c$ teilbar ist. Für den Spezialfall $p(X) = X^n$ ist dies klar: Setzt man $g_1(X) := 1$ und

$$g_n(X) := X^{n-1} + cX^{n-2} + \dots + c^{n-2}X + c^{n-1} \quad \text{für } n \geq 2,$$

so gilt $(X - c)g_n(X) = X^n - c^n$.

Ist nun $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$, so ist

$$p(X) - p(c) = \sum_{k=1}^n a_k (X^k - c^k) = (X - c) \sum_{k=1}^n a_k g_k(X) = (X - c)q(X)$$

$$\text{mit } q(X) := \sum_{k=1}^n a_k g_k(X).$$

Falls $p(c) = 0$ ist, folgt die Aussage des Satzes. \square

Die Koeffizienten b_k von $q(X) = b_{n-1} X^{n-1} + b_{n-2} X^{n-2} + \dots + b_1 X + b_0$ und $p(c)$ erhält man folgendermaßen: Aus

$$a_n X^n + \dots + a_0 - p(c) = (X - c)(b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_0)$$

folgt $a_n = b_{n-1}$, $a_{n-1} = b_{n-2} - cb_{n-1}$, \dots , $a_1 = b_0 - cb_1$, $a_0 - p(c) = -cb_0$,

also $b_{n-1} = a_n$, $b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}$, \dots , $b_0 = a_1 + cb_1$, $p(c) = a_0 + cb_0$

Das Hornersche Schema

Die Berechnung von b_{n-1}, \dots, b_0 und $p(c)$ geschieht nach dem Hornerschen Schema (WILLIAM HORNER (1786-1837)):

Man schreibt die a_n, \dots, a_0 in die erste Zeile; es ist $b_{n-1} = a_n$; dies multipliziert man mit c , addiert es zu a_{n-1} und erhält b_{n-2} . Dann multipliziert man b_{n-2} mit c , addiert $c \cdot b_{n-2}$ zu a_{n-2} und erhält b_{n-3} . Auf diese Weise errechnet man b_{n-1}, \dots, b_0 und zuletzt $p(c)$.

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	\dots	a_1	a_0
	$c \cdot b_{n-1}$	$c \cdot b_{n-2}$	$c \cdot b_{n-3}$	\dots	$c \cdot b_1$	$c \cdot b_0$
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	\dots	b_0	$p(c)$

Beispiel 1.6.8 Es sei $p(X) = X^4 - X^3 - 2X - 4$ und $c = 2$. Man erhält

1	-1	0	-2	-4
	2	2	4	4
1	1	2	2	0

Es ergibt sich $q(X) = X^3 + X^2 + 2X + 2$.

■

Daraus folgt:

Satz 1.6.9 Ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat höchstens n Nullstellen.

Beweis. Wir beweisen den Satz mit vollständiger Induktion.

Für $n = 1$ ist $p(X) = a_1X + a_0$ mit $a_1 \neq 0$ und dafür ist die Aussage offensichtlich richtig. Nun sei $n \geq 2$ und der Satz sei für Polynome vom Grad $\leq (n - 1)$ richtig. Ist dann p ein Polynom vom Grad n und ist c eine Nullstelle von p , so hat man $p(X) = (X - c)q(X)$ mit $\deg q = n - 1$. Aus $p(c') = 0$ und $c \neq c'$ folgt $q(c') = 0$. Weil q höchstens $n - 1$ Nullstellen hat, folgt: p hat höchstens n Nullstellen. \square

In 14.7.3 zeigen wir, dass in \mathbb{C} jedes Polynom mindestens eine Nullstelle besitzt; durch Induktion ergibt sich daraus:

Satz 1.6.10 (Fundamentalsatz der Algebra) *Ist*

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$; $a_n \neq 0$, so existieren $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ mit

$$p(X) = a_n \cdot (X - c_1) \cdot \dots \cdot (X - c_n)$$

Mit paarweise verschiedenen Nullstellen c_1, \dots, c_m ist

$$p(X) = a_n (X - c_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (X - c_m)^{r_m}$$

dabei ist $r_k \in \mathbb{N}$ die Vielfachheit der Nullstelle c_k .

Beweis Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar; nun sei $n \geq 2$ und der Satz sei für Polynome vom Grad $\leq n - 1$ richtig. Ist dann p ein Polynom vom Grad n , so existiert nach 14.7.3 ein $c_1 \in \mathbb{C}$ mit $p(c_1) = 0$. Dann ist $p(X) = (X - c_1)q(X)$ und nach Induktionsannahme gibt es $c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ mit $q(X) = a_n \cdot (X - c_2) \cdot \dots \cdot (X - c_n)$, also $p(X) = a_n \cdot (X - c_1) \cdot (X - c_2) \cdot \dots \cdot (X - c_n)$. \square

Polynome 3. Grades

Die Nullstellen eines Polynoms 2. Grades $aX^2 + bX + c$ kann man bekanntlich durch

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

darstellen.

Schon vor 500 Jahren beschäftigten sich Mathematiker wie SCIPIONE DEL FERRO (1465-1526), NICOLA TARTAGLIA (1499/1500-1557), GIROLAMO CARDANO (1501-1576) mit der Lösung von Gleichungen 3. Grades. Dies soll kurz geschildert werden; eine ausführliche Darstellung findet man in [9].

Zunächst bringt man $X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, durch die Substitution $\tilde{X} = X + \frac{a_2}{3}$, auf die Form

$$X^3 + pX + q.$$

Nun macht man für die Nullstellen den Ansatz $x = u + v$;

es ist $x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$ und daher

$$x^3 + pX + q = (u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v).$$

Man sucht nun u, v so, dass

$$u^3 + v^3 = -q, \quad 3uv = -p$$

ist. Es ist

$$\left(\frac{u^3 + v^3}{2}\right)^2 - \left(\frac{u^3 - v^3}{2}\right)^2 = u^3 v^3$$

also

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{u^3 - v^3}{2}\right)^2 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3.$$

Setzt man

$$d := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

so ergibt sich

$$\frac{u^3 + v^3}{2} = -\frac{q}{2}, \quad \frac{u^3 - v^3}{2} = \sqrt{d}.$$

Daraus rechnet man u, v aus:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{d}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{d}},$$

dabei wählt man die 3. Wurzeln so, dass $uv = -\frac{p}{3}$ ist. Nun sei $\varrho = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ eine 3. Einheitswurzel; dann sind die Lösungen von $x^3 + px + q = 0$:

$$u + v; \quad \varrho u + \varrho^2 v, \quad \varrho^2 u + \varrho v.$$

Damit ergibt sich eine Formel, die nach CARDANO benannt ist:

Satz 1.6.11 (Formel von Cardano) Die Nullstellen von $x^3 + px + q$ sind

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}};$$

dabei sind die 3. Wurzeln so zu wählen, dass ihr Produkt $-\frac{p}{3}$ ist.

Auch für Polynome 4. Grades gibt es eine Formel für die Nullstellen. Dagegen hat NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) im Jahr 1826 gezeigt, dass man die Nullstellen eines allgemeinen Polynoms 5. und höheren Grades nicht durch Radikale darstellen kann.

Beispiel 1.6.12 Wir bringen ein Beispiel, das bereits von RAFFAEL BOMBELLI (1526-1572) behandelt wurde; es sollen die Nullstellen von

$$x^3 - 15x - 4$$

berechnet werden.

Es ist

$$\frac{q}{2} = -2, \quad \frac{p}{3} = -5, \quad d = -121.$$

Die Formel von Cardano liefert für die Nullstellen

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}.$$

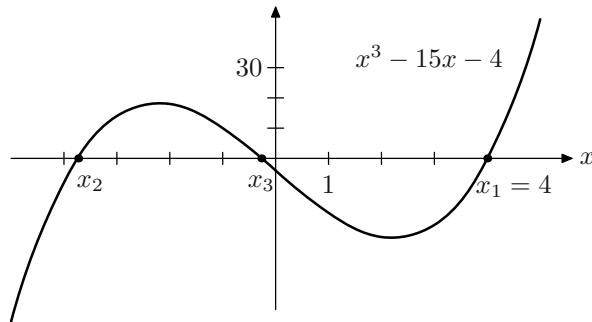
Es ist $(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11i$ und daher erhält man eine Nullstelle x_1 so:

$$x_1 = (2 + i) + (2 - i) = 4.$$

Die anderen Nullstellen sind nach der Formel von Cardano:

$$\begin{aligned} x_2 &= (2 + i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right) + (2 - i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right) = \\ &= \frac{1}{2}(-2 - \sqrt{3} + i(-1 + 2\sqrt{3})) + \frac{1}{2}(-2 - \sqrt{3} + i(1 - 2\sqrt{3})) = -2 - \sqrt{3}, \\ x_3 &= -2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

(Natürlich kann man, wenn man die Nullstelle $x_1 = 4$ kennt, x_2, x_3 auch als Nullstellen von $(x^3 - 15x - 4) : (x - 4) = x^2 + 4x + 1$ ausrechnen.)



Man erhält also bei Anwendung der Formel von Cardano die drei reellen Nullstellen nur, wenn man mit komplexen Zahlen wie $\sqrt{-121} = 11i$ rechnet. Die Tatsache, dass man bei der Berechnung reeller Nullstellen komplexe Zahlen benötigt, hat bei der Einführung komplexer Zahlen eine große Rolle gespielt.

■

Aufgaben

1.1. Zeigen Sie: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|); \quad \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

1.2. Zeigen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

(Hinweis: $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$)

1.3. Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$; dann heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}$ ein Dezimalbruch; zeigen Sie, dass jeder Dezimalbruch konvergiert.

Sei $a_n = 3$ für ungerade n und $a_n = 7$ für gerade n ; berechnen Sie den zugehörigen Dezimalbruch.

1.4. Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} \quad ?$$

1.5. Berechnen Sie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

1.6. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1), \quad (1 + 2 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3.$$

1.7. Zeigen Sie für $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^m n^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1).$$

1.8. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

1.9. Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an:

$$\frac{1}{3+2i}, \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{30}.$$

1.10. Berechnen Sie alle komplexen Nullstellen von $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$.

1.11. Bestimmen Sie mit dem Ansatz $p(X) = c_0 + c_1x + c_2x(x-1) + c_3x(x-1)(x-2)$ ein Polynom p mit

$$p(0) = 2, \quad p(1) = 0, \quad p(2) = -2, \quad p(3) = 2.$$

1.12. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}, \quad b_n := \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}, \quad c_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}.$$

Zeigen Sie, dass die Folgen (a_n) , (b_n) , (c_n) konvergent sind und den gleichen Grenzwert L besitzen. (In Aufgabe 5.7 und Beispiel 6.2.10 wird L berechnet.)

Mathematik für Physiker

Kerner, H.; von Wahl, W.

2013, XIV, 572 S. 490 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-37653-5