

Kapitel 2

Elementare Integrationsmethoden

- 2.1 Differentialgleichungen mit ‚getrennten Variablen‘
- 2.2 Differentialgleichungen vom Typ $y' = f\left(\frac{p_1x+q_1y+r_1}{p_2x+q_2y+r_2}\right)$
- 2.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung
- 2.4 BERNOULLI-Differentialgleichung
- 2.5 RICCATI-Differentialgleichung
 - Zusammenhang mit homogener linearer DGL 2. Ordnung
 - Elementare Integration bei bekannter spezieller Lösung
- 2.6 Exakte Differentialgleichungen
 - Multiplikatoren
- 2.7 CLAIRAUT-Differentialgleichung

Von ‚elementaren Integrationsmethoden‘ sprechen wir, wenn die Lösung etwa durch Aufsuchen von Stammfunktionen, durch Auflösen von Gleichungen oder mit Hilfe geeigneter Transformationen gewonnen wird.

2.1 Differentialgleichungen mit ‚getrennten Variablen‘

Wir betrachten in diesem Abschnitt Differentialgleichungen der Gestalt

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}. \quad (*)$$

Dazu machen wir die *Annahmen*:

Es seien I_1 und I_2 Intervalle, $f: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

$g: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $g(s) \neq 0$ für $s \in I_2$.

Aufgabe: Zu den „Anfangswerten“ $a \in I_1$ und $b \in I_2$ suchen wir ein Intervall $I \subset I_1$ mit $a \in I$ und eine auf I definierte Lösung y von $(*)$ mit $y(a) = b$.

Wir bezeichnen — wie schon erwähnt — diese Aufgabe (hier und analog im folgenden) als „Anfangswertaufgabe“, kurz „AWA“.

Vorweg bemerken wir:

1) Durch Variation von a und b werden *alle Lösungen* erfasst.

2) Eine Lösung von (*) ist automatisch *stetig* differenzierbar.

Die *grobe Idee* ist recht einfach: Man formt um zu $y'(t)g(y(t)) = f(t)$ und integriert: $\int_a^x y'(t)g(y(t)) dt = \int_a^x f(t) dt$. Nach Substitution $s := y(t)$ ist die linke Seite gerade $\int_{y(a)}^{y(x)} g(s) ds$. Anschließend löst man nach $y(x)$ auf.

Die *genaue Durchführung* folgt dem skizzierten Vorgehen, erfordert jedoch etwas mehr Aufwand:

Die Vorüberlegung führt zur Betrachtung der beiden Funktionen

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (x \in I_1), \quad G(y) := \int_b^y g(s) ds \quad (y \in I_2).$$

Da die Funktion g in I_2 keine Nullstellen und damit — als stetige Funktion — konstantes Vorzeichen hat, ist G *streng monoton* (streng wachsend oder streng fallend). Zudem ist G natürlich stetig differenzierbar. Für das Intervall $I_3 := G(I_2)$ gilt somit: $G: I_2 \rightarrow I_3$ ist bijektiv. So ist die Umkehrfunktion $G^{-1}: I_3 \rightarrow I_2$ stetig differenzierbar und (in gleichem Sinne) streng monoton.

Für eine auf einem Intervall $I \subset I_1$ mit $a \in I$ definierte differenzierbare Funktion $y: I \rightarrow I_2$ ist die AWA offenbar äquivalent zu

$$G(y(x)) = F(x) \text{ bzw. } y(x) = G^{-1}(F(x)) = (G^{-1} \circ F)(x) \text{ für } x \in I.$$

Es sei I_0 das ‚maximale‘ Teilintervall von I_1 mit $a \in I_0$ und $F(x) \in I_3$ für $x \in I_0$ ¹, so gilt — falls I_0 ein *echtes* Intervall ist:

$y_0 := G^{-1} \circ (F|_{I_0})$ ist eine Lösung der AWA. y_0 ist „maximale Lösung“ in dem Sinne, daß jede andere Lösung der AWA hieraus durch Einschränkung entsteht.

Wegen $a \in I$, $F(a) = 0$ und $b \in I_2$, $0 = G(b) \in I_3$ hat man stets $a \in I_0$. Jedoch kann I_0 einpunktig sein! (Man vergleiche hierzu (B1).)

Von den folgenden drei Beispielen ist das erste Routine (man vergleiche auch das unter c) in Abschnitt 1.2 skizzierte Richtungsfeld), die letzten beiden sind besonders wichtig:

(B1) $\boxed{y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0)}$

Dieses Beispiel ordnet sich mit $I_1 := \mathbb{R}$, $f(x) := -x$, $I_2 :=]0, \infty[$, $g(y) := y$ und beliebigen $a \in I_1$, $b \in I_2$ in die allgemeinen Überlegungen ein. Daher wird $2F(x) = -x^2 + a^2$, $2G(y) = y^2 - b^2$ und somit $I_3 := G(I_2) =]-\frac{1}{2}b^2, \infty[$. Aus der Äquivalenz $F(x) \in I_3$ genau dann, wenn $x^2 < a^2 + b^2$, ergibt sich $I_0 =]-r, r[$ mit $r := \sqrt{a^2 + b^2}$. Die Forderung $G(y(x)) = F(x)$ liefert $y(x)^2 - b^2 = -x^2 + a^2$, also $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ für $x \in I_0$.

¹ Vornehmer ausgedrückt: I_0 ist diejenige Zusammenhangskomponente von $F^{-1}(I_3)$, die a enthält.

Wählt man für $a \geq 0$ die Intervalle $I_1 := [a, \infty[$ und $I_2 := [b, \infty[$, dann ist — wegen $I_3 = [0, \infty[- I_0 = \{a\}$, also *einpunktig*.

$$(B2) \quad \boxed{y' = \sqrt{|y|}}$$

Wir wählen zunächst $I_1 := \mathbb{R}, I_2 :=]0, \infty[, a \in I_1$ und $b \in I_2$ beliebig und setzen $f(t) := 1$ ($t \in I_1$), $g(s) := s^{-\frac{1}{2}}$ ($s \in I_2$). Mit

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt = x - a \quad (x \in I_1),$$

$$G(y) := \int_b^y s^{-\frac{1}{2}} ds = 2(\sqrt{y} - \sqrt{b}) \quad (y \in I_2)$$

ergibt sich

$$I_3 := G(I_2) =] - 2\sqrt{b}, \infty[, \quad F(x) \in I_3 \iff x > a - 2\sqrt{b} =: \beta,$$

$$I_0 =]\beta, \infty[, \quad y_0(x) := G^{-1}(F(x)) = 1/4 (x - \beta)^2 \quad (x \in I_0).$$

Entsprechend erhält man für $I_1 := \mathbb{R}, I_2 :=]-\infty, 0[$ und $a \in I_1, b \in I_2$ mit $\alpha := a + 2\sqrt{|b|}$ auf $I_0 =]-\infty, \alpha[$ die Lösung $y_0(x) = -1/4 (x - \alpha)^2$.

Dies kann man — ohne erneute Rechnung — unmittelbar aus der ersten Überlegung erhalten; denn mit y ist offenbar die durch $v(x) := -y(-x)$ gegebene Funktion v ebenfalls Lösung. Auch aus der Symmetrie des Richtungsfeldes ist dies unmittelbar abzulesen.

Zudem liefert $y(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$) eine Lösung. (Hierzu können die obigen allgemeinen Überlegungen *nicht* herangezogen werden!)

Als *Gesamtlösung* der DGL erhält man so für $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$ (im nicht-trivialen Fall $\alpha \neq +\infty$ und $\beta \neq -\infty$):

$$y_{\alpha,\beta}(x) := \begin{cases} -\frac{1}{4}(x - \alpha)^2 & , \quad x < \alpha \\ 0 & , \quad \alpha \leq x \leq \beta \\ \frac{1}{4}(x - \beta)^2 & , \quad x > \beta \end{cases}$$

Hierzu sind nur noch die (einseitigen) Grenzübergänge von $y_{\alpha,\beta}$ und $y'_{\alpha,\beta}$ an den ‚Nahtstellen‘ zu betrachten.

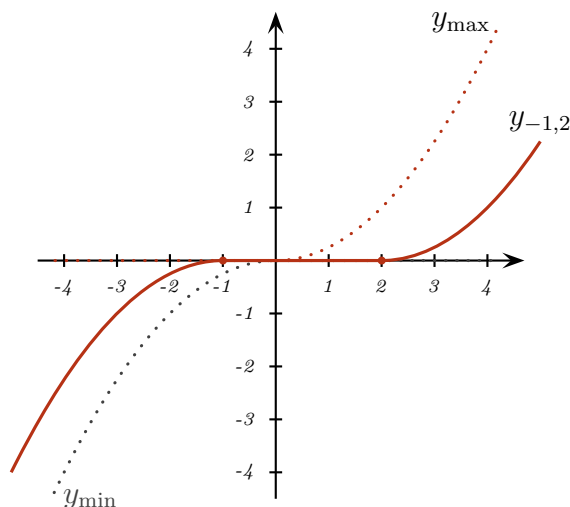
Sämtliche Lösungen erhält man hieraus durch Einschränkung. Insbesondere existieren für $a \in \mathbb{R}$ und jedes Intervall I mit $a \in I$ *unendlich viele Lösungen durch* $(a, 0)$. Diese liegen zwischen den ‚extremalen‘ Lösungen:

$$y_{\max}(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x \leq a \\ \frac{1}{4}(x - a)^2 & , \quad x \geq a \end{cases}, \quad \text{also} \quad y_{\max} = y_{-\infty, a},$$

und

$$y_{\min}(x) := \begin{cases} -\frac{1}{4}(x-a)^2 & , x \leq a \\ 0 & , x \geq a \end{cases} , \quad \text{also} \quad y_{\min} = y_{a,\infty}$$

Man spricht in einem solchen Fall gelegentlich von einem ‚Trichter‘ von Lösungen. Lokal hat man also keine Eindeutigkeit, obwohl eine explizite DGL vorliegt, ihre rechte Seite stetig ist und diese nur von y abhängt.



(B3) $y' = 1 + y^2$

Hier kann man $I_1 := I_2 := \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ und $g(y) = \frac{1}{1+y^2}$ wählen. Zu beliebigen $a, b \in \mathbb{R}$ erhält man $F(x) = x - a$, $G(y) = \arctan y - \arctan b$. Daher ist $I_3 =]-\frac{\pi}{2} - \arctan b, \frac{\pi}{2} - \arctan b[$.

Wegen $F(x) \in I_3 \iff x \in]-\frac{\pi}{2} + c, \frac{\pi}{2} + c[= I_0$ mit $c := a - \arctan b$ ergibt sich

$$y_0(x) = \tan(x - c) \quad (x \in I_0) .$$

Diese Lösungen haben ‚private‘ (individuelle) beschränkte maximale Existenzintervalle, die nicht direkt aus der DGL ablesbar sind, obwohl die DGL mit sehr ‚regulären‘ Funktionen gebildet ist.

Man vergleiche auch das Beispiel zu 4) auf Seite 5.

2.2 Differentialgleichungen vom Typ $y' = f\left(\frac{p_1x + q_1y + r_1}{p_2x + q_2y + r_2}\right)$

Hierbei seien $p_\kappa, q_\kappa, r_\kappa$ für $\kappa = 1, 2$ reelle Zahlen, J ein Intervall und $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

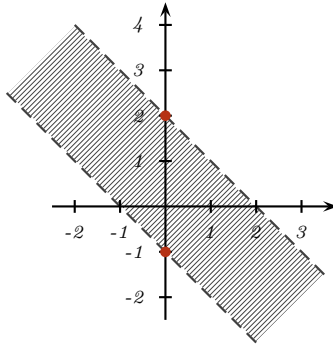
(E können wir ausgehen von $(q_1, q_2) \neq (0, 0)$ (sonst wäre ‚nur‘ eine Stammfunktion zu bestimmen) und $\text{rg}\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{pmatrix} = 2$ (denn sonst wären Zähler und Nenner proportional).

Als ersten *Spezialfall* behandeln wir

$$y' = f(\lambda x + y) \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad (\text{I})$$

und dazu naturgemäß den Streifen $\mathcal{S} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \lambda x + y \in J\}$.

Z. B. für $J =]-1, 2[$ und $\lambda = 1$:



Für ein Intervall I betrachten wir die (bijektive) *Transformation*²

$$y \mapsto u \quad \text{mit} \quad u(x) = \lambda x + y(x) \quad (x \in I)$$

und erhalten: y ist genau dann eine Lösung von (I) auf I (speziell $(x, y(x)) \in \mathcal{S}$ für $x \in I$), wenn $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $u(x) \in J$ und $u'(x) = \lambda + f(u(x))$ für $x \in I$.

Damit ist dieser Spezialfall im wesentlichen auf Abschnitt 2.1 zurückgeführt. Es ist dabei noch zu beachten: Falls $\lambda + f(u_0) = 0$ für ein $u_0 \in J$ gilt, liefert $y(x) = u_0 - \lambda x$ eine Lösung.

Ein einfaches Beispiel soll die Überlegungen verdeutlichen. Wir greifen es dann — geringfügig modifiziert — noch einmal in dem zugehörigen Maple-Worksheet auf:

² Von einer *Transformation* sprechen wir, wenn jeder Funktion y einer gegebenen Klasse eindeutig eine Funktion u zugeordnet wird und umgekehrt.

(B4) $\boxed{y' = (x + y)^2 \quad y(0) = 0}$

Eine Lösung y dieser DGL auf einem Intervall I ergibt für $u(x) = x + y(x)$ ($x \in I$) die DGL $u'(x) = 1 + u(x)^2$. Die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ wird zu $u(0) = 0$. (B3) zeigt $u(x) = \tan x$ für $x \in J$ mit maximalem Intervall $J :=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Folglich gilt:

$$y(x) = \tan x - x \quad \text{für } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

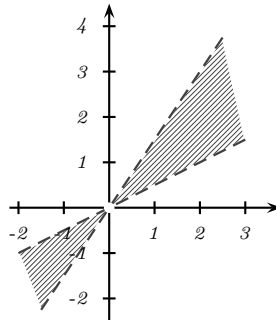
Im zweiten *Spezialfall*

$$y' = f\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right) \quad (\text{II})$$

für feste $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir entsprechend den Winkelbereich

$$\mathcal{W} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq x_0 \wedge \frac{y - y_0}{x - x_0} \in J \right\}.$$

Z. B. für $x_0 = y_0 = 0$ und $J =]0.5, 1.5[$:



Für ein Intervall I , das x_0 nicht enthält, *transformieren* wir

$$y(x) - y_0 = u(x)(x - x_0) \quad \text{für } x \in I$$

und erhalten unter Beachtung von $y'(x) = u'(x)(x - x_0) + u(x)$:

y ist eine Lösung von (II) auf I (speziell $(x, y(x)) \in \mathcal{W}$ für $x \in I$) genau dann, wenn $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $u(x) \in J$ und $u'(x) = \frac{f(u(x)) - u(x)}{x - x_0}$ für $x \in I$.

Damit ist auch dieser Spezialfall im wesentlichen zurückgeführt auf Abschnitt 2.1. Wir beachten noch: Wenn $f(\gamma) = \gamma$ für ein $\gamma \in J$ gilt, liefert dann $y(x) = \gamma(x - x_0) + y_0$ eine Lösung in $]-\infty, x_0[$ und in $]x_0, \infty[$.

Auch hierzu ein Beispiel, das dann in dem entsprechenden Maple-Worksheet — wieder leicht modifiziert — aufgegriffen und vertieft wird:

$$(B5) \quad \boxed{y' = \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}}$$

Für dieses Beispiel ist in den allgemeinen Überlegungen $J := \mathbb{R}$, $f(s) := \sin(s) + s$ für $s \in \mathbb{R}$ und $y_0 := x_0 := 0$ zu setzen. Der Winkelbereich ist somit $\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, und die Transformation lautet speziell $y(x) = xu(x)$ für $x \in I$ auf einem Intervall I mit $1 \in I, 0 \notin I$. Eine dort definierte Funktion y löst genau dann die vorgegebene AWA, wenn

$$u' = \frac{f(u) - u}{x} = \frac{\sin u}{x} \quad \text{mit} \quad u(1) = \frac{\pi}{2}$$

gilt. In die Überlegungen von Abschnitt 2.1 ordnet sich dies ein mit:

$$h(x) := \frac{1}{x} \quad \text{für } x \in I_1 :=]0, \infty[, \quad g(u) := \frac{1}{\sin u} \quad \text{für } u \in I_2 :=]0, \pi[$$

Gewiß wird niemand darüber stolpern, daß wir hier für die erste Funktion eine andere Bezeichnung (h statt f) gewählt haben, da ja f oben schon verwendet wurde. Für $x \in]0, \infty[$ und $u \in]0, \pi[$ betrachten wir

$$F(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt = \log x \quad \text{und} \quad G(u) := \int_{\frac{\pi}{2}}^u \frac{1}{\sin s} ds = \log(\tan(u/2)).$$

Offenbar ist $I_3 := G(I_2) = \mathbb{R}$. Die Bedingung $G(u(x)) = F(x)$ bedeutet $\tan(u(x)/2) = x$. Damit hat man $u(x) = 2 \arctan x$ und so $y(x) = 2x \arctan x$.

Jetzt können wir die allgemeine Aufgabe durch *Reduktion auf (I) und (II)* lösen: Im Fall $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} = 1$ existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$. So erhält man

$$f\left(\frac{p_1x + q_1y + r_1}{p_2x + q_2y + r_2}\right) = f\left(\frac{q_1(\lambda x + y) + r_1}{q_2(\lambda x + y) + r_2}\right) =: \hat{f}(\lambda x + y),$$

also eine DGL vom Typ (I).

Im Fall $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} = 2$ existiert eindeutig $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit

$p_1x_0 + q_1y_0 + r_1 = 0, p_2x_0 + q_2y_0 + r_2 = 0$. Hier erhält man über

$$f\left(\frac{p_1x + q_1y + r_1}{p_2x + q_2y + r_2}\right) = f\left(\frac{p_1(x - x_0) + q_1(y - y_0)}{p_2(x - x_0) + q_2(y - y_0)}\right) =: \hat{f}\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right)$$

eine DGL vom Typ (II).

2.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten hier die äußerst wichtige *lineare DGL 1. Ordnung*

$$y' = f(x)y + g(x) ; \quad (\text{I})$$

dabei seien J ein Intervall und $f, g: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Im Falle $g \neq 0$ bezeichnen wir die DGL als *inhomogen*.

Die Bedeutung dieser DGL kann nur schwerlich überschätzt werden. Selbst der ganz einfache Fall $y' = Cy$ (Änderung ist proportional zum Ist-Zustand) — also $g = 0$ und f konstant — erfasst recht verschiedenartige Dinge, wie wir schon in der Auflistung auf Seite 1f angedeutet haben.

Für ein $a \in J$ wird durch

$$y_0(x) := \exp\left(\int_a^x f(t) dt\right)$$

für $x \in J$ eine (stetig differenzierbare) Lösung y_0 der zugehörigen „*homogenen (linearen) Differentialgleichung*“

$$y' = f(x)y \quad (\text{H})$$

auf J erklärt, die $y_0(x) > 0$ und $y_0(a) = 1$ erfüllt.

(Dies kann man auch mit der Methode aus Abschnitt 2.1 herleiten.)

Ist y eine Lösung von (I) in dem Existenzintervall $J_0 \subset J$ mit $a \in J_0$ und $y(a) = b \in \mathbb{R}$, dann läßt sich y stets in der Form

$$y(x) = c(x)y_0(x) \quad (x \in J_0) \quad \text{„Variation der Konstanten“}$$

mit (stetig) differenzierbarem $c: J_0 \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben; denn die Funktion y_0 ist ja durchweg ungleich 0. Es gilt dann

$$\underbrace{fc}_{\text{}} y_0 + g = fy + g = y' = c'y_0 + c\underbrace{fy_0}_{\text{}} ,$$

also $c'(x) = g(x)y_0(x)^{-1}$; damit ist notwendig:

$$y(x) = y_0(x) \left(\int_a^x g(t)y_0(t)^{-1} dt + b \right) \quad (1)$$

Andererseits wird durch (1) eine Lösung von (I) mit $y(a) = b$ erklärt.

Wir fassen zusammen:

Satz 2.3.1

Für $a \in J$ und $b \in \mathbb{R}$ ist die — eindeutig bestimmte — Lösung y von (I) auf J mit $y(a) = b$ gegeben durch (1).

Sämtliche Lösungen von (I) erhält man durch Variation von a und b und Einschränkung auf Teilintervalle.

Das maximale Existenzintervall der Lösungen ist also hier jeweils J .

Folgerung 2.3.2

α) Für die zugehörige homogene DGL (H) sind alle Lösungen auf J gegeben durch:

$$y(x) = c y_0(x) \text{ für } x \in J \quad (c \in \mathbb{R})$$

β) Für eine Lösung y der homogenen DGL gilt:

Ist y nicht konstant gleich Null, so ist y stets von Null verschieden.

γ) Jede beliebige Lösung von (I) (auf J) entsteht aus einer speziellen („partikulären“) Lösung durch Addition einer Lösung von (H).

Beweis: Die erste Aussage liest man direkt aus (1) mit $g(t) := 0$ ($t \in J$) ab. Aus α) erhält man unmittelbar β), da $y_0(x) \neq 0$ ($x \in J$). Die dritte Aussage folgt aus der Linearität der Ableitung: Sind y und z Lösungen von (I), so gilt $(y - z)' = y' - z' = f y - f z = f(y - z)$; $(y - z)$ ist also eine Lösung von (H); so ergibt $y = z + (y - z)$ die gewünschte Darstellung. \square

Für die (lineare) Abbildung

$$\begin{array}{ccc} L: C_1(J) & \longrightarrow & C_0(J) \\ \Psi & & \Psi \\ y & \longmapsto & y' - f y \end{array}$$

wissen wir also: L ist *surjektiv*, und der *Kern* von L ist *1-dimensional*.

Wir sehen uns auch zu diesem Typ von DGLen ein einfaches Beispiel an:

(B6) $\boxed{y' = -xy + 3x, \quad y(0) = 5}$

Zur Lösung dieser AWA sind in den allgemeinen Überlegungen $J := \mathbb{R}$, $a := 0$, $b := 5$, $f(x) := -x$ und $g(x) := 3x$ für $x \in \mathbb{R}$ zu setzen. Dann ergibt sich $y_0(x) := \exp\left(\int_0^x (-t) dt\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ und

$$y(x) := y_0(x) \left(\int_0^x 3t \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right) dt + 5 \right) = y_0(x) \left(3 \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 2 \right),$$

$$\text{wobei wir } \int_0^x 3t \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right) dt = 3 \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right) \Big|_0^x = 3 \left(\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) - 1 \right)$$

benutzt haben. Daher ist $y(x) = 3 + 2 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ die eindeutig bestimmte Lösung der AWA.

Wir rechnen die gleiche Aufgabe noch einmal mit „Variation der Konstanten“ direkt (d. h. ohne die Formel (1)):

$$y_0(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \text{ erfüllt } y'_0 = -x y_0 \text{ und } y_0(0) = 1. \text{ Der ‚Ansatz‘ } y(x) = c(x) y_0(x) \text{ liefert hier } \underbrace{-x(c y_0)} + 3x = -x y + 3x = y' =$$

$c'y_0 + cy'_0 = c'y_0 + \underbrace{c(-xy_0)}$ und somit $c'y_0 = 3x$, also $c'(x) = 3x \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)$. Daraus folgt $c(x) = 3 \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \alpha$. $c(0) = y(0) = 5$ gibt dann $\alpha = 2$, insgesamt also die obige Lösung.

Oft ist es aber noch einfacher, *eine* Lösung von (I) zu ‚erraten‘ und dann mit γ) (und α) die allgemeine Lösung zu notieren:

Schreibt man die gegebene DGL in der Form $y' = x(-y + 3)$, so erkennt man leicht die durch $y_p(x) := 3$ gegebene konstante Funktion y_p als *partikuläre Lösung*. Mit der oben schon bestimmten Lösung y_0 der zugehörigen homogenen DGL ist die *allgemeine Lösung* y — nach α) und γ) — gegeben durch:

$y(x) = cy_0(x) + y_p(x) = c \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + 3$ (mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$). Die Forderung $y(0) = 5$ zeigt dann abschließend $c = 2$.

2.4 Bernoulli-Differentialgleichung

Als solche wird die DGL

$$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha \quad (1)$$

bezeichnet. Dabei seien wieder J ein Intervall, $f, g: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\mathbb{C} \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Für $\alpha = 1$ erhielte man eine homogene lineare DGL 1. Ordnung, für $\alpha = 0$ eine (inhomogene) lineare DGL 1. Ordnung.

Es werden — für *beliebiges* α — nur Lösungen $y: J_0 \rightarrow \mathbb{R}$ für ein Teilintervall J_0 von J mit $y(x) > 0$ für $x \in J_0$ betrachtet.

Für *spezielle* α kann man auch $y(x) \leq 0$ zulassen. Ist $0^\alpha = 0$ definiert, so ist natürlich auch $y = 0$ eine Lösung.

Die Transformation $u(x) = y(x)^{1-\alpha}$ ($x \in J_0$) liefert, daß

y genau dann eine Lösung von (1) ist, wenn u auf J_0 die lineare DGL

$$u' = (1 - \alpha)f(x)u + (1 - \alpha)g(x) \quad (2)$$

löst und $u(x) > 0$ für $x \in J_0$ gilt.

Beweis: Ist y eine Lösung von (1), dann gilt für u :

$$\begin{aligned} u' &= (1 - \alpha)y^{-\alpha}y' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}[f(x)y + g(x)y^\alpha] \\ &= (1 - \alpha)f(x)u + (1 - \alpha)g(x). \end{aligned}$$

Geht man andererseits von einer Lösung u von (2) aus, so rechnet man für y :

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{1-\alpha} u^{\frac{1}{1-\alpha}-1} u' = \frac{1}{1-\alpha} u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} [(1-\alpha)f(x)u + (1-\alpha)g(x)] \\
 &= f(x)u^{\frac{1}{1-\alpha}} + g(x)u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = f(x)y + g(x)y^\alpha. \quad \square
 \end{aligned}$$

Insgesamt ist somit das Problem auf die Überlegungen aus Abschnitt 2.3 zurückgeführt.

Anmerkung: Eine Lösung u von (2) existiert auf ganz J ; aber der oben aufgezeigte Zusammenhang $y \longleftrightarrow u$ besteht nur solange, wie $u(x) > 0$ (bzw. $y(x) > 0$) gilt.

Auch hier ein kleines Beispiel zum Einüben:

$$(B7) \quad \boxed{y' = xy - 3xy^2, \quad y(0) = \frac{1}{5}}$$

Mit $\alpha = 2$ und somit $u(x) := y(x)^{-1}$ in einem Intervall $J_0 \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in J_0$ und $y(x) > 0$ für $x \in J_0$ geht diese AWA nach den geschilderten Überlegungen über in $u' = -xu + 3x$, $u(0) = 5$. Nach Beispiel (B6) ist die allgemeine Lösung dieser DGL durch $u(x) = c \exp(-\frac{1}{2}x^2) + 3$ gegeben. Die Berücksichtigung der Anfangsbedingung liefert $c = 2$. Die Lösung y der ursprünglichen AWA ist demnach durch $y(x) = u(x)^{-1} = 1/(3 + 2 \exp(-\frac{1}{2}x^2))$ für $x \in \mathbb{R}$, also mit $J_0 = \mathbb{R}$, gegeben.

2.5 Riccati-Differentialgleichung

Eine DGL der Form

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x) \quad (1)$$

heißt RICCATI-Differentialgleichung. Hierbei seien $f, g, h: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall J . CE kann dabei von $f \neq 0$ ausgegangen werden; denn sonst hätte man eine lineare DGL.

Erste **Anmerkungen:**

- 1) Ohne Beweis (und ohne weitere Begriffserläuterung) vermerken wir: Im allgemeinen ist diese DGL *nicht* 'elementar integrierbar'!
- 2) Falls *eine* Lösung bekannt ist, können andere Lösungen elementar gewonnen werden.

- 3) Gegenüber der linearen DGL hat man hier noch den Term $f(x)y^2$; dieser ändert das Lösungsverhalten beträchtlich: Das zeigt ja schon 1). Zudem sind ‚private‘ maximale Existenzintervalle möglich, die *echte* Teilintervalle des Ausgangsintervalls J sind! (Man vergleiche dazu die schon bekannten Beispiele auf den Seiten 5 ($y' = y^2$) und 22 ($y' = 1 + y^2$).)

Zusammenhang mit homogener linearer DGL 2. Ordnung

Hier machen wir die **zusätzliche Annahme**:

f sei stetig differenzierbar mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in J$ ³.

- a) Durch die Transformation $\boxed{z(x) = -f(x)y(x)}$ gelingt die Reduktion auf eine Normalform:

Es sei $y: J_0 \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem Teilintervall J_0 von J ; dann folgt:

y ist genau dann eine Lösung von (1), wenn für alle $x \in J_0$ gilt

$$\begin{aligned} f(x)y' &= f(x)^2 y^2 + f(x)g(x)y + f(x)h(x) \\ \iff (fy)'(x) &= f'(x)y(x) + f(x)y'(x) \\ &= (f(x)y(x))^2 + (f(x)g(x) + f'(x))y(x) + f(x)h(x) \\ \iff \boxed{z' &= -z^2 - \tilde{g}(x)z - \tilde{h}(x)} \end{aligned} \quad (2)$$

mit $\tilde{g}(x) := -\frac{f(x)g(x) + f'(x)}{f(x)}$, $\tilde{h}(x) := f(x)h(x)$ ($x \in J$).

Die Funktionen \tilde{g} und \tilde{h} sind natürlich stetig.

- b) Betrachtung von (2):

Ist z eine Lösung von (2) auf J_0 , dann bilden wir für $a \in J_0$

$$u(x) := \exp\left(\int_a^x z(t) dt\right) \quad (x \in J_0),$$

also die Lösung u von $u' = zu$ mit $u(a) = 1$. Die Funktion u ist somit zweimal stetig differenzierbar mit $u(x) \neq 0$ für $x \in J_0$ und genügt der DGL

$$u'' + \tilde{g}(x)u' + \tilde{h}(x)u = 0;$$

denn mit $u' = zu$ folgt $u'' = z'u + zu' = (z' + z^2)u$
 $= (-\tilde{g}(x)z - \tilde{h}(x))u = -\tilde{g}(x)u' - \tilde{h}(x)u.$

³ Oben wurde nur gefordert: Es existiert ein $x \in J$ mit $f(x) \neq 0$.

Ist andererseits u eine Lösung dieser DGL auf einem Intervall $J_0 \subset J$ und dort stets von Null verschieden, dann liefert $z(x) := \frac{u'(x)}{u(x)}$ für $x \in J_0$ offenbar eine Lösung z von (2) auf J_0 .

(B8) Die (schon reduzierte) DGL $z' = -z^2 - 1$ wird in dem Intervall $J :=]-\pi/2, \pi/2[$ gelöst durch z mit $z(x) := -\tan(x)$. Hier sind also in den obigen allgemeinen Überlegungen $\tilde{g}(x) = 0$ und $\tilde{h}(x) = 1$ zu setzen. Die zugehörige DGL zweiter Ordnung für u lautet somit $u'' + u = 0$. Diese wird u. a. durch die Funktion $u = \cos$ gelöst. Die Beziehung $z(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ lautet hier $-\tan(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$.

Elementare Integration bei bekannter spezieller Lösung

Sind y und y_0 Lösungen von (1) auf einem Intervall $J_0 \subset J$, dann gilt für $z := y - y_0$ unter Beachtung von $y^2 - y_0^2 = (y + y_0)(y - y_0) = (z + 2y_0)z$:
 $z' = f(y^2 - y_0^2) + gz = f z^2 + (2f y_0 + g)z$ (BERNOULLI-DGL mit $\alpha = 2$)

Mit der in Abschnitt 2.4 beschriebenen Transformation gelingt die Reduktion auf eine lineare DGL 1. Ordnung:

Ist $z(x) \neq 0$ für x aus einem Teilintervall J_0 von J , so erhält man für $u(x) := z(x)^{-1}$, also $u'(x) = -z(x)^{-2} z'(x)$, $-u' = f + (2f y_0 + g)u$.

Mit diesen motivierenden Überlegungen haben wir bewiesen:

Satz 2.5.1

Hat man eine Lösung y_0 der RICCATI-DGL (1) auf einem Teilintervall J_0 von J , so gilt für zwei Funktionen $y, u: J_0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u(x)(y(x) - y_0(x)) = 1 \quad (x \in J_0) :$$

y löst genau dann die DGL (1) auf J_0 , wenn u dort eine Lösung ist von:

$$u' = -(2f(x)y_0(x) + g(x))u - f(x) \quad (3)$$

Für u hat man also eine *lineare Differentialgleichung 1. Ordnung*. Damit gewinnt man nun leicht die

Folgerung 2.5.2 (Eindeutigkeitssatz)

Sind die beiden Funktionen y und y_0 in einem gemeinsamen Intervall J_0 von J Lösungen der RICCATI-DGL (1), dann gilt

$$y = y_0 \quad \text{oder} \quad y(x) \neq y_0(x) \quad \text{für alle } x \in J_0.$$

Beweis (indirekt): Sonst hätte man $y \neq y_0$ (*), und es existierte ein $t \in J_0$ mit $y(t) = y_0(t)$. Da die Funktionen y und y_0 stetig sind, folgt aus (*): Es existiert ein $\tau_1 \in \overset{\circ}{J}_0$ mit $y(\tau_1) \neq y_0(\tau_1)$. Sei $\tau_1 < t$. Wir betrachten

$$\tau_2 := \inf \{ \tau \in J_0 \mid \tau > \tau_1 \wedge y(\tau) = y_0(\tau) \}.$$

Die Stetigkeit von y und y_0 liefert $y(\tau_2) = y_0(\tau_2)$ (**). Für x aus dem Intervall $J_1 := [\tau_1, \tau_2[$ gilt $y(x) \neq y_0(x)$. Die auf J_1 durch

$$u(x) := (y(x) - y_0(x))^{-1}$$

definierte Funktion u löst dort die lineare Differentialgleichung (3); da der Punkt τ_2 zum Intervall J_0 gehört, kann die Funktion u in τ_2 hinein stetig fortgesetzt werden, dies im *Widerspruch* zu (**). \square

Insgesamt erhalten wir einen *Überblick über die Lösungsgesamtheit* von (1) in Teilintervallen J_1 des Definitionsbereiches J_0 einer speziellen Lösung y_0 :

Satz 2.5.3

Auf einem Teilintervall J_0 von J seien y_0 eine Lösung von (1), u_0 eine Lösung der DGL (3) und v_0 eine nicht-triviale Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

Für ein Intervall $J_1 \subset J_0$ und eine darauf definierte Funktion y gilt: y löst genau dann (1) auf J_1 , wenn y die Einschränkung von y_0 auf J_1 ist oder mit einem reellen γ gilt:

$$u_0(x) + \gamma v_0(x) \neq 0 \quad (x \in J_1) \quad \text{und} \quad y = \left(y_0 + \frac{1}{u_0 + \gamma v_0} \right) \Big|_{J_1}$$

Der *Beweis* ist durch die bisherigen Überlegungen gegeben:

Ist y eine Lösung von (1) auf J_1 mit $y \neq y_0|_{J_1}$, so gilt $y(x) \neq y_0(x)$ für $x \in J_1$ nach Folgerung 2.5.2. $u(x) := (y(x) - y_0(x))^{-1}$ für $x \in J_1$ liefert nach Satz 2.5.1 eine Lösung u der linearen DGL (3) auf J_1 . Somit existiert ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $u = u_0 + \gamma v_0$. Dies liefert die behauptete Darstellung für y .

Ausgehend von einer solchen Darstellung von y löst $u := u_0 + \gamma v_0$ die lineare DGL (3), also y die DGL (1) auf J_1 . \square

Zum besseren Verständnis dieses Satzes kann die Abbildung zu Beispiel 7 auf Seite 60 helfen.

Auf weitere Überlegungen zur (wichtigen) RICCATI-Differentialgleichung gehen wir nicht ein (man vergleiche hierzu die Literatur, z. B. [Sc/Sc]), da noch ein reichhaltiges Programm auf uns wartet.

2.6 Exakte Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt seien \mathfrak{G} ein Gebiet — d. h. eine offene und zusammenhängende Menge — im \mathbb{R}^2 und $f_1, f_2: \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wir betrachten die Differentialgleichung:

$$f_1(x, y) + f_2(x, y)y' = 0 \quad (1)$$

Diese DGL heißt genau dann „(in \mathfrak{G}) exakt“⁴, wenn eine Stammfunktion zu (f_1, f_2) in \mathfrak{G} existiert, d. h. eine differenzierbare Funktion $F: \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D_1 F = f_1$ und $D_2 F = f_2$ — in anderer Notierung $F_x = f_1$ und $F_y = f_2$.

Die Bedeutung der ‚Exaktheit‘ (mit einem solchen F) wird ersichtlich aus der folgenden einfachen

Bemerkung 2.6.1

Für ein Intervall J und eine differenzierbare Funktion $y: J \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y(x)) \in \mathfrak{G}$ für $x \in J$ ist y genau dann eine Lösung von (1), wenn mit einem reellen γ gilt:

$$F(x, y(x)) = \gamma \quad (x \in J).$$

Beweis: $\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = f_1(x, y(x)) + f_2(x, y(x))y'(x)$ für $x \in J$ □

Sind die Funktionen f_1 und f_2 sogar stetig differenzierbar, dann ist für die Exaktheit von (1) notwendig

$$D_2 f_1 = D_1 f_2 \quad ((f_1)_y = (f_2)_x).$$

Dies sind die aus der mehrdimensionalen Analysis vertrauten *Integrabilitätsbedingungen*, die bekannterweise unmittelbar aus dem Satz von SCHWARZ resultieren.

Unter den stärkeren Voraussetzungen, daß \mathfrak{G} einfach-zusammenhängend ist und die Funktionen f_1 und f_2 stetig differenzierbar sind, hat man:

Die DGL (1) ist in \mathfrak{G} genau dann *exakt*, wenn $D_2 f_1 = D_1 f_2$ gilt.

Ist dies gegeben, dann kann mit festem $(x_0, y_0) \in \mathfrak{G}$ für $(x, y) \in \mathfrak{G}$ mit einer (beliebigen) stückweise stetig differenzierbaren Kurve \mathfrak{C} , die innerhalb von \mathfrak{G} von (x_0, y_0) nach (x, y) verläuft ($a(\mathfrak{C}) = (x_0, y_0)$, $e(\mathfrak{C}) = (x, y)$ und $(\mathfrak{C}) \subset \mathfrak{G}$)

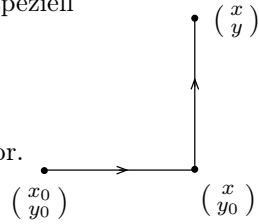
$$F(x, y) := \int_{\mathfrak{C}} \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \mid d \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle$$

⁴ gelegentlich auch „total“

(wegunabhängig!) gebildet werden. Lokal kann somit speziell

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x f_1(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y f_2(x, \eta) d\eta$$

berechnet werden, und so geht man praktisch meist vor.



Der Satz über implizite Funktionen liefert mit obiger Bemerkung 2.6.1 den

Satz 2.6.2

Ist die DGL (1) exakt in \mathfrak{G} und $(a, b) \in \mathfrak{G}$ mit $f_2(a, b) \neq 0$, so existieren ein offenes Intervall J mit $a \in J$ und eine Lösung $y: J \rightarrow \mathbb{R}$ von (1) mit $y(a) = b$ derart, daß für jedes Intervall J_0 , das a enthält, und jede weitere Lösung $y_0: J_0 \rightarrow \mathbb{R}$ der DGL (1) mit $y_0(a) = b$ gilt:

$$y(x) = y_0(x) \quad (x \in J \cap J_0)$$

Beweis: Der Satz über implizite Funktionen — angewendet auf $\Phi(x, y) := F(x, y) - F(a, b)$ — liefert die Existenz einer eindeutigen lokalen Auflösung von $F(x, y) = F(a, b)$ um (a, b) . \square

In einer geeigneten Umgebung von (a, b) ist somit die DGL (1) äquivalent zu einer expliziten DGL.

Zum Verständnis dieses Satzes kann die Graphik mit den Höhenlinien auf Seite 62 des Worksheets zu Kapitel 2 helfen.

Anmerkung:

Die in Abschnitt 2.1 behandelten Differentialgleichungen mit getrennten Variablen können — unter den dort gemachten Voraussetzungen — als exakte Differentialgleichungen aufgefaßt werden:

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \iff f(x) - g(y)y' = 0$$

Hier ist also $f_1(x, y) := f(x)$ und $f_2(x, y) := -g(y)$ zu setzen. Obiges F kann somit lokal durch

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi - \int_{y_0}^y g(\eta) d\eta$$

berechnet werden.

Multiplikatoren

Ist die DGL (1) nicht exakt, so kann — nach einer auf EULER zurückgehenden Idee — versucht werden, eine stetige Abbildung $\mu: \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mu(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in \mathfrak{G}$ zu finden, für die die äquivalente DGL

$$\mu f_1 + \mu f_2 y' = 0$$

in \mathfrak{G} exakt ist. Ein solches μ heißt „Multiplikator (für (1) in \mathfrak{G})“ oder auch „integrierender Faktor“.

Unter den *stärkeren Voraussetzungen*, daß \mathfrak{G} *einfach-zusammenhängend* ist und die Funktionen $f_1, f_2, \mu: \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar* sind mit $\mu(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in \mathfrak{G}$, gilt: μ ist genau dann Multiplikator, wenn

$$D_2(\mu f_1) = D_1(\mu f_2) \text{ bzw.}$$

$$f_2(x, y)\mu_x - f_1(x, y)\mu_y = ((f_1)_y(x, y) - (f_2)_x(x, y))\mu.$$

Dies sind gerade die Integrabilitätsbedingungen für die ‚neuen‘ Funktionen μf_1 und μf_2 .

Hat man *einen* Multiplikator, so ist die DGL im wesentlichen gelöst; denn nach den obigen Überlegungen ist ja ‚nur‘ die Stammfunktion F (durch eindimensionale Integrationen) zu bestimmen. Das Auffinden eines Multiplikators kann aber im Einzelfall eine schwierige Aufgabe sein, da die obige Bestimmungsgleichung eine *partielle* Differentialgleichung für μ ist. Deshalb versucht man oft, einen *Multiplikator einfacher Struktur* zu bestimmen:

Als Beispiel für solche *speziellen Multiplikatoren* sehen wir uns ‚von y unabhängige‘ Multiplikatoren an und machen dazu wieder die Voraussetzung, daß \mathfrak{G} einfach-zusammenhängend ist und die Funktionen $f_1, f_2, \mu: \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind.

Bezeichnet

$$J := \{x \in \mathbb{R} : \text{Es existiert ein } y \in \mathbb{R} \text{ mit } (x, y) \in \mathfrak{G}\}$$

die ‚Projektion‘ von \mathfrak{G} auf die x -Achse, so muß offenbar hier *eine stetige Funktion* $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_2(x, y)\varphi(x) = (f_1)_y(x, y) - (f_2)_x(x, y) \text{ für } (x, y) \in \mathfrak{G}$$

existieren. Denn aus der obigen Charakterisierung wird

$$f_2(x, y)\mu_x = ((f_1)_y(x, y) - (f_2)_x(x, y))\mu.$$

Dies ist aber auch *hinreichend*: Man bestimmt eine nicht-triviale stetig differenzierbare Lösung $\mu_0: J \rightarrow \mathbb{R}$ von $\mu'_0 = \varphi\mu_0$ und setzt $\mu(x, y) := \mu_0(x)$ für $(x, y) \in \mathfrak{G}$.

Analog behandelt man Multiplikatoren der Form $\mu_0(y)$ und ähnlich auch Multiplikatoren der Form $\mu_0(x + y)$ und $\mu_0(x \cdot y)$.

Zur *Erläuterung dieser Überlegungen* sehen wir uns — unter den Annahmen und mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 2.3 für ein offenes Intervall J

und stetig differenzierbare Funktionen f und g — die inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = f(x)y + g(x)$ noch einmal an. Wir schreiben diese in der Form

$$\underbrace{-f(x)y - g(x)}_{=: f_1(x, y)} + \underbrace{1}_{=: f_2(x, y)} \cdot y' = 0 \quad ((x, y) \in \mathfrak{G} := J \times \mathbb{R}).$$

Wegen $(f_1)_y - (f_2)_x = -f(x)$ ist diese Differentialgleichung i. a. *nicht exakt*. Nach den obigen Überlegungen kann mit $\varphi := -f$

$$\mu(x, y) := \mu_0(x) := \exp\left(-\int_a^x f(t) dt\right)$$

für ein festes $a \in J$ als Multiplikator gewählt werden. Mit $x_0 := a$ und $y_0 := 0$ (auf Seite 33f) und

$$F(x, y) := -\int_a^x g(t) \mu_0(t) dt + \mu_0(x) y$$

liefert $F(x, y) = b$ die aus Abschnitt 2.3 schon bekannte Lösungsformel.

2.7 Clairaut-Differentialgleichung

Als ein Beispiel für eine *implizite* Differentialgleichung erster Ordnung behandeln wir nur die CLAIRAUT-DGL:

$$y = xy' - g(y') \tag{1}$$

Eine vollständige Theorie dieser Differentialgleichung ergibt sich unter den — noch abschwächbaren⁵ — *Voraussetzungen*:

Es seien I ein kompaktes Intervall und $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine *zweimal stetig differenzierbare* Funktion mit $g''(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Damit hat g'' gemäß dem Zwischenwertsatz auf I konstantes Vorzeichen.

1. Für jedes $\gamma \in I$ liefert $y(x) := x\gamma - g(\gamma)$ für $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung von (1); diese (oder auch Einschränkungen davon) bezeichnen wir als „*lineare Lösungen*“.

Man vergleiche hierzu auch das Beispiel im zugehörigen Worksheet (Animation auf Seite 66).

⁵ Man vergleiche dazu etwa [Sc/Sc].

2. Aus den Voraussetzungen folgt die *strenge Monotonie* der Funktion g' ; wegen der Stetigkeit von g' ist $J := g'(I)$ ein kompaktes Intervall, und es existiert die Umkehrfunktion

$$\varphi := g'^{-1}: J \longrightarrow I.$$

Sie ist bijektiv, streng monoton und *stetig differenzierbar*.

Bemerkung 2.7.1

Die Funktion

$$h: J \ni x \longmapsto x\varphi(x) - g(\varphi(x)) \in \mathbb{R}$$

ist stetig differenzierbar mit $h' = \varphi$, also eine Lösung der DGL (1).

h wird als (nicht-lineare) „*singuläre Lösung*“ bezeichnet; offenbar ist sie dann auch zweimal stetig differenzierbar mit $h''(x) = \varphi'(x) \neq 0$. Damit hat h'' konstantes Vorzeichen auf J . h ist daher streng konvex (falls $h''(x) > 0$ für $x \in J$) oder streng konkav (falls $h''(x) < 0$ für $x \in J$).

*Beweis*⁶: Für $x_1, x_2 \in J$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt nach dem Mittelwertsatz und der Definition von φ :

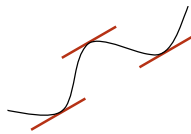
$$\frac{g(\varphi(x_2)) - g(\varphi(x_1))}{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)} = g'(\varphi(\xi)) = \xi \quad \text{mit einem } \xi \text{ zwischen } x_1 \text{ und } x_2.$$

$$\begin{aligned} \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{1}{x_2 - x_1} \left[x_2 \varphi(x_2) - x_1 \varphi(x_1) - (g(\varphi(x_2)) - g(\varphi(x_1))) \right] \\ &= \varphi(x_2) + \underbrace{\frac{x_1 - \xi}{x_2 - x_1}}_{\in]-1, 0[} (\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \xrightarrow[\varphi \text{ stetig}]{} \varphi(x_2) \quad (x_1 \rightarrow x_2) \end{aligned}$$

□

3. Im folgenden sei y eine Lösung der DGL (1) auf einem Intervall J_0 . Insbesondere gelte $y'(x) \in I$ für alle $x \in J_0$.

Wir wollen zeigen, daß z.B.



nicht auftreten kann. (Nur bei

den *linearen* Lösungen wird die gleiche Steigung mehrfach angenommen.)

Hilfssatz 2.7.2

Es seien $x_1, x_2 \in J_0$ mit $x_1 < x_2$ und $y'(x_1) = y'(x_2) =: \gamma$. Dann gilt $y(x) = x\gamma - g(\gamma)$ für alle $x \in [x_1, x_2]$.

⁶ Für *innere* Punkte ergibt sich $h'(x) = \varphi(x)$ einfach mit der Kettenregel.

Beweis: Mit der Differenzfunktion $d: [x_1, x_2] \ni x \mapsto y(x) - x\gamma + g(\gamma) \in \mathbb{R}$ ist also $d = 0$ zu zeigen: Nach der Definition von γ hat man $d(x_1) = 0 = d(x_2)$, da y eine Lösung der DGL (1) ist. Annahme: Es existiert ein $\xi \in]x_1, x_2[$ mit $d(\xi) \neq 0$. $]\alpha, \beta[$ bezeichne das *maximale* offene Intervall um ξ , in dem $d(x) \neq 0$ gilt. Die Maximalität liefert $d(\alpha) = 0 = d(\beta)$. Nach dem Satz von ROLLE existiert somit ein $\tau \in]\alpha, \beta[$ mit $d'(\tau) = 0$, also $y'(\tau) = \gamma$. Mit der DGL hätte man $d(\tau) = 0$ im *Widerspruch* zur Definition von $]\alpha, \beta[$. \square

Hilfssatz 2.7.3

y' ist monoton und stetig.

Beweis: Hier ist nur die Monotonie von y' zu zeigen; denn dann folgt die Stetigkeit aus dem Satz von DARBOUX. Wäre y' nicht monoton, so existierten — wieder mit dem Satz von DARBOUX — $x_\nu \in J_0$ mit $x_1 < x_3 < x_2$ und $y'(x_1) = y'(x_2) \neq y'(x_3)$. Nach dem vorangehenden Hilfssatz wäre dann aber $y|_{[x_1, x_2]}$ linear im *Widerspruch* zu $y'(x_2) \neq y'(x_3)$. \square

Bemerkung 2.7.4

Für $x_0 \in J_0$ mit $x_0 - g'(y'(x_0)) \neq 0$ ist y in einer geeigneten Umgebung U von x_0 zweimal (stetig) differenzierbar. Mit einem geeigneten $\gamma \in \mathbb{R}$ gilt $y(x) = x\gamma - g(\gamma)$ für alle $x \in U$.

Anmerkung:

Aus $x_0 - g'(y'(x_0)) = 0$ folgt $y'(x_0) = \varphi(x_0)$ und so $h(x_0) = y(x_0)$.

Beweis: Ist $x_0 - g'(y'(x_0)) \neq 0$, so gilt auch für x aus einer geeigneten Umgebung U_1 von x_0 : $x - g'(y'(x)) \neq 0$. Auf die stetig differenzierbare Abbildung $f(x, y, t) := xt - g(t) - y$ (für $(x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times I$) kann wegen

$$f(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad (x \in J_0) \quad (2)$$

— speziell also für $x = x_0$ — und $D_3 f(x_0, y(x_0), y'(x_0)) = x_0 - g'(y'(x_0)) \neq 0$ der Satz über implizite Funktionen angewendet werden; er liefert eine eindeutige (stetig differenzierbare) lokale Auflösung ψ mit $f(x, y, \psi(x, y)) = 0$. Der Vergleich mit (2) zeigt für x aus einer geeigneten Umgebung U_2 von x_0

$$y'(x) = \psi(x, y(x)).$$

Da y (nach Hilfssatz 2.7.3) stetig differenzierbar ist, ist nun auch die Ableitung y' dort stetig differenzierbar. Aus (1) folgt durch Differentiation

$$y' = y' + xy'' - g'(y')y''.$$

Dies zeigt $y''(x) = 0$ für $x \in U := U_1 \cap U_2$. Die angegebene Darstellung von $y|_U$ folgt nach Hilfssatz 2.7.2. \square

Zusammen erhalten wir nun abschließend den

Satz 2.7.5

Für $a_1, a_2 \in J$ mit $a_1 \leq a_2$ wird durch

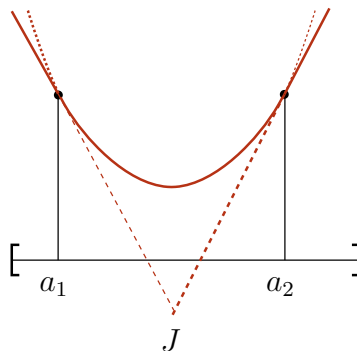
$$y(x) := y_{a_1, a_2}(x) := \begin{cases} x\varphi(a_1) - g(\varphi(a_1)), & (-\infty < x \leq a_1) \\ h(x) \quad (= x\varphi(x) - g(\varphi(x))), & (a_1 \leq x \leq a_2) \\ x\varphi(a_2) - g(\varphi(a_2)), & (a_2 \leq x < \infty) \end{cases}$$

eine Lösung von (1) auf ganz \mathbb{R} definiert.⁷ Aus diesen Lösungen erhält man sämtliche durch Einschränkung.

Beweis: Daß diese Funktionen auf den angegebenen Teilintervallen Lösungen sind, ist bekannt. An den ‚Nahtstellen‘ stimmen die Funktionswerte und nach Bemerkung 2.7.1 die (einseitigen) Ableitungen überein. Daher sind diese Funktionen y_{a_1, a_2} Lösungen von (1).

y sei eine beliebige Lösung mit $y|_J \neq h$, d. h. $y(x_0) \neq h(x_0)$ für ein $x_0 \in J$. Dann gilt nach obiger Anmerkung $x_0 - g'(\varphi(x_0)) \neq 0$, und nach Bemerkung 2.7.4 gibt es ein $\gamma \in I$ mit $y(x) = x\gamma - g(\gamma)$ für alle x aus einer geeigneten Umgebung von x_0 . Im nicht-trivialen Fall (y ist links von x_0 keine lineare Lösung) ergibt $\sup\{x < x_0 : x = g'(\varphi(x))\}$ den Punkt a_2 . Entsprechend ergibt sich die andere ‚Nahtstelle‘ a_1 . \square

Der Satz besagt, daß sich alle Lösungen von (1) aus Einschränkungen der linearen Lösungen und der singulären Lösung zusammensetzen lassen. Die linearen Lösungen ergeben dabei gerade die Tangenten der singulären Lösung. Die singuläre Lösung ist *Einhüllende*, auch *Envelope* oder *Hüllkurve* genannt, der Schar der linearen Lösungen, da sie in jedem ihrer Punkte eine solche Lösung berührt.



⁷ Für $a_1 = a_2$ ergibt sich gerade eine lineare Lösung.

(B9) Mit $I := [0, 1]$ und $g(t) := -t^2$ für $t \in I$ betrachten wir die DGL:

$$y = xy' - g(y') = xy' + y'^2$$

Die in diesem Abschnitt gemachten Voraussetzungen sind offenbar erfüllt. Für $\gamma \in I$ liefert jeweils $y(x) := x\gamma + \gamma^2$ für $x \in \mathbb{R}$ eine lineare Lösung y .

Mit $g'(t) = -2t$ für $t \in I$ hat man $J := g'(I) = [-2, 0]$ und $\varphi := g'^{-1}: J \rightarrow I$ durch $\varphi(x) = -1/2x$ für $x \in J$. Die durch $h(x) := x\varphi(x) - g(\varphi(x))$ ($x \in J$) definierte singuläre Lösung h erfüllt also hier $h(x) = -1/2x^2 + 1/4x^2 = -1/4x^2$. Für $a_1, a_2 \in [-2, 0]$ mit $a_1 \leq a_2$ wird so durch

$$y(x) := \begin{cases} -1/2xa_1 + 1/4a_1^2, & (-\infty < x \leq a_1) \\ -1/4x^2, & (a_1 \leq x \leq a_2) \\ -1/2xa_2 + 1/4a_2^2, & (a_2 \leq x < \infty) \end{cases}$$

jeweils eine Lösung y auf ganz \mathbb{R} definiert. (Aus diesen Lösungen erhält man *sämtliche* durch Einschränkung.)

Historische Notizen

Jakob BERNOULLI (1654–1705)



Die Familie BERNOULLI ist eine Schweizer Gelehrtenfamilie niederländischer Herkunft. Beispiellos in der Wissenschaftsgeschichte ist die große Anzahl bedeutender Mathematiker dieser ‚Dynastie‘. Jakob BERNOULLI — gelegentlich auch Jakob I genannt, da es einen weiteren Mathematiker mit Namen Jakob in der Familie gab — studierte Theologie in Basel, beschäftigte sich aber heimlich mit der Mathematik. Beginnend mit astronomischen Arbeiten, begann er ab 1684, die Überlegungen von LEIBNIZ zur Infinitesimalrechnung zu studieren, und erzielte fundamentale Ergebnisse. Über die Lösung des *Brachystochronenproblems* kam er zur Begründung der *Variationsrechnung*. Seit etwa 1685 hat er sich zusätzlich mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt und auch dazu fundamentale Resultate, z. B. das *Gesetz der großen Zahlen*, gewonnen.

Jacopo Francesco RICCATI (1676–1754)



Zunächst studierte dieser venezianische Graf Jura, wechselte dann aber bald zur Mathematik. Im Zusammenhang mit Fragen der Hydraulik und des Wasserbaus, so etwa bei Deichkonstruktionen in Venedig, beschäftigte er sich mit der Lösung spezieller Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Sein Ruhm beruhte weniger auf der nach ihm benannten Differentialgleichung und seinen Beiträgen zur Kurventheorie als darauf, daß er die Physik NEWTONS in Italien publik machte.

Alexis Claude CLAIRAUT (1713–1765)



Französischer Mathematiker, Astronom, Physiker und Geodät. CLAIRAUT wurde bereits im Alter von 18 Jahren Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften. 1752 publizierte er mathematische Studien zur Mondbewegung, wobei er Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen heranzog. Er bestimmte relativ genau den Zeitpunkt der Rückkehr des Halleyschen Kometen im Jahre 1759. CLAIRAUT arbeitete über das Dreikörperproblem und schrieb Bücher zur Integralrechnung, Algebra und Geometrie.

MWS zu Kapitel 2

Elementare Integrationsmethoden

Wichtige MAPLE-Befehle dieses Kapitels:

DEtools-Paket: odeadvisor, odetest, Dchangevar, separablesol, genhomosol,
linearsol, bernoullisol, riccatisol, exactsol, firint, intfactor,
clairautsol

PDEtools-Paket: dchange

dsolve (implicit, [separable], [homogeneous], [dAlembert], [linear],
[Bernoulli], [Riccati], [exact], [Clairaut])

VectorCalculus-Paket: SetCoordinates, VectorField, ScalarPotential

linalg-Paket: potential

infolevel

2.1 Differentialgleichungen mit ‚getrennten Variablen‘

Wir betrachten in diesem Abschnitt Differentialgleichungen der speziellen Form $\frac{d}{dx} y(x) = \frac{f(x)}{g(y(x))}$ oder kurz $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$.

```
> restart: with(DEtools):  
Dgl := diff(y(x),x) = f(x)/g(y(x));  
AnfBed := y(a) = b;
```

$$Dgl := y' = \frac{f(x)}{g(y)}, \quad AnfBed := y(a) = b$$

Für diese Anfangswertaufgabe werden nun mit Hilfe von Maple die im Textteil gemachten Überlegungen nachvollzogen:

```
> F := x -> int(f(t), t=a..x):  
G := y -> int(g(s), s=b..y):  
G(y(x)) = F(x);
```

$$\int_b^y g(s) ds = \int_a^x f(t) dt$$

Beispiel 1:

Speziell für die Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$ erhalten wir dann

```
> f := x -> -x: g := y -> y:
Dgl; G(y(x)) = F(x); y(x) = solve(%,y(x));
```

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad \frac{y^2}{2} - \frac{b^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2}, \quad y = (\sqrt{b^2 - x^2 + a^2}, -\sqrt{b^2 - x^2 + a^2})$$

Wir lernen nun eine Reihe von speziellen Maple-Befehlen aus dem `DEtools`-Paket kennen, mit denen obige Differentialgleichung gelöst werden kann. Mit `odeadvisor` macht Maple Vorschläge zur Lösungsmethode:

```
> odeadvisor(Dgl);
```

$$[_{separable}]$$

Für diesen speziellen Typ von DGLen stellt Maple den Befehl `separablesol` bereit. Dieser überprüft, ob eine DGL 1. Ordnung mit getrennten Variablen vorliegt und berechnet gegebenenfalls eine Lösung:

```
> Loesung := separablesol(Dgl,y(x));
```

$$Loesung := \left\{ y = \sqrt{-x^2 - 2_C1}, y = -\sqrt{-x^2 - 2_C1} \right\}$$

Maple liefert allgemeine Lösungen von Dgl in Form von Funktionsscharen, deren Scharparameter standardmäßig mit `_C1` bezeichnet wird. Die ‚Integrationskonstante‘ `_C1` tritt hier also — im Gegensatz zu dem Befehl `int` — explizit auf.

Wir machen die ‚Probe‘ mit Hilfe von `odetest` sowie auf mehr herkömmliche Art mittels `subs` (Substitution) beziehungsweise `eval` (Auswertung).

```
> odetest(Loesung,Dgl);
subs(Loesung,Dgl): simplify(%);
# alternativ: eval(Dgl,Loesung):
```

$$0, \quad -\frac{x}{\sqrt{-x^2 - 2_C1}} = -\frac{x}{\sqrt{-x^2 - 2_C1}}$$

Das Maple-Kommando `odetest(Loesung, Dgl)` überprüft, ob $Loesung$ die Differentialgleichung Dgl erfüllt. Trifft dies zu, so erhält man 0 oder $\{0\}$ als Ergebnis, je nachdem ob Dgl eine Gleichung oder eine Menge von Gleichungen ist.

Maple stellt noch weitere Lösungsmöglichkeiten bereit:

```
> dsolve(Dgl,y(x));
dsolve(Dgl,y(x),[separable]):
```

$$y = \sqrt{-x^2 + _C1}, y = -\sqrt{-x^2 + _C1}$$

Die Lösung wird hier stets in expliziter Form geliefert. Auf Wunsch kann man diese auch in impliziter Form erhalten und mit `odetest` auf ihre Richtigkeit überprüfen.

```
> Loesung := dsolve(Dgl,y(x),implicit);
      odetest(Loesung,Dgl);
```

$$\text{Loesung} := y^2 + x^2 - _C1 = 0, \quad 0$$

Man beachte, daß man mit `separablesol` keine Anfangswertaufgaben lösen kann! Dies gelingt vielmehr z. B. mittels `dsolve` unter Verwendung der Option `[separable]`. Hierdurch wird eine andere Lösungsmethode festgelegt. Wir überzeugen uns davon, indem wir `dsolve` beim Lösen ‚zuschauen‘:

```
> infolevel[dsolve] := 3: assume(b>0):
      dsolve({Dgl,AnfBed},y(x));
      dsolve({Dgl,AnfBed},y(x),[separable]):
      infolevel[dsolve] := 0:
```

```
-> Computing symmetries using: way = 3
Methods for first order ODEs:
--- Trying classification methods ---
trying a quadrature
5 trying 1st order linear
trying Bernoulli
<- Bernoulli successful
```

$$y = \sqrt{-x^2 + a^2 + b^2}$$

```
-> Computing symmetries using: way = 3
Classification methods on request
Methods to be used are: [separable]
-----
5 * Tackling ODE using method: separable
--- Trying classification methods ---
trying separable
<- separable successful
```

Beispiel 2:

Wir wollen zuerst die im Textteil angestellten Überlegungen mit Maple nachvollziehen:

```
> restart: with(DEtools): with(plots):
f := 1: g := s -> 1/sqrt(abs(s)):
Dgl := diff(y(x),x) = f(x)/g(y(x));
F := x -> int(f(t),t=a..x):
5 G := y -> int(g(s),s=b..y):
```

$$Dgl := y' = \sqrt{|y|}$$

```
> assume(u(x)>0,b>0):
G(u(x)) = F(x); isolate(%,u(x)); RHSu := rhs(%):
```

$$2\sqrt{u(x)} - 2\sqrt{b} = x - a, \quad u(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{a}{2} + \sqrt{b}\right)^2$$

Die weiter unten folgende Abbildung setzt sich aus drei Teilbildern zusammen. Wir beginnen mit der Lösung zu der Anfangsbedingung $y(2) = 1$:

```
> PlotOption := eval([RHSu,x=a-2*sqrt(b)..4],{a=2,b=1}):
p1 := plot(op(PlotOption),y=-4..4,color=red,thickness=3):
```

Im Falle $b > 0$ erhält man $]a - 2\sqrt{b}, \infty[$ als Existenzintervall für die Lösung, entsprechend für $b < 0$ das Existenzintervall $] - \infty, a + 2\sqrt{|b}|[$.

```
> assume(v(x)<0,b<0):
G(v(x)) = F(x); isolate(%,v(x)); RHSv := rhs(%):
```

$$-2\sqrt{-v(x)} + 2\sqrt{-b} = x - a, \quad v(x) = -\left(-\frac{x}{2} + \frac{a}{2} + \sqrt{-b}\right)^2$$

Als nächstes zeichnen wir die Lösung zur Anfangsbedingung $y(-2) = -1$.

```
> PlotOption := eval([RHSv,x=-4..a+2*sqrt(-b)],{a=-2,b=-1}):
p2 := plot(op(PlotOption),y=-4..4,color=black,thickness=3):
```

Etwas schwieriger sind die einzelnen Lösungen aus dem Ergebnis von `dsolve` bzw. `separablesol` abzulesen:

```
> dsolve(Dgl,y(x)); separablesol(Dgl,y(x)):
```

$$x - \left(\begin{cases} -2\sqrt{-y(x)} & y(x) \leq 0 \\ 2\sqrt{y(x)} & 0 < y(x) \end{cases} \right) + _{C1} = 0$$

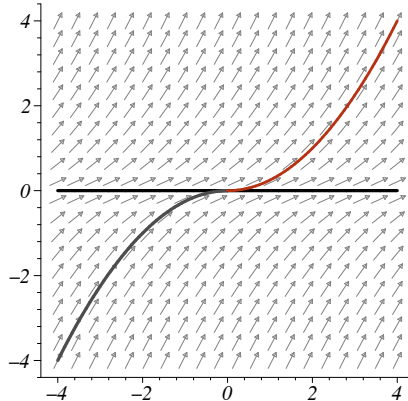
Schauen wir uns nun an, welche Lösung Maple für die Anfangsbedingung $y(a) = 0$ liefert:

```
> dsolve({Dgl,y(a)=0},y(x));
```

$$y(x) = 0$$

Nachfolgendes Bild veranschaulicht, daß die Lösung der Anfangswertaufgabe mit $y(a) = 0$ — hier speziell für $a = 0$ — nicht *eindeutig* ist.

```
> p3 := DEplot(Dgl,y(x),x=-4..4,y=-4..4,[[y(0)=0]],color=gray,
               linecolor=black,arrows=medium):
display(p1,p2,p3,axes=frame,scaling=constrained,labels=[" ", " "]);
```



Die *Gesamtlösung* der DGL erhält man für $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$ durch folgende stückweise definierte stetig differenzierbare Funktion $y_{\alpha,\beta}$:

```
y := (alpha,beta) ->
      piecewise(x<=alpha,-((x-alpha)/2)^2,x>=beta,((x-beta)/2)^2,0):
```

Man bestätigt dies leicht durch (Einsetzen und) Differenzieren:

```
> diff(y(alpha,beta),x):
```

Abschließend zeigen wir noch für $a = 1/2$ in einer *Animation*, wie die Lösung $y_{\alpha,\beta}$ in dem durch y_{\max} und y_{\min} (maximale bzw. minimale Lösung) gebildeten ‚Trichter‘ verläuft:

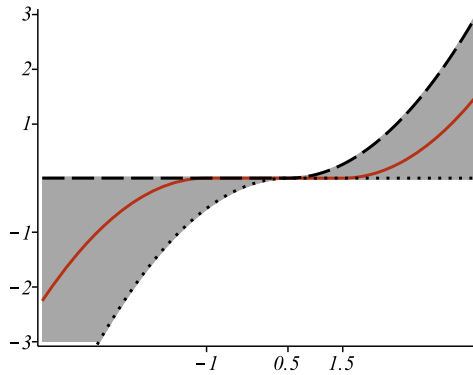
```
> alpha := readstat("Geben Sie eine Zahl zwischen -4 und a=0.5 ein: "):
```

```
Geben Sie eine Zahl zwischen -4 und a=0.5 ein: -1;
```

```
> beta := readstat("Geben Sie eine Zahl zwischen a=0.5 und 4 ein: "):
```

```
Geben Sie eine Zahl zwischen a=0.5 und 4 ein: 1.5;
```

```
> a := 0.5: TICKS := tickmarks=[[alpha,beta,a],[-3,-2,-1,1,2,3]]:
Trichter := plot([y(-infinity,a),y(a,infinity)],x=-4..4,color=black,
                 linestyle=[3,2]),plot([y(-infinity,a),y(a,infinity)],x=-4..4,
                 color=gray,filled=true):
5 Text := textplot([[3.2,2.7,"y[max]"],[-2.3,-2.8,"y[min]"]]):
Animation := animatecurve(y(alpha,beta),x=-4..4,color=red,frames=30):
display(Animation,Trichter,Text,TICKS,thickness=2,scaling=constrained,
        axes=frame,labels=[" "," "],view=[-4..4,-3..3]);
```



Beispiel 3:

```
> restart: with(DEtools):
f := 1: g := s -> 1/(1+s^2):
Dgl := diff(y(x),x) = f(x)/g(y(x));
AnfBed := y(a) = b;
```

$$Dgl := y' = 1 + y^2, \quad AnfBed := y(a) = b$$

Wir verfahren wieder entsprechend dem Vorgehen im Textteil:

```
> F := x -> int(f(t),t=a..x):
G := y -> int(g(s),s=b..y):
eq := G(y(x)) = F(x);
```

$$eq := \arctan(y) - \arctan(b) = x - a$$

Mit $c := a - \arctan(b)$ erhalten wir dann die Lösung in folgender Gestalt:

```
> Subst := c = a - arctan(b): subs(isolate(Subst,a),eq):
isolate(%,y(x));
```

$$y = \tan(x - c)$$

Auch mit Maple kann man die Lösungen der DGL sowohl in impliziter wie expliziter Form erhalten:

```
> dsolve(Dgl,y(x),implicit);
dsolve(Dgl,y(x));
separablesol(Dgl,y(x)):
```

$$x - \arctan(y) + _C1 = 0, \quad y = \tan(x + _C1)$$

2.2 DGLen vom Typ $y' = f\left(\frac{p_1 x + q_1 y + r_1}{p_2 x + q_2 y + r_2}\right)$

```
> restart: with(DEtools):
Dgl := diff(y(x),x) = f((p1*x+q1*y(x)+r1)/(p2*x+q2*y(x)+r2));
```

$$Dgl := y' = f\left(\frac{p_1 x + q_1 y + r_1}{p_2 x + q_2 y + r_2}\right)$$

Spezialfall I:

```
> f := t -> t^2:
p1,q1,r1 := 1,2,0: p2,q2,r2 := 0,0,1:
Dgl; AnfBed := y(0) = 0;
```

$$y' = (x + 2y)^2, \quad AnfBed := y(0) = 0$$

Wir schauen uns an, wie `dsolve` diese Anfangswertaufgabe löst:

```
> infolevel[dsolve] := 3:
dsolve({Dgl,AnfBed},y(x)): Loes := expand(%);
infolevel[dsolve] := 0:

-> Computing symmetries using: way = 3
Methods for first order ODEs:
--- Trying classification methods ---
trying a quadrature
5 trying 1st order linear
trying Bernoulli
trying separable
trying inverse linear
trying homogeneous types:
10 trying homogeneous C
1st order, trying the canonical coordinates of the invariance group
-> Computing canonical coordinates for the symmetry [1, -1/2]
-> Calling odsolve with the ODE diff(y(x) x) = -1/2 y(x)
*** Sublevel 2 ***
15 Methods for first order ODEs:
--- Trying classification methods ---
trying a quadrature
trying 1st order linear
<- 1st order linear successful
20 -> The canonical coordinates may not have unique inverse.
Trying gauging the symmetry to the form [0, eta(x,y)]
-> Computing canonical coordinates for the symmetry
[0,-4*y^2-4*x*y-1/2-x^2]
<- 1st order, canonical coordinates successful
25 <- homogeneous successful
```

$$Loes := y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x)$$

```
> odetest(Loes,Dgl), eval(Loes,x=0); # Probe
```

$$0, y(0) = 0$$

Die vorgegebene DGL wollen wir mit Hilfe der Substitution $u(x) = x+2y(x)$ in eine DGL mit getrennten Variablen überführen:

```
> Subst := u(x) = x+2*y(x):
eq1 := isolate(Subst,y(x));
Dchangevar(eq1,Dgl,x); # Kommando ist "obsolet".
```

$$eq1 := y = \frac{u}{2} - \frac{x}{2}, \quad \frac{u'}{2} - \frac{1}{2} = u^2$$

Der Maple-Befehl `Dchangevar` aus dem `DEtools`-Paket ist inzwischen durch das neue Kommando `PDEtools[dchange]` ersetzt worden. Im Hinblick auf die Kompatibilität mit früheren Maple-Versionen kann dieser Befehl immer noch benutzt werden. Es wird jedoch empfohlen, den neueren Befehl zu verwenden:

```
> PDEtools[dchange](eq1,Dgl,[u(x)]):
DglTrans := isolate(%,diff(u(x),x));
AnfBedTrans := subs(AnfBed,subs(x=0,Subst));
```

$$DglTrans := u' = 2u^2 + 1, \quad AnfBedTrans := u(0) = 0$$

Wir lösen die transformierte Anfangswertaufgabe:

```
> F := x -> int(1,t=0..x):
G := u -> int(1/(2*s^2+1),s=0..u):
G(u(x)) = F(x);
eq2 := isolate(%,u(x));
```

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} \arctan(u \sqrt{2}) = x, \quad eq2 := u = \frac{1}{2} \sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x)$$

Rücktransformation ergibt die Lösung der ursprünglichen AWA:

```
> PDEtools[dchange](Subst,eq2,[y(x)]): eq3 := isolate(%,y(x));
```

$$eq3 := y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x)$$

```
> odetest(eq3,Dgl), eval(eq3,x=0);
```

$$0, y(0) = 0$$

Spezialfall II:

```
> f := t -> sin(t)+t:
p1,q1,r1 := 0,1,0: p2,q2,r2 := 1,0,1:
Dgl; AnfBed := y(1) = Pi/2;
```

$$y' = \sin\left(\frac{y}{x+1}\right) + \frac{y}{x+1}, \quad \text{AnfBed} := y(1) = \frac{\pi}{2}$$

```
> odeadvisor(Dgl);
```

```
[[_homogeneous, class C], _dAlembert]
```

```
> dsolve({Dgl,AnfBed},y(x));
dsolve({Dgl,AnfBed},y(x),[homogeneous]);
dsolve({Dgl,AnfBed},y(x),[dAlembert]);
```

Sofern Maple überhaupt eine Lösung der Anfangswertaufgabe findet (versionsabhängig!), hat diese keine sonderlich überschaubare Form. Wir verzichten daher auf deren Ausgabe und modifizieren die Fragestellung:

```
> dsolve(Dgl,y(x)); # alternativ: genhomosol(Dgl,y(x));
```

$$y = -\arctan\left(\frac{2(x+1)-C1}{1+(x+1)^2-C1^2}, -\frac{-1+(x+1)^2-C1^2}{1+(x+1)^2-C1^2}\right)(x+1)$$

`dsolve` liefert die allgemeine Lösung der DGL in einer Form, die ohne Vorkenntnisse nur schwer verständlich ist und der Erläuterung bedarf. Interessant ist ein Vergleich mit anderen Computeralgebrasystemen:

MuPAD tut sich mit dem vorliegenden Problem ebenfalls schwer. Hingegen liefert *Mathematica* die Lösung der AWA in der schlichten Form

$$y(x) = 2(1+x) \arctan((1+x)/2 \cdot \tan(\pi/8))$$

und weist zudem darauf hin, daß es möglicherweise noch andere Lösungen gibt.

Da wir die Funktion `arctan(u,v)` nicht als bekannt voraussetzen wollen, wählen wir einen anderen Lösungsweg und überführen die vorgegebene DGL mit Hilfe der Substitution $u(x) = \frac{y(x)-y_0}{x-x_0}$ in eine DGL mit getrennten Variablen:

```
> x0:='x0': y0:='y0':
solve({p1*x0+q1*y0+r1=0,p2*x0+q2*y0+r2=0},{x0,y0});
assign(%):
```

$$\{x0 = -1, y0 = 0\}$$

```
> Subst := u(x) = (y(x)-y0)/(x-x0):
eq4 := isolate(Subst,y(x));
```

$$eq4 := y = u(x+1)$$

```
> PDEtools[dchange](eq4,Dgl,[u(x)]):
DglTrans := isolate(%,diff(u(x),x));
AnfBedTrans := subs(AnfBed,subs(x=1,Subst));
```

$$DglTrans := u' = \frac{\sin(u)}{x+1}, \quad AnfBedTrans := u(1) = \frac{\pi}{4}$$

Wir bestimmen die Lösung der transformierten DGL in *impliziter* Form:

```
> dsolve(DglTrans,u(x),implicit): eq5 := simplify(%);
```

$$eq5 := \ln(x+1) - \ln\left(\frac{\sin(u)}{\cos(u)+1}\right) + _C1 = 0$$

Mit Hilfe der Anfangswerte berechnen wir die Integrationskonstante $_C1$:

```
> subs(AnfBedTrans,subs(x=1,eq5)): radnormal(isolate(%,\_C1));
eq6 := eval(eq5,%);
```

$$_C1 = -\ln(2) + \ln(\sqrt{2}-1)$$

$$eq6 := \ln(x+1) - \ln\left(\frac{\sin(u)}{\cos(u)+1}\right) - \ln(2) + \ln(\sqrt{2}-1) = 0$$

Mit etwas Geschick erhält man daraus folgende Lösung:

```
> convert(eq6,tan): normal(%): isolate(%,u(x)): factor(%);
```

$$u = 2 \arctan\left(\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)(x+1)\right)$$

Es ist verwunderlich, daß Maple nicht die doch naheliegende Substitution $v(x) = \tan\left(\frac{u(x)}{2}\right)$ verwendet:

```
> Subst2 := v(x) = tan(u(x)/2):
isolate(Subst2,u(x));
PDEtools[dchange](%,DglTrans,[v(x)]): isolate(%,diff(v(x),x)):
DglTrans2 := normal(expand(convert(%,tan)));
5 AnfBedTrans2 := subs(AnfBedTrans,subs(x=1,Subst2));
```

$$u = 2 \arctan(v), \quad DglTrans2 := v' = \frac{v}{x+1}$$

$$AnfBedTrans2 := v(1) = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Hierfür erhalten wir

```
> dsolve({DglTrans2, AnfBedTrans2}, v(x)); eq7 := %:
```

$$v = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)(x+1)$$

Rücktransformation ergibt die Lösung der ursprünglichen AWA:

```
> PDEtools[dchange](Subst2, eq7, [u(x)]):
PDEtools[dchange](Subst, %, [y(x)]):
Loes := isolate(%, y(x)): factor(%);
```

$$y = 2 \arctan\left(\frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)(x+1)\right)(x+1)$$

Für den Vergleich mit der vorangehenden Lösung weisen wir darauf hin, daß $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$ gilt.

```
> odetest(y(x), Dgl), eval(Loes, x=1);
```

$$0, y(1) = \frac{\pi}{2}$$

Mit viel Mühe unsererseits liefert Maple damit endlich die Lösung der Anfangswertaufgabe in einer einfachen Form.

2.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

```
> restart: with(DEtools):
Dgl := diff(y(x), x) = f(x)*y(x)+g(x);
AnfBed := y(a) = b;
```

$$Dgl := y' = f(x)y + g(x), \quad AnfBed := y(a) = b$$

Zu Beginn untersuchen wir die DGL mit Hilfe des Befehls `odeadvisor`.

```
> odeadvisor(Dgl, [separable]), odeadvisor(Dgl);
```

$$[NONE], [_linear]$$

Offensichtlich ist sie nicht vom Typ ‚getrennte Variable‘, sondern eine lineare Differentialgleichung.

Entsprechend dem Vorgehen im Textteil lösen wir die homogene (lineare) DGL und bestimmen dann mittels *Variation der Konstanten* eine partikuläre Lösung:

```
> y0 := unapply(exp(int(f(t),t=a..x)),x);
DglHom := subs(g(x)=0,Dgl); # zugehörige homogene DGL
odetest(y(x)=y0(x),DglHom); # Probe
```

$$y_0 := \exp\left(\int_a^x f(t) dt\right), \quad DglHom := y' = f(x)y, \quad 0$$

```
> c := unapply(int(g(t)/y0(t),t=a..x),x):
yP := unapply(c(x)*y0(x),x):
'yP(x)' = int(g(t)/'y0(t)',t=a..x)*'y0(x)';
odetest(y(x)=yP(x),Dgl); # Probe
```

$$yP(x) = \int_a^x \frac{g(t)}{y_0(t)} dt y_0(x), \quad 0$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL erhalten wir dann durch $y_P(x) + C y_0(x)$ mit beliebigem reellem C .

```
> odetest(y(x)=yP(x)+C*y0(x),Dgl);
```

0

Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist gleich $y_P(x) + b y_0(x)$:

```
> eval(y(x)=yP(x)+b*y0(x),x=a);
```

$$y(a) = b$$

Wir sehen uns nun folgendes einfache Beispiel an:

Beispiel 4:

```
> f := x -> -x: g := x -> 3*x: Dgl;
a := 0: b := 5:
```

$$y' = -xy + 3x$$

```
> 'y0(x)' = y0(x), odetest(y(x)=y0(x),DglHom);
```

$$y_0(x) = e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}, \quad 0$$

```
> 'yP(x)' = simplify(yP(x)), odetest(y(x)=yP(x),Dgl);
```

$$yP(x) = 3 - 3e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}, \quad 0$$

```
> y(x) = yP(x)+C*y0(x): simplify(%);
    odetest(% ,Dgl);
```

$$y = 3 - 3e\left(-\frac{x^2}{2}\right) + Ce\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad 0$$

Lösung der Anfangswertaufgabe:

```
> y(x) = yP(x)+b*y0(x): simplify(%);
```

$$y = 3 + 2e\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Jetzt führen wir die vorangehenden Überlegungen nochmals durch, diesmal durch *direkte* Anwendung geeigneter Maple-Befehle:

Lösung der homogenen DGL $y' = -xy$:

```
> dsolve({DglHom,y(a)=1},y(x));
    y0 := unapply(eval(y(x),%),x):
```

$$y = e\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL mittels Variation der Konstanten:

```
> eq := varparam([y0(x)],g(x),x);
```

$$eq := {}_C1 e\left(-\frac{x^2}{2}\right) + 3$$

```
> solve(eval(eq,x=a),{_C[1]});
    eval(eq,%):
    yP := unapply(% ,x);
```

$$\{{}_C1 = -3\}, \quad yP := x \rightarrow -3e\left(-\frac{x^2}{2}\right) + 3$$

Allgemeine Lösung der linearen DGL:

```
> y(x) = yP(x)+C*y0(x);
```

$$y = -3e\left(-\frac{x^2}{2}\right) + 3 + Ce\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Alternativ:

```
> linearsol(Dgl,y(x));
```

$$\{y = 3 + {}_C1 e\left(-\frac{x^2}{2}\right)\}$$

`linearsol` testet, ob die DGL eine lineare DGL 1. Ordnung ist, und liefert gegebenenfalls die allgemeine Lösung. Universell verwendbar ist der Maple-Befehl `dsolve`:

```
> dsolve(Dgl,y(x));
dsolve(Dgl,y(x),[linear]):
```

$$y = 3 + _C1 e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

Lösung der Anfangswertaufgabe:

```
> solve(yP(a)+C*y0(a)=b,{C});
y(x) = eval(yP(x)+C*y0(x),%);
```

$$\{C = 5\}, \quad y = 3 + 2 e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

Die Anfangswertaufgabe kann mit `dsolve` auch so gelöst werden:

```
> dsolve({Dgl,AnfBed},y(x));
dsolve({Dgl,AnfBed},y(x),[linear]):
```

$$y = 3 + 2 e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

2.4 Bernoulli-Differentialgleichung

```
> restart: with(DEtools):
Dgl := diff(y(x),x) = f(x)*y(x)+g(x)*y(x)^alpha;
odeadvisor(Dgl);
```

$$Dgl := y' = f(x)y + g(x)y^\alpha, \quad [_{Bernoulli}]$$

Diese DGL wollen wir mit Hilfe der Substitution $u(x) = y(x)^{1-\alpha}$ in eine lineare DGL 1. Ordnung überführen:

```
> Subst := u(x) = y(x)^(1-alpha);
isolate(Subst,y(x));
PDEtools[dchange](%,Dgl,[u(x)]):
isolate(%,diff(u(x),x)):
5 DglTrans := simplify(%,symbolic);
```

$$\begin{aligned} Subst &:= u = y^{(-\alpha+1)}, & y &= u^{\left(\frac{1}{-\alpha+1}\right)}, \\ DglTrans &:= u' = -(-1+\alpha)(f(x)u + g(x)) \end{aligned}$$

Beispiel 5:

```
> f := x -> x: g := x -> -3*x: alpha := 2:
Dgl, DglTrans;
AnfBed := y(0) = 1/4;
AnfBedTrans := subs(AnfBed,subs(x=0,Subst));
```

$$y' = xy - 3xy^2, \quad u' = -xu + 3x,$$

$$\text{AnfBed} := y(0) = \frac{1}{4}, \quad \text{AnfBedTrans} := u(0) = 4$$

Die transformierte Anfangswertaufgabe lösen wir jetzt direkt mit `dsolve`:

```
> dsolve({DglTrans, AnfBedTrans}, u(x));
```

$$u = 3 + e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

Rücktransformation ergibt die Lösung der ursprünglichen AWA:

```
> PDEtools[dchange](Subst, %, [y(x)]):
isolate(%, y(x));
odetest(%, Dgl), eval(%, x=0);
```

$$y = \frac{1}{3 + e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}}, \quad 0, y(0) = \frac{1}{4}$$

Direkte Lösung der Anfangswertaufgabe mit `dsolve`:

```
> dsolve({Dgl, AnfBed}, y(x)):
dsolve({Dgl, AnfBed}, y(x), [Bernoulli]):
```

Zum Schluß erwähnen wir noch der Vollständigkeit halber drei (nahezu gleichwertige) Maple-Befehle, mit deren Hilfe die allgemeine Lösung der BERNOULLI-DGL berechnet werden kann:

```
> bernoullisol(Dgl, y(x));
dsolve(Dgl, y(x), [Bernoulli]):
dsolve(Dgl, y(x)):
```

$$\left\{ y = \frac{1}{3 + e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)} - C1} \right\}$$

2.5 Riccati-Differentialgleichung

```
> restart: with(DEtools):
Dgl := diff(y(x), x) = f(x)*y(x)^2 + g(x)*y(x) + h(x);
odeadvisor(Dgl);
```

$$Dgl := y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x), \quad [_{Riccati}]$$

Zusammenhang mit homogener linearer DGL 2. Ordnung

Mit der folgenden Substitution reduzieren wir die DGL auf eine RICCATI-DGL in Normalform:

```
> Subst1 := z(x) = -f(x)*y(x): eq1 := isolate(Subst1,y(x));
```

$$eq1 := y = -\frac{z}{f(x)}$$

```
> PDEtools[dchange](eq1,Dgl,[z(x)]):
isolate(%,diff(z(x),x)):
expand(%) : DglTrans1 := collect(%,z(x));
```

$$DglTrans1 := z' = -z^2 + \left(g(x) + \frac{f'}{f(x)}\right)z - f(x)h(x)$$

Im nächsten Schritt transformieren wir diese Normalform auf eine lineare homogene DGL 2. Ordnung:

```
> Subst2 := u(x) = exp(int(z(x),x));
diff(Subst2,x);
subs(exp(int(z(x),x))=u(x),%): Subst3 := isolate(%,z(x));
```

$$Subst2 := u = e^{\int z dx}, \quad u' = z e^{\int z dx}, \quad Subst3 := z = \frac{u'}{u}$$

```
> PDEtools[dchange](Subst3,DglTrans1,[u(x)]):
isolate(%,diff(u(x),x$2)):
expand(%) : DglTrans2 := collect(%,diff(u(x),x));
```

$$DglTrans2 := u'' = \left(g(x) + \frac{f'}{f(x)}\right)u' - u f(x)h(x)$$

Beispiel 6:

```
> f := -2: g := 0: h := -1:
Dgl; DglTrans1; DglTrans2;
```

$$y' = -2y^2 - 1, \quad z' = -z^2 - 2, \quad u'' = -2u$$

```
> dsolve(DglTrans2,u(x));
subs(%,Subst3): simplify(%);
subs(Subst1,%): isolate(%,y(x));
```

$$\begin{aligned} u &= {}_C1 \sin(\sqrt{2}x) + {}_C2 \cos(\sqrt{2}x), \\ z &= \frac{\sqrt{2}({}_C1 \cos(\sqrt{2}x) - {}_C2 \sin(\sqrt{2}x))}{{}_C1 \sin(\sqrt{2}x) + {}_C2 \cos(\sqrt{2}x)}, \\ y &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}({}_C1 \cos(\sqrt{2}x) - {}_C2 \sin(\sqrt{2}x))}{{}_C1 \sin(\sqrt{2}x) + {}_C2 \cos(\sqrt{2}x)} \end{aligned}$$

Auf folgende Weisen kann man die allgemeine Lösung der DGL *direkt* erhalten:


```
> riccatisol(Dgl,y(x)), dsolve(Dgl,y(x));
dsolve(Dgl,y(x),[Riccati]):
```

$$\left\{ y = \frac{1}{4} \tan \left(-\frac{x\sqrt{8}}{2} + \frac{C1\sqrt{8}}{2} \right) \sqrt{8} \right\}, \quad y = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x + \sqrt{2} - C1)$$

Elementare Integration bei bekannter spezieller Lösung

```
> unassign('f','g','h');
Subst1 := z(x) = y(x)-y0(x);
isolate(Subst1,y(x));
eq2 := PDEtools[dchange](%,Dgl,[z(x)]):
```

$$y = z + y0(x)$$

```
> eq2-subs(y(x)=y0(x),Dgl): isolate(%,diff(z(x),x)):
DglTrans1 := collect(expand(%,z(x)));
odeadvisor(%);
```

$$DglTrans1 := z' = f(x)z^2 + (2f(x)y0(x) + g(x))z, \quad [_{Bernoulli}]$$

```
> Subst2 := u(x) = 1/z(x): isolate(Subst2,z(x)):
PDEtools[dchange](%,DglTrans1,[u(x)]): isolate(%,diff(u(x),x)):
DglTrans2 := collect(expand(%,u(x)));
odeadvisor(DglTrans2);
```

$$DglTrans2 := u' = (-2f(x)y0(x) - g(x))u - f(x), \quad [_{linear}]$$

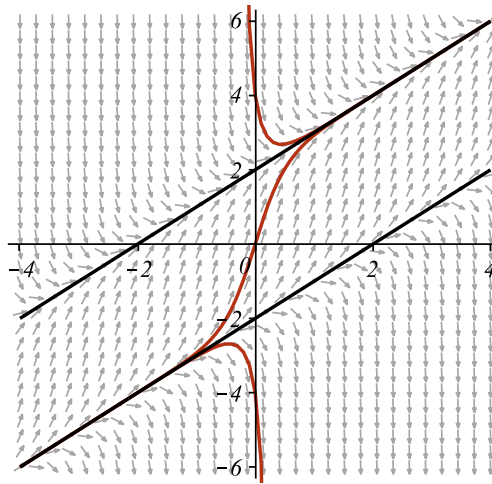
Beispiel 7:

```
> f := -1: g := x -> 2*x: h := x -> -x^2+5: Dgl;
```

$$y' = -y^2 + 2xy - x^2 + 5$$

Wir veranschaulichen diese RICCATI-DGL anhand eines Richtungsfeldes und einiger Lösungen:

```
> DEplot(Dgl,y(x),x=-4..4,y=-6..6,[seq([0,k],k=[0,4,-4,2,-2])],
color=gray,linecolor=[black$3,red$2],dirgrid=[30,30],stepsize=0.1,
arrows=medium);
```



Sie besitzt folgende spezielle Lösung:

```
> y0 := x -> x-2;
    odetest(y(x)=y0(x),Dgl);
```

$$y0 := x \rightarrow x - 2, \quad 0$$

Wir lösen die transformierte DGL:

```
> DglTrans2;
    eq3 := dsolve(DglTrans2,u(x));
```

$$u' = -4u + 1, \quad eq3 := u = \frac{1}{4} + e^{-4x} C1$$

```
> subs(Subst2,eq3);
    eq4 := subs(Subst1,%);
```

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{4} + e^{-4x} C1, \quad eq4 := \frac{1}{y-x+2} = \frac{1}{4} + e^{-4x} C1$$

```
> isolate(eq4,y(x));
    odetest(%,Dgl);
```

$$y = \frac{1}{\frac{1}{4} + e^{-4x} C1} + x - 2, \quad 0$$

Anhand dieser Schar von Lösungen läßt sich Satz 2.5.3 (vgl. Seite 32) verifizieren, der einen Überblick über die Lösungsgesamtheit der RICCATI-DGL gab.

2.6 Exakte Differentialgleichungen

```
> restart: with(DEtools):
  Dgl := f1(x,y(x))+f2(x,y(x))*diff(y(x),x) = 0;
```

$$Dgl := f1(x, y) + f2(x, y) y' = 0$$

Beispiel 8:

```
> f1 := (x,y) -> exp(y): f2 := (x,y) -> x*exp(y)+cos(y): Dgl;
```

$$e^y + (x e^y + \cos(y)) y' = 0$$

Wir überprüfen, ob diese DGL exakt ist:

```
> diff(f2(x,y),x)-diff(f1(x,y),y);
```

$$0$$

Bei diesem Beispiel handelt es sich offensichtlich um eine exakte DGL. Die Berechnung der Stammfunktion ist auf drei verschiedene Arten möglich. Der Weg über ein ‚Hakenintegral‘ ist vorne im Textteil (S. 34) beschrieben und soll hier nicht aufgegriffen werden. Zwei weitere Möglichkeiten bestehen darin, die Stammfunktion mit Hilfe der Maple-Befehle `VectorCalculus[ScalarPotential]` oder `linalg[potential]` zu berechnen:

```
> with(VectorCalculus): SetCoordinates('cartesian' [x,y]):
  v := VectorField(<f1(x,y),f2(x,y)>):
  F := ScalarPotential(v);
```

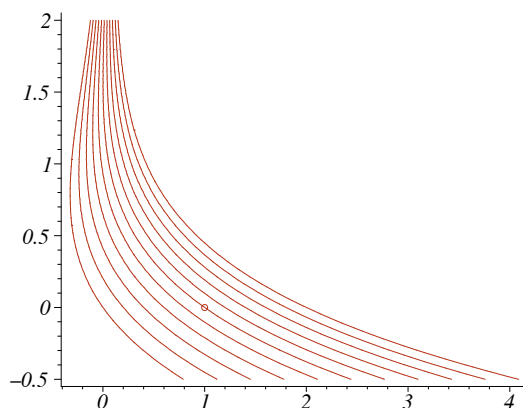
$$F := x e^y + \sin(y)$$

```
> linalg[potential]([f1(x,y),f2(x,y)], [x,y], 'F'); F;
```

$$true, \quad x e^y + \sin(y)$$

Es gilt $F(1, 0) = 1$. Wir zeichnen die Höhenlinien mit den Niveaus 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0:

```
> with(plots):
  contourplot(F,x=-5..5,y=-0.5..2,color=red,grid=[50,50],
    contours=[1+k/5 $ k=-5..5]):
  plot([[1,0]],style=point,symbol=circle,symbolsize=16,color=red):
5 display(% , axes=frame);
```



Setzen wir F gleich einer Konstanten C , so erhalten wir eine Lösung der obigen DGL:

```
> subs(y=y(x),F) = C; odetest(%,Dgl);
```

$$x e^y + \sin(y) = C, \quad 0$$

Die Exaktheit der vorgegebenen DGL lässt sich natürlich auch folgendermaßen überprüfen:

```
> odeadvisor(Dgl);
```

```
[[_1st_order, _with_exponential_symmetries], _exact]
```

Die Befehle `exactsol`, `firint` ('first integral') bzw. `dsolve` mit der Option `[exact]` ergeben ebenfalls die Lösung in obiger Form:

```
> exactsol(Dgl,y(x)): firint(Dgl);
dsolve(Dgl,y(x),[exact]):
```

$$x e^y + \sin(y) + _C1 = 0$$

Wenn wir den Befehl `dsolve` ohne Option anwenden, stellt Maple das Ergebnis etwas anders dar:

```
> dsolve(Dgl,y(x));
```

$$x + e^{-y} \sin(y) - e^{-y} _C1 = 0$$

Multiplikatoren

Beispiel 9:

```
> restart: with(DEtools):
f1 := (x,y) -> x*y-2: f2 := (x,y) -> x^2-x*y:
Dgl := f1(x,y(x))+f2(x,y(x))*diff(y(x),x) = 0;
```

$$Dgl := xy - 2 + (x^2 - xy)y' = 0$$

```
> odeadvisor(Dgl,[exact]);
```

[NONE]

Wir multiplizieren die DGL mit einem Faktor $\mu(x, y)$, um eine exakte DGL zu erzeugen. Für diese Funktion erhalten wir dann folgende Bedingung:

```
> Dgl2 := collect(mu(x,y)*Dgl,diff(y(x),x));
```

$$Dgl2 := \mu(x, y) (x^2 - xy) y' + \mu(x, y) (xy - 2) = 0$$

```
> eq1 := diff(mu(x,y)*f2(x,y),x) = diff(mu(x,y)*f1(x,y),y);
```

$$eq1 := \mu_x (x^2 - xy) + \mu(x, y) (2x - y) = \mu_y (xy - 2) + \mu(x, y) x$$

Es ergibt sich also eine *partielle* Differentialgleichung für die Funktion μ . Diese vereinfacht sich zu einer DGL, wenn wir zum Beispiel annehmen, daß sich eine nur von x abhängige Funktion finden läßt:

```
> eq2 := eval(eq1,mu(x,y)=mu(x));
```

$$eq2 := \mu' (x^2 - xy) + \mu(x) (2x - y) = \mu(x) x$$

```
> eq3 := isolate(eq2,diff(mu(x),x)): normal(%);
```

$$\mu' = -\frac{\mu(x)}{x}$$

```
> dsolve(eq3,mu(x));
```

$$\mu(x) = \frac{C1}{x}$$

Schneller und leichter geht es natürlich so:

```
> mu := intfactor(Dgl);
```

$$\mu := \frac{1}{x}$$

```
> expand(mu*Dgl):
```

```
Dgl2 := collect(%,diff(y(x),x));
```

$$Dgl2 := (x - y) y' + y - \frac{2}{x} = 0$$

```
> odeadvisor(Dgl2,[exact]);
```

[_exact]

```
> exactsol(Dgl2,y(x)); dsolve(Dgl2,y(x),[exact]):
dsolve(Dgl2,y(x));
```

$$\{y = x - \sqrt{x^2 - 4 \ln(x) + 2 - C1}, y = x + \sqrt{x^2 - 4 \ln(x) + 2 - C1}\}$$

$$y = x - \sqrt{x^2 - 4 \ln(x) + 2 - C1}, y = x + \sqrt{x^2 - 4 \ln(x) + 2 - C1}$$

Zur Vertiefung der vorangehenden Überlegungen greifen wir die lineare DGL 1. Ordnung aus Abschnitt 2.3 auf und bringen sie auf folgende Gestalt:

```
> restart: with(DEtools):
f1 := (x,y) -> -f(x)*y-g(x): f2 := 1:
Dgl := f1(x,y(x))+f2(x,y(x))*diff(y(x),x) = 0;
```

$$Dgl := -f(x)y - g(x) + y' = 0$$

Offensichtlich ist sie keine exakte DGL:

```
> odeadvisor(Dgl,[exact]);
diff(f2(x,y),x)-diff(f1(x,y),y);
```

$$[NONE], \quad f(x)$$

Mit Hilfe des Maple-Befehls `intfactor` suchen wir deshalb nach einem integrierenden Faktor:

```
> intfactor(Dgl); alias(mu=%):
Dgl2 := collect(mu*Dgl,diff(y(x),x));
```

$$e^{\int -f(x) dx}, \quad Dgl2 := \mu y' + \mu(-f(x)y - g(x)) = 0$$

Wir überzeugen uns, daß die DGL nun exakt ist:

```
> diff(mu*f2(x,y),x)-diff(mu*f1(x,y),y);
odeadvisor(Dgl2,[exact,linear]);
```

$$0, \quad [_{exact}, _{linear}]$$

Mithin ist

```
> linalg[potential]([mu*f1(x,y),mu*f2(x,y)], [x,y], 'F'):
'F' = F;
```

$$F = \int \mu(-f(x)y - g(x)) dx$$

eine zugehörige Stammfunktion, und wegen

```
> F1 := int(mu*(-f(x))*y,x)-int(mu*g(x),x);
diff(F-F1,x): expand(%), diff(F-F1,y);
```

$$F1 := \mu y - \int \mu g(x) dx, \quad 0, 0$$

ist $F1$ ebenfalls eine Stammfunktion. Auflösen der Gleichung $F1 = C$ liefert dann die allgemeine Lösung:

```
> y(x) = solve(F1=C,y);
    odetest(%,Dgl);
```

$$y = \frac{\int \mu g(x) dx + C}{\mu}, \quad 0$$

2.7 Clairaut-Differentialgleichung

Im Gegensatz zu den bisher behandelten DGLen tritt in der CLAIRAUT-DGL y' meist nicht-linear auf, und es werden hierbei keine Voraussetzungen über die (eventuell nur lokal mögliche) Auflösbarkeit nach y' gemacht.

```
> restart: with(DEtools): with(plots):
    Dgl := y(x) = x*diff(y(x),x)-g(diff(y(x),x));
```

$$Dgl := y = x y' - g(y')$$

```
> odeadvisor(Dgl);
```

[_ Clairaut]

```
> g := cosh: Dgl;
```

$$y = x y' - \cosh(y')$$

```
> clairautsol(Dgl,y(x)); dsolve(Dgl,y(x));
```

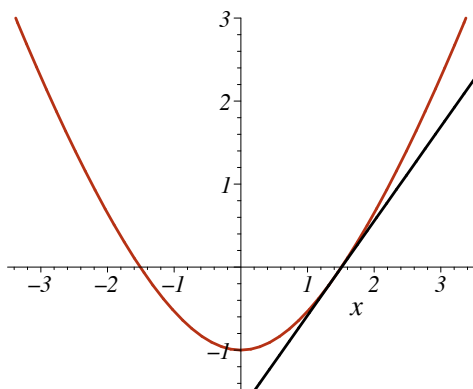
$$\{y = x_C1 - \cosh(_C1), y = \operatorname{arcsinh}(x)x - \sqrt{x^2 + 1}\}, \\ y = \operatorname{arcsinh}(x)x - \sqrt{x^2 + 1}, y = x_C1 - \cosh(_C1)$$

Maple verwendet für die inverse Funktion zu \sinh die eigenartige Bezeichnung $\operatorname{arcsinh}$! Normalerweise heißt sie arsinh (*Area Sinus Hyperbolicus*).

```
> dsolve({Dgl,y(2)=-1/2},y(x),[Clairaut]); # klappt nicht!
```

Wir veranschaulichen die Lösungsgesamtheit dieser DGL, d. h. die singuläre Lösung $y(x) = \operatorname{arcsinh}(x)x - \sqrt{x^2 + 1}$ nebst zugehöriger Tangentenschar $y(t) + D(y)(t)(x - t)$, mittels einer Animation. Der Scharparameter t läuft dabei von -3 bis 3.

```
> xrange := -3.5..3.5:
    y := x -> arcsinh(x)*x-sqrt(x^2+1):
    Kurve := plot(y(x),x=xrange,color=red):
    Animation := animate(y(t)+D(y)(t)*(x-t),x=xrange,t=-3..3,color=black,
5                      frames=31):
    display(Animation,Kurve,thickness=3,view=[xrange,-1.1..3]);
```

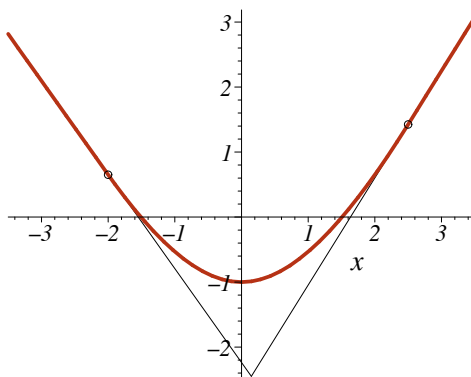


Zum Schluß veranschaulichen wir noch die Gesamtheit aller stetig differenzierbaren Lösungen dieser DGL, die sich stückweise aus der singulären Lösung sowie ihren Tangenten zusammensetzt:

```
> Tangente := a -> y(a)+D(y)(a)*(x-a):
  z := (alpha,beta) -> piecewise(x<=alpha,Tangente(alpha),
                                x<=beta,y(x),Tangente(beta));
```

```
z := (α, β) → piecewise(x ≤ α, Tangente(α), x ≤ β, y(x), Tangente(β))
```

```
> a := -2: b := 2.5:
  c := solve(Tangente(a)=Tangente(b),x):
  display(plot(z(a,b),x=xrange,color=red,thickness=2),
    pointplot([[a,y(a)], [b,y(b)]],symbol=circle,symbolsize=18),
5   plot([[a,y(a)], [c,eval(Tangente(a),x=c)], [b,y(b)]],style=line,
    color=black));
```



Gewöhnliche Differentialgleichungen

Theorie und Praxis - vertieft und visualisiert mit Maple®

Forst, W.; Hoffmann, D.

2013, XVIII, 389 S. 124 Abb., 69 Abb. in Farbe.,

Softcover

ISBN: 978-3-642-37882-9