

2.1	Grundbegriffe	53
2.1.1	Ladungen und Ströme	53
2.1.2	Coulomb'sches Gesetz, elektrisches Feld	57
2.1.3	Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik	66
2.1.4	Feldverhalten an Grenzflächen	70
2.1.5	Elektrostatische Feldenergie	72
2.1.6	Aufgaben	75
2.2	Einfache elektrostatische Probleme	78
2.2.1	Plattenkondensator	78
2.2.2	Kugelkondensator	81
2.2.3	Zylinderkondensator	82
2.2.4	Der Dipol	84
2.2.5	Dipolschicht	89
2.2.6	Der Quadrupol	92
2.2.7	Multipolentwicklung	96
2.2.8	Wechselwirkung einer Ladungsverteilung mit einem äußeren Feld	100
2.2.9	Aufgaben	102
2.3	Randwertprobleme der Elektrostatik	106
2.3.1	Formulierung des Randwertproblems	106
2.3.2	Klassifikation der Randbedingungen	108
2.3.3	Green'sche Funktion	111
2.3.4	Methode der Bildladungen	116

2.3.5	Entwicklung nach orthogonalen Funktionen	124
2.3.6	Separation der Variablen	129
2.3.7	Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten	135
2.3.8	Potential einer Punktladung, sphärische Multipolmomente	138
2.3.9	Aufgaben	142
2.4	Elektrostatik der Dielektrika	150
2.4.1	Makroskopische Feldgrößen	150
2.4.2	Molekulare Polarisierbarkeit	159
2.4.3	Randwertprobleme, elektrostatische Energie	163
2.4.4	Aufgaben	166
	Kontrollfragen	169

## 2.1 Grundbegriffe

### 2.1.1 Ladungen und Ströme

Die Grundgrößen der Klassischen Mechanik,

- ▶ Masse, Länge, Zeit,

sind mehr oder weniger direkt über unsere Sinnesorgane und unser angeborenes Zeitgefühl erfahrbar. Wir können sie gewissermaßen ohne experimentelle Hilfsmittel wahrnehmen. In der Elektrodynamik tritt als vierte Grundgröße die

- ▶ Ladung

hinzu, deren Beobachtung allerdings spezielle Hilfsmittel erfordert. Es gibt kein Sinnesorgan für eine direkte Wahrnehmung elektrischer Erscheinungen. Das macht sie dem Anfänger *unanschaulich* und begrifflich schwieriger.

Bereits vor Thales von Milet (625 bis 547 v. Chr.) war bekannt, dass bestimmte Körper ihre Eigenschaften ändern, wenn man sie an anderen Körpern reibt. Mit einem Tuch geriebener Bernstein (griechisch: elektron) ist z. B. in der Lage, kleine, leichte Körper (Körner, Papierschnitzel o. Ä.) anzuziehen. Die dabei auftretenden Kräfte können mechanisch nicht mehr erklärt werden. Man sagt deshalb zunächst einfach, das geriebene Material befinde sich in einem

- ▶ elektrischen Zustand.

Man beobachtet weiter, dass sich dieser Zustand durch Berühren von einem zum anderen Körper übertragen lässt, was sich am elegantesten durch Einführen einer *substanziartigen* Größe, der

- ▶ elektrischen Ladung  $Q$ ,

erklären lässt. Diese wird als Ursache der oben erwähnten Kräfte angesehen. Sie kann bei entsprechendem Kontakt als

- ▶ elektrischer Strom  $I$

von einem zum anderen Körper *fließen*.

Die experimentelle Erfahrung lehrt, dass es zwei Arten von Ladungen gibt, die man ziemlich willkürlich, aber zweckmäßig durch die Begriffe **positiv** und **negativ** unterscheidet:

$$\begin{aligned} Q > 0: & \text{ positive Ladung ,} \\ Q < 0: & \text{ negative Ladung .} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Das Ladungsvorzeichen ist so festgelegt, dass Reiben eines Glasstabes auf diesem die Ladung  $Q > 0$  zurücklässt, Reiben eines Hartgummistabes dagegen die Ladung  $Q < 0$ . Diese Festlegung hat zur Folge, dass die Ladung des Elektrons, die man als natürliche Einheit wählt, negativ ist. Bezüglich additiver und multiplikativer Rechenoperationen verhalten sich Ladungen wie gewöhnliche positive und negative Zahlen:

**Gesamtladung:**

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i . \quad (2.2)$$

$Q = 0$  bedeutet zunächst nur, dass sich positive und negative Ladungen kompensieren, und nicht notwendig, dass der gesamte Körper aus elektrisch *neutralen* Bausteinen aufgebaut ist. Abführen von positiver Ladung lässt den Körper negativ geladen zurück und umkehrt.

Für Ladungen gilt ein **Erhaltungssatz**:

*In einem abgeschlossenen System bleibt die Summe aus positiver und negativer Ladung konstant.*

Bei den oben angeführten Reibungsversuchen ist also keine Ladung *erzeugt* worden; es wurden lediglich positive und negative Ladungen voneinander räumlich getrennt.

Für einen tieferen Einblick in die elektromagnetischen Vorgänge ist die experimentelle Erkenntnis entscheidend, dass ebenso wie die Materie auch die Ladung eine *gequantelte*, atomistische Struktur besitzt. Es gibt eine kleinste, nicht mehr teilbare

► **Elementarladung  $e$ .**

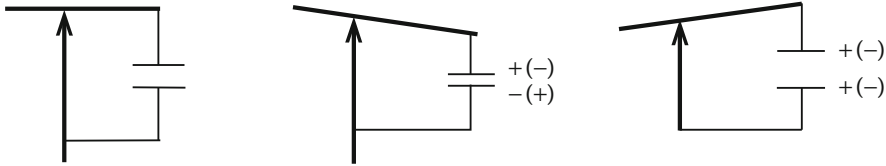
Jede andere Ladung lässt sich dann als ganzzahliges Vielfaches von  $e$  schreiben:

$$Q = n e ; \quad n \in \mathbb{Z} . \quad (2.3)$$

Beispiele:

Elektron:	$n = -1$ ,
Proton:	$n = +1$ ,
Neutron:	$n = 0$ ,
Atomkern:	$n = Z$ (Ordnungszahl) .

## 2.1 Grundbegriffe



**Abb. 2.1** Schematische Darstellung der Ladungs-Waage

Experimentelle Beweise für die Ladungsquantelung sind:

1. die Elektrolyse (Faraday'sches Gesetz),
2. der Millikan-Versuch.

Ein für die Elektrodynamik wichtiger Begriff ist die

- **Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r})$ ,**

die als Ladung pro Volumeneinheit aufzufassen ist. Aus ihr berechnet sich die Gesamtladung  $Q$  im Volumen  $V$  gemäß

$$Q = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) . \quad (2.4)$$

In strenger Analogie zum Konzept des Massenpunktes in der Klassischen Mechanik führt man in der Elektrodynamik die

- **Punktladung  $q$**

dann ein, wenn die Ladungsverteilung von allseitig vernachlässigbarer Ausdehnung ist. Dies ergibt für die Ladungsdichte einer Punktladung:

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) . \quad (2.5)$$

Diese Abstraktion bedeutet häufig eine starke mathematische Vereinfachung, die jedoch bisweilen auch mit Vorsicht zu behandeln ist.

Die Tatsache, dass geladene Körper aufeinander Kräfte ausüben, kann zur Messung der Ladung ausgenutzt werden (*Elektrometer*). Man beobachtet, dass sich Ladungen gleichen Vorzeichens abstoßen und die ungleichen Vorzeichens anziehen. Das ist sehr einfach an einer *Ladungs-Waage* zu demonstrieren.

Zur vorläufigen (!) Definition der Ladungseinheit benutzen wir das Konzept der Punktladung:

*Zwei Punktladungen gleichen Betrages, die im Vakuum im Abstand von 1 m die Kraft*

$$F = \frac{10^{12}}{4\pi \cdot 8,8543} \text{ N} \quad (2.6)$$

*aufeinander ausüben, besitzen jeweils die Ladung*

$$1 \text{ Coulomb (1 C)} = 1 \text{ Amperesekunde (1 A s)} .$$

Die Bedeutung dieser Definition wird später klar werden. Sie hat für die Elementarladung  $e$  zur Folge:

$$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} . \quad (2.7)$$

Wie bereits erwähnt, bilden **bewegte** Ladungen einen elektrischen Strom bzw. eine

► **Stromdichte  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$**

$\frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{j}|}$ : Normale in Bewegungsrichtung der fließenden Ladung ,

$|\mathbf{j}|$ : Ladung, die pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit senkrecht zur Stromrichtung transportiert wird.

### Beispiel

Homogene Verteilung von  $N$  Teilchen der Ladung  $q$  über ein Volumen  $V$ , die alle die gleiche Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  aufweisen:

$$\mathbf{j} = n q \mathbf{v} , \quad n = \frac{N}{V} . \quad (2.8)$$

Als **Stromstärke**  $I$  durch eine vorgegebene Fläche  $F$  bezeichnet man dann das Flächenintegral

$$I = \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} . \quad (2.9)$$

## 2.1 Grundbegriffe

Die Einheit ist das Ampere. Ein Strom der Stärke 1 A transportiert in 1 s die Ladung 1 C. Die genaue Festlegung der Einheit erfolgt über die Kraftwirkung zwischen zwei von definierten Strömen durchflossenen Leitern (s. später).

Der Erhaltungssatz der Ladung lässt sich als **Kontinuitätsgleichung** formulieren:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 . \quad (2.10)$$

Diese Beziehung haben wir bereits früher (1.55) mithilfe des Gauß'schen Satzes abgeleitet. Wir hatten dabei vorausgesetzt, dass die zeitliche Änderung der Gesamtladung in einem beliebigen Volumen  $V$  dem Ladungsstrom durch die Oberfläche  $S(V)$  entgegengesetzt gleich sein muss. Dies entspricht aber gerade der Ladungserhaltung in einem abgeschlossenen System.

### 2.1.2 Coulomb'sches Gesetz, elektrisches Feld

Wir untersuchen nun etwas genauer die Art und Weise, wie geladene Körper miteinander wechselwirken. Dabei stützen wir uns zunächst ausschließlich auf die experimentelle Erfahrung.

Die beiden Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  haben den Abstand

$$r_{12} = |\mathbf{r}_{12}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| .$$

Dieser soll sehr viel größer sein als die Linearabmessungen der beiden Ladungsverteilungen, sodass wir letztere als Punktladungen auffassen können. Dann gilt für die Kraftwirkung zwischen den beiden Ladungen das **Coulomb'sche Gesetz**:

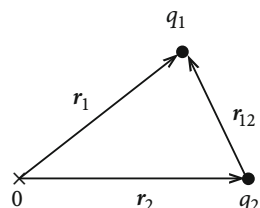
$$\mathbf{F}_{12} = k q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = -\mathbf{F}_{21} . \quad (2.11)$$

$\mathbf{F}_{12}$  ist die von Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausgeübte Kraft. Gleichung (2.11) ist als experimentell eindeutig verifizierte Tatsache aufzufassen. Die Konstante  $k$  hängt einerseits vom Medium ab, in dem sich die Punktladungen befinden, andererseits von den Einheiten, in denen wir die elektrischen Grundgrößen messen wollen. Dies wird weiter unten genauer erläutert.

Die **Coulomb-Kraft**  $\mathbf{F}_{12}$

1. ist direkt proportional zu den Ladungen  $q_1, q_2$ ;
2. ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes der beiden Ladungen;
3. wirkt entlang der Verbindungslinie anziehend für ungleichnamige, abstoßend für gleichnamige Ladungen;
4. erfüllt *actio = reactio*.

**Abb. 2.2** Anordnung zur Formulierung des Coulomb-Gesetzes



Entscheidende Voraussetzung für die Gültigkeit von (2.11) ist, dass die Ladungen **ruhen**. Bei bewegten Ladungen treten Zusatzterme auf, die wir später diskutieren werden.

Für die Elektrostatik ist (2.11) als *experimentelles Grundgesetz* aufzufassen. Der gesamte Formalismus der Elektrostatik baut auf (2.11) und dem so genannten **Superpositionsprinzip** auf, das dem vierten Newtonschen Axiom entspricht ((2.47), Bd. 1). Dieses besagt, dass sich die von mehreren Ladungen  $q_j$  auf die Ladung  $q_1$  ausgeübten Coulomb-Kräfte vektoriell addieren:

$$\mathbf{F}_1 = k q_1 \sum_{j=2}^n q_j \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|^3} . \quad (2.12)$$

Das Coulomb'sche Gesetz verknüpft Ladungen mit rein mechanischen Größen, was zur Definition der Ladungseinheit benutzt werden kann. Es gibt für die Elektrodynamik leider eine ganze Reihe verschiedener Maßsysteme, die im Prinzip alle gleichwertig sind, lediglich verschiedenen Verwendungszwecken angepasst sind. Da man die genauen Festlegungen eigentlich erst dann versteht, wenn man mit der gesamten Elektrodynamik vertraut ist, begnügen wir uns hier mit ein paar vorläufigen Bemerkungen:

### ■ 1) Gauß'sches System (cgs-System)

Dies ist definiert durch

$$k = 1 ,$$

womit die Ladungseinheit ( $LE$ ) sich über (2.11) eindeutig aus mechanischen Größen ableitet, d. h. keine neue Grundgröße darstellt:

$$1 LE = 1 \text{ cm dyn}^{1/2} \quad \left( 1 \text{ dyn} = 1 \text{ g} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \right) . \quad (2.13)$$

Zwei *Einheitsladungen* üben im Abstand von 1 cm eine Kraft von 1 dyn aufeinander aus.

### ■ 2) SI-System (MKSA-System)

(SI wegen *Systeme International d'Unités*) Zu den mechanischen Grundeinheiten Meter, Kilogramm, Sekunde tritt als elektrische Einheit das Ampere für die Stromstärke hinzu.



## 2.1 Grundbegriffe

Daraus ergibt sich die **Ladungseinheit**

$$1 \text{ C (Coulomb)} = 1 \text{ A s} .$$

Das Ampere ist so definiert, dass für die Konstante  $k$  in (2.11) gilt:

$$k = 10^{-7} c^2 \frac{\text{N}}{\text{A}^2} .$$

Dabei ist

$$c = 2,9979250 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2.14)$$

die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Man setzt

$$k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \quad (2.15)$$

mit der **Influenzkonstanten**  $\epsilon_0$  (auch *Dielektrizitätskonstante des Vakuums*)

$$\epsilon_0 = 8,8543 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A}^2 \text{ s}^2}{\text{N m}^2} = 8,8543 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A s}}{\text{V m}} . \quad (2.16)$$

Dabei haben wir noch

$$1 \text{ V (Volt)} = 1 \frac{\text{N m}}{\text{A s}} \quad (2.17)$$

benutzt. Um die Verwirrung so klein wie möglich zu halten, wird ab jetzt ausschließlich das SI-System verwendet.

Obgleich die eigentliche Messgröße eine Kraft darstellt, erweist es sich als zweckmäßig, das Konzept des

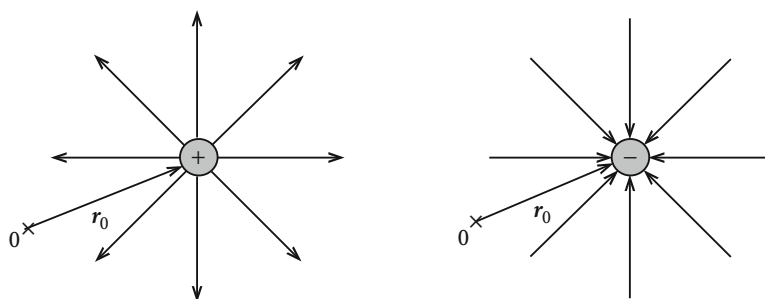
### ► elektrischen Feldes $E(r)$

einzuführen. Es wird durch eine Ladungskonfiguration erzeugt und ist durch die Kraft auf eine Testladung  $q$  definiert:

$$E = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q} . \quad (2.18)$$

Es handelt sich also um eine vektorielle Größe. Der Grenzübergang ist notwendig, da die Testladung das Feld selbst ändert, ist andererseits wegen (2.3) aber auch fragwürdig. Die Einheit der elektrischen Feldstärke ist damit:

$$1 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}} . \quad (2.19)$$



**Abb. 2.3** Elektrische Feldlinien positiver und negativer Punktladungen

Durch das Feld-Konzept wird der durch (2.11) beschriebene Wechselwirkungsprozess in zwei Schritte zerlegt. Zunächst erzeugt eine vorgegebene Ladungsverteilung **instantan** ein den ganzen Raum ausfüllendes elektrisches Feld. Dieses existiert unabhängig von der Punktladung  $q$ , die dann im zweiten Schritt auf das bereits vorhandene Feld gemäß

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.20)$$

*lokal reagiert*. Auf M. Faraday (1791 bis 1867) geht die Idee zurück, das Feld-Konzept durch eine *Bildersprache* zu verdeutlichen, die allerdings mehr qualitativen als quantitativen Charakter hat. Man führt

#### ► Feldlinien

ein und versteht darunter die Bahnen, auf denen sich ein kleiner, **positiv** geladener, anfangs ruhender Körper aufgrund der Coulomb-Kraft (2.11) bzw. (2.20) fortbewegen würde. Demgemäß sind die Feldlinien von Punktladungen radial (Abb. 2.3).

In jedem Raumpunkt  $\mathbf{r}$  liegt das Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (2.21)$$

tangential an der dort existierenden Feldlinie.

Nähert man zwei Punktladungen einander, so beeinflussen sich die Kraftlinien, da der die Linien durch seine Bahn definierende Probekörper nun unter dem Einfluss **beider** Punktladungen steht.

Die Bilder vermitteln den Eindruck, dass zwei ungleichnamige Ladungen einen Feldlinien-Zug aufeinander ausüben, sich also anziehen, zwei gleichnamige dagegen einen Feldlinien-

Grundkurs Theoretische Physik 3

Elektrodynamik

Nolting, W.

2013, XV, 677 S. 259 Abb., 12 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-642-37904-8