1

Logik und Mengen

1.1 Elementare Logik

Die Logik ist ein wichtiges Hilfsmittel in der Informatik. Sie wird beim Entwurf von Programmen gebraucht oder um die Korrektheit von Algorithmen zu verifizieren. Sie hilft bei der Beantwortung von Fragen wie „Hat die Switch-Anweisung wohl nichts übersehen?“ oder „Arbeitet der Algorithmus wohl in allen Spezialfällen so, wie ich es möchte?“. Die Logik ist notwendig, um Anforderungen eindeutig und widerspruchsfrei zu formulieren. Was ist zum Beispiel die Verneinung von „Jeder Benutzer hat ein Passwort“? Es gibt in der Umgangssprache verschiedene Möglichkeiten, die nach den Regeln der Logik richtige Verneinung ist aber eindeutig: „Es gibt mindestens einen Benutzer, der kein Passwort hat“. (Nicht nur) für Informatiker ist logisch-analytisches Denkvermögen eine wichtige Anforderung, und daher steht die Logik auch am Anfang unseres Weges.

Definition 1.1 Eine **Aussage** (engl. *proposition*) ist ein Satz, von dem man eindeutig entscheiden kann, ob er wahr oder falsch ist.

Der Wahrheitswert „wahr“ wird dabei mit „w“ oder „1“ abgekürzt, der Wahrheitswert „falsch” mit „f“ oder „0“.

Unsere Definition ist etwas optimistisch. Bei einer axiomatischen Behandlung der Mathematik stellt sich leider heraus, dass nicht jede Aussage entscheidbar ist. Genau das sagt nämlich der berühmte **Unvollständigkeitssatz** des österreichischen Mathematikers Kurt Gödel (1906–1978): In jeder formalen Theorie, die mindestens so mächtig wie die Theorie der natürlichen Zahlen (Peano-Arithmetik) ist, bleiben wahre (und falsche) arithmetische Formeln übrig, die nicht innerhalb der Theorie beweisbar (widerlegbar) sind. Wir werden aber zum Glück auf keine dieser Aussagen stoßen.

Beispiel 1.2 Aussagen
Handelt es sich um eine Aussage?
a) Wien ist die Hauptstadt von Österreich.
b) $1 + 5 = 6$.
c) 5 ist kleiner als 3.
d) Guten Abend!
e) $x + 3 = 5$.

Lösung zu 1.2 a) und b) sind wahre Aussagen, c) ist eine falsche Aussage; d) ist keine Aussage, weil nicht gesagt werden kann, dass dieser Satz wahr oder falsch

G. Teschl, S. Teschl, *Mathematik für Informatiker,* eXamen.press,
DOI 10.1007/978-3-642-37972-7_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

ist. e) ist keine Aussage, weil x unbekannt ist. Wir können daraus aber sofort eine Aussage machen, indem wir eine Zahl für x einsetzen. Mit solchen so genannten *Aussageformen* werden wir uns etwas später genauer beschäftigen. ■

Aussagen werden in der Umgangssprache durch Wörter wie „und“, „oder“, usw. zu neuen Aussagen verknüpft. Der Gebrauch dieser Wörter ist umgangssprachlich nicht immer ganz klar geregelt und kann daher zu Missverständnissen führen. In der Logik ist die Verknüpfung von gegebenen Aussagen zu neuen Aussagen aber eindeutig festgelegt. Wir bezeichnen dazu beliebige gegebene Aussagen mit $a, b, c, \ldots$

Zunächst kann man durch die Verneinung einer Aussage eine neue Aussage bilden:

Definition 1.3 Die **Verneinung** oder **Negation** einer Aussage a ist genau dann wahr, wenn a falsch ist. Die Verneinung von a wird symbolisch mit $\overline{a}$ oder $\neg a$ bezeichnet (gelesen „nicht a“).

Sprachlich wird die Verneinung gebildet, indem man vor die zu verneinende Aussage das Wort „Nicht“ oder den Zusatz „Es trifft nicht zu, dass“ setzt und danach sinngemäß sprachlich vereinfacht.

Beispiel 1.4 Verneinung
Verneinen Sie folgende Aussagen mithilfe des Zusatzes „Nicht“ oder „Es trifft nicht zu, dass“ und finden Sie eine alternative, möglichst einfache sprachliche Formulierung:

a) Der Tank ist voll.
b) Alle Studenten sind anwesend.
c) Ich bin vor 1990 geboren.

Lösung zu 1.4

a) Die Verneinung ist „Es trifft nicht zu, dass der Tank voll ist“ bzw., etwas einfacher, „Der Tank ist nicht voll“. Achtung: Im ersten Moment möchte man als Verneinung vielleicht „Der Tank ist leer“ sagen. Das ist aber nicht gleichbedeutend mit „Der Tank ist nicht voll“, denn er könnte ja auch halb voll sein.
b) Die Verneinung ist „Nicht alle Studenten sind anwesend“ oder, anders ausgedrückt, „Mindestens ein Student fehlt“. („Kein Student ist anwesend“ ist nicht die richtige Verneinung.)
c) Die Verneinung ist „Ich bin nicht vor 1990 geboren“, was gleichbedeutend ist mit „Ich bin im Jahr 1990 oder nach 1990 geboren“. ■

Als Nächstes wollen wir die wichtigsten Möglichkeiten, zwei Aussagen miteinander zu verknüpfen, besprechen:

Definition 1.5 Seien a und b beliebige Aussagen (in diesem Zusammenhang auch als **Eingangsaussagen** bezeichnet.)

- Die **UND**-Verknüpfung oder **Konjunktion** von a und b wird symbolisch mit $a \wedge b$ bezeichnet (gelesen: „a und b“). Die neue Aussage $a \wedge b$ ist genau dann wahr, wenn sowohl a als auch b wahr ist. Ansonsten ist $a \wedge b$ falsch.

- Die **ODER**-Verknüpfung oder **Disjunktion** von a und b wird symbolisch mit $a \vee b$ bezeichnet (gelesen: „a oder b"). Die neue Aussage $a \vee b$ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen a bzw. b wahr ist; ansonsten ist $a \vee b$ falsch. Die Verknüpfung $a \vee b$ entspricht dem *nicht-ausschließenden* „oder" (denn $a \vee b$ ist auch wahr, wenn sowohl a als auch b wahr ist).
- Die **ENTWEDER ... ODER**-Verknüpfung von a und b wird symbolisch mit $a \operatorname{xor} b$ (vom englischen *eXclusive OR*) oder $a \oplus b$ bezeichnet. Die neue Aussage $a \operatorname{xor} b$ ist genau dann wahr, wenn entweder a oder b (aber nicht beide gleichzeitig) wahr sind. Die Verknüpfung $a \operatorname{xor} b$ entspricht dem *ausschließenden* „oder".

Eselsbrücke: Das Symbol $\wedge$ erinnert an den Anfangsbuchstaben des englischen **A**ND.

Verknüpfte Aussagen lassen sich am besten durch ihre **Wahrheits(werte)tabelle** beschreiben. Dabei werden die möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten der Eingangsaussagen a und b (bzw. im Fall der Verneinung die möglichen Wahrheitswerte der Eingangsaussage a) angegeben, und dazu der entsprechende Wahrheitswert der verknüpften Aussage:

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \operatorname{xor} b$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

Daraus kann man zum Beispiel bequem ablesen, dass die Aussage $a \wedge b$ nur dann wahr ist (d.h. Wahrheitswert 1 hat), wenn sowohl a als auch b wahr ist. Für alle anderen Kombinationen von Wahrheitswerten von a und b ist $a \wedge b$ eine falsche Aussage.

Beispiel 1.6 UND- bzw. ODER- Verknüpfung
Geben Sie jeweils die Wahrheitswerte der Aussagen $a \wedge b$, $a \vee b$ und $a \operatorname{xor} b$ an:
a) a: Wien liegt in Österreich; b: Wien liegt in Deutschland
b) a: $2 < 3$; b: $1 + 1 = 2$

Lösung zu 1.6

a) Wir stellen zunächst fest, dass a wahr ist und dass b falsch ist. Damit stehen nach den Regeln der Logik auch schon die Wahrheitswerte der verknüpften Aussagen fest (unabhängig von der inhaltlichen Bedeutung der entstehenden verknüpften Aussagen):
   - $a \wedge b$ („Wien liegt in Österreich und (Wien liegt in) Deutschland") ist eine falsche Aussage, da eine der Eingangsaussagen, nämlich b, falsch ist.
   - $a \vee b$ („Wien liegt in Österreich oder Deutschland") ist eine wahre Aussage, da zumindest eine der Eingangsaussagen wahr ist.
   - $a \operatorname{xor} b$ („Wien liegt entweder in Österreich oder in Deutschland") ist eine wahre Aussage, da genau eine der Eingangsaussagen wahr ist (nicht aber beide).

b) Da sowohl a als auch b wahr ist, folgt: $a \wedge b$ ist wahr, $a \vee b$ ist wahr, $a \operatorname{xor} b$ ist falsch.

■

Die Verwendung von „und“ bzw. „oder“ in der Aussagenlogik stimmt in den meisten Fällen mit dem überein, was wir uns erwarten würden. Manchmal gibt es aber in der Umgangssprache Formulierungen, bei denen die Bedeutung nur aus dem Zusammenhang klar ist: Wenn zum Beispiel auf einem Schild „Rauchen *und* Hantieren mit offenem Feuer verboten!“ steht, dann weiß jeder, dass man hier weder Rauchen noch mit offenem Feuer hantieren darf. Vom Standpunkt der Aussagenlogik aus bedeutet das Verbot aber, dass nur *gleichzeitiges* Rauchen und Hantieren mit offenem Feuer verboten ist, es aber zum Beispiel erlaubt wäre, mit offenem Feuer zu hantieren, solange man dabei nicht raucht. Nach den Regeln der Aussagenlogik müsste das Verbot „Rauchen *oder* Hantieren mit offenen Feuer verboten!“ lauten (eine Argumentation, die Ihnen aber wohl vor einem Richter nicht helfen würde, nachdem die Tankstelle abgebrannt ist).

Definition 1.7 Ersetzt man in einer Aussage a irgendeine Konstante durch eine Variable x, so entsteht eine **Aussageform** $a(x)$ (auch **Aussagefunktion** genannt).

Beispiel: $a(x)$: $x < 100$ ist eine Aussageform. Sie besteht aus zwei Teilen: aus der Variablen x und aus dem so genannten **Prädikat** „ist kleiner 100“. Man spricht auch von **Prädikatenlogik**. Eine Aussageform $a(x)$ wird zu einer Aussage, wenn man für x ein konkretes Objekt einsetzt. Wenn für x zum Beispiel der Wert 3 eingesetzt wird, entsteht die wahre Aussage $a(3)$: $3 < 100$.

Beispiel 1.8 Aussageform
Gegeben sind die Aussageformen $a(x)$: $x^2 < 15$ und $b(x)$: $x^2 + 1 = 5$.
a) Ist die Aussage $a(1)$ wahr oder falsch?
b) Ist $b(1)$ wahr oder falsch?

Lösung zu 1.8
a) Wir setzen in der Aussageform $a(x)$ für x den Wert 1 und erhalten damit die Aussage $a(1)$: $1 < 15$. Sie ist wahr.
b) Die Aussage $b(1)$ lautet: $1 + 1 = 5$. Sie ist falsch. ■

Aussageformen können wie Aussagen verneint bzw. mit $\wedge, \vee$, xor verknüpft werden. Es entsteht dadurch eine neue Aussageform:

Beispiel 1.9 Verknüpfungen von Aussageformen
Gegeben sind wieder $a(x)$: $x^2 < 15$ und $b(x)$: $x^2 + 1 = 5$.
a) Verneinen Sie $a(x)$. b) Verneinen Sie $b(x)$.
c) Geben Sie Beispiele für Werte von x an, für die die verknüpfte Aussageform $a(x) \wedge b(x)$ eine wahre bzw. eine falsche Aussage wird.

Lösung zu 1.9
a) Die Verneinung von $a(x)$ ist die Aussageform $\overline{a(x)}$: $x^2 \geq 15$. (Achtung: Die Verneinung ist nicht „$x^2 > 15$“. Denn „nicht kleiner“ ist gleichbedeutend mit „gleich oder größer“.)
b) Die Verneinung ist $\overline{b(x)}$: $x^2 + 1 \neq 5$.
c) Setzen wir in $a(x) \wedge b(x)$ für x den Wert 1 ein, dann erhalten wir die Aussage: $a(1) \wedge b(1)$. Sie ist falsch, weil $b(1)$ falsch ist.
Wenn wir $x = 2$ setzen, so entsteht die Aussage: $a(2) \wedge b(2)$. Da sowohl $a(2)$: $2^2 < 15$ als auch $b(2)$: $2^2 + 1 = 5$ wahr ist, ist auch $a(2) \wedge b(2)$ wahr. ■

Eine weitere Möglichkeit, um aus Aussageformen Aussagen zu erzeugen, ist die Verwendung von Quantoren. Darunter versteht man einfach die Zusätze „Für alle“ oder „Für ein“:

Definition 1.10 (All-Aussagen und Existenz-Aussagen) Gegeben ist eine Aussageform $a(x)$.

- Die Aussage „Für alle x (aus einer bestimmten Menge) gilt $a(x)$“ ist wahr genau dann, wenn $a(x)$ für alle in Frage kommenden x wahr ist. Abkürzend schreibt man für diese **All-Aussage**
$$\forall x\colon a(x),$$
wobei $\forall$ „für alle“ gelesen wird (oder „für jedes“). Das Symbol $\forall$ heißt **All-Quantor**.
- Die Aussage „Es gibt ein x (aus einer bestimmten Menge), sodass $a(x)$“ ist wahr genau dann, wenn $a(x)$ für *zumindest* eines der in Frage kommenden x wahr ist. Symbolisch schreibt man diese **Existenz-Aussage** als
$$\exists x\colon a(x),$$
wobei $\exists$ „es gibt (mindestens) ein“ gelesen wird (oder auch: „es existiert (mindestens) ein“ oder „für (mindestens) ein“). Das Symbol $\exists$ heißt **Existenz-Quantor**.

Bei der Verwendung mehrerer Quantoren ist ihre Reihenfolge wesentlich.

Beispiel 1.11 Für alle ...

a) Ist „Für alle natürlichen Zahlen x gilt: $x+1 > x$“ eine wahre oder eine falsche Aussage?
b) Ist die Aussage „Für alle natürlichen Zahlen x ist $x > 3$“ wahr oder falsch?

Lösung zu 1.11

a) Diese Aussage hat die Form „$\forall$ natürlichen x: $a(x)$“, wobei $a(x)$ die Aussageform „$x + 1 > x$“ ist. Sie ist wahr, denn welche natürliche Zahl wir auch immer für x einsetzen, $a(x)$ ist immer eine wahre Aussage: $a(1)$ ist wahr und $a(2)$ ist wahr und ... ist wahr.
b) Die Aussage hat die Form „Für alle natürlichen Zahlen x gilt: $a(x)$“, wobei $a(x)$ die Aussageform „$x > 3$“ bedeutet. Nun können wir aber (mindestens) ein natürliches x finden, für das $a(x)$ falsch ist, z. B. $x = 1$. Damit ist die gegebene All-Aussage falsch. ■

Wichtig ist also: Um nachzuweisen, dass eine All-Aussage „$\forall x$: $a(x)$“ wahr ist, muss man für *jedes einzelne* x sichergehen, dass $a(x)$ wahr ist. Um nachzuweisen, dass eine All-Aussage „$\forall x$: $a(x)$“ falsch ist, muss man *(mindestens) ein* x finden, für das $a(x)$ falsch ist.

Noch ein Beispiel: Ich möchte feststellen, ob die All-Aussage „$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle natürlichen Zahlen“ wahr ist. Wie gehe ich vor? Am besten bestimme ich einmal den Wahrheitswert der Aussage für eine konkrete natürliche Zahl, z. B. für $n = 5$: $1+2+3+4+5 = 15$ ist tatsächlich dasselbe wie $\frac{5\cdot 6}{2}$. Vielleicht probiere ich die Formel auch noch für ein paar andere natürliche Zahlen. Wenn (so wie hier) auf diese Weise kein n gefunden wird, für das die Aussage falsch ist, dann spricht so weit nichts gegen die Richtigkeit der Formel. Nun muss ich aber noch beweisen, dass sie für *alle*, also *jedes beliebige*, natürliche n gilt. Wie soll das funktionieren, dazu müsste man ja unendlich viele Zahlen probieren?! – Durch Probieren kommt man hier wirklich nicht weiter. Abhilfe kommt hier zum Beispiel durch die Beweismethode der *Vollständigen Induktion*, die wir in einem späteren Kapitel kennen lernen werden.

Beispiel 1.12 Es existiert ein ...

a) Ist „Es existiert eine ganze Zahl x mit $x^2 = 4$" wahr oder falsch?
b) Ist die Aussage „Es gibt eine natürliche Zahl x mit $x^2 < 0$" wahr oder falsch?

Lösung zu 1.12

a) Wir haben es mit der Existenz-Aussage „$\exists$ ganze Zahl x mit $a(x)$" zu tun, wobei $a(x)$ die Aussageform „$x^2 = 4$" ist. Wir können eine ganze Zahl finden, z. B. $x = 2$, für die $a(2)$ wahr ist. Daher ist die gegebene Existenz-Aussage wahr. Beachten Sie, dass „Es existiert *ein*" immer im Sinn von *mindestens ein* gemeint ist (und nicht im Sinn von *genau ein*). Es ist also kein Problem, dass hier auch $a(-2)$ wahr ist.
b) Die Aussage hat die Form „$\exists$ natürliches x mit $a(x)$", wobei $a(x)$ die Aussageform „$x^2 < 0$" bedeutet. Welche natürliche Zahl x wir auch probieren, wir können keine finden, für die $a(x)$ wahr ist. Daher ist die gegebene Existenz-Aussage falsch.

■

Wichtig ist also hier: Um nachzuweisen, dass eine Existenz-Aussage „$\exists x\colon a(x)$" wahr ist, muss man *mindestens ein* x finden, für das $a(x)$ wahr ist. Um nachzuweisen, dass eine Existenz-Aussage „$\exists x\colon a(x)$" falsch ist, muss man *jedes einzelne* x untersuchen und sichergehen, dass $a(x)$ für alle x falsch ist.

All- und Existenzaussagen werden – wie jede Aussage – sprachlich mithilfe der Worte „Nicht" bzw. „Es trifft nicht zu, dass" verneint. Aus ihrer Definition folgt:

Satz 1.13 (Verneinung von All- und Existenzaussagen) Durch die Verneinung einer All-Aussage entsteht eine Existenz-Aussage, und umgekehrt entsteht durch die Verneinung einer Existenz-Aussage eine All-Aussage:

$$\begin{aligned} \overline{\text{Für alle } x \text{ gilt } a(x)} &= \text{Es existiert ein } x\text{, sodass } \overline{a(x)} \\ \overline{\text{Es existiert ein } x \text{ mit } a(x)} &= \text{Für alle } x \text{ gilt } \overline{a(x)} \end{aligned}$$

oder kürzer:

$$\begin{aligned} \overline{\forall x\colon a(x)} &= \exists x\colon \overline{a(x)} \\ \overline{\exists x\colon a(x)} &= \forall x\colon \overline{a(x)}. \end{aligned}$$

Wenn Mathematiker lange über etwas gegrübelt haben und durch Schlussfolgerungen auf eine neue wichtige Erkenntnis gestoßen sind, dann bezeichnen sie diese Erkenntnis als **Satz** oder **Theorem**, und auch wir werden an dieser Tradition festhalten. Die Schlussfolgerungen müssen dabei aber immer absolut wasserdicht sein! Einfach eine Vermutung äußern, die dann gilt, bis jemand sie widerlegt, zählt in der Mathematik nicht! Auch die Schlussfolgerung „Weil es in allen Testfällen richtig war, ist es wohl immer richtig" wird nicht akzeptiert. (Es muss in allen Fällen, nicht nur den getesteten Fällen, richtig sein.)

Beispiel 1.14 Verneinung von All- und Existenzaussagen
Verneinen Sie, indem Sie die All- in eine Existenzaussage umwandeln, bzw. umgekehrt, und sprachlich vereinfachen:
a) Alle Menschen mögen Mathematik.
b) Es gibt einen Studenten, der Spanisch spricht.
c) $\forall x$: $x > 3$

Lösung zu 1.14
a) Die gegebene Aussage ist „$\forall x$: x mag Mathematik" (wobei x ein beliebiger Mensch ist). Verneinung: „$\exists x$: $\overline{x \text{ mag Mathematik}}$", also „$\exists x$: x mag Mathematik nicht", also „Es gibt (mindestens) einen Menschen, der Mathematik nicht mag".
b) Die Aussage hat die Form „$\exists x$: x spricht Spanisch" (wobei x ein beliebiger Student ist). Verneinung: „$\forall x$: $\overline{x \text{ spricht Spanisch}}$", in Worten: „$\forall x$: x spricht nicht Spanisch", also „Für jeden Studenten gilt: Er/sie spricht nicht Spanisch", bzw. „Kein Student spricht Spanisch".
c) Die Verneinung ist $\exists x$: $\overline{x > 3}$, also $\exists x$: $x \leq 3$. In Worten: Die Verneinung von „Alle x sind größer als 3" ist „Nicht alle x sind größer als 3" bzw. „Es gibt (zumindest) ein x, das kleiner oder gleich 3 ist." ■

In der Mathematik sind Schlussfolgerungen besonders wichtig. Sie werden durch die folgenden Verknüpfungen beschrieben:

Definition 1.15 Die **WENN-DANN-Verknüpfung** oder **Subjunktion** $a \to b$ (gelesen „Wenn a, dann b") und die **GENAU-DANN-Verknüpfung** oder **Bijunktion** $a \leftrightarrow b$ (gelesen „a genau dann, wenn b") von zwei Aussagen a bzw. b sind durch ihre Wahrheitstabellen folgendermaßen definiert:

a	b	$a \to b$	$a \leftrightarrow b$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Die neue Aussage $a \to b$ ist also nur dann falsch, wenn a wahr und b falsch ist; in allen anderen Fällen ist $a \to b$ wahr. Die neue Aussage $a \leftrightarrow b$ ist genau dann wahr, wenn beide Eingangsaussagen den gleichen Wahrheitswert haben, wenn also a und b beide wahr oder beide falsch sind.

Zunächst beschäftigen wir uns mit der Aussage $a \to b$:

Beispiel 1.16 WENN-DANN-Verknüpfung
„Wenn es neblig ist, dann ist die Sicht schlecht" ist wahr (davon gehen wir aus). Diese Aussage hat die Form $a \to b$, wobei a: „Es ist neblig" bzw. b: „Die Sicht ist schlecht" bedeutet. Was kann damit über die Sicht (den Wahrheitswert von b) gesagt werden, wenn es nicht neblig ist (also wenn a falsch ist)?

Lösung zu 1.16 Laut Wahrheitstabelle ist $a \to b$ für folgende Kombinationen wahr: a wahr, b wahr (also Nebel, schlechte Sicht); a falsch, b wahr (also kein Nebel, schlechte Sicht); a falsch, b falsch (also kein Nebel, gute Sicht). Wir sehen insbesondere, dass, wenn a falsch ist, b falsch oder wahr sein kann. Das heißt, wenn es nicht neblig ist (a falsch), so kann die Sicht gut oder schlecht (weil es z. B. dunkel ist oder stark regnet) sein. Wir wissen also, wenn es nicht neblig ist, nichts über die Sicht. (Wir haben hier einfachheitshalber „gute Sicht“ als Verneinung von „schlechte Sicht” verwendet.) ■

Wichtig ist nun vor allem folgende Schreibweise, der Sie immer wieder begegnen werden:

Definition 1.17 Ist die verknüpfte Aussage $a \to b$ wahr, so spricht man von einem **logischen Schluss** (oder einer **Implikation**) und schreibt

$$a \Rightarrow b.$$

Für $a \Rightarrow b$ sagt man: „**Aus** a **folgt** b“ oder „a **impliziert** b“, oder **„Wenn** a**, dann** b“ oder „a **ist hinreichend für** b“ oder „b **ist notwendig für** a“.

Wenn Sie also $a \Rightarrow b$ sehen, so bedeutet das: *Wenn a wahr ist, so ist auch b wahr. Wenn a falsch ist, so kann b wahr oder falsch sein.* Für Aussageformen bedeutet $a(x) \Rightarrow b(x)$, dass $a(x) \to b(x)$ für alle x wahr ist.

Wir können insbesondere im obigen Beispiel schreiben: „Es ist neblig $\Rightarrow$ Die Sicht ist schlecht“ und dazu in Worten sagen: „Aus Nebel folgt schlechte Sicht“ oder „Nebel impliziert schlechte Sicht“ oder „Wenn es neblig ist, ist die Sicht schlecht“ oder „Nebel ist hinreichend für schlechte Sicht“ oder „Schlechte Sicht ist notwendig für Nebel“.

Zwei verknüpfte Aussagen werden als **gleich** (oder **logisch äquivalent**) bezeichnet, wenn sie für jede Kombination der Wahrheitswerte der Eingangsaussagen die gleichen Wahrheitswerte annehmen. Aus der folgenden Tabelle

a	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$a \to b$	$\overline{b} \to \overline{a}$	$b \to a$	$a \leftrightarrow b$	$(a \to b) \wedge (b \to a)$
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1

sehen wir zum Beispiel, dass $a \to b = \overline{b} \to \overline{a}$, da die fünfte und sechste Spalte dieselben Wahrheitswerte haben. Daraus folgt die wichtige Tatsache:

Satz 1.18 $a \Rightarrow b$ bedeutet dasselbe wie $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$.

Aber Achtung: Wir sehen auch, dass $a \to b \neq b \to a$. Mit anderen Worten: $a \Rightarrow b$ ist gleichbedeutend mit $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$, jedoch nicht gleichbedeutend mit $b \Rightarrow a$.

Beispiel 1.19 Richtige Schlussfolgerung

a) Es gilt: „Nebel $\Rightarrow$ schlechte Sicht“. Gilt auch „keine schlechte Sicht $\Rightarrow$ kein Nebel“?
b) Es gilt: „Nebel $\Rightarrow$ schlechte Sicht“. Gilt auch „schlechte Sicht $\Rightarrow$ Nebel“?

c) Es gilt (für jedes x): „$x > 3 \Rightarrow x > 0$“. Gilt auch „$x \leq 0 \Rightarrow x \leq 3$“?
d) Es gilt (für jedes x): „$x > 3 \Rightarrow x > 0$“. Gilt auch „$x > 0 \Rightarrow x > 3$“?

Lösung zu 1.19

a) Ja, denn $a \Rightarrow b$ ist gleich(bedeutend wie) $\bar{b} \Rightarrow \bar{a}$.
b) Zunächst ist uns bewusst, dass grundsätzlich $a \Rightarrow b$ etwas anderes bedeutet als $b \Rightarrow a$. Überlegen wir, ob auch $b \Rightarrow a$ gilt, also „schlechte Sicht ⇒ Nebel“? Nein, denn: Wenn die Sicht schlecht ist, dann folgt daraus nicht notwendigerweise Nebel (es könnte ja auch kein Nebel, dafür aber Dunkelheit sein).
c) Gleichbedeutend mit „$x > 3 \Rightarrow x > 0$“ ist: „$\overline{x > 0} \Rightarrow \overline{x > 3}$“, also „$x \leq 0 \Rightarrow x \leq 3$“.
d) Wieder ist uns bewusst, dass $a \Rightarrow b$ nicht gleichbedeutend mit $b \Rightarrow a$ ist. Gilt aber vielleicht auch „$x > 0 \Rightarrow x > 3$“? D.h., ist „$x > 0 \rightarrow x > 3$“ wahr für alle x? Nein, denn für $x = 2$ ist $x > 0$ wahr, aber $x > 3$ falsch. Also haben wir $x > 0 \not\Rightarrow x > 3$ gezeigt. ■

Durch Blick auf die letzte Wahrheitstabelle sehen wir, dass $a \leftrightarrow b$ immer dann wahr ist, wenn $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$ wahr ist; wenn also sowohl $a \Rightarrow b$ als auch $b \Rightarrow a$ gilt; d.h., wenn a hinreichend und notwendig für b ist. Dafür verwendet man nahe liegend folgende Schreibweise:

Definition 1.20 Wenn $a \leftrightarrow b$ wahr ist, dann spricht man von **Äquivalenz** und schreibt

$$a \Leftrightarrow b.$$

Die Äquivalenz $a \Leftrightarrow b$ bedeutet, dass sowohl $a \Rightarrow b$ als auch $b \Rightarrow a$ gilt. Man sagt: „a **genau dann, wenn** b“ oder „a **dann und nur dann, wenn** b“ oder „a **ist notwendig und hinreichend für** b“.

Wenn Sie also $a \Leftrightarrow b$ sehen, so bedeutet das: *Die Aussagen a und b haben denselben Wahrheitswert.*

Beispiel 1.21 Genau dann, wenn ...

a) „x ist eine gerade Zahl $\leftrightarrow$ x ist durch 2 teilbar“ ist (für jedes x) eine wahre Aussage. Daher: „x gerade $\Leftrightarrow$ x durch 2 teilbar“. Gelesen: „x ist gerade genau dann, wenn x durch 2 teilbar ist“ oder „x ist gerade dann und nur dann, wenn x durch 2 teilbar ist“.
b) Wir haben im letzten Beispiel gezeigt, dass zwar „$x > 3 \Rightarrow x > 0$“, aber „$x > 0 \not\Rightarrow x > 3$“ gilt. Also „$x > 3 \not\Leftrightarrow x > 0$“.

In der Mathematik wird großer Wert auf richtige Schlussfolgerungen gelegt, wie auch folgende kleine Anekdote zeigt: Ein Chemiker, ein Physiker und ein Mathematiker reisen in einem Zug durch Schottland. Als sie aus dem Fenster sehen, erblicken sie ein schwarzes Schaf auf der Weide. Der Chemiker bemerkt: „Aha, in Schottland sind die Schafe also schwarz“. Der Physiker bessert ihn sofort aus: „Nein, in Schottland gibt es ein schwarzes Schaf“. Der Mathematiker schüttelt nur den Kopf und meint: „In Schottland gibt es ein Schaf, das auf der uns zugewandten Seite schwarz ist“.

In der Logik geht es unter anderem darum, aus wahren Aussagen logisch richtige Schlussfolgerungen zu ziehen und somit zu neuen wahren Aussagen zu kommen.

Man spricht in diesem Zusammenhang von einem **Beweis**. Aus der letzten Wahrheitstabelle kann man einige mögliche Beweistechniken ablesen:

- $(a \to b) \wedge (b \to a) = a \leftrightarrow b$: Um $a \Leftrightarrow b$ zu zeigen, kann man zeigen, dass sowohl $a \Rightarrow b$ als auch $b \Rightarrow a$ gilt.
- $\overline{b} \to \overline{a} = a \to b$: Um $a \Rightarrow b$ zu zeigen, kann man auch $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$ zeigen. Diese Vorgehensweise wird auch **indirekter Beweis** genannt.
  Um $a \Rightarrow b$ zu zeigen, kann man aber auch den Fall „a wahr und b falsch“ ausschließen (das ist ja der einzige Fall, für den $a \to b$ falsch ist). Dies macht man, indem man die Annahme „a wahr und b falsch“ zu einem Widerspruch führt (**Beweis durch Widerspruch**).

Das soll an dieser Stelle einfach nur erwähnt sein, Beispiele werden folgen.

1.2 Elementare Mengenlehre

Mengentheoretische Ausdrücke sind ein wesentlicher Teil der mathematischen „Umgangssprache“. Der mathematische Mengenbegriff wird oft auch im Alltag verwendet, nämlich immer dann, wenn wir mit einer Menge eine *Zusammenfassung* meinen, wie z. B. die Menge der Einwohner von Wien, alle Dateien in einem Verzeichnis, usw. Georg Cantor, der Begründer der Mengenlehre, hat im Jahr 1895 eine anschauliche Definition einer Menge gegeben:

Definition 1.22 Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Streng genommen ist diese Definition etwas unbefriedigend, da z. B. der Ausdruck „Zusammenfassung von Objekten“ zwar intuitiv klar, aber nicht definiert ist. Dieses Problem ist aber unumgänglich: In der axiomatischen Mengenlehre gibt es einfach undefinierte Begriffe. Aber es kommt noch schlimmer, unsere Definition kann sogar zu Widersprüchen führen (Russell'sches Paradoxon – nach dem britischen Mathematiker und Philosophen Bertrand Russell (1872–1970)): Wenn ein Barbier behauptet alle Männer eines Dorfes zu rasieren, die sich nicht selbst rasieren, rasiert er sich dann selbst (d.h., ist er in dieser Menge enthalten oder nicht)? Durch ausgefeiltere Axiomensysteme lassen sich solche einfachen Widersprüche zwar vermeiden, aber ob man damit *alle* Widersprüche ausgeräumt hat, bleibt trotzdem unklar. Kurt Gödel hat gezeigt, dass ein System nicht zum Beweis seiner eigenen Widerspruchsfreiheit verwendet werden kann. Wir werden aber einfach unserem Barbier verbieten widersprüchliche Aussagen zu machen und uns mit obiger Definition begnügen.

Die Objekte einer Menge M werden die **Elemente** von M genannt. Wir schreiben $a \in M$, wenn a ein Element von M ist. Ist a kein Element von M, so schreiben wir dafür $a \notin M$. Mengen werden üblicherweise mit Großbuchstaben wie A, B, M etc. bezeichnet. Beispiel: $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ist die Menge, die aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, und 5 besteht. Es ist $1 \in M$, aber $7 \notin M$.

Zwei Mengen sind **gleich**, wenn sie dieselben Elemente haben. Auf die Reihenfolge der Elemente kommt es also nicht an. Auch wird jedes Element nur *einmal* gezählt (braucht also nur einmal angeschrieben zu werden). So können wir die Menge $A = \{i, n, f, o, r, m, a, t, i, k\}$ ohne weiteres auch schreiben als $A = \{a, f, i, k, m, n, o, r, t\}$.

Einige häufig auftretende Zahlenmengen werden mit eigenen Symbolen bezeichnet, z. B.

$$\mathbb{N} \quad = \quad \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \qquad \text{Menge der natürlichen Zahlen}$$
$$\mathbb{Z} \quad = \quad \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \qquad \text{Menge der ganzen Zahlen}$$

Sie sind Beispiele für **unendliche Mengen**, d.h. Mengen mit unendlich vielen Elementen (im Gegensatz zu **endlichen Mengen**). Die Anzahl der Elemente einer Menge A wird als $|A|$ abgekürzt und **Mächtigkeit** genannt. Zum Beispiel ist die Anzahl der Elemente von $A = \{a, f, i, k, m, n, o, r, t\}$ gleich $|A| = 9$.

Oft ist es umständlich oder unmöglich, eine Menge durch *Aufzählung* ihrer Elemente anzugeben. Dann gibt man eine gemeinsame *Eigenschaft* der Elemente an: $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$ ist eine andere Schreibweise für die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Der senkrechte Strich „|" wird dabei gelesen als „für die gilt". Anstelle von „|" kann man auch einen Doppelpunkt „:" schreiben, also $M = \{x \in \mathbb{N} \,:\, x < 6\}$. Gelesen: „$M$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen x, für die gilt: x ist kleiner als 6". Ihnen ist vielleicht eine andere Möglichkeit eingefallen, um die Elemente von M zu beschreiben. So hätten wir natürlich auch $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 5\}$ oder $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 5\}$ etc. schreiben können.

Beispiel 1.23 Angabe von Mengen

a) Zählen Sie die Elemente der Menge $A = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x^2 = 4\}$ auf.
b) Geben Sie die Menge $B = \{3, 4, 5\}$ in einer anderen Form an.

Lösung zu 1.23

a) $A = \{-2, 2\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \le x \le 5\}$ wäre eine Möglichkeit. ■

Es hat sich als nützlich herausgestellt eine Menge einzuführen, die *keine Elemente* enthält. Diese Menge heißt **leere Menge**. Man schreibt sie mit dem Symbol $\{\}$ oder auch mit $\emptyset$.

Beispiel 1.24 Leere Menge

$S = \{x \in \mathbb{N} \mid x = x+1\} = \{\}$, denn es gibt keine natürliche Zahl, die gleich bleibt, wenn man zu ihr 1 addiert.

Die Einführung der leeren Menge macht den Umgang mit Mengen einfacher. Gäbe es sie nicht, so könnte man zum Beispiel nicht von der Menge aller roten Autos auf einem Parkplatz sprechen, wenn man sich nicht vorher vergewissert hätte, dass es dort auch tatsächlich solche gibt.

Definition 1.25 Eine Menge A heißt **Teilmenge** von B, wenn gilt: $x \in A \Rightarrow x \in B$. Das bedeutet also, dass jedes Element von A auch in B enthalten ist. Man schreibt in diesem Fall: $A \subseteq B$.

Die Tatsache, dass A Teilmenge von B ist, $A \subseteq B$, beinhaltet auch den Fall, dass A und B gleich sind. Wenn betont werden soll, dass A Teilmenge von B ist, aber $A \neq B$, so schreibt man $A \subset B$ oder $A \subsetneq B$.

Die Menge aller Teilmengen einer gegebenen Menge A wird als **Potenzmenge** von A bezeichnet.

Abbildung 1.1 veranschaulicht die Beziehung $A \subseteq B$. Solche grafische Darstellungen werden als **Venn-Diagramme** bezeichnet.

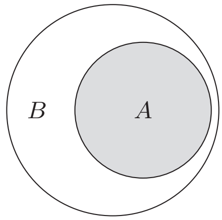


Abbildung 1.1. A ist Teilmenge von B

Beispiel 1.26 Teilmenge
a) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$ b) $\{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$ c) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
d) $A = \{0, 2, 4\}$ ist keine Teilmenge von $B = \{2, 4, 6, 8\}$, weil $0 \notin B$.
e) Aus der Definition der leeren Menge folgt: $\{\} \subseteq A$ für jede Menge A.

Wenn wir zwei Mengen A und B gegeben haben, dann könnten wir uns für jene Elemente interessieren, die *sowohl* in A *als auch* in B vorkommen:

Definition 1.27 Die Menge

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

nennt man den **Durchschnitt** von A und B.

Abbildung 1.2 veranschaulicht den Durchschnitt von Mengen.

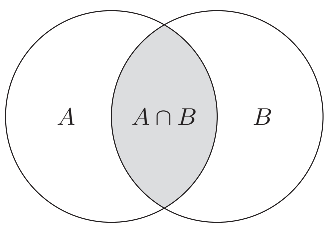


Abbildung 1.2. Durchschnitt von Mengen

Beispiel 1.28 Durchschnitt
a) $\{2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 7\} = \{3, 4\}$ b) $\{1, 2, 3\} \cap \mathbb{N} = \{1, 2, 3\}$
c) $\{u, v\} \cap \{x, y\} = \{\}$

Besitzen zwei Mengen kein gemeinsames Element, so heißen diese Mengen **disjunkt** (oder auch **elementfremd**).

Wir könnten auch alle Elemente zu einer neuen Menge zusammenfassen, die in A oder in B (oder in beiden) vorkommen:

Definition 1.29 Die Menge

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

nennt man **Vereinigung** von A und B.

Eselsbrücke: Das Symbol $\cup$ für Vereinigung erinnert an eine Schüssel – in ihr wird alles vereinigt.

Abbildung 1.3 veranschaulicht die Vereinigung von zwei Mengen.

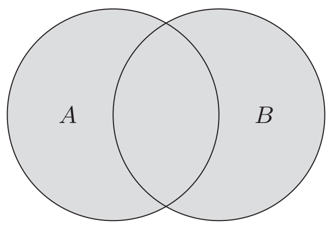


Abbildung 1.3. Vereinigung von A und B

Beispiel 1.30 Vereinigung

a) $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Die Zahl 3, die in beiden Mengen vorkommt, wird in der Vereinigungsmenge (wie bei Mengen üblich) nur einmal angeschrieben.
b) $\{u, v\} \cup \{x, y\} = \{u, v, x, y\}$
c) $\{1, 2, 3\} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$

Die Mengenoperationen erfüllen die folgenden Gesetze:

Satz 1.31 (Rechengesetze für Mengen)
Kommutativgesetze:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

Assoziativgesetze:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Bei der Vereinigung mehrerer Mengen kann also auf Klammern verzichtet werden. Analoges gilt für den Durchschnitt.

Distributivgesetze:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Für die Vereinigung mehrerer Mengen $A_1, \ldots, A_n$ schreibt man abkürzend

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = A_1 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid x \in A_j \text{ für mindestens ein } j, j = 1, \ldots, n\}$$

und liest diesen Ausdruck: „Vereinigung aller Mengen A_j für $j = 1$ bis $j = n$“. Analoges gilt für den Durchschnitt:

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = A_1 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid x \in A_j \text{ für alle } j = 1, \ldots, n\}.$$

Manchmal möchte man aus einer Menge bestimmte Elemente entfernen. Dazu gibt es folgende Mengenoperation:

Definition 1.32 Die **Differenz** zweier Mengen

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

ist die Menge der Elemente von A ohne die Elemente von B. Ist speziell B eine Teilmenge von A, so nennt man $A \backslash B$ auch das **Komplement** von B in A und schreibt dafür $\overline{B}$. In diesem Zusammenhang bezeichnet man A als die **Grundmenge**.

Abbildung 1.4 veranschaulicht die Differenz von Mengen.

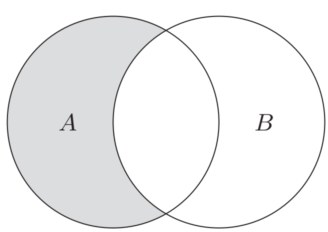


Abbildung 1.4. Differenz $A \backslash B$ von Mengen: Der grau schattierte Bereich enthält alle Elemente von A, die nicht in B liegen.

Beispiel 1.33 Differenz

a) $\{1, 2, 3\}\backslash\{3, 4\} = \{1, 2\}$. Hier haben wir aus der Menge $\{1, 2, 3\}$ alle Elemente entfernt, die auch in $\{3, 4\}$ vorkommen. Es macht nichts, dass die Zahl 4 in der ersten Menge überhaupt nicht vorkommt.

b) $\{u, v\}\backslash\{x, y\} = \{u, v\}$

c) $\mathbb{N}\backslash\{1\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 2\}$

Vereinigung, Durchschnitt und Differenz werden über die folgenden Rechenregeln in Bezug zueinander gesetzt:

Satz 1.34 Sind A, B Teilmengen einer Menge M (Grundmenge), so gelten für die Komplemente die **de Morgan'schen Regeln**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Sie sind nach dem schottischen Mathematiker Augustus de Morgan (1806–1871) benannt.

Erinnern Sie sich daran, dass bei einer Menge die Reihenfolge, in der ihre Elemente aufgezählt werden, keine Rolle spielt. Es ist also zum Beispiel $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. Oft ist aber auch die Reihenfolge von Objekten wichtig:

Wenn Sie ins Kino gehen, so könnte Ihr Sitzplatz im Kinosaal durch das Zahlenpaar $(3, 7)$ eindeutig bestimmt werden: Reihe 3, Sitz 7. Das Zahlenpaar $(7, 3)$ würde einen anderen Sitzplatz bezeichnen.

Definition 1.35 Man bezeichnet (a, b) als **geordnetes Paar** (auch: **Tupel**). Zwei geordnete Paare (a, b) und (a', b') sind genau dann **gleich**, wenn $a = a'$ und $b = b'$ ist.

Ein geordnetes Paar wird zum Unterschied zu einer Menge mit *runden* Klammern geschrieben. Nun ist die Reihenfolge von Bedeutung und mehrfach auftretende Elemente werden angeführt. (Es gibt ja auch Reihe 3, Sitz 3 im Kino.)

Beispiel 1.36 Geordnetes Paar

a) $(1, 2) \neq (2, 1)$ b) $(2, 2) \neq (2)$

Definition 1.37 Die Menge aller geordneten Paare zweier Mengen A und B wird **kartesisches Produkt von A und B** genannt und als $A \times B$ geschrieben:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\} \quad \text{gelesen: „}A \text{ kreuz } B\text{“}.$$

$A \times B$ enthält also alle geordneten Paare (a, b), wobei das erste Element im geordneten Paar immer aus der Menge A und das zweite Element immer aus der Menge B kommt.

Beispiel 1.38 Kartesisches Produkt

a) $\{1,2\} \times \{3,4\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$
b) $\{1\} \times \{3,4\} = \{(1,3),(1,4)\}$
c) $\{3,4\} \times \{1\} = \{(3,1),(4,1)\}$. Es ist also $A \times B$ nicht gleich $B \times A$.
d) Die Elemente von $\mathbb{N}^2$ (= abkürzende Schreibweise für $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) sind alle geordneten natürliche Zahlenpaare.

Wir können natürlich auch mehrere Elemente, deren Reihenfolge von Bedeutung ist, betrachten. Wenn n die Anzahl dieser Elemente ist, so spricht man von einem **n-Tupel**. So ist $(1,4,0)$ ein Beispiel für ein 3-Tupel. Das **kartesische Produkt der Mengen** $A_1, A_2, ..., A_n$ ist in diesem Sinn definiert als

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1, ..., a_n \in A_n\}.$$

Man schreibt für das **n-fache Produkt** $A \times A \times ... \times A$ einer Menge A oft auch abkürzend A^n. Ist $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, so ist z. B. $\mathbb{R}^3$ die Menge aller reellen 3-Tupel (die als „Punkte" im 3-dimensionalen Raum veranschaulicht werden können).

Mengen kommen zum Beispiel als Definitions- oder Wertebereiche von *Funktionen* vor, daher an dieser Stelle schon folgende Definition:

Definition 1.39 Eine **Abbildung** oder **Funktion** f von einer Menge D in eine Menge M ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $f(x) \in M$ zuordnet. Man schreibt dafür kurz: $f : D \to M$, $x \mapsto f(x)$ und sagt: „x wird auf $f(x)$ abgebildet".

Beispiel 1.40 Abbildungen

a) Die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n \mapsto n^2$ ordnet jeder natürlichen Zahl ihr Quadrat zu. Also z. B. $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, usw.
b) Der ASCII-Code ist eine Abbildung, die den Zahlen 0 bis 127 bestimmte Steuerzeichen, Ziffern, Buchstaben und Sonderzeichen zuordnet: z. B. $f(36) = \$$ oder $f(65) = A$.

Wir werden darauf noch im Abschnitt 5.2 über Funktionen zurückkommen.

1.3 Schaltalgebra

Außer in der Aussagenlogik gibt es noch viele andere Situationen, in denen man es mit Größen zu tun hat, die nur zwei verschiedene Werte annehmen können. Das wohl wichtigste Beispiel ist der Computer, der alles auf die beiden Werte 0 und 1 reduziert. Mithilfe der Schaltalgebra kann man logische Schaltungen beschreiben und untersuchen.

Wir gehen davon aus, dass wir zwei Werte, 0 (falsch) und 1 (wahr), zur Verfügung haben. Eine Variable a kann nur diese beiden Werte annehmen, man spricht daher auch von einer **binären Variablen** oder **Schaltvariablen**. Wie in der Aussagenlogik definieren wir die Negation $\overline{a}$, die Konjunktion $a \cdot b$ und die Disjunktion $a + b$ gemäß folgender Wertetabelle:

a	b	$\overline{a}$	$a \cdot b$	$a + b$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Man verwendet hier anstelle der Symbole $\wedge$ und $\vee$ oft $\cdot$ bzw. $+$ und spricht auch von einer Multiplikation bzw. Addition. Das hat einen einfachen Grund: Das Verknüpfungsergebnis von $a \cdot b$ laut obiger Tabelle entspricht dem jeweiligen Produkt der reellen Zahlen 0 und 1: $0 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$. Ebenso kann man bei $a + b$ wie gewohnt mit 0 und 1 rechnen, mit einer Ausnahme: Man muss berücksichtigen, dass per Definition $1 + 1 = 1$ gesetzt wird.

Wie schon in der Aussagenlogik sind zwei verknüpfte Ausdrücke **gleich**, wenn sie bei derselben Belegung der Eingangsvariablen gleiche Werte annehmen.

Beispiel 1.41 Gleichheit von verknüpften Ausdrücken
Zeigen Sie mithilfe einer Wertetabelle, dass $\overline{\overline{a}} = a$.

Lösung zu 1.41 Die Verneinung $\overline{\overline{a}}$ von $\overline{a}$ hat genau den entgegengesetzten Wahrheitswert von $\overline{a}$,

a	$\overline{a}$	$\overline{\overline{a}}$
0	1	0
1	0	1

also immer denselben Wahrheitswert wie a. ∎

Es ist also
$$a = \overline{\overline{a}}.$$

Auf die gleiche Weise können wir nachweisen, dass
$$a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot 1 = a, \quad a \cdot a = a, \quad a \cdot \overline{a} = 0$$
und
$$a + 1 = 1, \quad a + 0 = a, \quad a + a = a, \quad a + \overline{a} = 1.$$

Wenn wir uns das genauer ansehen, dann erkennen wir, dass jede Formel in eine andere gültige Formel übergeht, wenn man in ihr die Symbole $\cdot$ und $+$ sowie 0 und 1 vertauscht: Zum Beispiel erhält man aus $a \cdot 0 = 0$ auf diese Weise die Formel $a + 1 = 1$ (in $a \cdot 0 = 0$ wurde $\cdot$ durch $+$ ersetzt und 0 durch 1). Man bezeichnet dies als **Dualitätsprinzip**.

Eine Begründung, warum das Dualitätsprinzip gilt, kommt etwas später.

Allgemeiner kann man auch Ausdrücke betrachten, die mehr als eine Variable enthalten. Sind a, b und c Variable, die die Werte 0 und 1 annehmen können, so können wir durch Aufstellen der zugehörigen Wertetabellen leicht folgende Regeln zeigen, die wir schon analog bei den Mengen kennen gelernt haben. (Beachten Sie, dass wieder nach dem Dualitätsprinzip je zwei Formeln einander entsprechen.)

Satz 1.42 (Logikgesetze)
Kommutativgesetze:

$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a.$$

Assoziativgesetze:

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Distributivgesetze:

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c), \qquad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Absorptionsgesetze:

$$\begin{aligned} a \cdot (a + b) &= a, & a + (a \cdot b) &= a, \\ a \cdot (\overline{a} + b) &= a \cdot b, & a + \overline{a} \cdot b &= a + b, \end{aligned}$$

De Morgan'sche Regeln:

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}, \qquad \overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}.$$

Die Kommutativgesetze sind uns vom Rechnen mit reellen Zahlen vertraut und besagen nichts anderes, als dass zum Beispiel $0 \cdot 1$ dasselbe ist wie $1 \cdot 0$ oder $0 + 1$ dasselbe ist wie $1 + 0$.

Auch die Assoziativgesetze sind uns vertraut. Sie sagen, dass man in einem längeren Ausdruck, der nur *eine* Verknüpfungsart enthält (also nur „+“ oder nur „·“), keine Klammern setzen muss, weil es auf die Reihenfolge nicht ankommt. Es ist z. B. $1 \cdot (0 \cdot 1)$ dasselbe wie $(1 \cdot 0) \cdot 1$, daher kann man die Klammern hier gleich weglassen und $1 \cdot 0 \cdot 1$ schreiben.

Wenn ein Ausdruck sowohl $\cdot$ also auch $+$ enthält, dann müssen Klammern gesetzt werden, um die Reihenfolge der Auswertung klarzustellen. Gibt es keine Klammern, dann gilt die Konvention, dass zuerst die Verneinung, dann $\cdot$ und dann $+$ ausgewertet wird. Der Ausdruck $\overline{a} \cdot b + b$ ist also als $((\overline{a}) \cdot b) + b$ zu verstehen.

Bei den reellen Zahlen gibt es analog die Regel „Punkt vor Strich“.

Das zweite (rechte) Distributivgesetz ist uns ebenfalls vom Rechnen mit reellen Zahlen vertraut („Ausmultiplizieren“ bzw., wenn es von rechts nach links gelesen wird, „Herausheben“). Das erste (linke) Distributivgesetz würde einem „Ausaddieren“ entsprechen, es gibt aber kein entsprechendes Gesetz für das Rechnen mit reellen Zahlen.

Es gelten also insbesondere alle Rechenregeln, die für die Multiplikation und Addition von reellen Zahlen gelten. Da uns diese Rechenregeln vertraut sind, ist es auch sinnvoll, die gleichen Symbole $\cdot$ und $+$ zu verwenden.

Dieses *Rechnen* mit 0 und 1 geht auf den englischen Mathematiker George Boole (1815–1864) zurück, dem es gelang, eine Algebra der Aussagen zu entwickeln und damit die über 2000 Jahre alte Aussagenlogik zu formalisieren. Eine **Boole'sche Algebra** ist allgemein eine Menge (die mindestens 2 Elemente, 0 und 1, enthält) mit zwei Verknüpfungen, $\cdot$ und $+$, die die obigen Gesetze erfüllen. Die grundlegenden Schaltungen in Computern folgen diesen Gesetzen, daher ist die Schaltalgebra ein wichtiges Anwendungsgebiet der Boole'schen Algebra.

Beispiel 1.43 (→CAS) De Morgan'sche Regeln
Zeigen Sie die Gültigkeit der de Morgan'schen Regeln mithilfe einer Wertetabelle.

Lösung zu 1.43 Für die erste Regel müssen wir zeigen, dass für jede Kombination der Werte der Eingangsvariablen a und b die Ausdrücke $\overline{a \cdot b}$ und $\overline{a} + \overline{b}$ die gleichen Werte haben:

a	b	$a \cdot b$	$\overline{a \cdot b}$	$a + b$	$\overline{a + b}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{a} + \overline{b}$	$\overline{a} \cdot \overline{b}$
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0	0

Tatsächlich sind in der vierten und der neunten Spalte dieselben Werte, daher ist $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$. Analog folgt aus Gleichheit der sechsten und zehnten Spalte $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$. Da das Aufstellen solcher Wertetabellen recht mühsam ist, bietet es sich an den Computer zu bemühen (siehe Abschnitt 1.4). ■

Aus den de Morgan'schen Regeln folgt auch sofort das Dualitätsprinzip: Negieren wir zum Beispiel das erste Absorptionsgesetz, so folgt aus $\overline{a \cdot (a + b)} = \overline{a} + (\overline{a + b}) = \overline{a} + (\overline{a} \cdot \overline{b})$, dass $\overline{a} + (\overline{a} \cdot \overline{b}) = \overline{a}$. Da diese Gleichung für beliebige a, b gilt, gilt sie auch, wenn wir a durch $\overline{a}$ und b durch $\overline{b}$ ersetzen: $a + (a \cdot b) = a$. Das ist aber genau das zweite Absorptionsgesetz.

Natürlich hat es wenig Sinn all diese Regeln aufzustellen, wenn sie nicht auch zu etwas gut wären. In der Tat können sie in der Praxis dazu verwendet werden, um zum Beispiel komplizierte Ausdrücke zu vereinfachen und damit Schaltungen auf möglichst wenige Schaltelemente zu reduzieren.

Beispiel 1.44 (→CAS) Vereinfachung einer Schaltung
Vereinfachen Sie den Ausdruck $\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b + a \cdot b$.

Lösung zu 1.44 Wir wenden Schritt für Schritt Rechenregeln an:

$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b + a \cdot b &= \overline{a} \cdot (\overline{b} + b) + a \cdot b = \overline{a} \cdot 1 + a \cdot b = \overline{a} + a \cdot b = \\ &= (\overline{a} + a) \cdot (\overline{a} + b) = 1 \cdot (\overline{a} + b) = \overline{a} + b, \end{aligned}$$

wobei wir im ersten Schritt das zweite Distributivgesetz (Herausheben eines Faktors), danach $b + \overline{b} = 1$, weiter $\overline{a} \cdot 1 = \overline{a}$ und zuletzt noch das erste Distributivgesetz („Ausaddieren“) verwendet haben. ■

Eine Abbildung $f : B^n \to B$, mit $B = \{0, 1\}$, wird als eine **Logikfunktion** in n Variablen bezeichnet. Speziell im Fall $n = 2$ (d.h. 2 Eingangsvariablen) spricht man auch von einer **binären Logikfunktion**. Die oben eingeführten Verknüpfungen $\cdot$ und $+$ von zwei Variablen sind also Beispiele binärer Logikfunktionen. Das sind aber bei weitem nicht alle denkbaren. Bereits in der Aussagenlogik haben wir neben Dis- und Konjunktion eine Reihe weiterer Verknüpfungsmöglichkeiten kennen gelernt. Wenn man alle Kombinationen von Wahrheitswerten für a und b anführt, so kommt man insgesamt auf 16 mögliche binäre Logikfunktionen:

a	b	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Natürlich finden wir hier alle bekannten Verknüpfungen wieder: $f_8(a,b) = a \cdot b$, $f_{14}(a,b) = a + b$, $f_{11}(a,b) = a \to b$. Die Logikfunktion $f_7(a,b) = \overline{a \cdot b}$ heißt **NAND**-Verknüpfung und $f_1(a,b) = \overline{a+b}$ wird als **NOR**-Verknüpfung bezeichnet.

Man kann nun zeigen, dass sich alle diese 16 Verknüpfungen mithilfe der Konjunktion, Disjunktion und Negation ausdrücken lassen. Das ist besonders bei der Umsetzung von elektronischen Schaltungen von großer Bedeutung: Es müssen dann nur diese drei Basistypen gebaut werden, und alle anderen lassen sich durch sie erzeugen. Um zu sehen, dass diese 3 Basistypen ausreichen, betrachten wir zunächst jene vier Logikfunktionen aus obiger Tabelle, die für genau eine Kombination der Eingabewerte den Wert 1 annehmen (und sonst immer 0 sind). Es sind das f_1, f_2, f_4 und f_8. Diese vier Verknüpfungen heißen **Minterme**, oder **Vollkonjunktionen** und werden auch mit m_0, m_1, m_2 und m_3 bezeichnet. Es ist also m_0 jene Logikfunktion, die nur bei der Kombination $(a,b) = (0,0)$ den Wert 1 annimmt, m_1 hat Wahrheitswert 1 nur für $(a,b) = (0,1)$, m_2 hat Wahrheitswert 1 nur für $(a,b) = (1,0)$ und m_3 hat Wahrheitswert 1 nur bei $(a,b) = (1,1)$.

Weiters ist leicht zu sehen:

Satz 1.45 Die Minterme können als Produkte dargestellt werden:

$$m_0(a,b) = \overline{a} \cdot \overline{b}, \quad m_1(a,b) = \overline{a} \cdot b, \quad m_2(a,b) = a \cdot \overline{b}, \quad m_3(a,b) = a \cdot b.$$

Das kann mithilfe der zugehörigen Wahrheitstabelle gezeigt werden:

Beispiel 1.46 Darstellung eines Minterms als Produkt
Zeigen Sie mithilfe einer Wahrheitstabelle, dass $m_0 = \overline{a} \cdot \overline{b}$.

Lösung zu 1.46

a	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{a} \cdot \overline{b}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

Tatsächlich ist also $\overline{a} \cdot \overline{b} = f_1(a,b) = m_0(a,b)$. ■

In der Praxis ist oft die Wertetabelle einer Verknüpfung vorgegeben und man möchte sie durch möglichst wenige Schaltelemente (Disjunktion, Konjunktion oder Negation) realisieren. Gehen wir von der Wertetabelle einer Verknüpfung f (f steht hier für eine der möglichen binären Logikfunktionen $f_0, \ldots, f_{15}$) aus,

a	b	$f(a,b)$
0	0	$f(0,0)$
0	1	$f(0,1)$
1	0	$f(1,0)$
1	1	$f(1,1)$

dann kann f folgendermaßen als Summe von Mintermen geschrieben werden:

$$f = f(0,0) \cdot m_0 + f(0,1) \cdot m_1 + f(1,0) \cdot m_2 + f(1,1) \cdot m_3.$$

Das lässt sich durch Aufstellen einer Wertetabelle nachweisen (siehe Übungen).

Satz 1.47 (Normalformen) Jede Logikfunktion $f : B^2 \to B$ lässt sich in **disjunktiver Normalform** (DNF)

$$f(a,b) = f(0,0) \cdot \overline{a} \cdot \overline{b} + f(0,1) \cdot \overline{a} \cdot b + f(1,0) \cdot a \cdot \overline{b} + f(1,1) \cdot a \cdot b$$

schreiben. Alternativ kann f auch in **konjunktiver Normalform** (KNF)

$$f(a,b) = (f(0,0) + a + b) \cdot (f(0,1) + a + \overline{b}) \cdot (f(1,0) + \overline{a} + b) \cdot (f(1,1) + \overline{a} + \overline{b})$$

dargestellt werden.

Die Ausdrücke $M_0(a,b) = a+b$, $M_1(a,b) = a+\overline{b}$, $M_2(a,b) = \overline{a}+b$, $M_3(a,b) = \overline{a}+\overline{b}$, die in der KNF vorkommen, heißen **Maxterme** oder **Volldisjunktionen**. Maxterme nehmen nur für eine Kombination der Eingangsvariablen den Wert 0, sonst immer den Wert 1 an (sind also in diesem Sinn „maximal“).

Beispiel 1.48 Disjunktive Normalform
Bringen Sie die Verknüpfung $f_{11}(a,b) = a \to b$ auf DNF.

Lösung zu 1.48 Wir schreiben in der Wertetabelle rechts neben den Funktionswerten von f_{11} die entsprechenden Minterme, die gerade für diese Eingangsvariablen den Wert 1 annehmen, an:

a	b	$f_{11}(a,b)$	
0	0	1	m_0
0	1	1	m_1
1	0	0	m_2
1	1	1	m_3

Nun setzen wir in die Formel für die DNF ein:

$$\begin{aligned} f_{11}(a,b) &= m_0(a,b) f_{11}(0,0) + \ldots + m_3(a,b) f_{11}(1,1) \\ &= \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot 1 + \overline{a} \cdot b \cdot 1 + a \cdot \overline{b} \cdot 0 + a \cdot b \cdot 1. \end{aligned}$$

Es wird also genau über jene Minterme summiert, für die der zugehörige Funktionswert den Wert 1 hat:

$$f_{11}(a,b) = m_0(a,b) + m_1(a,b) + m_3(a,b) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b + a \cdot b.$$

Das ist die gesuchte DNF. (Aus Beispiel 1.44 wissen wir, dass sich dieser Ausdruck noch weiter umformen lässt: $a \to b = \overline{a} + b$.) ■

Eine beliebige Verknüpfung kann also leicht alleine durch Konjunktion, Disjunktion und Negation dargestellt werden, indem man die Summe über alle Minterme bildet, für die die Verknüpfung den Wert 1 hat. Analog wird für die KNF das Produkt aller Maxterme gebildet, für die die Verknüpfung den Wert 0 hat:

Beispiel 1.49 Konjunktive Normalform
Bringen Sie die Verknüpfung $f_{11}(a,b) = a \to b$ auf KNF.

Lösung zu 1.49 Wieder schreiben wir in der Wertetabelle rechts neben den Funktionswerten von f_{11} die entsprechenden Maxterme, die gerade für diese Eingangsvariablen den Wert 0 annehmen, an:

a	b	$f_{11}(a,b)$	
0	0	1	M_0
0	1	1	M_1
1	0	0	M_2
1	1	1	M_3

Dann setzen wir in die Formel für die KNF ein:

$$\begin{aligned} f_{11}(a,b) &= (f_{11}(0,0) + M_0(a,b)) \cdot \ldots \cdot (f_{11}(1,1) + M_3(a,b)) \\ &= (1 + a + b) \cdot (1 + a + \overline{b}) \cdot (0 + \overline{a} + b) \cdot (1 + \overline{a} + \overline{b}) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot (\overline{a} + b) \cdot 1 = \overline{a} + b. \end{aligned}$$

Es werden also für die KNF genau jene Maxterme multipliziert, für die der zugehörige Funktionswert den Wert 0 hat. ■

Zusammenfassend können wir also sagen: Hat die Verknüpfung öfter den Wert 0, so ist die DNF effektiver, hat sie öfter den Wert 1, so ist die KNF effektiver. Das sehen wir z. B. durch Vergleich der Rechenwege der Beispiele 1.48 und 1.49.

Mithilfe der de Morgan'schen Regeln $a\cdot b = \overline{\overline{a} + \overline{b}}$ bzw. $a+b = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}$ kann man noch die Konjunktion durch die Negation und Disjunktion bzw. die Disjunktion durch die Negation und Konjunktion ausdrücken. Es reichen also Negation und Disjunktion bzw. Negation und Konjunktion aus, um eine beliebige Verknüpfung darzustellen. Wegen $\overline{a} = \overline{a \cdot a}$ reicht sogar die NAND-Verknüpfung $\overline{a \cdot b}$ alleine aus. Alternativ reicht wegen $\overline{a} = \overline{a + a}$ die NOR-Verknüpfung $\overline{a + b}$ alleine aus.

Analoge Überlegungen gelten natürlich auch für Logikfunktionen mit mehr als zwei Variablen. Hat man n Variable, so gibt es 2^{2^n} mögliche Logikfunktionen, die sich mithilfe der DNF (bzw. KNF) auf Negation, Disjunktion und Konjunktion zurückführen lassen.

1.3.1 Anwendung: Entwurf von Schaltkreisen

Die Überlegungen aus dem letzten Abschnitt bilden die Grundlage für den Entwurf von Schaltkreisen. Eine der wichtigsten Operationen, die ein Computer beherrschen muss, ist die Addition zweier Zahlen. Wie können wir eine zugehörige Schaltung entwerfen?

Da Schaltungen (und damit auch Computer) nur Nullen und Einsen verarbeiten können, müssen die beiden Zahlen als Dualzahlen, das heißt, als eine Folge

$(a_n \dots a_1 a_0)_2$ von Nullen und Einsen, gegeben sein. Die einzelnen Stellen a_j können dabei nur die Werte 0 oder 1 annehmen, und die Dualzahl $(a_n \dots a_1 a_0)_2$ entspricht der Dezimalzahl $2^n a_n \dotplus 2^{n-1} a_{n-1} \dotplus \dots \dotplus 8a_3 \dotplus 4a_2 \dotplus 2a_1 \dotplus a_0$ (dabei haben wir die Addition von Zahlen zur Unterscheidung von der Disjunktion mit $\dotplus$ bezeichnet). Alle zweistelligen Dualzahlen sind zum Beispiel $(00)_2 = 2 \cdot 0 \dotplus 0 = 0$, $(01)_2 = 2 \cdot 0 \dotplus 1 = 1$, $(10)_2 = 2 \cdot 1 \dotplus 0 = 2$ und $(11)_2 = 2 \cdot 1 \dotplus 1 = 3$. (Mehr über Dualzahlen werden wir in Abschnitt 2.4 erfahren.)

Beginnen wir mit dem einfachsten Fall, der Addition von zwei einstelligen Dualzahlen mit Überlauf:

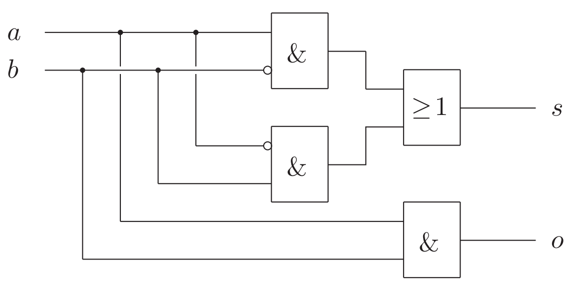
a	b	$s(a,b)$	$o(a,b)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Hier ist s die Summe und o gibt an, ob ein Überlauf aufgetreten ist. Das Ergebnis ist also im Allgemeinen eine zweistellige Dualzahl und es gilt $a \dotplus b = (os)_2 = s \dotplus 2o$.

Stellen wir s und o mithilfe der DNF dar und vereinfachen das Ergebnis, so erhalten wir

$$s(a,b) = \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b} = a \operatorname{xor} b \quad \text{und} \quad o(a,b) = a \cdot b.$$

Die zugehörige Schaltung wird wie folgt dargestellt:



Eine Konjunktion wird dabei mit „&“ und eine Disjunktion mit „≥ 1“ gekennzeichnet. Die Negation wird durch einen Kreis vor dem Eingang dargestellt.

Nun kommen wir zur Addition von mehrstelligen Dualzahlen. Wie im Dezimalsystem kann die Addition im Dualsystem stellenweise durchgeführt werden. Dabei werden für jede Stelle die beiden entsprechenden Stellen der zu addierenden Zahlen plus der Überlauf (Übertrag) von der vorhergehenden Stelle addiert. Wenn also $(a_n \dots a_1 a_0)_2$ und $(b_n \dots b_1 b_0)_2$ die zu addierenden Zahlen sind, so ergibt sich für die j-te Stelle der Summe $(s_n \dots s_1 s_0)_2$ und den zugehörigen Überlauf o_j:

$$(o_j s_j)_2 = s_j \dotplus 2o_j = a_j \dotplus b_j \dotplus o_{j-1},$$

wobei o_j der Überlauf in der j-ten Stelle ist. Dabei ist $o_{-1} = 0$ zu setzen (denn im nullten Schritt gibt es noch keinen Überlauf) und o_n gibt an, ob insgesamt ein Überlauf aufgetreten ist.

Wir benötigen für die Addition von zwei n-stelligen Dualzahlen also noch eine Schaltung für die Addition von drei einstelligen Dualzahlen

a	b	c	$s(a,b,c)$	$o(a,b,c)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

wobei s die Summe der drei einstelligen Dualzahlen a, b und c ist und o angibt, ob ein Überlauf aufgetreten ist. Damit lautet bei der Addition von zwei n-stelligen Dualzahlen die Formel für die j-te Stelle der Summe bzw. des Überlaufs

$$s_j = s(a_j, b_j, o_{j-1}) \quad \text{und} \quad o_j = o(a_j, b_j, o_{j-1}).$$

Hier haben wir es jeweils mit einer Verknüpfung $f = f(a,b,c)$ dreier Variablen a, b und c zu tun. Analog wie im Fall zweier Variablen kann sie mithilfe der DNF

$$\begin{aligned} f \quad = \quad & \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot f(0,0,0) + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c \cdot f(0,0,1) + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} \cdot f(0,1,0) + \\ & \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot f(0,1,1) + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot f(1,0,0) + a \cdot \overline{b} \cdot c \cdot f(1,0,1) + \\ & a \cdot b \cdot \overline{c} \cdot f(1,1,0) + a \cdot b \cdot c \cdot f(1,1,1) \end{aligned}$$

geschrieben werden. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} s(a,b,c) &= \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot c, \\ o(a,b,c) &= \overline{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \overline{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot c. \end{aligned}$$

Nun können wir die Summe zwar berechnen, wie können wir das Ergebnis aber ausgeben? Im einfachsten Fall verwenden wir für jede Stelle s_j eine Leuchtdiode. Man kann dann die Summe in Dualdarstellung ablesen und der Benutzer kann leicht selbst die zugehörige Dezimaldarstellung ausrechnen;-) Wer es doch etwas komfortabler haben möchte, kann natürlich auch das Ergebnis mittels LCD-Anzeige darstellen. Die zugehörige Schaltung können Sie in Übungsaufgabe 9 entwerfen.

Nun brauchen Sie nur noch in den nächsten Elektronikladen schlendern, um sich ein paar NAND-Gatter und Leuchtdioden zu kaufen, und schon können Sie Ihren eigenen Hochleistungstaschenrechner zusammenlöten.

Etwas fehlt unserem Computer allerdings noch: Er berechnet *statisch* aus einer Eingabe die Ausgabe, kann aber nicht mit dem Ergebnis weiterrechnen. Dazu sind noch zwei weitere Bausteine notwendig: ein Element zur Zwischenspeicherung von Ergebnissen (Flip-Flop) und ein Taktgeber zur zeitlichen Synchronisation des Ablaufes.

1.4 Mit dem digitalen Rechenmeister

Schaltalgebra

Das Aufstellen von Wertetabellen ist recht mühsam und es bietet sich daher der Einsatz eines kleinen Programms an. `Mathematica` verwendet `False`, `True` für $0, 1$ und kennt eine Reihe logischer Verknüpfungen: Negation `Not[a]` (oder `!a`), Und `And[a,b]` (oder `a&&b`), Oder `Or[a,b]` (oder `a||b`). Mit folgendem Programm können wir leicht Wertetabellen erstellen:

```
In[1]:= LogicTable[f_, v_List] := Module[{n = Length[v], tabl, vals, rule},
          tabl = Flatten[{v, f}];
          Do[
             vals = IntegerDigits[i, 2, n] /. {0 → False, 1 → True};
             rule = Table[Rule[v[[i]], vals[[i]] ], {i, n}];
             tabl = Append[tabl, Flatten[{vals, f /. rule}]];
          , {i, 0, 2^n - 1}];
          TableForm[tabl]
          ]
```

Grübeln Sie nicht darüber, wie dieses Programm funktioniert, sondern rufen Sie es einfach mit einem logischem Ausdruck (oder einer Liste von logischen Ausdrücken) und einer Liste der Variablen auf:

```
In[2]:= LogicTable[{!(a||b), !a&&!b}, {a, b}]
Out[2]//TableForm=
        a      b      !(a||b)  !a&&!b
        False  False  True     True
        False  True   False    False
        True   False  False    False
        True   True   False    False
```

`Mathematica` kann übrigens auch logische Ausdrücke vereinfachen:

```
In[3]:= LogicalExpand[!a&&!b||!a&&b||a&&b]
Out[3]= b||!a
```

1.5 Kontrollfragen

Fragen zu Abschnitt 1.1: Elementare Logik

Erklären Sie folgende Begriffe: Aussage, Wahrheitstabelle, Negation, AND-, OR-, XOR-Verknüpfung, Aussageform, All-Aussage, All-Quantor, Existenz-Aussage, Existenz-Quantor, Implikation, notwendig/hinreichend, Äquivalenz.

1. Liegt eine Aussage vor?
   a) Österreich liegt am Meer. b) Wie spät ist es? c) $4+3=7$
2. Verneinen Sie und vereinfachen Sie sprachlich:
   a) Das Glas ist voll. b) Er ist der Älteste der Familie.
   c) 7 ist eine gerade Zahl.
3. Ist in den folgenden Sätzen vermutlich ein einschließendes oder ein ausschließendes „oder“ gemeint?
   a) Du kommst vor Mitternacht nach Hause oder du hast eine Woche Fernsehverbot.
   b) Morgen oder übermorgen kann es schneien.

c) Morgen oder übermorgen ist Montag.
d) Kopf oder Zahl?

4. Wie müsste „Betreten des Rasens und Blumenpflücken verboten“ nach den Regeln der Aussagenlogik formuliert werden?
5. Aussage a: „Die Erde hat zwei Monde“; Aussage b: „München liegt in Deutschland“. Welche Aussagen sind wahr? a) $a \wedge b$ b) $a \vee b$ c) a xor b
6. Angenommen, das Wetter würde sich an die Regel „Ist es an einem Tag sonnig, so auch am nächsten“ halten. Wenn es heute sonnig ist, was folgt dann?
   a) Es ist immer sonnig.
   b) Gestern war es sonnig.
   c) Morgen ist es sonnig.
   d) Es wird nie mehr sonnig sein.
   e) Ab heute wird es immer sonnig sein.
7. Liegt eine Aussage vor?
   a) $x + 5 = 8$ b) Es gibt ein x mit $x + 5 = 8$.
   c) Für alle x gilt: $x + 5 = 8$.
8. Welche Aussage ist wahr?
   a) Für alle natürlichen Zahlen x ist $x < 3$.
   b) Es gibt eine natürliche Zahl x mit $x < 3$.
9. Richtig oder falsch:
   Die Verneinung von „Für alle x gilt $a(x)$“ ist: „Es gibt ein x mit $\overline{a(x)}$“.
10. Verneinen Sie:
    a) Alle Tigerkatzen sind gute Mäusejäger.
    b) Es gibt einen Matrosen, der schwimmen kann.
    c) Für alle x gilt: $x < 3$.
    d) Für alle x, y gilt: $x^2 + y^2 = 4$.
11. Aussage a: „Das Auto ist ein Golf“; Aussage b: „Das Auto ist ein VW“. Was trifft zu: a) Golf $\Rightarrow$ VW b) VW $\Rightarrow$ Golf c) kein VW $\Rightarrow$ kein Golf
    d) VW $\Leftrightarrow$ Golf
12. Sei n eine natürliche Zahl. Aussageform $a(n)$: „n ist durch 4 teilbar“; Aussageform $b(n)$: „n ist eine gerade Zahl“. Was trifft für alle natürlichen Zahlen n zu?
    a) $a(n) \Rightarrow b(n)$ b) $b(n) \Rightarrow a(n)$ c) $a(n) \Leftrightarrow b(n)$ d) $\overline{b(n)} \Rightarrow \overline{a(n)}$
13. Aussage a: „Der Student hat einen Notendurchschnitt < 2“; Aussage b: „Der Student erhält ein Leistungsstipendium“. Die Richtlinie der Stipendienvergabestelle enthält folgenden Satz: „Ein Notendurchschnitt < 2 ist notwendig, aber nicht hinreichend für ein Leistungsstipendium“.
    a) Formulieren Sie diesen Satz symbolisch mit $\Rightarrow$.
    b) Gilt $\overline{a} \Rightarrow \overline{b}$? Formulieren Sie in Worten.

Fragen zu Abschnitt 1.2: Elementare Mengenlehre

Erklären Sie folgende Begriffe: Menge, Element, Mächtigkeit einer Menge, leere Menge, Teilmenge, Durchschnitt, Vereinigung, Differenz, Komplement, geordnetes Paar, kartesisches Produkt, n-Tupel, Abbildung.

1. Sind die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4, 1, 2\}$ gleich?

2. Zählen Sie alle Elemente der Menge auf:
   a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 16\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 16\}$
   c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$ d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x = 1\}$
3. $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$:
   a) $A \cup B =?$ b) $A \cap B =?$ c) Ist $2 \in A$? d) Ist $A \subseteq B$?
4. Sei N die Menge der Nobelpreisträger, O die Menge der österreichischen Nobelpreisträger, W die Menge der weiblichen Nobelpreisträger und L die Menge der Literaturnobelpreisträger. Was bedeutet: a) $O \cup L$ b) $O \cap \overline{W}$
5. Richtig oder falsch?
   a) $\{\} = \{0\}$ b) $\{3, 5, 7\} \subseteq \{1, 3, 5, 7\}$ c) $\{1\} \cup \{1\} = \{2\}$
   d) $\{1\} \cap \{1\} = \{1\}$ e) $\{1, 3\} = \{3, 1\}$ f) $(1, 3) = (3, 1)$
   g) $\{2, 5, 7\} = (2, 5, 7)$ h) $(2, 5, 5) = (2, 5)$
6. $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$:
   a) $A \times B =?$ b) $B \times A =?$ c) Ist $\{1, 2\} \subseteq A \times B$?
   d) Ist $(1, 2) \in A \times B$? e) $A \backslash B =?$ f) $B \backslash A =?$

Fragen zu Abschnitt 1.3: Schaltalgebra

Erklären Sie folgende Begriffe: Schaltvariable, Dualitätsprinzip, Logikgesetze, Logikfunktion, binäre Logikfunktion, NOR-Funktion, NAND-Funktion, Minterm, Maxterm, disjunktive bzw. konjunktive Normalform.

1. Richtig oder falsch? (Überprüfen Sie mithilfe einer Wertetabelle.)
   a) $a \cdot 0 = 1$ b) $a + \overline{a} = 1$ c) $a \cdot \overline{a} = 0$ d) $\overline{\overline{a} \cdot b} = a \cdot \overline{b}$ e) $\overline{\overline{a} \cdot b} = a + \overline{b}$
2. Bilden Sie mithilfe des Dualitätsprinzips aus folgenden gültigen Regeln weitere gültige Regeln:
   a) $a \cdot 1 = a$ b) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ c) $a \cdot (a + b) = a$
3. Richtig oder falsch: Die Assoziativgesetze $a + (b + c) = (a + b) + c$ bzw. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ bedeuten, dass man bei *beliebigen* Ausdrücken der Schaltalgebra auf Klammern verzichten kann.
4. In vielen Programmiersprachen werden UND, ODER bzw. Negation als „&&“, „||“ bzw. „!“ geschrieben. Welche Abfragen sind äquivalent?
   a) $!(a \,\&\&\, b) == (!a) \,||\, (!b)$ b) $a \,||\, (b \,\&\&\, c) == (a \,\&\&\, b) \,||\, c$
5. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke: a) $a + (a + \overline{a})$ b) $a \cdot \overline{a} \cdot a$
6. Wie viele Minterme gibt es bei der Verknüpfung von 2 Schaltvariablen? Geben Sie sie an.
7. Kann eine beliebige Verknüpfung von zwei Schaltvariablen a und b alleine mithilfe von Negation und Konjunktion geschrieben werden?

Lösungen zu den Kontrollfragen

Lösungen zu Abschnitt 1.1

1. a) falsche Aussage
   b) keine Aussage (man kann nicht sagen, dass dieser Satz entweder wahr oder falsch ist)
   c) wahre Aussage

2. a) „Das Glas ist nicht voll“. („Das Glas ist leer“ wäre eine falsche Verneinung, denn ein Glas, das nicht voll ist, muss nicht notwendigerweise leer sein – es könnte z. B. auch halb voll sein.)
   b) „Er ist nicht der Älteste der Familie“. („Er ist der Jüngste der Familie“ wäre eine falsche Verneinung.)
   c) „7 ist keine gerade Zahl“ oder gleichbedeutend: „7 ist eine ungerade Zahl“.
3. a) ausschließend (der Satz ist im Sinn von „entweder – oder“ gemeint)
   b) einschließend (es kann morgen oder übermorgen oder auch an beiden Tagen schneien)
   c) ausschließend d) ausschließend
4. Das Verbot müsste lauten: „Betreten des Rasens oder Blumenpflücken verboten“ (da bereits Betreten des Rasens allein unerwünscht ist, auch wenn man dabei nicht Blumen pflückt).
5. a) $a \wedge b$ ist falsch, weil nicht sowohl Aussage a als auch Aussage b wahr ist.
   b) $a \vee b$ ist wahr, weil (zumindest) eine der beiden Aussagen a bzw. b wahr ist.
   c) a xor b ist wahr, weil genau eine der beiden Aussagen a bzw. b wahr ist.
6. a) falsch (gestern könnte es geregnet haben)
   b) falsch c) richtig d) falsch e) richtig
7. a) nein (Aussageform) b) wahre (Existenz-)Aussage c) falsche (All-)Aussage
8. a) falsche Aussage; nicht alle natürlichen Zahlen sind kleiner als 3
   b) wahre Aussage; es gibt (zumindest) eine natürliche Zahl, die kleiner als 3 ist
9. richtig
10. a) Nicht alle Tigerkatzen sind gute Mäusejäger (= Es gibt (mindestens) eine Tigerkatze, die kein guter Mäusejäger ist).
    b) Es gibt keinen Matrosen, der schwimmen kann (= Alle Matrosen sind Nichtschwimmer).
    c) Es gibt (zumindest) ein x mit $x \geq 3$.
    d) Es gibt (zumindest) ein x und ein y mit $x^2 + y^2 \neq 4$.
11. a) richtig b) falsch (es kann auch ein Passat sein)
    c) richtig (denn $a \Rightarrow b$ ist gleichbedeutend wie $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$)
    d) falsch
12. a) „n durch 4 teilbar $\Rightarrow$ n gerade“ trifft zu, denn „n durch 4 teilbar $\rightarrow$ n gerade“ ist für alle natürlichen n eine wahre Aussage. (Der Fall $a(n)$ wahr und $b(n)$ falsch (d.h., n durch 4 teilbar, aber n nicht gerade) ist nicht möglich.)
    b) „n gerade $\Rightarrow$ n durch 4 teilbar“ trifft nicht zu, denn „n gerade $\rightarrow$ n durch 4 teilbar“ ist nicht für alle n richtig.
    c) $a(n) \Leftrightarrow b(n)$ trifft nicht zu (weil zwar $a(n) \Rightarrow b(n)$, nicht aber $b(n) \Rightarrow a(n)$ zutrifft).
    d) $\overline{b(n)} \Rightarrow \overline{a(n)}$ trifft zu (da $a(n) \Rightarrow b(n)$ zutrifft).
13. a) $b \Rightarrow a$, aber $a \not\Rightarrow b$ (Ein Notendurchschnitt < 2 ist eine notwendige Voraussetzung für ein Leistungsstipendium; um eines zu bekommen, reicht dieser Notendurchschnitt aber nicht aus. Zum Beispiel muss man zusätzlich die Prüfungen innerhalb einer bestimmten Zeit abgelegt haben.)
    b) ja (da das gleichbedeutend ist zu $b \Rightarrow a$); „kein Notendurchschnitt < 2 $\Rightarrow$ kein Leistungsstipendium“

Lösungen zu Abschnitt 1.2

1. Ja, denn es kommt nicht auf die Reihenfolge der Elemente an.
2. a) $A = \{4\}$ b) $B = \{-4, 4\}$ c) $C = \{1, 2, 3, 4\}$ d) $D = \{\}$
3. a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ b) $A \cap B = \{2\}$ c) ja d) nein, weil $1 \notin B$
4. a) Menge der Nobelpreisträger, die Österreicher sind oder für Literatur ausgezeichnet wurden (einschließendes „oder“)
   b) Menge der männlichen österreichischen Nobelpreisträger
5. a) falsch; $\{\}$ ist die leere Menge, die Menge $\{0\}$ enthält aber die Zahl 0
   b) richtig c) falsch; $\{1\} \cup \{1\} = \{1\}$ d) richtig e) richtig
   f) falsch; bei Tupeln spielt die Reihenfolge der Elemente eine Rolle
   g) falsch; $\{2, 5, 7\}$ ist eine Menge und $(2, 5, 7)$ ist ein 3-Tupel
   h) falsch; bei Tupeln sind mehrfach auftretende Elemente von Bedeutung
6. a) $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$
   b) $B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$
   c) nein d) ja e) $\{1\}$ f) $\{3, 4\}$

Lösungen zu Abschnitt 1.3

1. a) falsch b) richtig c) richtig d) falsch e) richtig
2. Durch Vertauschen von 0 und 1 bzw. von + und · erhalten wir:
   a) $a + 0 = a$ b) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ c) $a + (a \cdot b) = a$
3. falsch; die Assoziativgesetze bedeuten, dass man bei Ausdrücken, die nur + oder nur · enthalten, auf Klammern verzichten kann. Bei gemischten Ausdrücken hängt das Ergebnis sehr wohl davon ab, ob man zuerst + oder · durchführt; man kann in diesem Fall nur deshalb auf Klammern verzichten, weil man vereinbart, dass · vor + ausgewertet wird.
4. a) richtig (de Morgan’sche Regel) b) falsch
5. a) $a + (a + \overline{a}) = a + 1 = 1$
   b) Wir werten zunächst $a \cdot \overline{a} = 0$ aus, und damit erhalten wir $a \cdot \overline{a} \cdot a = 0 \cdot a = 0$.
6. Es gibt in diesem Fall 4 Minterme:

a	b	$m_0(a, b) = \overline{a} \cdot \overline{b}$	$m_1(a, b) = \overline{a} \cdot b$	$m_2(a, b) = a \cdot \overline{b}$	$m_3(a, b) = a \cdot b$
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

7. Ja, denn jede Verknüpfung kann mithilfe der DNF nur mit Disjunktion, Konjunktion und Negation dargestellt werden; mithilfe der de Morgan’schen Regel $a + b = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}$ kann dann noch jede Disjunktion durch eine Konjunktion ausgedrückt werden.

1.6 Übungen

Aufwärmübungen

1. Ist „Ein Barbier rasiert alle, die sich nicht selbst rasieren“ eine Aussage? (Versuchen Sie, einen Wahrheitswert zuzuordnen.)
2. Aussage a: „Österreich gehört zur EU“; Aussage b: „Österreich grenzt an Spanien“. Welche der folgenden Aussagen sind wahr:
   a) $a \wedge b$ b) $a \vee b$ c) a xor b d) $\overline{b}$
3. Verneinen Sie:
   a) Zu jedem Schloss passt ein Schlüssel.
   b) Es gibt einen Mitarbeiter, der C++ kann.
   c) Für alle x gilt: $f(x) \neq 0$.
   d) Es gibt ein $C > 0$, sodass $f(x) \leq C$ für alle x.
4. Was ist die Verneinung von „In der Nacht sind alle Katzen grau“?
   a) In der Nacht sind nicht alle Katzen grau.
   b) Am Tag ist keine Katze grau.
   c) Es gibt eine Katze, die in der Nacht nicht grau ist.
   d) In der Nacht ist keine Katze grau.
5. Gilt $\Rightarrow$ oder sogar $\Leftrightarrow$? Setzen Sie ein und formulieren Sie sprachlich:
   a) x durch 4 teilbar ... x durch 2 teilbar.
   b) x gerade Zahl ... $x + 1$ ungerade Zahl.
6. Aussage a: „Ich bestehe die Prüfung“; Aussage b: „Ich feiere.“ Für mich gilt: $a \Rightarrow b$, also „Wenn ich die Prüfung bestehe, dann feiere ich“. Was lässt sich daraus über mein Feierverhalten sagen, wenn ich die Prüfung nicht bestehe?
7. Geben Sie die Menge in beschreibender Form an:
   a) $A = \{4, 5, 6\}$ b) $B = \{-1, 0, 1\}$
   c) $C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1\}$ d) $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$
8. Zählen Sie jeweils die Elemente der Menge auf:
   $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 5\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 25\}$
   $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$ $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x = 0\}$
9. Geben Sie alle 8 Teilmengen von $\{0, 1, 2\}$ an.
10. Ergänzen Sie:
    a) $A \cup A =$ b) $A \cap A =$ c) $\{1\} \cup \{0\} =$ d) $\{\} \cup \{0\} =$
11. Richtig oder falsch: a) $\overline{\overline{a} + b} = a + \overline{b}$ b) $\overline{\overline{a} + b} = a \cdot \overline{b}$
12. Überprüfen Sie, ob $a \cdot (\overline{a} + b) = a \cdot b$ ein gültiges Gesetz der Schaltalgebra ist. Wie steht es mit $a + \overline{a} \cdot b = a + b$?
13. Geben Sie a) die DNF und b) die KNF von f_6 und von f_{14} an und vereinfachen Sie gegebenenfalls das Ergebnis.
14. Vereinfachen Sie: a) $a \cdot (\overline{a} + b)$ b) $(a \cdot \overline{b}) + b$ c) $a \cdot b + a \cdot \overline{b}$

Weiterführende Aufgaben

1. Verneinen Sie:
   a) Es gibt ein $x \in A$ mit $x < 5$.

b) Alle Pinguine schwimmen gerne.
c) Das Auto ist blau und wurde vor dem Jahr 2005 zugelassen.
d) $(x \in A)$ oder $(x \in B)$

2. Es gilt: „Wenn ich schlafe, habe ich geschlossene Augen." Was trifft zu?
   a) Wenn meine Augen offen sind, bin ich wach.
   b) Wenn ich nicht schlafe, sind meine Augen offen.
   c) Wenn ich geschlossene Augen habe, schlafe ich.
3. Verneinen Sie: „Alle Anwesenden sprechen Deutsch oder Englisch."
4. Graf Hubert wurde in seinem Arbeitszimmer ermordet. Der Arzt hat festgestellt, dass der Tod zwischen 9:30 und 10:30 Uhr eingetreten ist. Die Haushälterin von Graf Hubert ist um 10:00 vom Garten in die Küche gegangen. Um an der Haushälterin vorbeizukommen, muss der Mörder vor 10:00 mit einem Schlüssel durch die Eingangstür oder nach 10:00 durchs Fenster eingestiegen sein.
   Kommissar Berghammer vermutet einen der drei Erben A, B oder C als Mörder. A hat als einziger einen Schlüssel, kann aber wegen seines Gipsfußes nicht durchs Fenster gestiegen sein. A und B haben beide kein Alibi für die Zeit nach 10 Uhr (wohl aber für die Zeit vor 10) und C hat kein Alibi für die Zeit vor 10 (wohl aber für nach 10).
   Wer von den dreien kommt als Mörder in Frage?

   (Tipp: Führen Sie z. B. folgende Aussagen ein: $S =$ „X hat einen Schlüssel", $F =$ „X kann durchs Fenster klettern", $V =$ „X hat kein Alibi vor 10", $N =$ „X hat kein Alibi nach 10". Aus der Angabe geht hervor, dass für den Mörder $S \vee F$ und $V \vee N$ und $\overline{N} \to S$ und $\overline{V} \to F$ wahr sein muss. (Finden Sie noch eine andere Möglichkeit für eine logische Formel, die den Mörder entlarvt?). Stellen Sie nun eine Wahrheitstabelle für $X = A, B, C$ auf.

	S	F	...
A	...	...	...
B	...	...	...
C	...	...	...

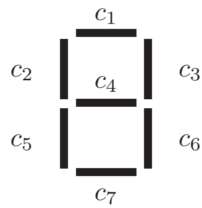
5. Eine KFZ-Versicherung hat ihre Kunden in folgende Mengen eingeteilt:
   - K ... Menge aller Kunden
   - U ... Kunden, die einen Unfall verursacht haben
   - G ... Kunden, die einen Strafzettel wegen überhöhter Geschwindigkeit bekommen haben
   - A ... Kunden, die wegen Alkohol am Steuer verurteilt worden sind

   Geben Sie folgende Mengen an (durch Bildung von Durchschnitt, Vereinigung, usw. ... von K, U, G, A):
   a) alkoholisiert oder Unfall b) weder Unfall noch alkoholisiert
   c) kein Vergehen d) kein Unfall, aber alkoholisiert
6. Gegeben seien Mengen A, B, M mit $A, B \subseteq M$. Vereinfachen Sie durch Anwendung von Rechengesetzen für Mengen: a) $A \cap (B \cup \overline{A})$ b) $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$
7. Vereinfachen Sie: a) $(a+b) \cdot (\overline{a}+b)$ b) $a + (\overline{a \cdot b}) + (b \cdot c)$ c) $(\overline{a+b}) + (a \cdot \overline{b})$
8. Zeigen Sie mithilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Formel für die DNF

$$f(a, b) = f(0, 0) \cdot \overline{a} \cdot \overline{b} + f(0, 1) \cdot \overline{a} \cdot b + f(1, 0) \cdot a \cdot \overline{b} + f(1, 1) \cdot a \cdot b$$

   gilt. Leiten Sie daraus die KNF für $f(a, b)$ her (Tipp: Verneinung beider Seiten der DNF und dann Anwendung der de Morgan'schen Regeln).

9. Eine einstellige LCD-Anzeige kann durch die sieben Variablen



dargestellt werden. Überlegen Sie zunächst, welche Balken c_j aufleuchten müssen, um die Zahlen 0, 1, 2, 3 darzustellen (Für die Anzeige der Zahl 3 leuchten zum Beispiel alle Balken außer c_2 und c_5). Dabei bedeutet $c_j = 1$, dass der zugehörige Balken leuchtet und $c_j = 0$, dass der zugehörige Balken nicht leuchtet. Geben Sie dann $c_1, \ldots, c_7$ als Verknüpfungen von a und b (Eingangsvariable) an, wenn $(ab)_2$ die zugehörige Dualdarstellung der anzuzeigenden Zahl ist.

Tipp: Stellen Sie z. B. eine Tabelle der folgenden Form auf und geben Sie die DNF oder die KNF der c_j an:

a	b	c_1	c_2	$\ldots$
0	0	1	1	$\ldots$
0	1			
1	0			
1	1			

10. Entwerfen Sie eine Schaltung für eine IF-Abfrage $\text{if}(t, a, b)$, die den Wert von a zurückliefert, falls $t = 1$, und den Wert von b falls $t = 0$. (Tipp: Verwenden Sie die DNF in drei Variablen. Siehe Abschnitt 1.3.1.)
11. In der **Fuzzy-Logik** (engl. *fuzzy* = unscharf, verschwommen) werden nicht nur die Wahrheitswerte 0 und 1, sondern beliebige reelle Werte im Intervall $[0, 1]$ zugelassen. Der Wahrheitswert einer Aussage kann als Wahrscheinlichkeit, mit der die Aussage wahr ist, interpretiert werden. Je kleiner der Wert ist, umso unwahrscheinlicher ist es, dass die Aussage wahr ist. Die logischen Operationen sind wie folgt definiert:

$$\overline{a} = 1 - a, \qquad a \wedge b = \min(a, b), \qquad a \vee b = \max(a, b).$$

Hier ist $\max(a, b)$ die größere der beiden Zahlen und $\min(a, b)$ die kleinere der beiden Zahlen a und b.

Diese Definition kann als Verallgemeinerung der UND- bzw. ODER-Verknüpfung in der zweiwertigen Logik angesehen werden. Auch dort hat $a \wedge b$ immer den kleineren der beiden Werte von a und b bzw. $a \vee b$ hat den größeren der beiden Werte. Auch in der Fuzzy-Logik gelten die Logikgesetze aus Satz 1.42:

Zeigen Sie, dass die de Morgan'schen Regeln

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}, \qquad \overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$$

auch für die Fuzzy Logik gültig sind. (Tipp: Betrachten Sie die Fälle $a < b$, $a = b$ und $a > b$.)

Lösungen zu den Aufwärmübungen

1. keine Aussage; es ist unmöglich, einen Wahrheitswert zuzuordenen, denn in jedem Fall führt der Satz auf einen Widerspruch.
2. a) falsche Aussage b) wahre Aussage c) wahre Aussage d) wahre Aussage
3. a) „Nicht zu jedem Schloss passt ein Schlüssel“ oder „Es gibt (mindestens) ein Schloss, zu dem kein Schlüssel passt“. (Verneinung einer All-Aussage ergibt eine Existenz-Aussage.)
   b) „Für alle Mitarbeiter gilt: Er/sie kann C++ nicht“ bzw. „Es gibt keinen Mitarbeiter, der C++ kann“.
   c) „Es gibt (mindestens) ein x mit $\overline{f(x) \neq 0}$“, d.h. „Es gibt (mindestens) ein x mit $f(x) = 0$“.
   d) „Für alle $C > 0$ gilt: $\overline{f(x) \leq C \text{ für alle } x}$“, d.h. „Für alle $C > 0$ gilt: Es gibt ein x mit $\overline{f(x) \leq C}$“, also „Für alle $C > 0$ gilt: Es gibt ein x mit $f(x) > C$“. Sprachlich noch etwas schöner: „Zu jedem $C > 0$ gibt es (mindestens) ein x mit: $f(x) > C$. Alternativ kann man auch sagen: „Es gibt kein C, sodass $f(x) \leq C$ für alle x“.
4. a) ja b) nein c) ja d) nein
5. a) x durch 4 teilbar $\Rightarrow$ x durch 2 teilbar. Die Umkehrung gilt nicht. In Worten: „Wenn x durch 4 teilbar ist, dann ist x auch durch 2 teilbar (aber nicht umgekehrt)“ oder „x durch 4 teilbar ist hinreichend (aber nicht notwendig) dafür, dass x durch 2 teilbar ist“.
   b) x gerade $\Leftrightarrow$ $x + 1$ ungerade; „ x ist gerade genau dann, wenn $x + 1$ ungerade ist“.
6. Es lässt sich über mein „Feierverhalten“ nichts sagen (meine Regel sagt nur etwas für den Fall aus, dass ich die Prüfung bestehe).
7. Zum Beispiel:
   a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 6\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
   c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 1\}$ d) $D = \mathbb{N} \cup \{0\}$
8. $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-5, 5\}$, $C = \{\dots, -3, -2, -1\}$, $D = \{0\}$
9. $\{\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$
10. a) A b) A c) $\{0, 1\}$ d) $\{0\}$
11. a) falsch (Wertetabelle) b) richtig (Wertetabelle bzw. de Morgan’sche Regel)
12. beide richtig (Wahrheitstabelle oder Umformung mithilfe der Rechenregeln der Schaltalgebra)
13. a) DNF: $f_6(a, b) = \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b}$ (= a xor b) und $f_{14}(a, b) = a \cdot \overline{b} + b \cdot \overline{a} + a \cdot b$. Die Darstellung von f_{14} kann noch vereinfacht werden: $a \cdot \overline{b} + b \cdot \overline{a} + a \cdot b = a \cdot \overline{b} + b \cdot (\overline{a} + a) = a \cdot \overline{b} + b \cdot 1 = a \cdot \overline{b} + b = b + (a \cdot \overline{b}) = (b + a) \cdot (b + \overline{b}) = (b + a) \cdot 1 = a + b$.
    b) KNF: $f_6(a, b) = (a + b) \cdot (\overline{a} + \overline{b})$ (überzeugen Sie sich durch Anwendung der Rechenregeln davon, dass das gleich $\overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b}$ ist) und $f_{14} = a + b$.
14. a) $a \cdot (\overline{a} + b) = a \cdot \overline{a} + a \cdot b = a \cdot b$, da $a \cdot \overline{a} = 0$ ist.
    b) $(a \cdot \overline{b}) + b = b + (a \cdot \overline{b})$ (... Kommutativgesetz) $= (b + a) \cdot (b + \overline{b})$ (... Distributivgesetz) $= (b + a) \cdot 1 = b + a = a + b$.
    c) $a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a \cdot (b + \overline{b})$ (... Distributivgesetz) $= a \cdot 1 = a$.

(Lösungen zu den weiterführenden Aufgaben finden Sie in Abschnitt B.1)

http://www.springer.com/978-3-642-37971-0

Mathematik für Informatiker
Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra
Teschl, G.; Teschl, S.
2013, XIII, 522 S. 108 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-37971-0