

## Chapitre 2

# Equations de conservation

*Les équations de conservation associées aux lois constitutives sont les outils du mécanicien des fluides, elles contiennent l'ensemble des connaissances nécessaires pour reproduire intégralement le phénomène observé par la voie de la résolution ou de la simulation. La modélisation physique qui conduit à ce système d'équations représentatives est ainsi la pierre angulaire de toute construction mathématique qui vise à appréhender les écoulements de fluides du point de vue théorique. Ces équations sont établies sur la base d'hypothèses et de postulats souvent anciens dont il convient de rappeler le sens et éventuellement d'en discuter le bien fondé.*

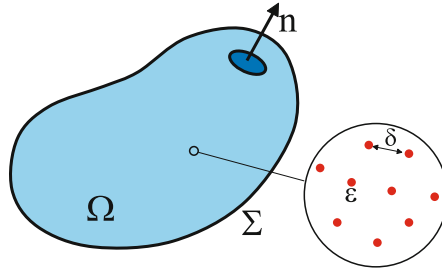
*Les différentes présentations d'un ouvrage de mécanique des fluides, qu'il soit organisé en équations générales puis en cas particuliers comme ici, ou bien, à l'inverse que les cas simples permettent d'introduire des concepts plus généraux, doivent permettre au lecteur de comprendre le contexte dans lequel il est placé. Par exemple un ingénieur qui aurait oublié que la loi de Bernoulli n'est applicable que dans des hypothèses très restrictives pourrait être tenté de l'appliquer à tout problème posé. Il convient donc de bien comprendre que tout problème doit faire l'objet d'une analyse objective de tous les phénomènes physiques qui lui sont associés avant toute modélisation.*

### 2.1 Notion de milieu continu

Le **concept de milieu continu** est attaché à une perception "mécanicienne" de la matière par comparaison à une vision plus physique qui décrit la nature corpusculaire de la matière. Chaque grandeur est définie pour un ensemble suffisant de particules centrées autour du point  $P$  sur lequel est attachée cette grandeur (Fig. 2.1).

Considérons un volume de contrôle  $\Omega$  limité par une surface  $\Sigma$  sur laquelle nous définissons une normale extérieure  $\mathbf{n}$ .

Cet ouvert  $\Omega$  contient un fluide : liquide, ou gaz à pression suffisante de manière que le libre parcours moyen des molécules soit très inférieur aux dimensions caractéristiques du domaine. Cette condition sera implicitement incluse dans le concept



**Fig. 2.1** Milieu formé de particules de taille  $\varepsilon$  distantes en moyenne de  $\delta$  considéré comme un milieu continu de volume  $\Omega$  limité par la surface  $\Sigma$  munie d'une normale extérieure  $\mathbf{n}$

de milieu continu. Elle est définie par  $l \ll L$  où  $l$  est le libre parcours moyen des molécules et  $L$  la dimension caractéristique du domaine.

Le volume de contrôle contient, outre le fluide, des particules solides dispersées dans le milieu et dont les dimensions sont très petites devant la distance moyenne qui les sépare  $\delta \ll l$ . Cet ensemble de particules solides immobiles introduit une résistance visqueuse qui peut être caractérisée par une "traînée volumique".

## 2.2 Cinématique des fluides

### 2.2.1 Dérivée particulière

Il existe deux méthodes pour décrire le mouvement d'un système matériel continu [29]:

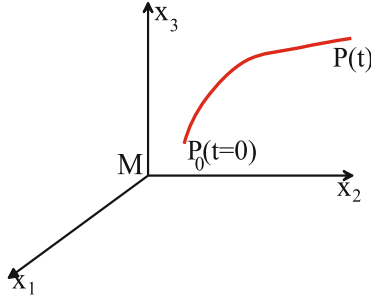
- la description Lagrangienne : on rattache les différentes grandeurs au point matériel
- la méthode Eulérienne : on rattache les différentes grandeurs au point géométrique.

### 2.2.2 Description Lagrangienne

On se donne les équations paramétriques de la trajectoire (Fig. 2.2) de l'ensemble des points matériels  $P$  dans un repère cartésien. Si  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  sont les coordonnées initiales du point  $P$  considéré (à  $t=0$ ), on suppose connues les relations  $x_i = x_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$  qui donnent la position du point  $P$  à l'instant  $t$  qui était initialement en  $P_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$

$(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  sont les variables indépendantes de Lagrange

Toute grandeur liée à un élément matériel  $P$  du continu peut être étudiée en suivant sa trajectoire. Elle est alors fonction de  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$



**Fig. 2.2** Trajectoire d'une particule matérielle dans un repère de coordonnées catésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$

$$G = G(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$$

C'est le cas de

$$x_i = x_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) \text{ position de P}$$

$$V_i = V_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial t} \text{ vitesse de P}$$

$$\gamma_i = \gamma_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) = \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \text{ acceleration de P}$$

L'utilisation des variables de Lagrange fait intervenir la position initiale de la particule dans l'état initial du système. C'est la méthode la mieux adaptée à l'étude des "solides" déformables pour lesquels on peut définir un état initial et suivre facilement la transformation.

Dans les milieux fluides l'état initial n'a aucune importance sur les efforts internes à l'état présent. La description de Lagrange est mal adaptée à l'étude du mouvement des fluides.

### 2.2.3 Description Eulérienne

En un point géométrique donné  $M$  on se donne les composantes du vecteur vitesse  $V_i = V_i(M, t)$  et toute grandeur physique attachée au fluide  $G(M, t)$ .

Soit dans un système de coordonnées cartésiennes :

$$V_i = V_i(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$G = G(x_1, x_2, x_3, t)$$

$(x_1, x_2, x_3, t)$  sont les variables d'Euler.

On ne s'intéresse donc pas ici à l'histoire du continu considéré mais à son champ de vitesse à l'instant  $t$ .

$$\begin{aligned} G &= G(x_1, x_2, x_3, t) = G(x_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t), x_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t), x_3(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t), t) \\ &= G(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) \end{aligned}$$

### 2.2.4 Définitions

- **a - trajectoire** Les équations paramétriques des trajectoires sont données par la résolution du système différentiel :

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{dx_i}{dt} \rightarrow dx_i = V_i \cdot dt \\ \frac{dx_1}{V_1(x_1, x_2, x_3, t)} &= \frac{dx_2}{V_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{V_3(x_1, x_2, x_3, t)} \end{aligned}$$

L'intégration donne les relations

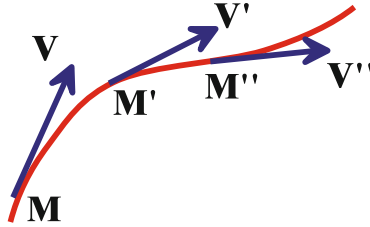
$$x_i = x_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$$

où  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  sont des constantes.

Exemple : photo de phares de véhicules dans la nuit en exposition longue.

- **b - ligne de courant**

A un instant donné on définit les lignes de courant (Fig. 2.3) comme les lignes tangentes en chacun de leur point au vecteur vitesse en ce point. On détermine



**Fig. 2.3** Lignes de courant tangente en chaque point  $M$  au vecteur vitesse  $V$

les lignes de courant en écrivant  $V // dM, t$  fixe. On a  $V \cdot n = 0$  où  $n$  est la normale à la ligne de courant.

$$\frac{dx_1}{V_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{V_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{V_3(x_1, x_2, x_3, t)} \text{ avec } t = \text{Cte}$$

Exemple : On peut observer les lignes de courant en traçant les tangentes aux segments clairs laissés sur une photo de phares de véhicules dans la nuit en exposition courte.

- **c - surface de courant**

Surface tangente au vecteur vitesse.

- **d - tube de courant**

Ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.

- **e - ligne d'émission**

Toutes les particules qui passent successivement par un point  $S$  sont situées à l'instant  $t$  sur une courbe dite ligne d'émission relative à  $S$ .

Exemple : ligne tracée dans le ciel à un instant donné par un panache de fumée.

- **f - écoulement stationnaire**

Un écoulement est stationnaire par rapport à un référentiel lorsque la vitesse et les autres variables ne dépendent plus du temps. Il y a alors identité entre trajectoire, ligne d'émission et ligne de courant, les systèmes référentiels devenant identiques.

*Les qualificatifs de stationnaire, permanent, établi, stable ... sont précis et correspondent à des situations différentes; la stationnarité est attachée à une indépendance des variables dans le temps. La permanence est la persistance d'un état qui peut être instationnaire alors qu'un écoulement établi traduit son indépendance par rapport à une direction spatiale. On parle de stabilité ou d'instabilité uniquement par rapport à un état de référence qui lui-même peut être stationnaire, oscillant, périodique, etc.*

## 2.2.5 Expressions des dérivées particulières

Il s'agit de connaître l'évolution de toute grandeur physique liée à un élément matériel que l'on suit dans son mouvement. Pour calculer par exemple une accélération il s'agit de suivre l'évolution de la vitesse de l'élément matériel considéré quand il se déplace. On appelle dérivée particulière d'une grandeur physique, la dérivée par rapport au temps de cette grandeur quand on suit le point matériel dans son mouvement. On dit encore que la dérivée particulière d'une grandeur physique est la dérivée temporelle ou matérielle ou totale.

### 2.2.5.1 En variables de Lagrange

La dérivée particulière s'identifie à la dérivée partielle par rapport au temps

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t}$$

car pour suivre la grandeur dans son mouvement il suffit de laisser  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  constants et faire varier  $t$ .

$$\gamma_i = \frac{\partial V_i}{\partial t}, \quad V_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

### 2.2.5.2 En variables d'Euler

Les grandeurs sont définies en un point géométrique M. Pour suivre la grandeur dans son mouvement il faut attacher le point géométrique M à un élément matériel et le suivre dans son mouvement

- **a - Fonction scalaire de point**

$$\underbrace{G(M, t)}_{\text{pt géométrique}} \rightarrow \underbrace{G\{M(t), t\}}_{\text{pt matériel coïncidant avec le pt géométrique}}$$

$$G(x_1, x_2, x_3, t) \rightarrow G(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t)$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} + V_i \frac{\partial G}{\partial x_i}$$

Soit

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla G$$

Exemple

$$\gamma_i = \frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \mathbf{V}_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

- **b - Fonction vectorielle de point** En écrivant :

$$\mathbf{A}(M, t) = A_i \mathbf{e}_i$$

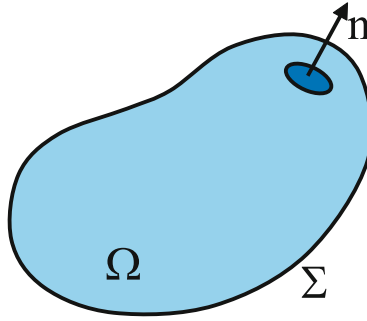
$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_i}{dt} \mathbf{e}_i = \left( \frac{\partial A_i}{\partial t} + \mathbf{V}_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \mathbf{e}_i$$

- **c - Intégrale de volume**

Considérons un ensemble de particules de matière contenu dans un domaine  $\Omega$  limité par une surface  $\Sigma$  (Fig. 2.4).

Soit  $K(t)$  une intégrale de volume d'une fonction scalaire

$$K(t) = \iiint_{\Omega} A(M, t) dv$$



**Fig. 2.4** Milieu continu de volume  $\Omega$  limité par la surface  $\Sigma$  munie d'une normale extérieure  $\mathbf{n}$

La dérivée particulière d'une intégrale de volume est:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} A(M, t) dv$$

dans la mesure où le domaine d'intégration n'est pas constant quand on le suit dans son mouvement, on ne peut dériver sous le signe somme. On effectue alors un double changement de variables Euler-Lagrange-Euler

$$K = \iiint_{\Omega} A(x_1, x_2, x_3, t) dx_1 dx_2 dx_3$$

en opérant un changement de variables  $\Omega \rightarrow \Omega_0$  (fixe) :

$$K = \iiint_{\Omega_0} A(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) J dx_1^0 dx_2^0 dx_3^0$$

avec

$$J = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(x_1^0, x_2^0, x_3^0)}$$

On peut alors dériver sous le signe somme ( constant)

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_{\Omega_0} \frac{dAJ}{dt} dv_0 = \iiint_{\Omega_0} \left( J \frac{dA}{dt} + A \frac{dJ}{dt} \right) dv_0$$

On passe aux variables d'Euler par un nouveau changement de variables :

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_{\Omega} \left( J \frac{dA}{dt} + A \frac{dJ}{dt} \right) J' dv$$

avec

$$J' = \frac{D(x_1^0, x_2^0, x_3^0)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \frac{1}{J}$$

Calcul de  $1/J \cdot dJ/dt$

Dérivée d'un déterminant

$$\frac{dJ}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \frac{dx_1}{dt}}{\partial x_1^0} & \frac{\partial \frac{dx_1}{dt}}{\partial x_2^0} & \frac{\partial \frac{dx_1}{dt}}{\partial x_3^0} \\ \frac{\partial \frac{dx_2}{dt}}{\partial x_1^0} & \frac{\partial \frac{dx_2}{dt}}{\partial x_2^0} & \frac{\partial \frac{dx_2}{dt}}{\partial x_3^0} \\ \frac{\partial \frac{dx_3}{dt}}{\partial x_1^0} & \frac{\partial \frac{dx_3}{dt}}{\partial x_2^0} & \frac{\partial \frac{dx_3}{dt}}{\partial x_3^0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1^0} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2^0} & \frac{\partial x_1}{\partial x_3^0} \\ \frac{\partial \frac{dx_2}{dt}}{\partial x_1^0} & \frac{\partial \frac{dx_2}{dt}}{\partial x_2^0} & \frac{\partial \frac{dx_2}{dt}}{\partial x_3^0} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_1^0} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2^0} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3^0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1^0} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2^0} & \frac{\partial x_1}{\partial x_3^0} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1^0} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2^0} & \frac{\partial x_2}{\partial x_3^0} \\ \frac{\partial \frac{dx_3}{dt}}{\partial x_1^0} & \frac{\partial \frac{dx_3}{dt}}{\partial x_2^0} & \frac{\partial \frac{dx_3}{dt}}{\partial x_3^0} \end{vmatrix}$$

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{D(V_1, x_2, x_3)}{D(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} + \frac{D(x_1, V_2, x_3)}{D(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} + \frac{D(x_1, x_2, V_3)}{D(x_1^0, x_2^0, x_3^0)}$$

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \frac{D(V_1, x_2, x_3)}{D(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} \frac{D(x_1^0, x_2^0, x_3^0)}{D(x_1, x_2, x_3)} + \dots$$

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \frac{D(V_1, x_2, x_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} + \frac{D(x_1, V_2, x_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} + \frac{D(x_1, x_2, V_3)}{D(x_1, x_2, x_3)}$$

Compte tenu de  $\partial x_i / \partial x_j = \delta_{ij}$ :

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{V}$$

où  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  est le taux de dilatation cubique du fluide

Soit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} A(M, t) dv &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{dA}{dt} + A \nabla \cdot \mathbf{V} \right) dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot (A \mathbf{V}) \right) dv \\ &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial A}{\partial t} dv + \iint_{\Sigma} A \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds \end{aligned}$$



## 2.3 Conservation de la masse

La conservation de la masse exprime que chaque constituant contenu dans  $\Omega$  est conservé lorsque l'on suit le volume de contrôle dans son mouvement; l'imperméabilité de  $\Sigma$ , en l'absence de source ou de puits de matière, conduit à écrire :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho_i dv = 0$$

où  $\rho_i$  est la masse volumique locale partielle de chaque constituant au sein du mélange.

Dans le cas où des réactions chimiques conduisent à des transformations entre espèces sur la base d'une cinétique chimique connue, il est possible d'introduire le taux de production massique de chaque espèce  $\omega_i$  :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho_i dv = \omega_i$$

En exprimant la dérivée particulaire:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho_i dv = \iiint_{\Omega} \left( \frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \nabla \cdot \mathbf{V}_i \right) dv$$

où  $\mathbf{V}_i$  est la vitesse du constituant.

La forme locale de l'équation de conservation est obtenue en adoptant l'hypothèse de l'équilibre local:

$$\frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \nabla \cdot \mathbf{V}_i = 0$$

ou bien, en exprimant la dérivée particulaire de la masse volumique partielle :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{V}_i) = 0$$

### 2.3.1 Approche classique

La conservation de la masse de chaque constituant exige de définir et de calculer une vitesse par constituant et donc d'établir une équation du mouvement par espèce. Pour éviter cette difficulté il est possible de définir une vitesse d'ensemble ou vitesse barycentrique pour toutes les espèces; cette approche est désignée sous le vocable "hypothèse du traceur". Mais pour rétablir le phénomène de dissociation entre espèces on introduit une vitesse de diffusion  $\mathbf{V}_d$  que l'on écrit comme proportionnelle au gradient de la masse volumique partielle (appelée loi de Fick).

$$\mathbf{V}_d = \mathbf{V}_i - \mathbf{V} = -\frac{D_i}{\rho_i} \nabla \rho_i$$

Dans le cas d'une diffusion des espèces modélisée par la loi de Fick, l'équation de conservation de la masse pour le constituant  $i$  devient une équation de transport ou d'advection-diffusion :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{V}) - \nabla \cdot (D_i \nabla \rho_i) = 0$$

Ici  $D_i$  est un coefficient de diffusion du constituant  $i$  dans le mélange. Il est possible de définir plus précisément la diffusion entre espèces par un coefficient de diffusion  $D_{ij}$  tenant compte de la nature moléculaire des espèces (masse moléculaire, ...). Dans ce cas l'équation de conservation de la masse du constituant  $i$  s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{V}) - \sum_{j=1}^n \nabla \cdot (D_{ij} \nabla \rho_j) = 0$$

Cette approche communément utilisée ne doit pas faire oublier que le phénomène de transport de matière n'est pas de la diffusion brownienne isotrope mais correspond à une physique complexe où les propriétés moléculaires, taille des molécules, masse molaire, ... interviennent prioritairement.

*Cette linéarité, introduite couramment en thermodynamique des processus irréversibles mais utilisée depuis fort longtemps par Fourier et beaucoup d'autres ou les flux sont censés être proportionnels aux forces n'est qu'une simplification de la réalité. Quand on ne se sait quoi faire de mieux on écrit des lois linéaires et ensuite on ajuste des coefficients que l'on nomme phénoménologiques. Bien d'autres domaines de la physique utilisent cette approche, par exemple en turbulence où la loi de Boussinesq exprime les contraintes de Reynolds comme étant proportionnelles aux gradients de la vitesse moyenne.*

### Approche utilisant la concentration

On introduit la variable  $c$  appelée concentration définie par  $c = \rho_i / \rho$  où  $\rho$  est la masse volumique du mélange. Si la surface de  $\Omega$  est traversée par un flux dû aux gradients de concentration, l'équation de conservation de la masse devient :

$$\frac{\partial \rho c}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c \mathbf{V}) = -\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}$$

$\boldsymbol{\varphi}$  représente ici le flux de masse à travers la surface  $\Sigma$  du domaine. On obtient ainsi une équation de transport classique en explicitant le flux à l'aide de la loi de Fick :

$$\frac{\partial \rho c}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c \mathbf{V}) = \nabla \cdot (\rho D \nabla c)$$

D'autres causes de dissociation ou de séparation des espèces peuvent être observées par l'application de forces de nature différentes, la gravité ou les effets centrifuges ou bien un gradient de température. On se reportera vers des ouvrages de Thermodynamique des Processus Irréversibles pour la modélisation de

tels phénomènes. En effet le flux de masse n'est pas seulement associé au seul gradient de concentration mais devrait faire intervenir le gradient de température (effet de thermodiffusion, effet Soret) et de pression (effet de barodiffusion). Le flux de masse deviendrait alors :

$$\phi = -\rho D \left( \nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T + \frac{k_P}{P} \nabla P \right)$$

où  $k_T$  et  $k_P$  sont les coefficients de diffusion thermique et de barodiffusion.

### 2.3.2 Cas d'un fluide pur

La conservation de la masse pour un fluide pur ou un mélange considéré comme homogène d'un fluide fictif unique peut être obtenue par la sommation sur l'ensemble des constituants :

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{V}_i) \right) = 0$$

Comme la masse volumique du mélange s'écrit comme la somme des masses volumiques partielles de chaque constituant :

$$\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i$$

et en définissant la vitesse barycentrique par l'expression de la quantité de mouvement du mélange :

$$\rho \mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \rho_i \mathbf{V}_i$$

on trouve:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

Dans le cas où une source ou un puits ponctuel ou réparti existe au sein du domaine, le second membre de cette expression est égal au débit volumique.

### 2.3.3 *Ecoulement incompressible*

L'expression générale précédente représente la conservation locale de la masse; elle exprime la variation de la masse volumique d'un élément fluide que l'on suit dans son mouvement.

Il est possible d'adopter une approximation simplificatrice qui consiste à annuler la divergence locale de la vitesse sous certaines conditions discutées plus loin. Adopter  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  revient à considérer le taux de dilatation volumique du fluide nul; le fluide peut se déformer mais chaque élément garde son volume au cours du mouvement.

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Adopter l'approximation de divergence nulle revient à dire que la masse volumique reste constante tout au long d'une trajectoire. Il est à noter que cette expression n'implique en rien que la masse volumique soit une constante! On dit que "l'écoulement est incompressible".

En exprimant les dérivées partielles de la masse volumique par rapport à la pression et à la température :

$$\frac{d\rho}{dt} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dt} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dt}$$

on trouve :

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

soit

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\chi_T \frac{dp}{dt} + \beta \frac{dT}{dt}$$

Si un écoulement est à divergence nulle, cela peut être dû à plusieurs effets différents :

- L'écoulement est à pression et à température constantes le long d'une ligne de courant. Cela ne veut évidemment pas dire que la pression et la température sont uniformes sur  $\Omega$ .
- Le fluide est à compressibilité nulle et à dilatation nulle.

Dans tous les cas les deux termes du second membre de la relation précédente doivent être égaux à zéro ou le second membre nul par compensation ce qui serait totalement fortuit et peu vraisemblable.

On notera que la vitesse du son s'écrit:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\frac{1}{\rho \chi_s}}$$

où  $\chi_s = \gamma \chi_T$  est le coefficient de compressibilité isentropique.

Quand l'on sait que la vitesse du son dans l'air est de l'ordre de  $c = 340 \text{ ms}^{-1}$  et que celle de l'eau est de  $c = 1800 \text{ ms}^{-1}$  on peut admettre qu'aucun fluide n'est incompressible. Si c'était le cas toute perturbation se propagerait à l'infini de manière instantanée.

*Il ne faut pas confondre écoulement incompressible et fluide incompressible. De nombreux ouvrages comportent cette erreur. Le fluide incompressible possède un coefficient de compressibilité nul ce qui correspond notamment à une célérité du son infinie et bien entendu tous les fluides réels sont compressibles plus ou moins comme les liquides par exemple. Le coefficient de compressibilité est intrinsèque au fluide alors que l'approximation d'écoulement incompressible dépend de la valeur de la vitesse. On montrera plus loin que cette approximation est valide lorsque le nombre de Mach est inférieur à une valeur de 0.2. On peut tout à fait admettre qu'un écoulement d'air à faible vitesse peut relever de cette approximation alors qu'un écoulement de liquide sous de fortes pressions et de grandes vitesses ne rentre plus dans le cadre de cette approximation.*

*Une autre vision simpliste consiste à considérer que tous les écoulements compressibles entrent dans le cadre des grandes vitesses. Il existe de nombreuses applications où la divergence de la vitesse est loin d'être nulle et où pourtant les vitesses sont faibles. Une compression d'un gaz dans un cylindre à très faible vitesse doit bien sûr être considérée comme un écoulement compressible d'un fluide compressible. Appartenir à une communauté de spécialistes de tel ou tel domaine de la mécanique des fluides n'exclut pas de conserver une vision objective de la réalité.*

### 2.3.4 Écoulement incompressible mais dilatable

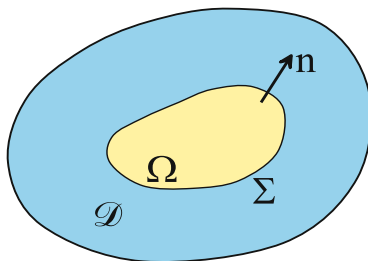
Comme on peut le remarquer, le fait de considérer que le fluide est dilatable dans un champ de température non uniforme conduit inéluctablement à un écoulement à divergence non nulle.

Contraindre l'écoulement à être à divergence nulle en admettant que le fluide est dilatable ne peut s'envisager que dans le cadre de "l'approximation de Boussinesq" où la variation de la masse volumique n'est retenue que dans le terme générateur de la convection naturelle de l'équation du mouvement. Par exemple la masse volumique peut être linéarisée en fonction de la température et de la pression sous la forme  $\rho = \rho_0 (1 - \beta (T - T_0) + \chi_T (p - p_0))$ . La masse volumique sera remplacée dans tous les autres termes de toutes les équations par la masse volumique moyenne constante  $\rho_0$ .

## 2.4 Conservation de la quantité de mouvement

### 2.4.1 Enoncé fondamental de la dynamique

La dynamique est l'étude des relations entre les mouvements et déformations des systèmes matériels et les causes de ces mouvements. Un fluide en mouvement occupe un domaine  $\mathcal{D}$  de l'espace physique.  $\Omega(t)$  désigne le domaine occupé par un ensemble de molécules du fluide que l'on suit dans son mouvement au cours du temps (Fig. 2.5). Le fluide contenu dans  $\Omega$  se déplace sous l'action de deux types de forces extérieures.



**Fig. 2.5** Volume de contrôle  $\Omega$  contenu dans un domaine fluide  $\mathcal{D}$  de même nature

- a - Forces extérieures de volume, définies en tout point M de  $\Omega$  par une densité volumique  $\mathbf{f}$ . Les forces de gravité  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$  en constituent un exemple classique.
- b - Les forces de contact exercées sur la frontière  $\Sigma(t)$  de  $\Omega$  par le fluide extérieur au domaine  $\Omega$ . Ces forces, dites contraintes, sont caractérisées par une densité superficielle  $\mathbf{T}$ .

**Enoncé fondamental de la dynamique :** *Il existe au moins une façon de mesurer le temps (mesure absolue) et un référentiel d'espace (repère absolu ou galiléen) tel qu'à chaque instant et pour toute partie d'un système matériel on ait égalité entre le torseur des quantités d'accélération et le torseur des efforts extérieurs agissant sur la partie considérée.*

$$[\mathbf{F}e] = [\mathbf{D}]$$

Pour un point matériel de masse  $m$

$$m \gamma = \mathbf{F}$$

Pour un milieu continu :

$$[\mathbf{D}] = \begin{cases} \iiint_{\Omega} \rho \gamma dv \\ \iiint_{\Omega} \mathbf{OM} \times \rho \gamma dv \end{cases}$$

$$[Fe] = \begin{cases} \iiint_{\Omega} \mathbf{f} dv + \iint_{\Sigma} \mathbf{T} ds \\ \iiint_{\Omega} \mathbf{OM} \times \mathbf{f} dv + \iint_{\Sigma} \mathbf{OM} \times \mathbf{T} ds \end{cases}$$

L'énoncé fondamental conduit aux équations :

$$\iiint_{\Omega} \rho \gamma(M) dv = \iiint_{\Omega} \mathbf{f}(M) dv + \iint_{\Sigma} \mathbf{T}(M, \mathbf{n}) ds$$

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{OM} \times \rho \gamma(M) dv = \iiint_{\Omega} \mathbf{OM} \times \mathbf{f}(M) dv + \iint_{\Sigma} \mathbf{OM} \times \mathbf{T}(M, \mathbf{n}) ds$$

### 2.4.2 Expression des contraintes

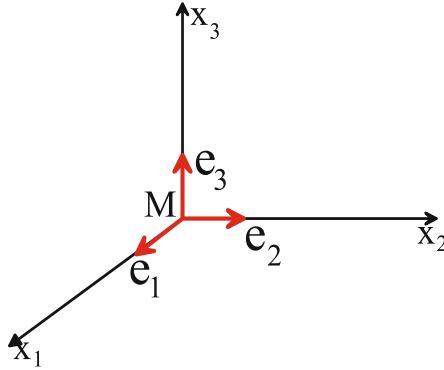


Fig. 2.6 Domaine élémentaire sur lequel s'exerce des contraintes normales et tangentielles

Evaluons les 3 contraintes relatives aux 3 facettes de normales  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  (Fig. 2.6).  $\mathbf{T}(M, \mathbf{e}_j)$  a trois composantes que l'on peut écrire :

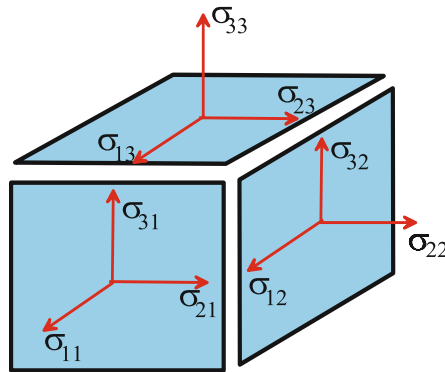
$$\begin{cases} \mathbf{T}(M, \mathbf{e}_1) = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 + \sigma_{21} \mathbf{e}_2 + \sigma_{31} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{T}(M, \mathbf{e}_2) = \sigma_{12} \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} \mathbf{e}_2 + \sigma_{32} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{T}(M, \mathbf{e}_3) = \sigma_{13} \mathbf{e}_1 + \sigma_{23} \mathbf{e}_2 + \sigma_{33} \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

soit

$$\mathbf{T}(M, \mathbf{e}_j) = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i$$

ce qui définit les 9 scalaires

On notera par exemple que  $\sigma_{11}$  désigne la contrainte normale pour la direction  $\mathbf{e}_1$  et  $\sigma_{21}$  et  $\sigma_{31}$  les composantes de la contrainte tangentielle pour cette même direction (Fig. 2.7).



**Fig. 2.7** Facettes du volume de contrôle élémentaire sur lequel s'exerce des contraintes normales et tangentielles

D'une manière générale  $\sigma_{ij}$  est la contrainte suivant  $\mathbf{e}_i$  pour une facette normale à  $\mathbf{e}_j$ :

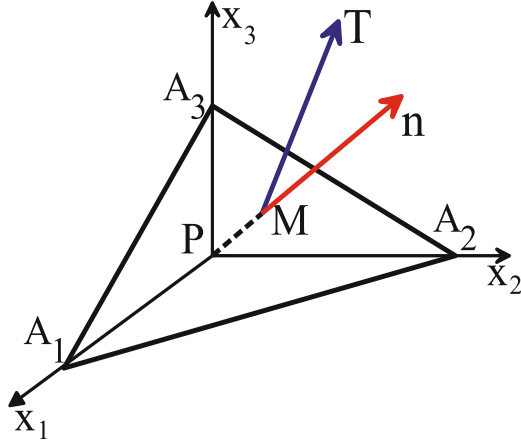
contrainte normale à				
		$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
contrainte suivant	$\mathbf{e}_1$	$\sigma_{11}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$
	$\mathbf{e}_2$	$\sigma_{21}$	$\sigma_{22}$	$\sigma_{23}$
	$\mathbf{e}_3$	$\sigma_{31}$	$\sigma_{32}$	$\sigma_{33}$

Le problème est maintenant de savoir comment s'exprime la contrainte relative à une facette dont la normale a une direction quelconque.

On considère l'équilibre d'un tétraèdre infiniment petit  $PA_1A_2A_3$  (Fig. 2.8)

On pose





**Fig. 2.8** Equilibre d'un tétraèdre soumis à des contraintes normale et tangentielle sur une de ses facettes

$$\mathbf{T} = T_i \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$$

et

$$\begin{cases} \text{aire } A_1 A_2 A_3 = d\Sigma \\ \text{aire } P A_2 A_3 = d\Sigma_1 = n_1 d\Sigma \\ \text{aire } P A_1 A_3 = d\Sigma_2 = n_2 d\Sigma \\ \text{aire } P A_1 A_2 = d\Sigma_3 = n_3 d\Sigma \end{cases}$$

En négligeant les forces volumiques et d'inertie du 3ème ordre devant les forces de contact on projette sur les 3 axes la relation :

$$\iiint_{\Omega} \rho \gamma(M) dv = \iiint_{\Omega} \mathbf{f}(M) dv + \iint_{\Sigma} \mathbf{T}(\mathbf{n}, P) ds$$

qui devient

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{T} ds = 0$$

Sur l'axe  $Ox_1$  on a :

$$\begin{cases} \text{Facette normale à } (-\mathbf{e}_1) : -\sigma_{11} n_1 d\Sigma \\ \text{Facette normale à } (-\mathbf{e}_2) : -\sigma_{12} n_2 d\Sigma \\ \text{Facette normale à } (-\mathbf{e}_3) : -\sigma_{13} n_3 d\Sigma \\ \text{Facette normale à } \mathbf{n} : T_1 d\Sigma \end{cases}$$

Soit

$$T_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3$$

Résultat qui se conserve si  $M \rightarrow P$  de telle sorte que

$$T_i(P, \mathbf{n}) = \sigma_{ij}(P)n_j$$

$\sigma_{ij}$  sont les composantes du tenseur des contraintes en P

forme tensorielle  $\mathbf{T}(P, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(P) \cdot \mathbf{n}$

forme matricielle  $\{T\} = \{\boldsymbol{\sigma}\}\{n\}$

forme indicielle  $\mathbf{T} = T_i n_j e_i$

### 2.4.3 Equation locale du mouvement

La loi fondamentale de la dynamique s'exprime par

$$\iiint_{\Omega} \rho \gamma dv = \iiint_{\Omega} \mathbf{f} dv + \iint_{\Sigma} \mathbf{T} ds$$

que l'on peut aussi écrire

$$\iiint_{\Omega} \rho \gamma dv = \iiint_{\Omega} \mathbf{f} dv + \iint_{\Sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds$$

Le théorème de la divergence nous permet d'écrire

$$\iiint_{\Omega} \rho \gamma dv = \iiint_{\Omega} \mathbf{f} dv + \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dv$$

ou dans le système d'axes  $Ox_1x_2x_3$  :

$$\iiint_{\Omega} \rho \gamma_i dv = \iiint_{\Omega} f_i dv + \iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv$$

Comme le domaine à intégrer est arbitraire et les fonctions continues on en déduit la première loi de Cauchy :

$$\rho \gamma = \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

qui est l'équation locale du mouvement

Soit en projection

$$\rho \gamma_i = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Soit en variables d'Euler :

$$\rho \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{V}^2 + \nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \right) = \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

#### 2.4.4 Lois de comportement

L'équation locale du mouvement d'un milieu continu  $\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$  et l'équation locale de continuité  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$  fournissent 4 équations pour 10 inconnues :

- les 3 composantes du vecteur des vitesses,
- les 6 composantes indépendantes du tenseur de Cauchy,
- la masse volumique.

Les équations générales que nous avons écrites sont donc insuffisantes pour permettre la résolution des problèmes de mécanique des milieux continus. Les milieux continus ont des comportements très différents qu'il importe de préciser.

Pour un milieu déterminé le tenseur des contraintes et le champ des vitesses ne sont pas indépendants et plus précisément les différents milieux continus peuvent être caractérisés par des relations liant les contraintes et les déformations ou vitesses de déformation.

On dit que chaque milieu obéit à des lois de comportement ou lois rhéologiques [12]. Ce qui distingue un milieu déformable c'est que la distance entre 2 points quelconques du milieu n'est plus constante dans le temps. Il s'agit de caractériser cette propriété de déformabilité.

Il existe 2 approches différentes [26] :

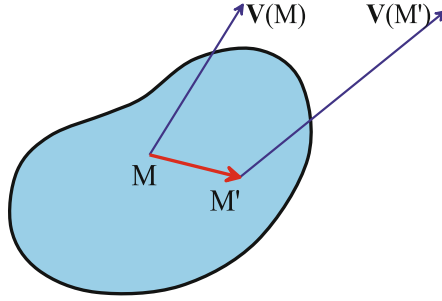
- La première, adaptée à la mécanique du solide, consiste à se référer à une situation initiale ; on aboutit à la notion de tenseur des déformations.
- La seconde, adaptée à la mécanique des fluides, consiste à évaluer la vitesse de déformation instantanée. On aboutit à la notion de tenseur des taux de déformation (ou vitesses de déformation).

#### 2.4.5 Tenseur des vitesses de déformation

Soit  $\mathbf{V}(M)$  le champ des vitesses à l'instant  $t$  d'un continu et  $dv$  un petit élément de volume (Fig. 2.9).

$$\mathbf{V}(M') = \mathbf{V}(M) + d\mathbf{V}$$

$$MM' = d\mathbf{M}$$



**Fig. 2.9** Evolution d'un champ de vitesse  $\mathbf{V}$  d'un élément de volume lorsque l'on suit une particule au cours de son mouvement

On admet que le champ des vitesses est différentiable

$$d\mathbf{V} = \nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{MM}'$$

on peut écrire :

$$\nabla \mathbf{V} = \nabla_s \mathbf{V} + \nabla_{as} \mathbf{V}$$

comme une somme d'une partie symétrique et d'une autre anti-symétrique.

$$\nabla_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_{ij} + \nabla_{ji}) + \frac{1}{2} (\nabla_{ij} - \nabla_{ji})$$

ou

$$\nabla_{ij} = D_{ij} + \Omega_{ji}$$

soit  $d\mathbf{V} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{MM}' + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{MM}'$  où  $\boldsymbol{\Omega}$  est le tenseur des taux de rotation;  $\boldsymbol{\omega}$  est le vecteur dual de  $\boldsymbol{\Omega}$  ou vecteur tourbillon.

On peut montrer que

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{MM}' = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{MM}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{MM}'$$

avec

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}$$

$$\mathbf{V}(M') = \mathbf{V}(M) + \mathbf{M}' \times \boldsymbol{\omega}(M) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{MM}'$$

Soit

$$\mathbf{V}(M') - \mathbf{V}(M) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{MM}' + \mathbf{D} \cdot \mathbf{MM}'$$

$\mathbf{D}$  est le tenseur des taux de déformation, symétrique par construction :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

### 2.4.6 Tenseur des déformations

On cherche à caractériser la variation de longueur du segment infiniment petit  $M_0M'_0$  (Fig. 2.10) à partir du vecteur déplacement  $\mathbf{X}(M_0)$ . Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations  $\mathbf{X}$  est infiniment petit et on peut écrire :

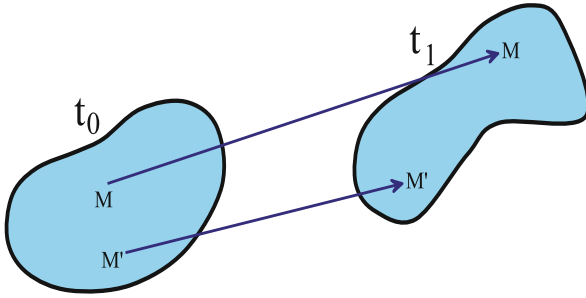


Fig. 2.10 Evolution de la longueur d'un segment dans l'hypothèse des petites déformations

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(M_0) &\approx \mathbf{X}(M) = \mathbf{V}(M)dt \\ d\mathbf{X}(M_0) &= d\mathbf{V}(M)dt = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{M} + \mathbf{D}dt \cdot d\mathbf{M} \end{aligned}$$

et  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}dt$

est le tenseur des déformations :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right)$$

### 2.4.7 Symétrie du tenseur des contraintes

Le principe fondamental de la dynamique conduit à une expression sur la résultante des forces exercés sur un volume mais aussi à une relation entre les moments des torseurs dynamiques et les efforts extérieurs qui s'écrit :

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{OM} \times \rho \gamma(M) dv = \iiint_{\Omega} \mathbf{OM} \times \mathbf{f}(M) dv + \iint_{\Sigma} \mathbf{OM} \times \mathbf{T}(P, \mathbf{n}) ds$$

$O$  est un point quelconque du domaine.

Par projection sur l'axe  $Ox_1$  on a:

$$\iiint_{\Omega} (x_2 \rho \gamma_3 - x_3 \rho \gamma_2) dv = \iiint_{\Omega} (x_2 f_3 - x_3 f_2) dv + \iint_{\Sigma} (x_2 T_3 - x_3 T_2) ds$$

avec  $T_i = \sigma_{ij} n_j$  soit  $T_3 = \sigma_{3j} n_j$  et  $T_2 = \sigma_{2j} n_j$ , la relation s'écrit:

$$\iiint_{\Omega} (x_2 \rho \gamma_3 - x_3 \rho \gamma_2) dv = \iiint_{\Omega} (x_2 f_3 - x_3 f_2) dv + \iint_{\Sigma} (x_2 \sigma_{3j} n_j - x_3 \sigma_{2j} n_j) ds$$

Le théorème de la divergence permet de transformer l'intégrale de surface:

$$\iint_{\Sigma} (x_2 \sigma_{3j} n_j - x_3 \sigma_{2j} n_j) ds = \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_2 \sigma_{3j} - x_3 \sigma_{2j}) dv$$

soit

$$\begin{aligned} &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_2 \sigma_{31} - x_3 \sigma_{21}) dv + \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2 \sigma_{32} - x_3 \sigma_{22}) dv + \\ &\quad \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_3} (x_2 \sigma_{33} - x_3 \sigma_{23}) dv \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &= \iiint_{\Omega} \left( x_2 \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} \right) dv + \iiint_{\Omega} \left( \sigma_{32} + x_2 \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \right) dv \\ &\quad + \iiint_{\Omega} \left( -\sigma_{23} + x_2 \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \right) dv \end{aligned}$$

L'équation aux moments projetée sur  $Ox_1$  devient:

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} x_2 \left( \rho \gamma_3 - f_3 - \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \right) dv - \\ &\iiint_{\Omega} x_3 \left( \rho \gamma_2 - f_2 - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \right) dv = \iiint_{\Omega} (\sigma_{32} - \sigma_{23}) dv \end{aligned}$$

Compte tenu de la loi de Cauchy:

$$\rho \gamma_i = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

ou

$$\rho \gamma = \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

on a

$$\iiint_{\Omega} (\sigma_{32} - \sigma_{23}) dv = 0$$

pour tout  $\Omega$  on a :  $\sigma_{32} - \sigma_{23} = 0$ .

Plus généralement

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

ou

$$\sigma = \sigma^t$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique.

L'analyse tensorielle montre qu'il existe au moins une base orthonormée dans laquelle la matrice des composantes du tenseur des contraintes est diagonale. Le problème aux valeurs propres s'écrit:

$$n_j \sigma_{ij} = \lambda n_i \delta_{ij}$$

où  $\lambda$  représente les valeurs propres.

$$n_j (\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0$$

ou

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La condition qu'une solution non triviale puisse être trouvée est que le déterminant de la matrice soit égal à zéro.

Le polynôme caractéristique est de la forme:

$$\lambda^3 - I_T^1 \lambda^2 + I_T^2 \lambda - I_T^3 = 0$$

où les  $I_T^i$  sont des scalaires fonctions de toutes les composantes du tenseur des contraintes. Ils sont appelés les invariants du tenseur de Cauchy.

Ils sont égaux à:

$$\begin{cases} I_T^1 = \sigma_{ii} = tr(\sigma) \\ I_T^2 = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) = det(\sigma) tr(\sigma^{-1}) \\ I_T^3 = \varepsilon_{ijk} \sigma_{1i} \sigma_{2j} \sigma_{3k} = det(\sigma) \end{cases}$$

Ces invariants peuvent aussi s'exprimer à l'aide des valeurs propres:

$$\begin{cases} I_T^1 = \lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 \\ I_T^2 = \lambda^1 \lambda^2 + \lambda^2 \lambda^3 + \lambda^3 \lambda^1 \\ I_T^3 = \lambda^1 \lambda^2 \lambda^3 \end{cases}$$

En général pour un tenseur quelconque les valeurs propres sont complexes et les vecteurs propres non nécessairement orthogonaux. Toutefois, et c'est le cas du tenseur de Cauchy, pour les tenseurs symétriques les valeurs propres sont réelles et les vecteurs propres orthogonaux. Les vecteurs propres donnent les directions des contraintes normales principales.

### 2.4.8 *Fluide Newtonien isotrope*

Pour aboutir à l'équation de Navier-Stokes à partir de la loi de Cauchy il est nécessaire d'écrire les relations existantes entre tenseur des contraintes et tenseur des taux de déformations. Pour un fluide Newtonien cette relation est supposée linéaire :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + C_{ijkl} d_{kl}$$

où  $\sigma^0$  est le tenseur des contraintes à l'état de contrainte résiduelle correspondant à l'équilibre thermodynamique,  $C_{ijkl}$  sont les 81 composantes du tenseur du quatrième ordre **C** et **D** est le tenseur des taux de déformations symétrique:

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

En mécanique du solide l'état de contrainte est défini à partir d'un état de référence non sollicité et le tenseur  $\sigma^0$  est par convention choisi à zéro. Pour les fluides l'état de contrainte total caractérisé par  $\sigma_{ij}$  varie en fonction de l'état thermodynamique du système y compris à vitesses nulles. Par exemple lorsque la température ou la masse volumique varient, l'état de contraintes du système évolue aussi. Il est donc nécessaire de garder le terme  $\sigma^0$  qui dépendra alors de la vitesse et du flux, variables au cours du mouvement.

Si l'on note comme Batchelor[2] que la contrainte normale exercée sur un élément de surface doit être indépendante de l'orientation de celle-ci alors il vient :

$$\sigma_{ij}^0 = -p \delta_{ij}$$

où  $p$  est la pression thermodynamique fonction des variables d'état. Elle apparaît comme une inconnue supplémentaire qui est traditionnellement corrélée à l'équation de conservation de la masse qui permet de la remonter et de fermer le système d'équations.



En fait cette dernière expression n'est vrai que si la vitesse est nulle et que si  $p$  est la pression thermodynamique à l'équilibre.

*Nous adopterons une autre alternative, celle qui considère que cette pression est la pression thermodynamique à l'état d'équilibre du système  $p_{equ}$ . Toute modification de l'état du système, qu'elle qu'en soit la cause, doit être accompagnée d'un rétablissement de l'équilibre thermodynamique et donc de la pression. Nous verrons plus loin quels sont les termes de l'équation du mouvement qui permettront de revenir à la pression d'équilibre  $p_{equ}$ .*

Reprenons la relation linéaire entre  $\sigma_{ij}$  et  $C_{ijkl}$ ; Deux observateurs situés dans des repères différents  $A$  et  $A'$  mesurant les composantes du tenseur  $\mathbf{C}$  doivent obtenir le même résultat pour un fluide isotrope. Nous allons montrer (par exemple d'après R. Aris[1] ou S. Whitaker[37]) que seuls deux coefficients non nuls sur les 81 sont distincts.

Tout d'abord notons la symétrie de la relation entre tenseur des contraintes visqueuses et le taux de déformation. Ces deux tenseurs sont eux-mêmes symétriques comme initialement le tenseur de Cauchy. La symétrie du tenseur de Cauchy  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  a déjà été démontrée plus haut.

Les 81 composantes se réduisent donc à 36. En adoptant une écriture matricielle la relation de départ devient :

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{33} \\ d_{12} \\ d_{23} \\ d_{31} \end{pmatrix}$$

En utilisant la propriété tensorielle suivante :

$$\tau'_{ij} = l_{ki} l_{lj} \tau_{kl}$$

$$d'_{ij} = l_{ki} l_{lj} d_{kl}$$

soumettons le fluide à une série de rotations en vérifiant que le résultat reste invariant.

#### • Rotation de $180^\circ$ autour de $x_3$

Pour cette rotation  $x'_1 = -x_1$ ,  $x'_2 = -x_2$  et  $x'_3 = x_3$ . Les cosinus directeurs s'écrivent :

$$l_{ki} = \begin{pmatrix} l_{11} = -1 & l_{12} = 0 & l_{13} = 0 \\ l_{21} = 0 & l_{22} = -1 & l_{23} = 0 \\ l_{31} = 0 & l_{32} = 0 & l_{33} = 1 \end{pmatrix}$$

Les contraintes visqueuses deviennent quant à elles :

$$\tau'_{11} = l_{k1} l_{l1} \tau_{kl} = (-1)^2 \tau_{11} = \tau_{11}$$

$$\begin{aligned}
\tau'_{22} &= l_{k2} l_{l2} \tau'_{kl} = (-1)^2 \tau_{22} = \tau_{22} \\
\tau'_{33} &= l_{k3} l_{l3} \tau'_{kl} = (1)^2 \tau_{33} = \tau_{33} \\
\tau'_{12} &= l_{k1} l_{l1} \tau'_{kl} = (-1)^2 \tau_{12} = \tau_{12} \\
\tau'_{23} &= l_{k2} l_{l2} \tau'_{kl} = (-1)(1) \tau_{23} = -\tau_{23} \\
\tau'_{31} &= l_{k3} l_{l3} \tau'_{kl} = (1)(-1) \tau_{31} = -\tau_{31}
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
d'_{11} &= d_{11} \\
d'_{22} &= d_{22} \\
d'_{33} &= d_{33} \\
d'_{12} &= d_{12} \\
d'_{23} &= -d_{23} \\
d'_{31} &= -d_{31}
\end{aligned}$$

L'observateur  $A'$  qui se trouve dans le repère en rotation sait que

$$\tau'_{11} = C_{11} d'_{11} + C_{12} d'_{22} + C_{13} d'_{33} + C_{14} d'_{12} + C_{15} d'_{23} + C_{16} d'_{31}$$

L'observateur  $A$  qui prédit  $\tau'_{11}$  par l'analyse tensorielle trouve

$$\tau'_{11} = C_{11} d'_{11} + C_{12} d'_{22} + C_{13} d'_{33} + C_{14} d'_{12} - C_{15} d'_{23} - C_{16} d'_{31}$$

La solution étant unique, nous devons imposer

$$C_{15} = C_{16} = 0$$

En opérant de même pour les autres composantes de manière à imposer le même résultat pour les deux observateurs  $A$  et  $A'$  16 coefficients s'annulent pour donner la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix}
C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\
C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\
C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\
C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{65} & C_{66}
\end{pmatrix}$$

La matrice se réduit à 20 coefficients indépendants non nuls.

- **Rotation de  $180^\circ$  autour de  $x_1$**

Pour cette transformation les cosinus directeurs s'écrivent :

$$l_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice des coefficients  $C$  devient :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$$

soit 12 coefficients indépendants.

- **Rotation de  $90^\circ$  autour de  $x_1$**

Pour cette transformation les cosinus directeurs s'écrivent :

$$l_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice des coefficients  $C$  devient ainsi:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$$

avec 8 coefficients indépendants.

- **Rotation de  $90^\circ$  autour de  $x_3$**

Pour cette transformation les cosinus directeurs s'écrivent :

$$l_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice des coefficients  $C$  devient ainsi:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}$$

avec seulement 3 coefficients indépendants.

• **Rotation de 45° autour de  $x_3$**

Pour cette transformation les cosinus directeurs s'écrivent :

$$l_{ij} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Après la transformation, la matrice  $C$  devient:

$$\begin{pmatrix} C_{12} + C_{44} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} + C_{44} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{12} + C_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}$$

avec seulement 2 coefficients indépendants.

Aucune autre transformation ne permet de réduire encore le nombre de coefficients dans la matrice  $C$ . La réduction est complète.

*Pour un fluide Newtonien isotrope seuls deux coefficients indépendants permettent d'écrire la relation entre tenseur des contraintes et tenseur des taux de déformation.*

Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{11} = C_{44} d_{11} + C_{12} (d_{11} + d_{22} + d_{33}) \\ \tau_{22} = C_{44} d_{22} + C_{12} (d_{11} + d_{22} + d_{33}) \\ \tau_{33} = C_{44} d_{33} + C_{12} (d_{11} + d_{22} + d_{33}) \\ \tau_{12} = C_{44} d_{12} \\ \tau_{23} = C_{44} d_{23} \\ \tau_{31} = C_{44} d_{31} \end{array} \right.$$

On reconnaît la divergence de la vitesse associé au coefficient  $C_{12}$ . En utilisant les notations traditionnelles on obtient:

- $C_{44} = 2\mu$ , où  $\mu$  est appelé premier coefficient de viscosité ou viscosité de cisaillement et
- $C_{12} = \lambda$ , où  $\lambda$  est appelé second coefficient de viscosité ou viscosité de compression.

En mécanique des solides élastiques on aurait de même, pour un matériau isotrope pour lequel il existe une linéarité entre contraintes et déformations, deux coefficients indépendants, le module élastique et le module de cisaillement.

En tenant compte de la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy, la relation s'écrit finalement:

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \\ \tau_{32} \\ \tau_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{33} \\ d_{12} \\ d_{23} \\ d_{31} \\ d_{21} \\ d_{32} \\ d_{13} \end{pmatrix}$$

Ou bien en écriture synthétique:

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} + \lambda \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

ou encore

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I}$$

où  $\mathbf{D}$  est le tenseur des taux de déformation:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{V} + \nabla' \mathbf{V})$$

Ce tenseur des contraintes visqueuses peut être réécrit après quelques manipulations:

$$\boldsymbol{\tau} = (2\mu + 3\lambda) \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} + 2\mu \left( \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{V} + \nabla' \mathbf{V}) - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} \right)$$

Le premier terme au second membre représente la contrainte visqueuse exercée par le changement de volume et le second terme est le déviateur des contraintes visqueuses.

Nous pouvons former la contrainte moyenne, indépendante de la direction, par contraction du tenseur des contraintes visqueuses:

$$\frac{1}{3} \tau_{ii} = (2\mu + 3\lambda) \frac{\partial V_k}{\partial x_k}$$

Ce scalaire est égal à zéro si  $\lambda = -2/3\mu$ .

Le tenseur des contraintes s'écrit donc:

$$\sigma_{ij} = \left( -p + \lambda \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

ou encore

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V})$$

Le premier terme est ainsi isotrope et comme le tenseur  $\mathbf{I}$  étant invariant par rotation on peut en déduire que la contrainte est linéaire en fonction du taux de déformation.

### 2.4.9 Application du second principe de la thermodynamique

Le second principe de la thermodynamique conduit à l'inégalité de Clausius-Duhem qui s'écrit:

$$\frac{1}{T} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} - \frac{1}{T^2} \boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla T \geq 0$$

où  $\boldsymbol{\varphi}$  est le flux de chaleur.

Si l'on admet que le vecteur flux de chaleur ne dépend pas de  $\mathbf{D}$  et que le tenseur  $\boldsymbol{\tau}$  ne dépend pas de  $\nabla T$  on doit alors assurer la positivité des deux dissipations mécanique et thermique.

En écrivant donc le principe de positivité de la puissance des efforts internes mécaniques on a:

$$\frac{1}{T} \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \geq 0$$

Comme la température thermodynamique est positive on peut calculer la puissance des effets de viscosité interne:

$$\Phi = \left( \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \geq 0$$

qui est le taux de dissipation de l'énergie cinétique au sein d'un système.

Cette expression est la somme de deux carrés. Si  $\mu$  et  $\lambda$  sont tous deux positifs alors cette contrainte est satisfaite. Examinons, dans quelles conditions pour ces deux paramètres, ce principe est satisfait.

#### 2.4.9.1 Système à une dimension

La seconde loi de la thermodynamique exprimée plus haut devient en 1D :

$$\begin{cases} 2\mu \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \geq 0 \\ 2\mu + \lambda \geq 0 \end{cases}$$

soit  $\lambda \geq -2\mu$ .

Si l'hypothèse de Stokes est adoptée l'inégalité sur l'entropie est satisfaite.

### 2.4.9.2 Système à deux dimensions

En exprimant la contrainte en 2D:

$$2\mu \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + 2\mu \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + 2\mu \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + 2\mu \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \lambda \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) \geq 0$$

En tenant compte de la symétrie du tenseur des taux de déformations, on peut écrire :

$$(2\mu + \lambda) \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + 4\mu \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + 2\lambda \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \geq 0$$

Sous forme matricielle cette inégalité prend une forme quadratique:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \geq 0$$

Pour satisfaire cette inégalité il est nécessaire que la matrice ait des valeurs propres positives:

$$\begin{vmatrix} 2\mu + \lambda - \kappa & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda - \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 4\mu - \kappa \end{vmatrix} = 0$$

Le polynôme caractéristique

$$(4\mu - \kappa) \left( (2\mu + \lambda - \kappa)^2 - \lambda^2 \right) = 0$$

donne les valeurs propres:

$$\begin{cases} \kappa = 4\mu \\ \kappa = 4\mu \\ \kappa = 2(\mu + \lambda) \end{cases}$$

Finalement, pour un système bidimensionnel on trouve

$$\begin{cases} \mu \geq 0 \\ \lambda \geq -\mu \end{cases}$$

Là aussi si l'hypothèse de Stokes est adoptée alors l'inégalité est satisfaite.

### 2.4.9.3 Système à trois dimensions

En dimension trois la forme quadratique devient:

$$\Phi = (d_{11} \ d_{22} \ d_{33} \ d_{12} \ d_{23} \ d_{31}) \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{33} \\ d_{12} \\ d_{23} \\ d_{31} \end{pmatrix} \geq 0$$

Les six valeurs propres permettant de satisfaire l'inégalité sur l'entropie sont:

$$\begin{cases} \kappa = 2\mu \\ \kappa = 2\mu \\ \kappa = 4\mu \\ \kappa = 4\mu \\ \kappa = 4\mu \\ \kappa = 2\mu + 3\lambda \end{cases}$$

Pour que toutes les valeurs propres soient positives il faut

$$\begin{cases} \mu \geq 0 \\ \lambda \geq -\frac{2}{3}\mu \end{cases}$$

En conséquence un fluide qui satisfait à l'hypothèse de Stokes ne viole pas le principe du minimum de dissipation.

Après de nombreuses manipulations, l'inégalité sur l'entropie peut prendre la forme suivante:



$$\begin{aligned} \Phi = \frac{2}{3} \mu \left( \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_2} - \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_3} - \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right)^2 \right) + \\ \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right)^2 \\ + 4 \mu \left( \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right)^2 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

qui est la somme de carrés qui peut aussi s'écrire de manière plus compacte:

$$\Phi = 2 \mu \left( \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial V_m}{\partial x_m} \delta_{ij} \right) + \frac{2}{3} \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right) \geq 0$$

Cette expression montre que pour un fluide Newtonien l'accroissement d'entropie par dissipation visqueuse est due à deux contributions, les effets des contraintes de cisaillement et la contrainte moyenne. Tant que les coefficients satisfont  $\mu \geq 0$  et  $\lambda \geq -2/3 \mu$ , le second principe reste satisfait.

L'expression de l'inégalité de l'entropie peut être aussi écrite en termes d'invariants principaux, on trouve:

$$\Phi = 2 \mu \left( \frac{2}{3} (I_T^1)^2 - 2 I_T^2 \right) + \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) (I_T^1)^2 \geq 0$$

S'écrivant en termes d'invariants,  $\Phi$  est donc indépendant de l'orientation du système de coordonnées.

Afin de montrer que cette forme est définie positive, elle peut être ré-écrite sous la forme :

$$\Phi = 2 \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right) + \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \geq 0$$

En intégrant les valeurs propres du tenseur des déformations  $\kappa$ :

$$\Phi = 2 \mu \left( \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - \frac{1}{3} (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^2 \right) + \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^2 \geq 0$$

qui se réduit à une forme semi-définie positive:

$$\Phi = \frac{2}{3} \mu \left( (\kappa_1 - \kappa_2)^2 + (\kappa_1 - \kappa_3)^2 + (\kappa_2 - \kappa_3)^2 \right) + \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^2 \geq 0$$

Comme les valeurs propres sont invariantes en rotation, cette forme est invariante.

### 2.4.10 Approche standard

L'état de déformation d'un fluide est caractérisé par le tenseur des vitesses de déformation et en chaque point et à chaque instant le tenseur des contraintes est une fonction univoque du tenseur des vitesses de déformation. La relation  $\sigma = f(\mathbf{D})$  est de la forme :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \delta_{ij} + 2\mu \mathbf{D} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$$

$p$  scalaire fonction de point positif défini comme étant la pression thermodynamique.

$\lambda, \mu$  coefficients de viscosité caractéristiques du fluide considéré

- $\lambda$  coefficient de viscosité de dilatation ou second coefficient de viscosité,
- $\mu$  coefficient de viscosité de cisaillement.

$$\sigma_{ij} = -p(\rho, T) \delta_{ij}, \text{ pour un fluide au repos}$$

$$\sigma_{ij} = -p(\mathbf{V}, \Phi) \delta_{ij}, \text{ pour un fluide parfait}$$

$$\sigma_{ij} = -p(\mathbf{V}, \Phi) \delta_{ij} + \tau_{ij}, \text{ pour le cas general}$$

On définira aussi la pression mécanique  $p_m$  comme l'opposé de la moyenne des contraintes normales :

$$p_m = -\frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

L'hypothèse de Stokes présume que la pression thermodynamique s'identifie à la pression mécanique

$$p = p_m = -\frac{1}{3} \sigma_{ii}$$

La théorie cinétique des gaz permet de calculer les coefficients de viscosité; pour les gaz monoatomiques on montre que la viscosité de volume (bulk viscosity)  $\xi$  est un réel strictement positif :

$$\xi \geq \lambda + \frac{2\mu}{3}$$

Comme il est impossible pratiquement de mesurer cette viscosité de volume la relation de Stokes permet de caractériser  $\lambda$  en égalant à zéro la viscosité de volume  $\xi = 0$ , soit :

$$3\lambda + 2\mu = 0$$

D'après la théorie cinétique des gaz la relation de Stokes est vérifiée pour des gaz monoatomiques mais rien ne permet d'affirmer que cette relation est valable pour les autres fluides. Des considérations théoriques sur le deuxième coefficient de viscosité (de volume) peuvent être trouvées dans l'ouvrage de Landau et Lifchitz.

### 2.4.11 Hypothèse de Stokes et pressions mécanique et thermodynamique

*Est-ce que le second coefficient de viscosité ou viscosité de compression  $\lambda$  est égal à  $-2/3 \mu$  ?*

*La réponse à cette question est non, non en général.*

Il est possible de mesurer  $\mu$  le premier coefficient de viscosité mais toujours très incertain de mesurer  $\lambda$  le second coefficient de viscosité.

G.G. Stokes, en 1845, suggérait que la pression mécanique (déduite de la contrainte moyenne normale) est égale à la pression thermodynamique  $p$ . Cela a pour conséquence que  $\tau_{ii} = 0$  et:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\mu \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} = 0 \\ 2\mu \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + 3\lambda \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = 0 \\ 2\mu \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + 3\lambda \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0 \\ (2\mu + 3\lambda) \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0 \end{array} \right.$$

soit

$$(2\mu + 3\lambda) \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

Comme en général la divergence n'est pas nulle, l'hypothèse de Stokes implique

$$\lambda = -\frac{2}{3} \mu$$

*Traditionnellement, dans le cas d'un écoulement incompressible, la divergence étant nulle, tous les auteurs s'accordent pour dire que  $\lambda$  ne joue aucun rôle. Cette assertion ne vaut que si le second coefficient dit de viscosité garde une valeur finie.*

Il n'en reste pas moins vrai que cette relation est déduite d'une hypothèse non strictement vérifiée et que de nombreuses tentatives de mesure de  $\lambda$  conduisent à des valeurs positives et de plusieurs ordres de grandeur à la valeur de  $\mu$ .

Ce point nécessite une discussion supplémentaire pour préciser la gamme de variation de  $\lambda$ .

Les résultats précédents sur les relations entre contraintes et taux de déformations moyens et déviatoriques peuvent être synthétisés:

- un taux de déformation moyen induit une constante de temps du changement de l'état de contrainte thermodynamique moyen par l'intermédiaire des relations thermodynamiques. Cela induit une contrainte visqueuse pour les fluides qui ne satisfont pas l'hypothèse de Stokes,
- un taux de déformation n'induit pas directement une contrainte moyenne,
- une déformation de cisaillement induit directement une contrainte de cisaillement,
- une déformation moyenne n'introduit de production d'entropie que si le fluide n'obéit pas à l'hypothèse de Stokes,
- une déformation de cisaillement induit toujours une production d'entropie pour un fluide visqueux.

Comme on peut le constater la notion de pression est complexe; la vision simple où la pression thermodynamique induit une force normale à la surface et où les forces visqueuses induisent des forces tangentielles est trop simpliste.

### 2.4.12 Equation de Navier-Stokes

Comme la controverse ancienne de 150 ans sur la validité de l'hypothèse de Stokes n'est pas encore fermée nous garderont les deux coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  dans la formulation finale de l'équation du mouvement.

L'équation de Cauchy s'écrit :

$$\rho \gamma = \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Le terme  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$  devient, compte tenu de la loi de comportement :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \nabla (\lambda \nabla \cdot \mathbf{V}) + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D})$$

L'introduction de la loi de comportement dans la loi de Cauchy donne pour un fluide newtonien visqueux :

$$\rho \gamma = -\nabla p + \mathbf{f} + \nabla (\lambda \nabla \cdot \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V}))$$

On obtient finalement l'équation de Navier-Stokes:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \mathbf{f} + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V})) + \nabla (\lambda \nabla \cdot \mathbf{V})$$

L'équation de conservation de la masse est utilisée pour passer à la forme dite conservative de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\nabla p + \mathbf{f} + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V})) + \nabla (\lambda \nabla \cdot \mathbf{V})$$

Dans le cas où les coefficients de viscosité peuvent être considérés comme des constantes, on a :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \nabla \cdot \nabla \mathbf{V} + \frac{1}{2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{V}$$

et

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{V} + \mu \nabla^2 \mathbf{V}$$

d'où l'équation correspondante :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \mathbf{f} + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V})$$

*L'équation de Navier-Stokes établie ci-dessus est représentative des écoulements de fluides visqueux dans toutes les situations où, bien entendu, les hypothèses de base ne sont pas mises en défaut et notamment celle correspondant à la notion de milieu continu. Il est donc important de garder ces hypothèses et approximations à l'esprit avant toute utilisation de l'équation de Navier-Stokes. Celle-ci ne possède pas de solution générale et sa validité n'a pas été démontrée mais l'inverse non plus d'ailleurs. Son utilisation depuis près d'un siècle n'a cessé de montrer sa validité. Elle contient les non-linéarités essentielles à l'apparition de bifurcations multiples qui conduisent au chaos et à la turbulence qu'elle est aussi apte à reproduire.*

Une forme équivalente peut être donnée en remarquant que :

$$\nabla p = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \nabla \rho + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \nabla T$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0 \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) &= -\frac{1}{\rho \chi_T} \nabla p + \frac{\beta}{\chi_T} \nabla T + \mathbf{f} + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{V} + \nabla' \mathbf{V})) + \nabla (\lambda \nabla \cdot \mathbf{V}) \end{aligned}$$

où  $\rho$ ,  $\beta$  et  $\chi_T$  sont respectivement la masse volumique, le coefficient de dilatation et la compressibilité isotherme.

Il est à remarquer que dans cette formulation la pression disparaît complètement et que seules les variables  $\rho, T$  définissent l'évolution du système de manière cohérente puisque, par exemple une variation de température  $\delta T$  dans un fluide dilatable induit directement un mouvement de détente ou de compression alors que la pression ne serait modifiée postérieurement que par la loi d'état.

## 2.5 Conservation de l' Energie

La quantité intensive  $A$  est ici l'énergie totale spécifique  $\rho(e + \mathbf{V}^2/2)$  où  $e$  est l'énergie interne massique et  $\mathbf{V}^2/2$  est l'énergie cinétique par unité de masse ; la quantité extensive  $\mathbf{K}$  est alors l'énergie totale du système . Seuls les échanges d'énergie d'origines mécaniques et calorifiques sont pris en compte.

*La mécanique des fluides est en fait étroitement associée à la thermique. En effet les variations de pression dans un fluide, les frottements visqueux engendrent inéluctablement des variations de l'énergie interne et conduisent à une variation locale de la température du fluide donc modifient son mouvement.*

Le premier principe de la thermodynamique montre que la dérivée temporelle  $dE/dt$  de l'énergie totale est égale à la somme de la puissance des forces extérieures et de la puissance calorifique reçue (par la surface  $\Sigma$  ou produite par unité de temps et de volume).

$$\frac{dE}{dt} = \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_c$$

soit

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho (e + \mathbf{V}^2/2) dv = \iiint_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} dv + \iint_{\Sigma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V} ds + \iiint_{\Omega} q dv - \iint_{\Sigma} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} ds$$

$q(\mathbf{x}, t)$  est la production volumique d'énergie calorifique due par exemple au rayonnement absorbé à l'intérieur de  $\Omega$ , à l'effet Joule, avec désintégrations atomiques,  $\boldsymbol{\varphi}$  est la densité de flux de chaleur reçue à travers  $\Sigma$  par convection, par conduction ou rayonnement arrêté en surface dans le cas de corps opaques ;  $\mathbf{f}$  est une force volumique.

En utilisant l'expression intégrale de l'équation de continuité et le théorème de la divergence, il vient :

$$\iiint_{\Omega} \left( \rho \frac{d}{dt} (e + \mathbf{V}^2/2) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}) - q + \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \right) dv = 0$$

En supposant la continuité de la fonction sous le signe somme, la relation est valable quel que soit le domaine  $\Omega$  considéré. L'expression locale est ainsi :

$$\rho \frac{d}{dt} (e + \mathbf{V}^2/2) = -\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}) + q + \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} = 0$$

Cette équation peut être simplifiée en considérant la loi de Cauchy multipliée scalairement par  $\mathbf{V}$  :

$$\mathbf{V} \cdot \left( \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f} \right) = 0$$

soit

$$\rho \frac{d}{dt} (\mathbf{V}^2/2) = \mathbf{V} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} = 0$$

mais comme

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V})$$

il vient comme  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  :

$$\rho \frac{d}{dt} (\mathbf{V}^2/2) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}) - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{V}$$

Par soustraction :

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V}) + q$$

Soit sous forme indicielle :

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + q + \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

Le dernier terme s'écrit :

$$\sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \left( -p\delta_{ij} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{V} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

avec

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

ou

$$\sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -p \nabla \cdot \mathbf{V} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + 2\mu D_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -p \nabla \cdot \mathbf{V} + \Phi$$

La fonction  $\Phi$ , regroupant les termes contenant la viscosité est dite fonction de dissipation. Elle est reliée à la dégradation de l'énergie cinétique en chaleur, du fait des frottements visqueux au sein du fluide.

$$\Phi = -\frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + 2\mu D_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \\ & + \mu \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right)^2 \end{aligned}$$

Et

$$\underbrace{\rho \frac{de}{dt}}_{\text{variation d'énergie interne}} = \underbrace{-\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}}_{\text{flux de chaleur}} + \underbrace{q}_{\text{source}} - \underbrace{p \nabla \cdot \mathbf{V}}_{\text{effet de compressibilité}} + \underbrace{\Phi}_{\text{dissipation}}$$

Introduisons l'enthalpie par unité de masse de fluide  $h = e + p/\rho$ :

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho \frac{dh}{dt} - \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho} \right)$$

d'où en reportant dans l'équation de l'énergie :

$$\rho \frac{dh}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + q + \rho \left( \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} - \frac{p}{\rho^2} (\rho \nabla \cdot \mathbf{V}) \right) + \Phi$$

et

$$\rho \frac{dh}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + \frac{dp}{dt} + q - \frac{p}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \Phi$$

Compte tenu de l'équation de continuité, on obtient :

$$\rho \frac{dh}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + \frac{dp}{dt} + q + \Phi$$

L'enthalpie étant fonction de  $p$  et de  $T$ , on a :

$$\frac{dh}{dt} = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dt} + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dt}$$

La thermodynamique fournit les relations :

$$\left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = c_p; \quad \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} (1 - \beta T) \quad \text{avec} \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

$\beta$  est le coefficient d'expansion thermique, ou de dilatation cubique à pression constante.

D'où la forme finale de l'équation de l'énergie :

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T \right) = -\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + \beta T \frac{dp}{dt} + q + \Phi$$

### Expression de $\boldsymbol{\varphi}$ ; loi de Fourier.

Le flux de chaleur  $\boldsymbol{\varphi}$  s'exprime à l'aide de la loi phénoménologique de Fourier liant les flux aux forces représentées par les gradients de température

$$\boldsymbol{\varphi} = -\Lambda \cdot \nabla T$$



Le tenseur du second ordre  $\Lambda$  est appelé tenseur de conductivité thermique. Si le corps est homogène, le tenseur repéré dans ses directions propres se réduit à trois termes non nuls sur la diagonale . Si le corps est isotrope, le tenseur est sphérique :

$$\Lambda = k\mathbf{I}$$

La conductivité thermique  $k$  (scalaire positif) est en général une fonction de la température

$$\varphi = -k(T) \cdot \nabla T$$

L'équation de l'énergie s'écrit en tenant compte de l'expression de la dérivée particulaire

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \beta T \frac{dp}{dt} + q + \Phi$$

ou bien :

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \beta T \frac{dp}{dt} + 2\mu D_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{V})^2$$

Une autre forme de l'équation de l'énergie peut être obtenue en remarquant que :

$$\frac{dp}{dt} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \frac{d\rho}{dt} + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \frac{dT}{dt}$$

expression qui fait intervenir la chaleur spécifique à volume constant :

$$\beta T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho = -\frac{T}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_p = \rho (c_p - c_v)$$

Soit enfin :

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) - \frac{\beta}{\chi_T} T \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{V})^2$$

Il est préférable de laisser cette équation de conservation de l'énergie sous cette forme même si l'on peut remarquer que

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = k \nabla^2 T + \nabla T \cdot \nabla k$$

et :

$$\begin{aligned} \nabla k(T) &= \frac{dk}{dT} \nabla T \\ \nabla \cdot (\nabla T) &= k \nabla^2 T + \frac{dk}{dT} (\nabla T)^2 \end{aligned}$$

Si l'écart caractéristique de température ( $T_1 - T_2$ ) du système est suffisamment faible pour pouvoir admettre que les variations de  $k$  en fonction de  $T$  sont aussi faibles on peut définir une conductivité moyenne :

$$k = k_m = \frac{1}{(T_1 - T_2)} \int_{T_1}^{T_2} k(T) dT$$

Si la vitesse est nulle ainsi que la fonction de dissipation et la production on a :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T$$

La quantité  $k/\rho c_p$  est la diffusité thermique du matériau.

## 2.6 Equations d'état

D'une manière générale, un problème où coexistent des transferts couplés de quantités de mouvements et d'énergie thermique est caractérisé par la connaissance des variables fonction des coordonnées d'espace et du temps [20] ; ces variables sont au nombre de 6 : la température  $T$ , les trois composantes de la vitesse  $\mathbf{V}$ , la pression  $p$  et la masse volumique  $\rho$ . Les équations sont au nombre de 5 : l'équation de conservation de masse, les équations de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie.

La loi d'état du milieu permet de fermer le système. On peut distinguer deux lois d'état couramment utilisées.

- **Gaz parfait**

La loi des gaz parfaits liant  $p, \rho, T$  :

$$p = \rho r T$$

est une bonne approximation du comportement des gaz réels à basse pression et haute température.

- **Fluide faiblement dilatable et compressible**

Si les écarts de température et de pression sont faibles l'équation d'état du fluide est définie comme une fonction linéaire de la température et de la pression :

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta(T - T_0) + \chi_T(p - p_0))$$

où  $\beta$  est le coefficient de dilatation volumique,  $\chi_T$  est le coefficient de compressibilité isotherme et  $T_0$  une température de référence.

Physique des Écoulements Continus

Caltagirone, J.-P.

2013, XII, 323 p. 120 ill., Softcover

ISBN: 978-3-642-39509-3