

Das Lebesgue-Maß λ einer im $\mathbb{R}^d$ definierten reellen Funktion wird in der Analysis als Einschränkung einer Mengenfunktion μ_L^* (des sog. äußeren Lebesgue-Maßes) auf eine Mengenfamilie erklärt, über der μ_L^* (und damit λ) additiv ist. Dieses Vorgehen läßt sich auf allgemeinere Räume übertragen und spiegelt den historischen Zugang zur Maßtheorie wider, in der die moderne Wahrscheinlichkeitstheorie verankert ist. Die nachfolgend genannten Konzepte dienen somit auch der formalen Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie.

1.1 Ringe und Algebren

Definition 1.1.1 (Mengenringe und Algebren) *Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine nicht leere Familie $\mathcal{R}$ von Teilmengen von X heißt **Mengenring**, falls mit je zwei Teilmengen A und B auch deren Differenz $A \setminus B$ und Vereinigung $A \cup B$ zu $\mathcal{R}$ gehören. Ein Mengenring enthält stets die leere Menge als Differenz $A \setminus A$ (für $A \in \mathcal{R}$). Im Falle $X \in \mathcal{R}$ wird $\mathcal{R}$ als **Mengenalgebra** bezeichnet. Ist nicht nur jede endliche, sondern auch jede abzählbare Vereinigung von Elementen von $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}$ enthalten, so spricht man von einem **σ -Ring** bzw. – im Falle $X \in \mathcal{R}$ – von einer **σ -Algebra**¹.*

Ein System von Teilmengen einer Menge X , das mit je zwei Elementen auch deren Durchschnitt enthält, nennt man naheliegenderweise **durchschnittsstabil**.

Definition 1.1.2 (Zerlegbare Systeme) *Ein durchschnittsstabiles Mengensystem $\mathcal{Q}$ mit $\emptyset \in \mathcal{Q}$, in dem die Differenz zweier Elemente stets als endliche disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{Q}$ darstellbar ist, heißt **zerlegbares System** oder **Halbring**.*

¹ Wenn im Folgenden die Rede von einem Ring oder einer Algebra ist, so soll darunter stets ein Mengenring bzw. eine Mengenalgebra zu verstehen sein

Offenbar ist jeder Mengenring $\mathcal{R}$ zerlegbar, denn zum einen kann mit zwei Elementen A, B der Durchschnitt in der Form $A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$ geschrieben werden (da die Differenz zweier Elemente per definitionem zum Ring gehört), zum anderen ist für eine beliebige Menge $M \in \mathcal{R}$ (also z. B. $A \cap B$ für $A, B \in \mathcal{R}$) die Differenz $A \setminus B$ schreibbar als $A \setminus B = (A \setminus M) \cup (M \setminus B)$.

Definition 1.1.3 (Erzeugendensysteme) *Ein System $\mathcal{N}$ von Teilmengen von X heißt ein den Ring $\mathcal{R}$ erzeugendes Mengensystem, falls $\mathcal{R}$ die kleinste $\mathcal{N}$ enthaltende Mengenfamilie mit den Eigenschaften eines Ringes ist. Man schreibt in diesem Falle $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{N})$. $\mathcal{R}(\mathcal{N})$ heißt der von $\mathcal{N}$ erzeugte Ring. Gleiches gilt für den Fall, daß $\mathcal{N}$ alle abzählbaren Vereinigungen seiner Elemente enthält, also für σ -Ringe bzw. σ -Algebren, wobei wir die Notationen $\sigma(\mathcal{N})$ oder $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{N})$ für die von $\mathcal{N}$ erzeugte σ -Algebra benutzen.*

Definition 1.1.4 (σ -Operator) *Es bezeichne $\mathfrak{A}(X)$ die Gesamtheit aller σ -Algebren und $\mathfrak{N}(X)$ die Gesamtheit aller Systeme von Teilmengen von X . Der Operator $\sigma : \mathfrak{N}(X) \rightarrow \mathfrak{A}(X)$, der jedem Teilmengensystem $\mathcal{N} \in \mathfrak{N}(X)$ ($\mathcal{N} \subset \mathfrak{P}(X)^2$) die von $\mathcal{N}$ erzeugte σ -Algebra $\sigma(\mathcal{N})$ zuordnet, wird als σ -Operator über $\mathfrak{N}(X)$ bezeichnet.*

Der Durchschnitt beliebig vieler Ringe ist offenbar wieder ein Ring. Demgemäß läßt sich ein von einem Teilmengensystem $\mathcal{N} \subset \mathfrak{P}(X)$ erzeugter σ -Ring (eine σ -Algebra) auch als Durchschnitt aller $\mathcal{N}$ enthaltenden σ -Ringe (σ -Algebren) definieren. Der σ -Operator besitzt folgende leicht nachweisbare Eigenschaften:

- $\sigma(\mathcal{N}) = \bigcap_{\mathcal{A}_\sigma \in \mathfrak{A}_\mathcal{N}} \mathcal{A}_\sigma$ für $\mathfrak{A}_\mathcal{N} = \{\mathcal{A}_\sigma \in \mathfrak{A}(X) : \mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}_\sigma\}$
- $\mathcal{N} \subseteq \sigma(\mathcal{N})$
- $\sigma(\mathcal{N}) \subseteq \sigma(\mathcal{M})$ für $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$
- $\sigma(\sigma(\mathcal{N})) = \sigma(\mathcal{N})$.

Beispiele 1. Die nur aus der leeren und der ganzen Menge X bestehende Familie ist die triviale Mengenalgebra.

2. Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ einer Menge X formt die umfassendste σ -Algebra in X .

3. Die Menge aller linksseitig halboffenen Intervalle der reellen Achse³ formt wegen

$$(a_1, b_1] \cap (a_2, b_2] = (\max\{a_1, a_2\}, \min\{b_1, b_2\}],$$

$$(a_1, b_1] \setminus (a_2, b_2] = \begin{cases} (a_1, a_2], & \text{falls } a_1 \leq a_2 \leq b_1 \leq b_2, \\ (b_2, b_1], & \text{falls } a_2 \leq a_1 \leq b_2 \leq b_1, \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

ein zerlegbares System.

² Für einen Raum X bezeichnet $\mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge, d. h. die Menge aller Teilmengen von X .

³ $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$; entsprechende Notation (a, b) , $[a, b)$, $[a, b]$ für offene, rechtsseitig halboffene oder geschlossene Intervalle.

4. $\{\emptyset, M, M^c, X\}$ ist die kleinste Mengenalgebra, die $M \subset X$ enthält.
5. Die Familie $\mathcal{A} = \{\bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j] : m \in \mathbb{N}_0, a_j, b_j \in \mathbb{R}, a_j < b_j\}$ aller endlichen Vereinigungen linksseitig offener Intervalle auf der reellen Achse bildet zusammen mit der leeren Menge eine Mengenalgebra. Es ist die kleinste Algebra, die alle halboffenen Intervalle dieser Form enthält.

Seien $\mathcal{N} \subset \mathfrak{P}(X)$, $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{N})$ der von $\mathcal{N}$ erzeugte σ -Ring, $A \subset X$ und $\odot$ eine beliebige Mengenoperation; wir benutzen folgende Notation: $\{N \odot A : N \in \mathcal{N}\} = \mathcal{N} \odot A$.

Lemma 1.1.1 Für eine Familie $\mathcal{N} \subset \mathfrak{P}(X)$ sowie eine beliebige Teilmenge $A \subset X$ gilt

$$\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{N}) \cap A = \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{N} \cap A).$$

Beweis Es ist leicht zu sehen, daß $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{N}) \cap A$ einen σ -Ring bildet, und da offenbar $(\mathcal{N} \cap A) \subset (\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{N}) \cap A)$ ist, folgt $(\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{N}) \cap A) \supseteq (\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{N} \cap A))$. $\square$

Lemma 1.1.2 $\mathcal{R}_\sigma^{(i)}$ ($i = 1, 2$) seien σ -Ringe mit $\mathcal{R}_\sigma^{(1)} \subset \mathcal{R}_\sigma^{(2)}$, $A \subseteq X$ beliebig; dann ist

$$\mathcal{F} = \{(R^{(1)} \cup R^{(2)}) \setminus A : R^{(1)} \in \mathcal{R}_\sigma^{(1)}, R^{(2)} \in \mathcal{R}_\sigma^{(2)}\}$$

ein σ -Ring.

Beweis Offenbar ist $\emptyset \in \mathcal{F}$. Für Elemente $E_i = (R_i^{(1)} \cup R_i^{(2)}) \setminus A$ aus $\mathcal{F}$ ($i = 1, 2$) gilt

1. $E_1 \cup E_2 = (R_1^{(1)} \cup R_2^{(1)}) \cup ((R_1^{(2)} \setminus A) \cup (R_2^{(2)} \setminus A)) = (\tilde{R}^{(1)} \cup \tilde{R}^{(2)}) \setminus A$ mit $\tilde{R}^{(i)} = R_1^{(i)} \cup R_2^{(i)}$ ($i = 1, 2$), also $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}$.

2. $R_i^{(1)} \cup R_i^{(2)} \in \mathcal{R}_\sigma^{(2)}$ wegen $\mathcal{R}_\sigma^{(1)} \subset \mathcal{R}_\sigma^{(2)}$; daher folgt $(R_i^{(1)} \cup R_i^{(2)}) \setminus A = \hat{R}_i^{(2)} \setminus A$, also $E_1 \setminus E_2 = (\emptyset \cup \hat{R}_1^{(2)}) \setminus A \in \mathcal{F} \implies \mathcal{F}$ ist ein Ring.

3. Für Elemente $E_n = (R_n^{(1)} \cup R_n^{(2)}) \setminus A$ für $n \in \mathbb{N}$ aus $\mathcal{F}$ folgt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{F}$, da $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (R_n^{(1)} \cup R_n^{(2)}) = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n^{(1)}) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n^{(2)}) = \tilde{R}^{(1)} \cup \tilde{R}^{(2)}$ mit $\tilde{R}^{(j)} \in \mathcal{R}_\sigma^{(j)}$ ($j = 1, 2$) $\implies \mathcal{F}$ ist ein σ -Ring. $\square$

Die Aussagen dieser beiden Lemmata werden später benötigt. Wir wenden uns speziell den σ -Algebren zu: Da mit je zwei Teilmengen immer auch Differenz und Vereinigung Elemente einer σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma$ sind, liegt mit jeder Teilmenge M stets auch das Komplement $M^c = X \setminus M$ in $\mathcal{A}_\sigma$. Umgekehrt kann jede Differenz $A \setminus B$ als Komplement einer Vereinigung geschrieben werden: $A \setminus B = (A^c \cup B)^c$; daher wird eine σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma$ auch durch folgende Eigenschaften beschrieben:

- $X \in \mathcal{A}_\sigma, \emptyset \in \mathcal{A}_\sigma$
- $M \in \mathcal{A}_\sigma \implies M^c = (X \setminus M) \in \mathcal{A}_\sigma$
- $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_\sigma \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \in \mathcal{A}_\sigma$.

Man ersieht zudem aus $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n^c)^c$, daß $\mathcal{A}_\sigma$ gegenüber abzählbaren Durchschnitten abgeschlossen ist.

Die von der Familie $\mathcal{O}_X$ aller offenen Teilmengen eines topologischen Raumes $[X, \mathcal{O}_X]$ erzeugte σ -Algebra $\sigma(\mathcal{O}_X)$ bezeichnet man als **Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$** von X . Aufgrund der Charakteristika der σ -Algebren und der Definition abgeschlossener Mengen als Komplemente offener Mengen ist $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O}_X)$ auch als die vom System $\mathcal{C}_X$ aller abgeschlossenen Mengen erzeugte σ -Algebra aufzufassen: $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{C}_X) = \sigma(\mathcal{O}_X)$. Die Elemente der Familie $\mathcal{B}(X)$ werden als **Borel-Mengen** bezeichnet.

Bei der Betrachtung abzählbar vieler (meßbarer) Teilmengen $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eines Raumes X liegt es nahe, nach der Existenz von Grenz- oder Limesmengen zu fragen. Eine solche ist anschaulich für monotone Folgen gegeben, wenn nämlich aus der Zugehörigkeit eines Punktes x zu unendlich vielen der Mengen E_n folgt, daß x höchstens in endlich vielen *nicht* enthalten sein kann.

Definition 1.1.5 (Mengenlimes) *Es sei $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Mengenfolge. Als **Limes superior** der Folge, geschrieben $\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ oder $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n$, wird die Gesamtheit aller Punkte bezeichnet, die zu unendlich vielen der Mengen E_n gehören. Die Gesamtheit aller Punkte, die in allen Mengen E_n mit Ausnahme von jeweils endlich vielen enthalten sind, heißt **Limes inferior** der Folge $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und wird mit $\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n$ bezeichnet. Im Falle, daß Limes superior und Limes inferior übereinstimmen, spricht man vom **Limes** der Folge $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und schreibt dafür $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$.*

Lemma 1.1.3 *Oberer und unterer Limes sind darstellbar als*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} E_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} E_n.$$

Beweis 1. Aus $x \in \bigcap_{v=1}^{\infty} E_{n_v}$ folgt offenbar $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} E_n$. Sei umgekehrt $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j$ mit $V_j = \bigcup_{n=j}^{\infty} E_n$; dann existiert zu V_1 ein erster Index n_1 mit $x \in E_{n_1} \subset V_1$, und zu V_{n_1+1} ein erster Index n_2 mit $x \in E_{n_2} \subset V_{n_1+1}$, und so fort. Daher gibt es unendlich viele Mengen aus $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, in denen x enthalten ist.

2. Ein Punkt x gehöre zu allen Mengen E_n bis auf die Mengen $E_{n_1}, \dots, E_{n_m} \implies x \in \bigcap_{n=n_m+1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} E_n$. Umgekehrt folgt aus $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} E_n$, daß es (mindestens) ein k gibt mit $x \in \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$, d. h. x liegt in allen E_n für $n \geq k$, also in allen Mengen mit Ausnahme von höchstens k . $\square$

Korollar 1.1.4 *Ist $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Mengenfolge in einer σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma$, so sind auch oberer und unterer Limes von $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}_\sigma$ enthalten.*

Beweis Dies folgt mit Lemma 1.1.3 unmittelbar aus der Tatsache, daß eine σ -Algebra bzgl. abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten abgeschlossen ist. $\square$

Der Limes einer Mengenfolge $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ existiert offensichtlich dann, wenn die Folge monoton ist, d. h. wenn entweder $E_n \subseteq E_{n+1}$ oder $E_n \supseteq E_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Definition 1.1.6 (Monotonie) $\mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(X)$ heißt **monotone Mengenfamilie**, wenn der Limes jeder monotonen Folge $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathcal{M}$ selbst in $\mathcal{M}$ enthalten ist.

Triviales Beispiel einer monotonen Familie ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ des Raumes X . Aus Korollar 1.1.4 folgt außerdem, daß jeder σ -Ring (jede σ -Algebra) eine monotone Familie bildet. Der Durchschnitt monotoner Familien ist selbst monoton; daher gibt es in Gestalt des Durchschnittes aller eine Mengenfamilie $\mathcal{F}$ enthaltenden monotonen Familien stets eine kleinste $\mathcal{F}$ enthaltende monotone Familie, die als **die minimale monotone** oder **die von $\mathcal{F}$ erzeugte monotone Mengenfamilie** $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ bezeichnet wird. Das nächste Lemma zeigt, daß σ -Ringe (bzw. σ -Algebren) durch die Monotonie-Eigenschaft gekennzeichnet sind.

Lemma 1.1.5 Ein Ring $\mathcal{R}$ (bzw. eine Algebra $\mathcal{A}$) ist d. u. n. d. ein σ -Ring (bzw. eine σ -Algebra), wenn $\mathcal{R}$ (bzw. $\mathcal{A}$) eine monotone Mengenfamilie bildet.

Beweis 1. Die Monotonie von σ -Ringen (σ -Algebren) folgt aus Korollar 1.1.4.

2. Für jede beliebige in einem monotonen Ring $\mathcal{R}$ (einer monotonen Algebra $\mathcal{A}$) enthaltene Mengenfolge $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bilden die Mengen $E_k = \bigcup_{n=1}^k A_n$ eine monoton nicht abnehmende Folge, deren Limes $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ aufgrund der Monotonie in $\mathcal{R}$ (bzw. in $\mathcal{A}$) enthalten ist. $\square$

Lemma 1.1.6 Die von einem beliebigen Mengenring $\mathcal{R}$ erzeugte monotone Familie $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ ist ein σ -Ring mit $\mathcal{M}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{R})$. Analoges gilt für Algebren.

Beweis Zu $A \subset X$ bezeichne $\mathcal{E}_A$ die Familie aller Mengen E , mit denen Differenz und Vereinigung bezüglich A in $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ liegen:

$$\mathcal{E}_A = \{E : (E \setminus A) \in \mathcal{M}(\mathcal{R}), (A \setminus E) \in \mathcal{M}(\mathcal{R}), (A \cup E) \in \mathcal{M}(\mathcal{R})\}.$$

Offensichtlich besteht die Relation $B \in \mathcal{E}_A \iff A \in \mathcal{E}_B \forall A, B \subset X$. Ist zudem $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine in $\mathcal{E}_A$ enthaltene monotone Mengenfolge, so hat man

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \setminus A &= \lim_{n \rightarrow \infty} (E_n \setminus A) \in \mathcal{M}(\mathcal{R}), \\ A \setminus \lim_{n \rightarrow \infty} E_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A \setminus E_n) \in \mathcal{M}(\mathcal{R}), \\ A \cup \left(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A \cup E_n) \in \mathcal{M}(\mathcal{R}), \end{aligned}$$

d. h. die Familie $\mathcal{E}_A$ ist monoton. Es sei nun $A = R$ ein Ringlelement; dann gehören alle übrigen Ringlelemente offenbar auch zu $\mathcal{E}_R$, und aufgrund der Monotonie von $\mathcal{E}_R$ und der

Minimaleigenschaft von $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ gilt $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{E}_R$. Ist demnach $M \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, so ist $M \in \mathcal{E}_R$ und somit $R \in \mathcal{E}_M$. Das gilt für alle $R \in \mathcal{R}$, d. h. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{E}_M$ für jedes $M \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$. Wieder wegen der Monotonie von $\mathcal{E}_M$ und der Minimaleigenschaft von $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ hat man daher $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{E}_M \forall M \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$. Das bedeutet für $M_1, M_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, daß stets $M_1 \setminus M_2$ und $M_1 \cup M_2$ wieder in $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ liegen, $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ also einen Ring – und nach Lemma 1.1.5 einen σ -Ring – bildet. Demnach gilt $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{R})$; da umgekehrt $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{R})$ eine monotone Familie ist, folgt $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{R})$, d. h. es besteht Gleichheit. Analoges gilt für Algebren. $\square$

Korollar 1.1.7 Enthält eine monotone Mengenfamilie $\mathcal{M}$ einen Ring $\mathcal{R}$, so enthält sie auch den von diesem Ring erzeugten σ -Ring $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{R})$.

Beweis Aufgrund der Minimaleigenschaften der von $\mathcal{R}$ erzeugten monotonen Familie und des von $\mathcal{R}$ erzeugten σ -Ringes liefert das obige Lemma

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{M}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{M}. \quad \square$$

1.2 Mengenfunktionen und Maße

Definition 1.2.1 (Mengenfunktionen) Es sei X eine Menge. Eine **erweitert-reellwertige Mengenfunktion** über $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(X)$ ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ⁴. Eine solche Mengenfunktion heißt

- **vollständig additiv** oder **σ -additiv**, falls für jede abzählbare Familie $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ wechselseitig disjunkter Teilmengen aus $\mathcal{E}$ mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{E}$ gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$,
- **endlich additiv**, falls für wechselseitig disjunkte Mengen $E_1, \dots, E_k$ aus $\mathcal{E}$ mit $\bigcup_{n=1}^k E_n \in \mathcal{E}$ gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^k E_n) = \sum_{n=1}^k \mu(E_n)$,
- **abzählbar subadditiv**, falls für jede beliebige abzählbare Familie $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$ gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$,
- **endlich subadditiv**, falls für endlich viele beliebige Mengen $A_1, \dots, A_k$ aus $\mathcal{E}$ mit $\bigcup_{n=1}^k A_n \in \mathcal{E}$ gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^k A_n) \leq \sum_{n=1}^k \mu(A_n)$.

Man beachte, daß in der Definition der Subadditivität nicht die wechselseitige Disjunktheit der Mengen gefordert wird. Dies deshalb, weil nahezu ausschließlich Mengenfunktionen μ mit der Isotonie-Eigenschaft $\mu(A) \leq \mu(B)$ für $A \subseteq B$ betrachtet werden.

Ist $\mu : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine erweitert reellwertige Mengenfunktion über einem Mengenring $\mathcal{R}$, so nennt man μ **von unten stetig**, falls für jede monoton zunehmende⁵ Folge $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

⁴ Wir schreiben auch $\mathbb{R}$ für die kompaktifizierte reelle Achse $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Erweitert-reellwertige Funktionen werden als **numerische Funktionen** bezeichnet.

⁵ Monoton zunehmend bzw. monoton abnehmend bedeutet $B_n \subset B_{n+1} \forall n$ bzw. $B_n \supset B_{n+1} \forall n$; soll Gleichheit in den Implikationen nicht ausgeschlossen werden, so sind die Begriffe *monoton nicht abnehmend* bzw. *monoton nicht zunehmend* angebrachter.

der Limesmenge $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = B \in \mathcal{R}$ gilt $\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$, und **von oben stetig**, falls $\mu(B_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ ist und die Gleichheit $\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$ für jede monoton abnehmende Folge $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit der Limesmenge $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = B \in \mathcal{R}$ zutrifft. Schließlich bezeichnet man eine solche Mengenfunktion über $\mathcal{R}$ als **leer-stetig** oder **$\emptyset$ -stetig**, falls $\mu(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{R}$ und $\mu(\emptyset) = 0$ ist und für jede monoton abnehmende Folge $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $\varphi(B_n) < \infty \forall n$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \emptyset$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = 0$.

Eine über einem Mengenring $\mathcal{R}$ definierte nicht negative, erweitert-reellwertige und endlich additive Mengenfunktion mit $\varphi(\emptyset) = 0$ nennt man einen **Inhalt**⁶ bzw., wenn zudem $\varphi(A) < \infty$ für jedes $A \in \mathcal{R}$ ist, einen **endlichen Inhalt**. Das entspricht der elementargeometrischen Interpretation des Begriffes, denn der Inhalt der Vereinigung endlich vieler disjunkter geometrischer Gebilde sollte die Summe, der Inhalt einer Differenz die Differenz der Einzelinhalte sein, und einem leeren Gebilde sollte der Inhalt Null entsprechen. Die bei elementargeometrischen Konstruktionen einleuchtende Forderung nach endlicher Additivität reicht jedoch bereits bei einfachen Konstruktionen zur Festlegung eines Inhaltes nicht immer aus (etwa, wenn der Inhalt einer offenen Kreisscheibe durch die Summe der Inhalte abzählbar vieler disjunkter offener einbeschriebener Dreiecke approximiert werden soll). Die Mengen, denen ein *Inhaltsmaß* zuzusprechen ist, sollten daher aus einem σ -Ring stammen, und die Mengenfunktion sollte σ -additiv sein. Erwartet man schließlich, daß ein entsprechender Funktionswert auch dem ganzen Raum zuzuordnen ist, so ist eine σ -Algebra zugrunde zu legen.

Definition 1.2.2 (Maß) $\mu : \mathcal{A}_\sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ sei eine erweitert-reellwertige Mengenfunktion über einer σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma \subset \mathfrak{P}(X)$. μ heißt ein **Maß** über $\mathcal{A}_\sigma$, falls

- μ σ -additiv ist,
- $\mu(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}_\sigma$,
- $\mu(\emptyset) = 0$.

Das Paar $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ bezeichnet man als einen **meßbaren Raum**, die Elemente von $\mathcal{A}_\sigma$ als **meßbare Mengen**. Unter Einschluß eines Maßes μ über $\mathcal{A}_\sigma$ heißt das Tripel $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ ein **Maßraum**.

Eine durch Zugrundelegen eines zerlegbaren Systems (Abschn. 1.1) anstelle eines Ringes erklärte Variante des Inhaltsbegriffes spielt bei sog. Maßerweiterungen (s. Abschn. 1.3) eine Rolle. Diese Variante bezeichnet man als **elementares Maß** [68]; das ist also eine über einem zerlegbaren System (einem Halbring) erklärte nicht negative, erweitert-reellwertige und endlich additive Mengenfunktion φ mit $\varphi(\emptyset) = 0$. Schließlich bezeichnet man eine

⁶ In vielen Fällen wird $X \in \mathcal{R}$ vorausgesetzt, d. h. der Inhaltsbegriff ist mit der Forderung verknüpft, daß der Definitionsbereich eine Algebra bildet (vergl. z. B. [165]).

über einem zerlegbaren System⁷ definierte nicht negative, erweitert-reellwertige und σ -additive Mengenfunktion als ein **Prämaß**. Um den Überblick zu erleichtern, verwenden wir einheitlich die Notationen $\mathcal{R}$ für einen Mengenring, $\mathcal{R}_\sigma$ für einen σ -Ring, $\mathcal{Z}$ für ein zerlegbares Mengensystem, $\mathcal{A}$ für eine Algebra und $\mathcal{A}_\sigma$ für eine σ -Algebra (vergl. Definitionen 1.1.1 und 1.1.2 in Abschn. 1.1).

Zusammenfassung Es seien $\mathcal{R}$ ein Mengenring, $\mathcal{Z}$ ein zerlegbares Mengensystem, $\mathcal{A}_\sigma$ eine σ -Algebra.

- Eine nicht negative, endlich additive Mengenfunktion $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mit $\varphi(\emptyset) = 0$ heißt **Inhalt** (s. Fußnote 7).
- Eine nicht negative, endlich additive Mengenfunktion $\varphi : \mathcal{Z} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mit $\varphi(\emptyset) = 0$ heißt **elementares Maß**.
- Eine nicht negative, σ -additive Mengenfunktion $\varphi : \mathcal{Z} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mit $\varphi(\emptyset) = 0$ heißt **Prämaß** (s. Fußnote 7).
- Eine nicht negative, σ -additive Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A}_\sigma \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt **Maß**.

Prämaße können auch als $\emptyset$ -stetige endliche Inhalte ausgezeichnet werden, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 1.2.1 *Jeder $\emptyset$ -stetige endliche Inhalt über einem Mengenring $\mathcal{R}$ ist ein Prämaß. Jedes Prämaß ist $\emptyset$ -stetig.*

Beweis Wir schreiben $B_n \downarrow B$ bzw. $B_n \uparrow B$ für eine monoton abnehmende bzw. eine monoton zunehmende Mengenfolge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$ (vergl. Fußnote 7).

1. Es sei φ leer-stetiger endlicher Inhalt. Jede beliebige monoton zunehmende Folge $B_n \uparrow B$ definiert vermöge $\tilde{B}_n = B \setminus B_n$ eine monoton abnehmende Folge $\tilde{B}_n \downarrow \emptyset$. Aus der Leer-Stetigkeit von φ sowie aus $\varphi(B) < \infty$ und $\varphi(B_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ (Endlichkeit) ist daher auf

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\tilde{B}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(B \setminus B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(B) - \varphi(B_n)) = \varphi(B) - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(B_n)$$

zu schließen. Es sei nun $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige abzählbare Familie wechselseitig disjunkter Teilmengen aus $\mathcal{R}$ mit $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{R}$. Definiert man die Folgeelemente B_n durch $B_n = \bigcup_{v=1}^n E_v$, so gilt $B_n \uparrow B$, und daher nach dem eben Bewiesenen $\varphi(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(B_n)$, wobei aufgrund der endlichen Additivität von φ (Inhaltseigenschaft) $\varphi(B_n) = \sum_{v=1}^n \varphi(E_v)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Folglich ist $\varphi(B) = \varphi(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^n \varphi(E_v) = \sum_{v=1}^{\infty} \varphi(E_v)$, d. h. φ ist σ -additiv.

2. φ sei ein Prämaß. Für jede monoton zunehmende Folge $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ gilt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(A_n) = \varphi(A)$; das ist so einzusehen: Man setze $A_0 = \emptyset$ und $E_n := A_n \setminus$

⁷ Zuweilen wird auch hier eine Algebra zugrundegelegt [165].

$A_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$; dann folgt $\bigcup_{n \geq 1} E_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ mit $A_n = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$, und die σ -Additivität von φ bedeutet $\varphi(A) = \varphi(\bigcup_{n \geq 1} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{v=1}^n \varphi(E_v)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(A_n))$.

Nun bezeichne $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton abnehmende Folge mit $\varphi(B_n) < \infty \forall n$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$. Wir setzen $A_n := B_0 \setminus B_n \forall n \in \mathbb{N}_0$, so daß $A_0 = \emptyset$ ist und $A_n \uparrow A$ für $A = B_0 \setminus B$ folgt. Nach dem eben Bewiesenen ist dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(A_n) = \varphi(A)$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(B_0 \setminus B_n) = \varphi(B_0 \setminus B)$. Das bedeutet $\varphi(B_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(B_n) = \varphi(B_0) - \varphi(B)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(B_n) = \varphi(B)$. Ist insbesondere $B = \emptyset$, so kennzeichnet dies die $\emptyset$ -Stetigkeit. $\square$

Definition 1.2.3 Ein Maß μ heißt **(total) endlich** oder **beschränkt**, falls $\mu(X) < \infty$ ist, und **σ -endlich**, falls es eine abzählbare Überdeckung $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von X gibt, so daß $\mu(E_n) < \infty$ für jedes E_n gilt. Ein Maßraum mit σ -endlichem Maß wird als **σ -endlicher Maßraum** bezeichnet.

Bemerkung 1.2.1 Ist μ ein σ -endliches Maß, so kann man stets davon ausgehen, daß es eine solche überdeckende Mengenfamilie $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ und $\mu(E_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ gibt, welche eine monoton nicht abnehmende Folge bildet. Es ist nämlich $\mu(\bigcup_{n=1}^{\ell} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\ell} \mu(E_n)$ (vergl. unten Lemma 1.2.3), so daß es genügt, $E'_\ell = \bigcup_{n=1}^{\ell} E_n \forall \ell \in \mathbb{N}$ zu setzen; die Folge $\{E'_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ hat die genannte Eigenschaft. $\square$

Lemma 1.2.2 (Maßeigenschaften I) Es sei μ ein Maß über der σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma$. Für $A, B \in \mathcal{A}_\sigma$, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{A}_\sigma$ und $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{A}_\sigma$ gelten die Aussagen

- (M1) $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$ (Isotonie-Eigenschaft)
- (M2) $A \subset B, \mu(B) < \infty \implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- (M3) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton zunehmend $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)$
- (M4) $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton abnehmend, $\mu(B_{n_0}) < \infty$ für mindestens ein $n_0 \in \mathbb{N}$
 $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n)$.

Beweis 1. Im Falle $A \subset B$ ist $A \cup (B \setminus A) = B$, daher folgt aus der Additivität die Isotonie von μ .

2. $\mu(B) < \infty$ impliziert $\mu(A) < \infty$, falls $A \subset B$ ist, daher gilt $\mu(B) - \mu(A) \in \mathbb{R}$ und $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3. Zunächst ist festzustellen, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ zu $\mathcal{A}_\sigma$ gehören (s. Korollar 1.1.4). Es seien die wechselseitig disjunkten Mengen D_n definiert durch

$$D_1 = A_1, \quad D_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n, \quad n \geq 1.$$

Aufgrund von $A_n \subseteq A_{n+1}$ folgt damit $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, also

$$\mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \mu(D_n),$$

was wegen $\sum_{n=1}^k \mu(D_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^k D_n) = \mu(A_k)$ die behauptete Gleichheit impliziert: $\mu(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

4. Es sei $\mu(B_{n_0}) < \infty$. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n \subset B_{n_0}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (B_{n_0} \setminus B_n) = B_{n_0} \setminus \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ folgt aus der bereits bewiesenen zweiten Eigenschaft $\mu(B_{n_0} \setminus \lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = \mu(B_{n_0}) - \mu(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n)$. Andererseits hat man, da die Folge $\{A_n\}_{n \geq n_0}$ mit $A_n = B_{n_0} \setminus B_n$ offenbar monoton nicht abnehmend ist, nach dem vorher Bewiesenen

$$\mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n),$$

so daß $\mu(B_{n_0} \setminus \lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_{n_0} \setminus B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(B_{n_0}) - \mu(B_n)) = \mu(B_{n_0}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$ wird. Diese beiden Darstellungen von $\mu(B_{n_0} \setminus \lim_{n \rightarrow \infty} B_n)$ zeigen

$$\mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n). \quad \square$$

Lemma 1.2.3 (Maßeigenschaften II) *Es sei μ ein Maß über der σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma$, und es sei $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Mengenfolge in $\mathcal{A}_\sigma$; dann bestehen folgende Ungleichungen:*

$$(M5) \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

$$(M6) \quad \mu\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

$$(M7) \quad \mu\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n), \text{ falls } \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty.$$

Beweis Die Mengen $D_1 = A_1$, $D_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right)$ für $n \geq 2$ sind offenbar wechselseitig disjunkt und erfüllen $D_n \subset A_n$ sowie $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Folglich hat man $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

1. Mit $M_j = \bigcap_{n=j}^{\infty} A_n$ ist $\mu\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j\right)$, worin die M_j eine monoton nicht abnehmende Folge in $\mathcal{A}_\sigma$ bilden, so daß $\bigcup_{j=1}^m M_j = M_m$ folgt: $\mu\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \mu(\lim_{m \rightarrow \infty} M_m)$. Nach Lemma 1.2.2 erhält man also $\mu\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(M_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right)$. Hierin ist $\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \subseteq A_m$ für die nicht notwendige monotone Folge $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, also gilt (M6):

$$\mu\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right) \leq \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m). \quad (1.1)$$

2. Aus $\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} A_n = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=j}^{\infty} A_n\right)^c\right)^c$ und $\left(\bigcap_{n=j}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=j}^{\infty} A_n^c$ folgt

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} A_n^c\right)^c = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n^c\right)^c.$$

Das gilt für jede Einbettung in eine Menge X , so daß mit $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ auf $\mu\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n^c\right) = \mu\left(\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right)^c\right) = \mu(X \setminus \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n)$ zu schließen ist. Eigenschaft (M6) garantiert

$\mu(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^c) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n^c) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n^c)$, daher liefert $\mu(X) < \infty$ nach Lemma 1.2.2

$$\mu(X) - \mu\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \mu(X) - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n),$$

also $\mu\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$, d. h. (M7). $\square$

Folgerung Existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ und ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n < \infty$, so implizieren die Eigenschaften (M6) und (M7) die Ungleichungen

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n),$$

so daß in diesem Falle $\mu(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ stets garantiert ist.

Definition 1.2.4 Eine erweitert-reellwertige Funktion f über einem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ wird als **fast überall endlich** (f. ü. endlich) oder auch **μ -endlich** bezeichnet, wenn die Menge $\{x : f(x) = \pm\infty\}$ vom Maße Null ist. Mengen N vom Maße $\mu(N) = 0$ heißen **Nullmengen bzgl. μ** oder kurz **μ -Nullmengen**. Generell spricht man von einer **μ -fast überall** bestehenden Eigenschaft (bzgl. des Raumes X), falls diese Eigenschaft überall in X – ausgenommen in Mengen vom Maße Null – besteht⁸.

Definition 1.2.5 μ heißt **vollständiges Maß**, falls jede Teilmenge einer Nullmenge bzgl. μ meßbar (also selbst Nullmenge) ist.

Jedes Maß erlaubt die Bildung eines zugehörigen vollständigen Maßes, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 1.2.4 Es sei μ ein Maß über der σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma \subset \mathfrak{P}(X)$. Mit $\mathcal{V}$ werde die $\mathcal{A}_\sigma$ umfassende Familie aller Teilmengen aus X von der Form $A \cup U$ bezeichnet, worin $A \in \mathcal{A}_\sigma$ und U Teilmenge einer μ -Nullmenge ist. Dann ist $\mathcal{V}$ eine σ -Algebra, und die Mengenfunktion ν , definiert durch $\nu(A \cup U) \stackrel{!}{=} \mu(A)$, ist ein vollständiges Maß über $\mathcal{V}$, das man als **Vervollständigung** von μ bezeichnet.

Beweis Es ist zunächst zu prüfen, ob ν wohldefiniert ist, d. h., ob im Falle $A_1 \cup U_1 = A_2 \cup U_2$ auch zwangsläufig $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ folgt. Dazu beachte man, daß die U_i in Nullmengen liegen, d. h. $U_i \subset N_i$ mit $\mu(N_i) = 0$ für $i = 1, 2$, woraus sich $A_1 \subset A_1 \cup U_1 = A_2 \cup U_2 \subset A_2 \cup N_2$ und analog $A_2 \subset A_1 \cup N_1$ ergibt, d. h. $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ und umgekehrt, also $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

1. $\mathcal{V}$ ist σ -Algebra: Die Zugehörigkeit von X und $\emptyset$ zu $\mathcal{V}$ ist offensichtlich. Sei $V = A \cup U$ ein beliebiges Element von $\mathcal{V}$ mit $U \subset N$ und $\mu(N) = 0$; dann folgt $A^c \setminus N = A^c \cap N^c \subset A^c \cap U^c = (A \cup U)^c \subset A^c$. Aufgrund dieser Schachtelung ist die Menge $B =$

⁸ Der Hinweis auf das Maß μ entfällt, wenn der Bezug klar ist.

$(A \cup U)^c \setminus (A^c \setminus N)$ in A^c enthalten und erfüllt $(A^c \setminus N) \cup B = (A \cup U)^c$ und $A^c \setminus B \supset A^c \setminus N$, woraus auf $B \subset N$ zu schließen ist. $A, N \in \mathcal{A}_\sigma$ impliziert $A^c \setminus N \in \mathcal{A}_\sigma$, so daß das Komplement $(A \cup U)^c$ eine Darstellung der Form $A' \cup B$ mit $B \subset N$ hat, somit also zu $\mathcal{V}$ gehört. Zu zeigen bleibt die Abgeschlossenheit bzgl. abzählbarer Vereinigungen $\bigcup_{n=1}^\infty (A_n \cup U_n) = (\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \cup (\bigcup_{n=1}^\infty U_n)$. In einer solchen ist $\bigcup_{n=1}^\infty U_n \subset \bigcup_{n=1}^\infty N_n$ mit $U_n \subset N_n$ und $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty N_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(N_n) = 0$, also hat auch $\bigcup_{n=1}^\infty (A_n \cup U_n)$ eine Darstellung der Form $\tilde{A} \cup \tilde{U}$ mit $\tilde{A} = \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}_\sigma$ und $\tilde{U} = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$ als Teilmenge einer Nullmenge.

2. Die Maßseigenschaften von ν ergeben sich aus denen der Mengenfunktion μ , daher ist lediglich die Vollständigkeit von ν nachzuweisen. Jede ν -Nullmenge ist von der Form $A \cup U$ mit $\mu(A) = 0$, $U \subset N$ und $\mu(N) = 0$; wegen $\mu(A \cup U) \leq \mu(A \cup N) \leq \mu(A) + \mu(N) = 0$ ist eine solche Menge stets auch μ -Nullmenge. Eine Teilmenge $M \subset A \cup U$ kann dargestellt werden als $M = \emptyset \cup M$, was im Falle $\mu(M) = 0$ auch $M \in \mathcal{V}$ impliziert. $\square$

Vollständige Maße spielen in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine wichtige Rolle. Verallgemeinerungen des Maßbegriffes finden in anderen Gebieten, etwa der Physik, Anwendung. Dazu gehören Mengenfunktionen, die alle Eigenschaften eines Maßes mit Ausnahme der dort geforderten Beschränkung auf nicht negative Werte besitzen.

Definition 1.2.6 (Signierte Maße) *Eine über einer σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma$ definierte erweitert-reellwertige und σ -additive Mengenfunktion $\nu: \mathcal{A}_\sigma \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mit $\nu(\emptyset) = 0$ heißt **signiertes Maß** über $\mathcal{A}_\sigma$, falls ν höchstens einen der Werte $+\infty$ oder $-\infty$ annimmt.*

Jede reelle Linearkombination $\nu = \sum_{n=1}^k a_n \mu_n$ von Maßen μ_n über derselben σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma$, unter denen höchstens eines nicht total endlich ist, bildet offenbar ein signiertes Maß, definiert durch $\nu(A) = \sum_{n=1}^k a_n \mu_n(A)$ für jedes A .

Definition 1.2.7 *Es sei ν ein signiertes Maß über der σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma$. Eine Teilmenge $M \in \mathcal{A}_\sigma$ wird als **positiv bzgl. ν** bezeichnet, wenn $\nu(M \cap A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}_\sigma$ ist, und als **negativ bzgl. ν** , wenn $\nu(M \cap A) \leq 0 \forall A \in \mathcal{A}_\sigma$ ist.*

Die Bedeutung dieser Klassifikation liegt darin, daß zu jedem signierten Maß ν Zerlegungen der Form $\nu = \mu^+ - \mu^-$ existieren, worin μ^+ und μ^- Maße über derselben σ -Algebra sind. Sind nämlich M^+ und M^- meßbare Mengen mit $X = M^+ \cup M^-$, $\nu(A \cap M^+) \geq 0$, $\nu(A \cap M^-) \leq 0$ für jedes $A \in \mathcal{A}_\sigma$, so ist $N = A \cap M^+ \cap M^-$ eine ν -Nullmenge, und die drei disjunkten Mengen $(A \cap M^+) \setminus N$, N , $(A \cap M^-) \setminus N$ führen zu der Darstellung $\nu(A) = \nu(A \cap M^+) + \nu(A \cap M^-) =_{def.} \mu^+(A) - \mu^-(A)$. Die Mengen, die eine solche Darstellung erlauben, sind allerdings i. a. nicht eindeutig bestimmt, wie das Beispiel $U^+ = M^+ \setminus M^-$ und $U^- = M^-$ zeigt, für das ebenfalls $\nu(A) = \nu(A \cap U^+) + \nu(A \cap U^-)$ gilt. Dabei hat man $U^+ \cap U^- = \emptyset$ und $U^+ \cup U^- = X$, d. h. selbst im Falle einer Partition des Raumes ist die Eindeutigkeit der definierenden Mengen i. a. nicht gesichert. Der folgende Satz zeigt jedoch, daß dann jedenfalls die Zerlegungsmaße μ^+ , μ^- eindeutig festgelegt sind.

Satz 1.2.5 (Jordan-Hahn-Zerlegung) *Zu jedem signierten Maß ν über der σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma$ gibt es eine Partition des Raumes X in meßbare Mengen P und N derart, daß P positiv bzgl. ν und N negativ bzgl. ν ist⁹. Die Mengenfunktionen μ^+ und μ^- , definiert durch*

$$\mu^+(A) = \nu(A \cap P), \quad \mu^-(A) = -\nu(A \cap N) \quad \forall A \in \mathcal{A}_\sigma, \quad (1.2)$$

sind Maße über $\mathcal{A}_\sigma$ mit der Eigenschaft $\nu = \mu^+ - \mu^-$. Diese Maße sind – unabhängig von der Wahl einer solchen Partition – eindeutig bestimmt. Mindestens eines der Maße ist total endlich¹⁰.

Beweis 1. Da ν als signiertes Maß höchstens einen der Werte $+\infty$ oder $-\infty$ annimmt, kann o. E. d. A. $\sup_{A \in \mathcal{A}} \nu(A) =: c < +\infty$ vorausgesetzt werden (anderenfalls ergibt sich eine analoge Beweisführung). Sei nun $\mathcal{E} = \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen aus $\mathcal{A}_\sigma$ mit $\nu(E_n) > c - \frac{1}{2^n}$ ($\mathcal{E}$ enthält offenbar zumindest ein Element). Wir setzen

$$P = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} E_n$$

und zeigen, daß $\nu(A) \geq 0$ für jedes $A \subset P$ ist ($P \in \mathcal{A}_\sigma$ folgt aus Korollar 1.1.4). Eine Teilmenge $A \subset P$ ist offenbar in jeder Vereinigung $\bigcup_{n=j}^{\infty} E_n$ und somit für jedes $j \in \mathbb{N}$ in mindestens einem E_m mit $m \geq j$ enthalten, woraus $\nu(A) = \nu(E_m) - \nu(E_m \setminus A) > c - \frac{1}{2^m} - \sup_{A \in \mathcal{A}} \nu(A) = -\frac{1}{2^m}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ folgt. Demnach liefert $m \rightarrow \infty$ die Aussage $\nu(A) \geq 0$.

Nun sei $N = X \setminus P$ (also $N \in \mathcal{A}_\sigma$ als Komplement eines Elementes der σ -Algebra). Es ist dann

$$N = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} (X \setminus E_n) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} (X \setminus E_n),$$

und aus $B \subset N$ folgt $B \subset (X \setminus E_n)$ für alle $n \geq j_0$ und mindestens ein j_0 . Die Ungleichung $\sup_{A \in \mathcal{A}} \nu(A) < \infty$ impliziert $\nu(X) < \infty$ und $\nu(E_n) < \infty$, so daß aus $E_n \subset X$ folgt $\nu(X \setminus E_n) = \nu(X) - \nu(E_n) < c - (c - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$. Demnach hat man $\nu(B) \leq \frac{1}{n} \forall n \geq j_0$, so daß mit beliebig großem n auch $\nu(B) \leq 0$ folgt. Die im Satz definierten Mengenfunktionen μ^+ und μ^- sind also Maße, und die Mengen P und N bilden eine Partition von X , d. h. $X = P \cup N$ mit $P \cap N = \emptyset$. Das Maß μ^+ ist dabei wegen $\sup_{A \in \mathcal{A}} \nu(A) < \infty$ total endlich. Eine analoge Schlußweise auf der Basis von $\inf_{A \in \mathcal{A}} \nu(A) > -\infty$ würde $\mu^-(X) < \infty$ garantieren.

2. Es seien P_i, N_i ($i = 1, 2$) zwei Hahn-Zerlegungen mit $X = P_i \cup N_i$, $P_i \cap N_i = \emptyset$, $\nu(A \cap P_i) \geq 0$, $\nu(A \cap N_i) \leq 0$. Für jede meßbare Menge $A \in \mathcal{A}_\sigma$ sei $A_i^+ = A \cap P_i$ und $A_i^- = A \cap N_i$ ($i = 1, 2$). Wegen $A_i^+ \setminus A_j^+ \subset P_i \cap N_j$ ist $\nu(A_i^+ \setminus A_j^+) = 0$, was

$$\nu(A_i^+) = \nu(A_i^+ \setminus A_j^+) + \nu(A_i^+ \cap A_j^+) = \nu(A_i^+ \cap A_j^+) = \nu(A_j^+)$$

⁹ Eine solche Partition ist i. a. nicht eindeutig; sie wird als *Hahn-Zerlegung* bezeichnet.

¹⁰ Die Zerlegung des signierten Maßes ν nennt man eine *Jordan-Zerlegung*.

impliziert. Analog erhält man $\nu(A_i^-) = \nu(A_j^-)$, d. h. die Definition der Maße μ^+ und μ^- gemäß (1.2) ist von der gewählten Partition von X (der speziellen Hahn-Zerlegung) unabhängig. Damit ist alles bewiesen. $\square$

Obwohl es also i. a. mehrere Möglichkeiten für eine Darstellung $\nu = \nu^+ - \nu^-$ gibt, ist die auf einer beliebigen *Hahn-Zerlegung* des Raumes X basierende *Jordan-Zerlegung* (1.2) eindeutig.

Definition 1.2.8 Die durch die Jordan-Hahn-Zerlegung bestimmten Maße μ^+ und μ^- bezeichnet man als **obere** bzw. **untere Variation von ν** . Das Maß $|\nu| = \mu^+ + \mu^-$ heißt **absolute Variation des signierten Maßes $\nu = \mu^+ - \mu^-$** . Ein signiertes Maß heißt **total endliches signiertes Maß** bzw. **σ -endliches signiertes Maß**, wenn die jeweilige Eigenschaft seiner absoluten Variation $|\nu|$ zukommt.

Jedes Maß ist offenbar auch signiertes Maß. Bei gegebener σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma \subset \mathfrak{P}(X)$ ist die Menge aller total endlichen Maße über $\mathcal{A}_\sigma$ in der Menge $\mathcal{V}$ aller total endlichen signierten Maße über $\mathcal{A}_\sigma$ enthalten, und $\mathcal{V}$ bildet einen Banach-Raum mit der Norm $\|\nu\| = |\nu|(X)$ für $\nu \in \mathcal{V}$. Diese Norm $\|\nu\|$ bezeichnet man auch als **Totalvariation** von ν . Man beachte, daß i. a. $|\nu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A) \neq |\nu(A)| = |\mu^+(A) - \mu^-(A)|$ ist.

In der Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen hängt der Variationsbegriff eng mit dem weiter einschränkenden Begriff der absoluten Stetigkeit zusammen. Zur Erinnerung: Es bezeichne $\mathcal{U}_{[a,b]}$ die Menge aller Partitionen Π des Intervalls $[a, b]$ in Teilintervalle $[x_{j-1}, x_j]$ für $j = 1, \dots, m_\Pi - 1$ bzw. $[x_{m_\Pi-1}, x_{m_\Pi}]$, wobei jeweils

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{m_\Pi} = b$$

sei; dann heißt eine über $[a, b]$ definierte Funktion f heißt **von endlicher** oder **beschränkter Variation**, wenn die obere Grenze $\text{Var}_{[a,b]}(f)$ aller Summen

$$S_\Pi(f) = \sum_{j=0}^{m_\Pi} |f(x_j) - f(x_{j-1})|, \quad \Pi \in \mathcal{U}_Q,$$

einen endlichen Wert annimmt: $\text{Var}_{[a,b]}(f) = \sup_{\Pi \in \mathcal{U}_Q} S_\Pi(f) \leq K < \infty$. $\text{Var}_{[a,b]}(f)$ wird als **totale Variation** der Funktion f bezeichnet. Eine über $[a, b]$ definierte endliche Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **absolut stetig**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für je endlich viele paarweise disjunkte Intervalle $[a_i, b_i] \subset [a, b]$ ($i \in \{1, \dots, m\}$) mit $\sum_{i=1}^m (b_i - a_i) < \delta$ stets gilt

$$\left| \sum_{i=1}^m (f(b_i) - f(a_i)) \right| < \varepsilon$$

(diese Bedingung kann – wie leicht zu zeigen – auch durch die schärfere Bedingung $\sum_{i=1}^m |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ ersetzt werden). Jede absolut stetige Funktion ist von beschränkter Variation.

Im Falle des $\mathbb{R}^n$ können leicht ähnliche Begriffe für Mengenfunktionen über der Borel-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ eingeführt werden. Dazu sei $\mathcal{U}_Q$ wieder die Menge aller Partitionen Π von $Q = [a, b]$ durch Intervalle $\{x_{j-1}, x_j\}$ mit $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{m_\Pi} = b$ ($j = 1, \dots, m_\Pi$).

Definition 1.2.9 Eine reellwertige Mengenfunktion ϕ über $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ heißt von **endlicher** oder **beschränkter Variation**¹¹ über Q , falls die obere Grenze $\text{Var}_Q(\phi)$ aller Summen $S_\Pi(\phi) = \sum_{j=0}^{m_\Pi} |\phi(\{x_j, x_{j+1}\})|$ einen endlichen Wert annimmt:

$$\text{Var}_Q(\phi) = \sup_{\Pi \in \mathcal{U}_Q} S_\Pi(\phi) \leq K < \infty.$$

$\text{Var}_Q(\phi)$ wird als **totale Schwankung** der Mengenfunktion ϕ bezeichnet (s. Fußnote).

Definition 1.2.10 Es sei $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ ein Maßraum. Eine reellwertige Mengenfunktion ϕ heißt **absolut stetig bzgl. μ** , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß für alle μ -meßbaren Mengen $A \in \mathcal{A}_\sigma$ mit $\mu(A) < \delta(\varepsilon)$ der Absolutbetrag $|\phi(A)| < \varepsilon$ bleibt.

Es seien nun ν_1, ν_2 signierte Maße über der σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma$ in einem meßbaren Raum $[X, \mathcal{A}_\sigma]$. Existiert im Sinne obiger Definition zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß aus $|\nu_2|(A) < \delta(\varepsilon)$ stets $|\nu_1(A)| < \varepsilon$ folgt, so impliziert offenbar $|\nu_2|(A) = 0$ auch stets $\nu_1(A) = 0$. Gilt umgekehrt für alle $A \in \mathcal{A}_\sigma$ die Aussage

$$(|\nu_2|(A) = 0) \implies (\nu_1(A) = 0),$$

so genügt zu gegebenem $\varepsilon > 0$ zumindest die Forderung $|\nu_2|(A) = 0$, um $|\nu_1(A)| < \varepsilon$ zu garantieren (man vergl. dazu den folgenden Satz 1.2.7 unter Beachtung von $|\nu_1(A)| \leq |\nu_1|(A) \forall A \in \mathcal{A}_\sigma$). Die Definition der absoluten Stetigkeit für signierte Maße wird daher folgendermaßen gefaßt.

Definition 1.2.11 Sind ν_1, ν_2 signierte Maße über der σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma$ in einem meßbaren Raum $[X, \mathcal{A}_\sigma]$, so heißt ν_1 **bzgl. ν_2 absolut stetig**, in Zeichen $\nu_1 \ll \nu_2$, falls aus $|\nu_2|(A) = 0$ stets $\nu_1(A) = 0$ folgt. Entsprechend heißt ein Maß μ_1 **absolut stetig bzgl. des Maßes μ_2** oder kurz **μ_2 -stetig**, falls $\mu_1(N) = 0$ für jede μ_2 -Nullmenge N ist, d. h.

$$(\mu_1 \ll \mu_2) \iff ((\mu_2(N) = 0) \implies (\mu_1(N) = 0)).$$

Lemma 1.2.6 Es seien ν_1 und ν_2 signierte Maße, $\nu_1 = \mu_1^+ - \mu_1^-$ eine Jordan-Hahn-Zerlegung von ν_1 , die die absolute Variation $|\nu_1|$ definiert. ν_1 ist d. u. n. d. bzgl. ν_2 absolut stetig, wenn $\mu_1^+ \ll \nu_2$ und $\mu_1^- \ll \nu_2$ ist, oder wenn $|\nu_1| \ll \nu_2$ ist.

¹¹ Nicht zu verwechseln mit dem Begriff der (absoluten) Variation signierter Maße.

Beweis 1. Es sei $v_1 \ll v_2$. Gilt dann $|v_2|(A) = 0$ für eine meßbare Menge A , so folgt offenbar $|v_2|(A \cap P) = |v_2|(A \cap N) = 0$, also nach Voraussetzung $\mu_1^+(A) = v_1(A \cap P) = 0$ und $\mu_1^-(A) = v_1(A \cap N) = 0$, d. h. $\mu^+ \ll v_2$ und $\mu^- \ll v_2$.

2. Aus $\mu^+ \ll v_2$ und $\mu^- \ll v_2$ folgt trivialerweise $|v_1| \ll v_2$.

3. Ist $|v_1| = \mu_1^+ + \mu_1^- \ll v_2$, so bedeutet $|v_2|(A) = 0$ auch $\mu_1^+(A) + \mu_1^-(A) = 0$, wegen $0 \leq |v_1(A)| = |\mu_1^+(A) - \mu_1^-(A)| \leq \mu_1^+(A) + \mu_1^-(A)$ also $v_1(A) = 0$, womit $v_1 \ll v_2$ bewiesen ist.

Die Aussagen $v_1 \ll v_2$, $(\mu^+ \ll v_2 \wedge \mu^- \ll v_2)$ und $|v_1| \ll v_2$ sind also äquivalent. $\square$

Mit dem nächsten Satz stellen wir die Analogie zur absoluten Stetigkeit endlicher reeller Funktionen her.

Satz 1.2.7 *Ein signiertes Maß v_1 sei absolut stetig bzgl. des signierten Maßes v_2 , und für jede meßbare Menge A folge aus $|v_2|(A) < \infty$ stets $|v_1|(A) < \infty$; dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so daß für alle meßbaren Mengen M mit $|v_2|(M) < \delta(\varepsilon)$ die Abschätzung $|v_1|(M) < \varepsilon$ gilt.*

Beweis Angenommen, die Aussage sei falsch; dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß zu jedem $\delta > 0$ stets eine meßbare Menge M_δ mit $|v_2|(M_\delta) < \delta$ und $|v_1|(M_\delta) \geq \varepsilon$ existiert. Man wähle $\delta = \frac{1}{2^n}$ und setze $M_\delta =: M_n$; dann gibt es eine Folge $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ meßbarer Mengen mit $|v_2|(M_n) < \frac{1}{2^n}$, jedoch $|v_1|(M_n) \geq \varepsilon$. Der Limes superior $L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} M_n$ dieser Folge erfüllt (s. Lemma 1.1.3)

$$|v_2|(L) = |v_2|\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} M_n\right) \leq |v_2|\left(\bigcup_{n=j}^{\infty} M_n\right) \leq \sum_{n=j}^{\infty} |v_2|(M_n) < \frac{1}{2^{j-1}} \quad \forall j \geq 1,$$

mit der Konsequenz $|v_2|(L) = 0$. Laut Voraussetzung folgt aus $|v_2|(\bigcup_{n=j}^{\infty} M_n) < \infty$ auch $|v_1|(\bigcup_{n=j}^{\infty} M_n) < \infty$, so daß gemäß Lemma 1.2.3 gilt

$$|v_1|(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} M_n) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |v_1|(M_n) = \varepsilon > 0.$$

Damit entsteht ein Widerspruch zu $v_1 \ll v_2$, der absoluten Stetigkeit von v_1 bzgl. v_2 , nach der $|v_2|(L) = 0$ stets $|v_1|(L) = 0$ implizieren muß. Die Annahme ist also nicht haltbar. $\square$

Zum Verhältnis von Maßen untereinander nennen wir abschließend einen auf Lebesgue zurückgehenden Zerlegungssatz, welcher in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine wichtige Rolle spielt. Zunächst wird der Begriff der Singularität eines Maßes μ_1 bezüglich eines über derselben σ -Algebra definierten Maßes μ_2 erklärt.

Definition 1.2.12 (Singularität) *Es seien $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ ein meßbarer Raum und μ_1, μ_2 Maße über $\mathcal{A}_\sigma$. μ_1 heißt **singulär bzgl. μ_2** oder kurz **μ_2 -singulär**, falls es eine μ_1 -Nullmenge N in $\mathcal{A}_\sigma$ gibt, deren Komplement N^c eine μ_2 -Nullmenge ist. Für diesen Sachverhalt benutzt man die Schreibweise $\mu_1 \perp \mu_2$.*

Es ist klar, daß die Relation „ $\perp$ “ symmetrisch ist, so daß $\mu_1 \perp \mu_2$ auch mit den Worten „ μ_1 und μ_2 sind zueinander singulär“ beschrieben werden kann. Zwei signierte Maße ν_1, ν_2 heißen zueinander singulär, wenn dies für ihre absoluten Variationen $|\nu_i| = \mu_i^+ + \mu_i^-$ gilt.

Lemma 1.2.8 *Die über der σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma$ definierten Maße μ_1 und μ_2 sind genau dann zueinander singulär, wenn es μ_i -Nullmengen $N_i \in \mathcal{A}_\sigma$ gibt, so daß für $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$ gilt*

$$\mu_j(A) = \mu_j(A \cap N_i) \quad \forall A \in \mathcal{A}_\sigma.$$

Ist zudem μ_j absolut stetig bzgl. μ_i , in Zeichen $\mu_j \ll \mu_i$, so folgt $\mu_j \equiv 0$.

Beweis 1. Sind μ_1 und μ_2 zueinander singulär, so gibt es Nullmengen N_i unter μ_i , deren jeweiliges Komplement Nullmenge unter μ_j ist ($i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$). Die Additivität von μ_j bedeutet $\mu_j(A) = \mu_j(A \cap N_i) + \mu_j(A \cap N_i^c)$, worin wegen $A \cap N_i^c \subset N_i^c \in \mathcal{A}_\sigma$ und $\mu_j(N_i^c) = 0$ der Wert $\mu_j(A \cap N_i^c)$ gleich Null ist.

2. Es sei $\mu_i(N_i) = 0$, und für $j \neq i$ gelte $\mu_j(A) = \mu_j(A \cap N_i) \quad \forall A \in \mathcal{A}_\sigma$; dann ist Letzteres auch für $A = N_i^c = X \setminus N_i$ richtig, d. h. $\mu_j(N_i^c) = 0$ für $j \neq i$ und $i, j \in \{1, 2\}$.

3. Nach Definition der absoluten Stetigkeit (s. 1.2.10) folgt aus $\mu_j \ll \mu_i$ für jede μ_i -Nullmenge N_i , daß auch $\mu_j(N_i) = 0$ ist, während $\mu_j \perp \mu_i$ zu der dadurch ausgezeichneten Nullmenge N_i die Beziehung $\mu_j(N_i^c) = 0$ und damit

$$\mu_j(X) = \mu_j(N_i) + \mu_j(N_i^c) = 0, \quad \mu_j \equiv 0$$

impliziert. □

Der folgende Satz wurde von H. Lebesgue für σ -endliche Maße μ_i bewiesen (vergl. [10]). Wir nennen ihn hier jedoch der einfacheren Beweisbarkeit halber nur für total endliche Maße.

Satz 1.2.9 (Lebesgue'scher Zerlegungssatz) *Zwischen je zwei total endlichen Maßen μ_1 und μ_2 über derselben σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma \subset \mathfrak{P}(X)$ besteht folgende wechselseitige Beziehung: Jedes der Maße μ_i läßt sich in eindeutiger Weise in die Summe zweier Maße $\nu_i^{(1)}$ und $\nu_i^{(2)}$ über $\mathcal{A}_\sigma$ mit den Eigenschaften*

$$\nu_1^{(1)} \ll \mu_2, \quad \nu_1^{(2)} \perp \mu_2, \quad \nu_2^{(1)} \ll \mu_1, \quad \nu_2^{(2)} \perp \mu_1$$

*zerlegen. In $\mu_i = \nu_i^{(1)} + \nu_i^{(2)}$ wird $\nu_i^{(1)}$ als **regulärer Teil von μ_i bezüglich μ_j** und $\nu_i^{(2)}$ als **singulärer Teil von μ_i bezüglich μ_j** bezeichnet ($i, j = 1, 2$, $i \neq j$). $\nu_i^{(1)} + \nu_i^{(2)}$ nennt man die **Lebesgue'sche Zerlegung** von μ_i .*

Beweis 1. Es bezeichne $\mathcal{N}_j = \{N_j \in \mathcal{A}_\sigma : \mu_j(N_j) = 0\}$ die Menge aller Nullmengen von μ_j ($j = 1, 2$), und für $i \neq j$ sei $s_i = \sup\{\mu_i(N_j) : N_j \in \mathcal{N}_j\}$. Aufgrund der Endlichkeit

beider Maße sind die Suprema s_1 und s_2 endliche positive reelle Zahlen. In jeder der Familien $\mathcal{N}_j$ gibt es offensichtlich eine nicht abnehmende Folge $\{N_j^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_i(N_j^k) = \mu_i(\lim_{k \rightarrow \infty} N_j^k) = \mu_i(\bigcup_{k=1}^{\infty} N_j^k) = s_i$. Mit $M_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_j^k$ definieren wir die Maße $v_i^{(1)}$ und $v_i^{(2)}$ vermöge

$$v_i^{(1)}(A) = \mu_i(A \cap M_j^c), \quad v_i^{(2)}(A) = \mu_i(A \cap M_j) \quad \forall A \in \mathcal{A} - \sigma,$$

die offenbar bereits eine Zerlegung der Form

$$\mu_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} \quad \text{für } i = 1, 2$$

bilden. Da M_j Nullmenge unter μ_j ist und $v_i^{(2)}(M_j^c) = \mu_i(M_j^c \cap M_j) = 0$ ist, folgt $v_i^{(2)} \perp \mu_j$ ($i \neq j$). Weiterhin hat man für eine beliebige Nullmenge N_j unter μ_j wegen $\mu_i(M_j) = s_i$

$$s_i = \mu_i([N_j \cap M_j^c] \cup M_j) = \mu_i(N_j \cap M_j^c) + \mu_i(M_j) = \mu_i(N_j \cap M_j^c) + s_i,$$

also $\mu_i(N_j \cap M_j^c) = v_i^{(1)}(N_j) = 0$, was zusätzlich $v_i^{(1)} \ll \mu_j$ ($i \neq j$) impliziert.

2. Angenommen, es gibt neben der oben erwähnten Darstellung $\mu_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)}$ die Zerlegung $\mu_i = \hat{v}_i^{(1)} + \hat{v}_i^{(2)}$ mit $\hat{v}_i^{(1)} \ll \mu_j$ und $\hat{v}_i^{(2)} \perp \mu_j$. Für jede μ_j -Nullmenge N_j und jedes $A \in \mathcal{A}_\sigma$ ist dann $\hat{v}_i^{(1)}(A \cap N_j) \leq \hat{v}_i^{(1)}(N_j) = 0$ (ebenso wie $v_i^{(1)}(A \cap N_j) \leq v_i^{(1)}(N_j) = 0$), während nach Aussage des Lemmas 1.2.8 für eine durch die Singularität von $\hat{v}_i^{(2)}$ bzgl. μ_j bestimmte μ_j -Nullmenge L_j gilt $\hat{v}_i^{(2)}(A \cap L_j) = \hat{v}_i^{(2)}(A)$ (ebenso wie $v_i^{(2)}(A \cap M_j) = v_i^{(2)}(A)$). Setzt man daher $Z_j = L_j \cup M_j$, so hat man einerseits $v_i^{(2)}(A \cap Z_j) = v_i^{(2)}(A \cap Z_j \cap M_j)$ und $\hat{v}_i^{(2)}(A \cap Z_j) = \hat{v}_i^{(2)}(A \cap Z_j \cap L_j)$, andererseits wegen $v_i^{(1)}(A \cap Z_j) = \hat{v}_i^{(1)}(A \cap Z_j) = 0$ sowie $Z_j \cap M_j = M_j$ und $Z_j \cap L_j = L_j$

$$\mu_i(A \cap Z_j) = v_i^{(2)}(A \cap M_j) = \hat{v}_i^{(2)}(A \cap L_j) = v_i^{(2)}(A) = \hat{v}_i^{(2)}(A)$$

für beliebiges $A \in \mathcal{A}_\sigma$, also $v_i^{(2)} = \hat{v}_i^{(2)}$. Die Annahme $\mu_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} = \hat{v}_i^{(1)} + \hat{v}_i^{(2)}$ impliziert entsprechend $v_i^{(1)} = \hat{v}_i^{(1)}$, so daß die Eindeutigkeit der Zerlegung bewiesen ist. $\square$

1.3 Konstruktion von Maßen

Die Herleitung des Lebesgue'schen Integralbegriffes für reelle Funktionen über dem $\mathbb{R}^d$ stützt sich bei gegebener Teilmenge A auf die Bestimmung eines Zahlenwertes $\mu_L^*(A)$ in der Form $\mu_L^*(A) = \inf \{ \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(Q_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \}$ mit Hilfe der für Quader¹² Q_k leicht zu berechnenden Volumina $\text{vol}(Q_k)$. Die Mengenfunktion μ_L^* wird als *äußeres Lebesgue-Maß*

¹² Intervalle im Falle von $d = 1$.

von A bezeichnet (s. u. Abschn. 1.4). Sie ist abzählbar subadditiv, isoton, für alle Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ definiert und liefert für die leere Menge offenbar $\mu(\emptyset) = 0$. Da nun jede Menge A als $A = (A \setminus M) \cup (A \cap M)$ (mit beliebiger sonstiger Menge M) darstellbar ist, erscheint es nahelegend, solche Mengen M auszuzeichnen, die die Gleichheit $\mu_L^*(A) = \mu_L^*(A \setminus M) + \mu_L^*(A \cap M)$ für jedes A garantieren. Dabei stellt sich für das oben definierte μ_L^* heraus, daß die Familie $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}^*(\mu_L^*)$ aller derart ausgezeichneten Mengen M eine σ -Algebra bildet, und daß die Einschränkung von μ_L^* auf $\mathcal{C}^*$ ein vollständiges Maß ist, nämlich das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^d$. Die Schritte, die zu diesen Resultaten führen, sind verallgemeinerungsfähig: Man hat sich lediglich von der Festlegung auf den $\mathbb{R}^d$ sowie von speziellen Begriffen wie Quaderüberdeckung und Quadervolumina zu lösen, um in ähnlicher Weise zur Konstruktion von Maßen – als Einschränkungen *äußerer Maße* auf geeignete σ -Algebren – zu gelangen. Wir definieren zunächst den Terminus des äußeren Maßes.

Definition 1.3.1 (Äußeres Maß) *Eine auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ einer Menge X erklärte erweitert-reellwertige Mengenfunktion μ^* heißt **äußeres Maß** über $\mathfrak{P}(X)$, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:*

- $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(M) \geq 0 \ \forall M \subset X$,
- $A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (Isotonie),
- $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(M_n)$ (abzählbare Subadditivität).

Jedes auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ definierte Maß ist offenbar auch ein äußeres Maß. Die Namensgebung erklärt sich historisch aus der Tatsache, daß bei gegebenem Maß über der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ der reellen Zahlenachse das äußere Maß einer beliebigen beschränkten Teilmenge M als das Infimum der Maße aller M umfassenden offenen Mengen definiert werden kann [124] (vergl. auch Lemma 1.3.8, Abschn. 1.3). Wir werden im nächsten Satz zeigen, daß es zur Konstruktion eines äußeren Maßes lediglich einer Mengenfamilie $\mathcal{Q} \subset \mathfrak{P}(X)$ mit $\emptyset \in \mathcal{Q}$ und einer erweitert-reellwertigen und nicht negativen Mengenfunktion φ bedarf, die über $\mathcal{Q}$ definiert ist und $\varphi(\emptyset) = 0$ erfüllt. Das Paar $(\mathcal{Q}, \varphi)$ aus einer Familie $\mathcal{Q}$ mit $\emptyset \in \mathcal{Q}$ und solcherart definierter Mengenfunktion φ nennen wir ein **Basispaar**. Eine Teilmenge $A \subset X$, für die es eine abzählbare Überdeckung mit Mengen aus $\mathcal{Q}$ gibt, werde als **abzählbar $\mathcal{Q}$ -überdeckbar** bezeichnet.

Satz 1.3.1 *Es sei $(\mathcal{Q}, \varphi)$ ein Basispaar. $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$ bezeichne die Familie aller abzählbaren $\mathcal{Q}$ -überdeckbaren Teilmengen aus X , d. h. $A \in \mathcal{X}_{\mathcal{Q}} \iff A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$ für Elemente $Q_n \in \mathcal{Q}$. Die vermöge $\mu_{\varphi}^*(A) = \infty$ für $A \notin \mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$ und*

$$\mu_{\varphi}^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(Q_n) : A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n, Q_n \in \mathcal{Q} \ \forall n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{für } A \in \mathcal{X}_{\mathcal{Q}} \quad (1.3)$$

definierte Mengenfunktion ist ein äußeres Maß.

Beweis Offenbar ist μ_φ^* eine erweitert-reellwertige nicht negative Mengenfunktion über der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$, die $\mu_\varphi^*(\emptyset) = 0$ erfüllt. Die Isotonie-Eigenschaft folgt aus der Tatsache, daß im Falle $A \subset B$ jede Überdeckung von B auch eine Überdeckung von A bildet. Zu zeigen bleibt daher lediglich die abzählbare Subadditivität. Sei $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie aus $\mathcal{X}_Q$. Ist $\mu_\varphi^*(A_k) = \infty$ für mindestens eine der Mengen A_k , so ist die Aussage trivial; daher nehmen wir $\mu_\varphi^*(A_k) < \infty \forall k \in \mathbb{N}$ an und können voraussetzen, daß es zu jedem A_k eine Quader-Überdeckung $\{Q_n(A_k)\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(Q_n(A_k)) < \infty$ gibt. Das bedeutet, daß man zu jedem A_k auch eine solche Überdeckung $\{Q_n^{(\varepsilon)}(A_k)\}_{n \in \mathbb{N}}$ von A_k finden kann, für die $\sum_{n \in \mathbb{N}} \text{vol}(Q_n^{(\varepsilon)}(A_k)) \leq \mu_\varphi^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$ ist. Die Vereinigung $\bigcup_{n,k} Q_n^{(\varepsilon)}(A_k)$ aller dieser Quader bildet eine abzählbare¹³ abgeschlossene Quaderüberdeckung der Menge $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Daher gilt

$$\mu_\varphi^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(Q_n^{(\varepsilon)}(A_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_\varphi^*(A_k) + \varepsilon,$$

mit $\varepsilon \rightarrow 0$ also die behauptete Ungleichung. $\square$

Das durch (1.3) bzw. $\mu_\varphi^*(A) = \infty$ für $A \notin \mathcal{X}_Q$ definierte äußere Maß wird zuweilen als **verallgemeinertes äußeres Lebesgue-Maß** bezeichnet (vergl. dazu Definition 1.4.1 in Abschn. 1.4.1).

Satz 1.3.2 (Carathéodory) *Die Familie $\mathcal{C}^*$ aller Teilmengen $M \subseteq X$, die für ein äußeres Maß μ^* die Gleichheit*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \setminus M) + \mu^*(A \cap M) \quad \forall A \subset X \quad (1.4)$$

*zulassen, formt eine σ -Algebra. Ihre Elemente werden als **Carathéodory-meßbare Mengen** oder **μ^* -meßbare Mengen** bezeichnet. Die Einschränkung des äußeren Maßes μ^* auf die σ -Algebra $\mathcal{C}^*$ ist ein vollständiges Maß über $\mathcal{C}^*$.*

Beweis 1. Die μ^* -Meßbarkeit von X und $\emptyset$ ist direkte Folge von $\mu^*(\emptyset) = 0$ und $A \cap X = A$, $A \setminus X = \emptyset$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$. Die Isotonie ist offenkundig. Zu beweisen bleibt daher die μ^* -Meßbarkeit jeder abzählbaren Vereinigung μ^* -meßbarer Mengen M_k , $k \in \mathbb{N}$. Hierzu betrachten wir zunächst eine Familie $\{D_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ wechselseitig disjunkter μ^* -meßbarer Mengen und zeigen induktiv das Bestehen der Gleichung

$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^n D_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap D_k) \quad (1.5)$$

¹³ Ist $\mathcal{F} = \{\mathcal{M}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie abzählbarer Mengen $\mathcal{M}_k = \{M_i^{(k)}\}_{i \in \mathbb{N}}$, so ist deren Vereinigung $\bigcup_{i,k} M_i^{(k)}$ abzählbar.

für beliebiges $A \in X$. Für $n = 1$ ist dies trivial. Angenommen, die Gleichung sei richtig für $n = m$; dann folgt aufgrund der μ^* -Meßbarkeit der endlichen Vereinigung $\bigcup_{k=1}^m D_k$ und der angenommenen wechselseitigen Disjunktheit der D_k

$$\begin{aligned} \mu^* \left(A \cap \bigcup_{k=1}^{m+1} D_k \right) &= \mu^* \left(A \cap \bigcup_{k=1}^{m+1} D_k \cap \bigcup_{k=1}^m D_k \right) + \mu^* \left(A \cap \bigcup_{k=1}^{m+1} D_k \setminus \bigcup_{k=1}^m D_k \right) \\ &= \mu^* \left(A \cap \bigcup_{k=1}^m D_k \right) + \mu^* (A \cap D_{m+1}) \\ &= \sum_{k=1}^m \mu^* (A \cap D_k) + \mu^* (A \cap D_{m+1}) = \sum_{k=1}^{m+1} \mu^* (A \cap D_k), \end{aligned}$$

d. h. (1.5) ist auch für $n = m + 1$ – und daher für alle n – richtig. Gleichung (1.5) impliziert

$$\sum_{k=1}^n \mu^* (A \cap D_k) = \mu^* \left(\bigcup_{k=1}^n (A \cap D_k) \right) \leq \mu^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap D_k) \right) = \mu^* \left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \right),$$

mit $n \rightarrow \infty$ also $\mu^* (A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^* (A \cap D_k) \stackrel{!}{\leq} \mu^* (A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k)$, d. h. man hat für wechselseitig disjunkte μ^* -meßbare Mengen D_k sogar

$$\mu^* \left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^* (A \cap D_k). \quad (1.6)$$

Für endliche Vereinigungen gilt $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap \bigcup_{k=1}^n D_k) + \mu^*(A \setminus \bigcup_{k=1}^n D_k)$. Unter Beachtung von $A \setminus \bigcup_{k=1}^n D_k \supset A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ folgt daher $\mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap D_k) + \mu^*(A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k)$, und der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ liefert zusammen mit (1.6) die Aussage, daß die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ disjunkter μ^* -meßbarer Mengen μ^* -meßbar ist. Für eine beliebige Familie $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ von μ^* -meßbaren Mengen definiere man nun $D_1 = M_1$ und $D_{k+1} = M_{k+1} \setminus (\bigcup_{i=1}^k M_i)$ für $k \geq 1$. Dann sind die D_k offensichtlich disjunkt, und es ist $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. Die abzählbare Vereinigung μ^* -meßbarer Mengen ist daher μ_L^* -meßbar.

2. Vollständigkeit: Für jede Teilmenge U einer Nullmenge $N \in \mathcal{C}^*$ liefert die Isotonie des äußeren Maßes die Relationen $\mu^*(U) = 0$, $\mu^*(A \cap U) = 0$ und $\mu^*(A \setminus U) \leq \mu^*(A) \forall A \in \mathfrak{P}(X)$. Die Subadditivität impliziert $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \setminus U) + \mu^*(A \cap U)$, so daß $\mu^*(A \setminus U) \leq \mu^*(A) \leq \mu^*(A \setminus U)$ bzw. $\mu^*(A) = \mu^*(A \setminus U)$ gilt; das bedeutet $U \in \mathcal{C}^*$ wegen $\mu^*(A \cap U) = 0$. $\square$

Die beiden Sätze 1.3.1 und 1.3.2 benennen die notwendigen Hilfsmittel zur Konstruktion von (möglicherweise trivialen) σ -Algebren und vollständigen Maßen, letztere als Einschränkung auf die σ -Algebra $\mathcal{C}^*$ der Carathéodory-meßbaren Mengen. Es bleibt die umgekehrte Frage offen, ob und wie man eine geeignete Mengenfunktion zu einem Maß fortsetzen kann. Hierzu erklären wir zunächst, was man unter der *Erweiterung* eines Basispaares zu verstehen hat.

Definition 1.3.2 (Fortsetzung) *Es seien $(\mathcal{Q}, \varphi)$ und $(\mathcal{S}, \psi)$ Basispaare. Ist $\mathcal{Q} \subset \mathcal{S}$ und gilt $\varphi(Q) = \psi(Q)$ für alle $Q \in \mathcal{Q}$, so heißt $(\mathcal{S}, \psi)$ **Erweiterung von $(\mathcal{Q}, \varphi)$** , und die Mengenfunktion ψ heißt **Fortsetzung** der Mengenfunktion φ .*

Ist μ_φ^* das verallgemeinerte äußere Lebesgue-Maß bzgl. des Basispaares $(\mathcal{Q}, \varphi)$, so sind $(\mathfrak{P}(X), \mu_\varphi^*)$ und $(\mathcal{C}^*, \mu_\varphi^*|_{\mathcal{C}^*})$ Basispaare ($\mathcal{C}^*$ die σ -Algebra der μ_φ^* -meßbaren Mengen). Für den Fall eines zerlegbaren Systems $\mathcal{Q}$ (Definition 1.1.2, Abschn. 1.1) läßt sich $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}^*$ zeigen, so daß folgende Frage sinnvoll wird: Wann ist $(\mathcal{C}^*, \mu_\varphi^*|_{\mathcal{C}^*})$ eine Erweiterung von $(\mathcal{Q}, \varphi)$? Wann also läßt sich die Mengenfunktion φ zu einem vollständigen Maß $\mu_\varphi^*|_{\mathcal{C}^*}$ über der (das zerlegbare System $\mathcal{Q}$ umfassenden) σ -Algebra $\mathcal{C}^*$ fortsetzen? Der folgende Satz gibt im Falle elementarer Maße ein notwendiges und hinreichendes Kriterium hierfür an¹⁴.

Satz 1.3.3 (Maßerweiterungssatz) *Es sei φ ein elementares Maß über $\mathcal{Q}$. μ_φ^* sei das äußere Lebesgue-Maß bzgl. des Basispaares $(\mathcal{Q}, \varphi)$, $\mathcal{C}^*$ bezeichne die Familie aller bzgl. μ_φ^* Carathéodory-meßbaren Mengen. Das Basispaar $(\mathcal{C}^*, \mu_\varphi^*|_{\mathcal{C}^*})$ ist d. u. n. d. eine Erweiterung von $(\mathcal{Q}, \varphi)$, wenn für die Mengenfunktion φ und jede in $\mathcal{Q}$ abzählbar überdeckbare Menge $Q \in \mathcal{Q}$ gilt*

$$\varphi(Q) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(Q_n) \quad \text{für} \quad Q \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n, \quad Q_n \in \mathcal{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.7)$$

Beweis 1. Es sei $(\mathcal{C}^*, \mu_\varphi^*|_{\mathcal{C}^*})$ Erweiterung von $(\mathcal{Q}, \varphi)$; dann ist $\mu_\varphi^*|_{\mathcal{Q}} = \varphi$. Als äußeres Maß ist μ_φ^* abzählbar subadditiv, also trifft das auch auf φ zu; daher ist (1.7) richtig.

2. Zu zeigen ist, daß aus (1.7) die Relationen $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}^*$ und $\varphi(Q) = \mu_\varphi^*(Q) \quad \forall Q \in \mathcal{Q}$ folgen. Zunächst hat man $\mu_\varphi^*(Q) \leq \varphi(Q) \quad \forall Q \in \mathcal{Q}$ gemäß Definition des äußeren Maßes; nach (1.7) gilt $\varphi(Q) \leq \inf \{ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(Q_n) : \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \supseteq Q, \quad Q_n \in \mathcal{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N} \}$, also $\varphi(Q) \leq \mu_\varphi^*(Q)$, so daß sich sofort $\varphi(Q) = \mu_\varphi^*(Q) \quad \forall Q \in \mathcal{Q}$ ergibt.

Es bleibt $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}^*$, also die Carathéodory-Meßbarkeit aller Elementmengen $Q \in \mathcal{Q}$ nachzuweisen:

$$\mu_\varphi^*(A) = \mu_\varphi^*(A \setminus Q) + \mu_\varphi^*(A \cap Q) \quad \forall A \subset X.$$

Diese Beziehung gilt für alle M aus $\mathcal{Q}$, wie folgendermaßen einzusehen ist: $M \in \mathcal{Q}$ bedeutet $M \setminus Q = \bigcup_{\ell=1}^m Q_\ell$ mit wechselseitig disjunkten Elementen aus $\mathcal{Q}$. Die endliche Additivität von φ führt daher zu $\varphi(\bigcup_{\ell=1}^m Q_\ell) = \sum_{\ell=1}^m \varphi(Q_\ell)$. $M \cap Q$ ist Element von $\mathcal{Q}$, und somit ist $\varphi(M) = \varphi((M \cap Q) \cup [\bigcup_{\ell=1}^m Q_\ell]) = \varphi(M \cap Q) + \sum_{\ell=1}^m \varphi(Q_\ell) \stackrel{!}{=} \mu_\varphi^*(M)$. Aufgrund der Subadditivität des äußeren Maßes μ_φ^* ist aber $\sum_{\ell=1}^m \varphi(Q_\ell) = \sum_{\ell=1}^m \mu_\varphi^*(Q_\ell) \geq \mu_\varphi^*(\bigcup_{\ell=1}^m Q_\ell) = \mu_\varphi^*(M \setminus Q)$, und das heißt $\mu_\varphi^*(M \cap Q) + \mu_\varphi^*(M \setminus Q) \geq \mu_\varphi^*(M)$, während doch die Subadditivität von μ_φ^* die umgekehrte Relation garantiert. Somit ist die zu beweisende Gleichung sicher für alle $M \in \mathcal{Q}$ richtig.

¹⁴ Zur Erinnerung: Ein elementares Maß ist eine nicht negative, endlich additive, über einem zerlegbaren System $\mathcal{Q}$ definierte erweitert-reellwertige Mengenfunktion φ mit $\varphi(\emptyset) = 0$; vergl. Definition 1.1.2, Abschn. 1.1, sowie Abschn. 1.2.

Sei nun M abzählbar $\mathcal{Q}$ -überdeckbar (also $M \in \mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$). Gemäß Definition des äußeren Lebesgue-Maßes gibt es dann zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $\mathcal{Q}$ -Überdeckung $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n^{(\varepsilon)}$ von M , so daß die Beziehung $\mu_{\varphi}^*(M) > \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(Q_n^{(\varepsilon)}) - \varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\varphi}^*(Q_n^{(\varepsilon)}) - \varepsilon$ besteht. Wie gezeigt, gilt für die Elemente $Q_n^{(\varepsilon)}$ aus $\mathcal{Q}$ die Gleichung $\mu_{\varphi}^*(Q_n^{(\varepsilon)}) = \mu_{\varphi}^*(Q_n^{(\varepsilon)} \setminus Q) + \mu_{\varphi}^*(Q_n^{(\varepsilon)} \cap Q)$, daher folgt für $M \in \mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$

$$\mu_{\varphi}^*(M) + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\varphi}^*(Q_n^{(\varepsilon)} \setminus Q) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\varphi}^*(Q_n^{(\varepsilon)} \cap Q).$$

Demnach besteht wegen $M \setminus Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (Q_n^{(\varepsilon)} \setminus Q)$ und $M \cap Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (Q_n^{(\varepsilon)} \cap Q)$ für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $\mu_{\varphi}^*(M) + \varepsilon > \mu_{\varphi}^*(M \setminus Q) + \mu_{\varphi}^*(M \cap Q)$, d. h. es ist $\mu_{\varphi}^*(M) \geq \mu_{\varphi}^*(M \setminus Q) + \mu_{\varphi}^*(M \cap Q)$. Diese Ungleichung gilt jedoch trivialerweise auch für den Fall $M \notin \mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$, da dann $\mu_{\varphi}^*(M) = \infty$ ist. Da aus der Subadditivität von μ_{φ}^* wiederum die umgekehrte Relation folgt, hat man für jedes $Q \in \mathcal{Q}$ und beliebiges $M \in \mathfrak{P}(X)$ die Gleichung $\mu_{\varphi}^*(M) = \mu_{\varphi}^*(M \setminus Q) + \mu_{\varphi}^*(M \cap Q)$, d. h. $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}^*$. $\square$

Ist also (1.7) erfüllt, so kann jedes elementare Maß φ – und damit auch jeder Inhalt – zu einem vollständigen Maß $\mu_{\varphi}^*|_{\mathcal{C}^*}$ über $\mathcal{C}^*$ fortgesetzt werden, und umgekehrt. Das ist der Grund, weshalb man bzgl. des Satzes 1.3.3 von einem *Maßerweiterungssatz* spricht. Unter gewissen Umständen – falls es nämlich eine abzählbare $\mathcal{Q}$ -Überdeckung $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ des Raumes X mit $\varphi(Q_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ gibt¹⁵ – ist diese Erweiterung über der minimalen $\mathcal{Q}$ enthaltenden σ -Algebra $\sigma(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{C}^*$ eindeutig.

Satz 1.3.4 (Eindeutigkeitssatz) *Es sei $\mathcal{Q}$ ein zerlegbares Mengensystem, φ ein elementares Maß über $\mathcal{Q}$. Es gebe eine abzählbare $\mathcal{Q}$ -Überdeckung $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ des Raumes X mit $\varphi(Q_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$. Die Erweiterung des Basispaares $(\mathcal{Q}, \varphi)$ zu einem Paar $(\sigma(\mathcal{Q}), \mu_{\varphi})$ mit vollständigem Maße $\mu_{\varphi} = \mu_{\varphi}^*|_{\sigma(\mathcal{Q})}$ ist dann eindeutig.*

Beweis Zu einem Element $Q \in \mathcal{Q}$ mit $\varphi(Q) < \infty$ sei $\mathcal{A}_Q$ die Familie aller Mengen M , die sich als Durchschnitt von Q mit einer endlichen disjunkten Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{Q}$ darstellen lassen:

$$\mathcal{A}_Q = \left\{ M : M = Q \cap \bigcup_{k=1}^m Q_k, Q_k \in \mathcal{Q}, Q_i \cap Q_j = \emptyset \text{ für } i \neq j \right\}.$$

Man erkennt leicht, daß $\mathcal{A}_Q$ eine Algebra ist. Es seien nun $\mu_{\varphi}^{(1)}, \mu_{\varphi}^{(2)}$ zwei über $\sigma(\mathcal{Q})$ durch Fortsetzung von φ bestimmte vollständige Maße. Als solche erfüllen sie die Relation $\mu_{\varphi}^{(j)}(M) = \sum_{k=1}^m \varphi(Q_k \cap Q)$ für $M \in \mathcal{A}_Q, j = 1, 2$, d. h. über $\mathcal{A}_Q$ stimmen die beiden Maße überein. Zu zeigen bleibt, daß das für alle Elemente aus $\sigma(\mathcal{Q})$ gilt. Sei $\mathcal{G} = \{A \subset X : \mu_{\varphi}^{(1)}(A) = \mu_{\varphi}^{(2)}(A)\}$, so daß also $\mathcal{A}_Q \subset \mathcal{G}$ für jedes feste $Q \in \mathcal{Q}$ ist. Da offenbar der Limes

¹⁵ In diesem Falle nennt man das elementare Maß σ -endlich.

jeder monotonen Folge aus $\mathcal{G}$ wieder zu $\mathcal{G}$ gehört, $\mathcal{G}$ somit eine monotone Familie formt, liefert das Korollar 1.1.7 die Aussage, daß auch jede der von den $\mathcal{A}_Q$ erzeugten σ -Algebren $\sigma(\mathcal{A}_Q)$ in $\mathcal{G}$ enthalten ist: $\sigma(\mathcal{A}_Q) \subset \mathcal{G} \forall Q \in \mathcal{Q}$. Sei nun $A \in \sigma(\mathcal{Q})$. Laut Vor. gibt es eine abzählbare Menge von Elementen U_n aus $\mathcal{Q}$ mit $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ und $\varphi(U_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$, wobei man aufgrund der Zerlegbarkeit des Systems $\mathcal{Q}$ annehmen kann, daß die U_n wechselseitig disjunkt sind. Damit ist $A \cap U_n \in \mathcal{A}_Q$ und folglich $\mu_{\varphi}^{(1)}(A \cap U_n) = \mu_{\varphi}^{(2)}(A \cap U_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N} \implies \mu_{\varphi}^{(1)}(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) = \mu_{\varphi}^{(1)}(A) = \mu_{\varphi}^{(2)}(A)$, also $A \in \mathcal{G}$ und $\sigma(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{G}$. $\square$

Betrachtet man insbesondere den Fall, daß φ ein Prämaß (also eine nicht negative und σ -additive Mengenfunktion über einer Algebra $\mathcal{A}$ mit $\varphi(\emptyset) = 0$) ist, so kann man aus Satz 1.3.4 Folgendes schließen.

Korollar 1.3.5 *φ sei Prämaß über $\mathcal{A}$. Die Familie $\mathcal{C}^*$ der Carathéodory-meßbaren Mengen bzgl. des äußeren Maßes μ_{φ}^* umfaßt $\mathcal{A}$, und es gibt mindestens ein Maß μ über $\sigma(\mathcal{A})$ mit $\mu(A) = \varphi(A)$ für $A \in \mathcal{A}$ (nämlich $\mu = \mu_{\varphi}^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$). Ist φ darüberhinaus σ -endlich, so ist μ eindeutig bestimmt und ebenfalls σ -endlich.*

Im Falle des allgemeinen äußeren Lebesgue-Maßes μ_{φ}^* bzgl. eines Basispaares $(\mathcal{Q}, \varphi)$ bezeichnet man dessen Einschränkung auf die σ -Algebra der Carathéodory-meßbaren Mengen als **allgemeines Lebesgue-Maß bzgl. φ** . Das Lebesgue-Maß λ der Integrationstheorie – und ebenso das Lebesgue-Stieltjes'sche Maß – sind spezielle Maße dieses Typs.

Es sei nun $(X; d)$ ein metrischer Raum mit der Metrik d . Eine Teilmenge O ist darin d. u. n. d. offen, wenn mit jedem $x \in O$ noch eine ganze Kugelumgebung $U_{\varepsilon}(x) = \{z : d(x, z) < \varepsilon\}$ zu O gehört. Die Komplemente offener Mengen sind die abgeschlossenen Mengen. Mit Hilfe der Metrik d ist zudem ein Abstandsbegriff für Teilmengen $A, B \subset X$ vermöge

$$\rho(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y)$$

erklärt (vergl. Abschn. A.1, insbesondere Abschn. A.1.3). Der Begriff der metrischen Trennbarkeit ermöglicht die Auszeichnung von äußeren Maßen mit „Additivitätseigenschaft“.

Definition 1.3.3 (Metrisches äußeres Maß) *Ein über dem metrischen Raum $(X; d)$ definiertes äußeres Maß μ^* heißt **metrisches äußeres Maß**, falls für Teilmengen A, B mit $d(A, B) > 0$ stets gilt $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.*

Lemma 1.3.6 *Es sei μ^* ein metrisches äußeres Maß über $(X; d)$, $A \subseteq X$ mit $\mu^*(A) < \infty$ und $A \subseteq M^{\circ}$ für eine offene Menge M° in $(X; d)$. Bezeichnet A_k zu jedem $k \in \mathbb{N}$ die Menge aller Punkte $x \in A$ mit $\rho(\{x\}, X \setminus M^{\circ}) \geq 1/k$, so gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu^*(A_k) = \mu^*(A).$$

Beweis Die Isotonie von μ^* besagt zusammen mit $A_k \subset A_{k+1}$, daß die Folge $\{\mu^*(A_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ monoton nicht abnehmend ist und $\mu^*(A_k) \leq \mu^*(A) \forall k \in \mathbb{N}$ gilt. Das impliziert $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$. Da es wegen $A \subset M^\circ$ zu jedem $x \in A$ eine ε_x -Umgebung $U_{\varepsilon_x}(x)$ mit $U_{\varepsilon_x}(x) \subset M^\circ$ gibt, also $\rho(\{x\}, X \setminus M^\circ) \geq \frac{1}{k_{\varepsilon_x}}$ für $k_{\varepsilon_x} \leq \frac{1}{\varepsilon_x}$ gilt, hat man auch $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, d. h. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Sei $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ für $k \geq 2$ und $B_1 = A_1$, so daß A in der Form $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ schreibbar ist. Da offensichtlich $\bigcup_{k=1}^n B_k = A_n$ für jedes $n \geq 1$ gilt, folgt

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A_n) + \mu^*\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k\right) \leq \mu^*(A_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(B_k) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Laut Voraussetzung ist $\rho(\{x\}, X \setminus M^\circ) \geq \frac{1}{n}$ für $x \in B_n$, also $\rho(B_n, B_{n+1}) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$, daher folgt $\mu^*(B_n \cup B_{n+1}) = \mu^*(B_n) + \mu^*(B_{n+1})$, da μ^* metrisches äußeres Maß ist. Betrachtet man also endlich viele, etwa n , der B_n , so folgt einerseits nach Konstruktion $A_n = \bigcup_{k=1}^n B_k \subset A$, andererseits

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(B_k) \leq \mu^*(A) < \infty \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_k)$ ist also konvergent, etwa gegen S , und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0(\varepsilon)$, so daß $|\sum_{k=1}^n \mu^*(B_k) - S| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(B_k)| < \varepsilon$ ist für alle $n > n_0(\varepsilon)$. Demnach ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(B_k) = 0$, und man erhält $\mu^*(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n)$. Andererseits liefert $A_n \subset A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die umgekehrte Ungleichung $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*(A)$, so daß Gleichheit besteht. $\square$

Lemma 1.3.7 Jede abgeschlossene Menge – und daher auch jede Borel-Menge – eines metrischen Raumes $[X; d]$ ist unter einem metrischen äußeren Maß μ^* Carathéodory-meßbar.

Beweis Sei $\bar{B}$ abgeschlossen in $(X; d)$. Zu zeigen ist $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap \bar{B}) + \mu^*(A \setminus \bar{B})$ für jedes A mit $\mu^*(A) < \infty$ (für $\mu^*(A) = \infty$ ist die Aussage trivial). Es sei $\tilde{A} := A \setminus \bar{B} \subset \bar{B}^c$, worin $\bar{B}^c = \mathbb{R}^d \setminus \bar{B} =: M^\circ$ offen im $(X; d)$ ist. Lemma 1.3.6 besagt, daß es eine Mengenfolge $\{\tilde{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gibt mit $\rho(\tilde{A}_n, \bar{B}) \geq \frac{1}{n}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(\tilde{A}_n) = \mu^*(A \setminus \bar{B})$. $\rho(\tilde{A}_n, \bar{B}) \geq \frac{1}{n}$ impliziert $\rho(\tilde{A}_n, A \cap \bar{B}) \geq \frac{1}{n}$, und damit wegen $\tilde{A}_n \subset A \setminus \bar{B}$ und $A = (A \setminus \bar{B}) \cup (A \cap \bar{B})$ die Beziehung $\mu^*(A) \geq \mu^*(\tilde{A}_n \cup [A \cap \bar{B}]) = \mu^*(\tilde{A}_n) + \mu^*(A \cap \bar{B})$. Der Übergang $n \rightarrow \infty$ liefert daher $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \setminus \bar{B}) + \mu^*(A \cap \bar{B})$, also die μ^* -Meßbarkeit von $\bar{B}$. Da die μ^* -meßbaren Mengen eine σ -Algebra bilden, sind auch die Komplemente, also alle offenen Mengen, μ^* -meßbar. $\square$

Lemma 1.3.8 Es sei μ ein Maß über der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$ eines metrischen Raumes $(X; d)$. Die Mengenfunktion $\mu^* : \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch das Infimum

$$\mu^*(M) = \inf \{ \mu(O) : O \supset M, O \text{ offen} \} \quad \forall M \in \mathfrak{P}(X),$$

ist ein äußeres Maß.

Beweis μ^* besitzt offensichtlich die Eigenschaften 2 und 3 in Definition 1.3.1, d. h. es ist lediglich die abzählbare Subadditivität nachzuweisen. Es sei also $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Mengensequenz in X , wobei wir o. E. d. A. voraussetzen können, daß für alle E_n $\mu^*(E_n) < \infty$ ist (anderenfalls bestände die zu beweisende Ungleichung a priori). Aufgrund der Voraussetzung, daß X ein metrischer Raum ist, gibt es gemäß Definition von μ^* zu beliebigem $\varepsilon > 0$ für jedes E_n eine offene Menge $O_n \supset E_n$ mit der Eigenschaft $\mu^*(E_n) \leq \mu(O_n) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Damit folgt unter Nutzung der Maßeigenschaft von μ

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(O_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

also die Subadditivität von μ^* . □

Ein Resultat, das später eine Rolle spielen wird (vergl. Abschn. 1.4) betrifft die Frage, wann die Einschränkung eines äußeren Maßes auf die Borel- σ -Algebra eines topologischen T_2 -Raumes ein Maß definiert.

Satz 1.3.9 *Es sei μ^* ein äußeres Maß über der Potenzmenge eines Hausdorff-Raumes $[X, \mathcal{O}]$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\mu^*(M) = \inf \{ \mu^*(O) : O \supset M, O \text{ offen} \} \quad \forall M \in \mathfrak{P}(X)$,
2. $\mu^*(O) = \sup \{ \mu^*(K) : K \subset O, K \text{ kompakt} \}$ für alle offenen Mengen $O \in \mathcal{O}$,
3. $\mu^*(K_1 \cup K_2) = \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2)$ für disjunkte kompakte Mengen K_1, K_2 .

Die Restriktion von μ^ auf die Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$ ist dann ein Maß.*

Beweis 1. Es sei $\mathcal{C}^*$ die σ -Algebra aller μ^* -meßbaren Mengen aus $\mathfrak{P}(X)$. Wir setzen

$$\mathcal{A}_O^* = \{ M : \mu^*(O) \geq \mu^*(O \cap M) + \mu^*(O \setminus M), O \text{ offen} \}$$

und zeigen zunächst, daß $\mathcal{A}_O^* = \mathcal{C}^*$ ist. Offenbar ist $\mathcal{A}_O^* \supseteq \mathcal{C}^*$. Es sei $M_0 \in \mathcal{A}_O^*$, d. h. wir haben $\mu^*(O) \geq \mu^*(O \cap M_0) + \mu^*(O \setminus M_0)$ für alle offenen Mengen $O \in \mathcal{O}$. Für eine beliebige Teilmenge $E \subset X$ betrachte man nun alle E umfassenden offenen Mengen $O_E \supset E$; dann gilt

$$\mu^*(O_E) \geq \mu^*(O_E \cap M_0) + \mu^*(O_E \setminus M_0) \geq \mu^*(E \cap M_0) + \mu^*(E \setminus M_0) \quad \forall O_E \supset E.$$

Eigenschaft 1 besagt, daß die zweite Ungleichung auch für das Infimum aller $\mu^*(O_E)$ gilt, d. h. es ist $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap M_0) + \mu^*(E \setminus M_0)$, also $M_0 \in \mathcal{A}_O^*$.

2. Da jede einpunktige Menge kompakt ist, gibt es zu jeder Teilmenge M von X mindestens eine in M enthaltene kompakte Menge. Zu zwei beliebigen offenen Mengen O, M° können daher stets kompakte Mengen K_1, K_2 gefunden werden, die die Relationen $K_1 \subset O \cap M^\circ, K_2 \subset O \setminus K_1$ erfüllen. Wir betrachten alle solche Mengen K_1, K_2 . Gemäß Eigenschaft 3 und $O \supseteq K_1 \cup K_2$ hat man

$$\mu^*(O) \geq \mu^*(K_1 \cup K_2) = \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2).$$

Jede kompakte Menge in einem Hausdorff-Raum ist abgeschlossen, daher ist $X \setminus K_1$ offen, und somit auch $O \cap (X \setminus K_1) = O \setminus K_1$ offen. Eigenschaft 2 besagt, daß $\mu^*(O \setminus K_1)$ das Supremum über alle $\mu^*(K_2)$ für derartige kompakte Mengen $K_2 \subset O \setminus K_1$ ist, und für dieses Supremum gilt obige Ungleichung ebenfalls; daher folgt

$$\mu^*(O) \geq \mu^*(K_1 \cup K_2) = \mu^*(K_1) + \mu^*(O \setminus K_1).$$

$\mu^*(O \setminus K_1)$ umfaßt $\mu^*(O \setminus M^\circ)$ nach Konstruktion, also hat man $\mu^*(O) \geq \mu^*(K_1) + \mu^*(O \setminus M^\circ)$. Nun ist Eigenschaft 2 nochmals heranzuziehen, um $\mu^*(O \cap M^\circ)$ als das Supremum über alle äußeren Maße $\mu^*(K_1)$ so gearterter kompakter Mengen K_1 zu erkennen, so daß die Ungleichung auch für $\mu^*(O \cap M^\circ)$ anstelle von $\mu^*(K_1)$ gelten muß:

$$\mu^*(O) \geq \mu^*(O \cap M^\circ) + \mu^*(O \setminus M^\circ).$$

Damit ist bewiesen, daß jede offene Menge in $\mathcal{A}_O^*$ liegt, nach dem unter 1 Bewiesenen also in $\mathcal{C}^*$, d. h. alle offenen Mengen sind μ^* -meßbar. Die von den offenen Mengen erzeugte Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$ ist somit in $\mathcal{C}^*$ enthalten, und da μ^* über $\mathcal{C}^*$ ein Maß ist, gilt dies auch für $\mathcal{B}(X)$. $\square$

1.4 Spezielle Maße

Die bekanntesten speziellen Maße sind die in der Analysis gebräuchlichen Integrationsmaße, d. h. das Lebesgue-Maß und das Lebesgue-Stieltjes'sche Maß. Deren Kennzeichnung – wie auch der später genannte „spezielle Maßerweiterungssatz“ – verweisen auf die Bedeutung der Sätze 1.3.3 und 1.3.4. Wir werden in diesem Abschnitt außerdem auf die für die stochastische Modellierung wichtigen Radon-Maße, insbesondere die Radon'schen Zählmaße, eingehen.

1.4.1 Lebesgue-Maß und Lebesgue-Stieltjes'scher Inhalt

Definition 1.4.1 (Lebesgue-Maß) $\mathcal{Q}$ bezeichne die Familie aller Quader (verallgemeinerten Rechtecken) des d -dimensionalen reellen Raumes $\mathbb{R}^d$ einschließlich der leeren Menge von

der Form $Q_{a,b} = \{x : a < x \leq b\}$, so daß auch die Mengen Q_n in dem Ausdruck (1.3) (s. Abschn. 1.3) Quader der Form

$$Q_{a^{(n)}, b^{(n)}} = \{x : a^{(n)} < x \leq b^{(n)}\}$$

sind mit $x = (x_1, \dots, x_d)$, $a^{(n)} = (a_1^{(n)}, \dots, a_d^{(n)})$, $b^{(n)} = (b_1^{(n)}, \dots, b_d^{(n)})$ ¹⁶. $\mathcal{Q}$ formt ein zerlegbares System. Wird die Mengenfunktion φ durch

$$\varphi(Q_{a^{(n)}, b^{(n)}}) = \text{vol}(Q_{a^{(n)}, b^{(n)}}) = \prod_{v=1}^d (b_v^{(n)} - a_v^{(n)})$$

dargestellt¹⁷ ($d \geq 1$), und ist damit das äußere Maß μ_φ^* wie in (1.3) in der Form

$$\mu_\varphi^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(Q_n) : A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n, Q_n \in \mathcal{Q} \forall n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{für } A \in \mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$$

gegeben, so bezeichnet man das zum Basispaar $(\mathcal{Q}, \varphi)$ gemäß Satz 1.3.1 bestimmte vollständige Maß $\lambda = \mu_\varphi^*|_{\mathcal{C}^*}$ als **Lebesgue-Maß über dem $\mathbb{R}^d$** . λ ist durch seine Werte $\lambda(Q) = \mu_\varphi^*(Q)$ auf $\mathcal{Q}$ eindeutig bestimmt, da $(\mathcal{Q}, \varphi)$ die Voraussetzungen der Sätze 1.3.3 und 1.3.4 erfüllt. μ_φ^* heißt **Lebesgue'sches äußeres Maß**.

$\varphi = \text{vol}$ ist diejenige Mengenfunktion über der Borel- σ -Algebra des reellen $\mathbb{R}^d$, die den aus dem kartesischen Produkt von Intervallen (Borel-Mengen) gebildeten Quadern deren Volumen zuordnet. φ ist über kompakten Mengen des $\mathbb{R}^d$ endlich. Das Lebesgue-Maß λ der Integrationstheorie geht aus der Vervollständigung des mittels des äußeren Maßes μ_φ^* gebildeten Maßes λ hervor und repräsentiert ein vollständiges σ -endliches Maß über dem $\mathbb{R}^d$, das insbesondere jedem Quader seinen Inhaltswert zuordnet: $\lambda(Q_{a,b}) = \prod_{v=1}^d (b_v - a_v)$. Es ist ein **Borel-Maß**¹⁸. Sind Q_1, Q_2 mit $Q_1 \subset Q_2$ Borelmengen gleichen Inhalts, so wird das Lebesgue-Maß einer jeden Menge M mit $Q_1 \subset M \subset Q_2$ gerade durch $\lambda(M) = \varphi(Q_i)$ dargestellt ($i \in \{1, 2\}$).

Im eindimensionalen reellen Raum formt – wie bereits erwähnt (siehe Beispiel 5 in Abschn. 1.1) – die Mengenfamilie

$$\mathcal{A}_{\mathcal{Q}} = \left\{ \bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j] : m \in \mathbb{N}, a_j, b_j \in \mathbb{R}, a_j < b_j \right\} \cup \{\emptyset\}$$

¹⁶ Größenrelationen für Vektoren sind komponentenweise zu verstehen.

¹⁷ Tatsächlich ist es hierfür belanglos, ob es sich um offene, halboffene oder abgeschlossene Intervalle handelt.

¹⁸ Vergl. Definition 1.4.6 in Abschn. 1.4.4. Man beachte, daß es sich nicht um den kompaktifizierten reellen Raum handelt. Jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ ist Teilmenge eines abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < +\infty$.

eine Algebra. Definiert man mit Hilfe einer monoton nicht abnehmenden Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|F(r)| < \infty$ für $|r| \neq \infty$ die Mengenfunktion $\varphi_F : \mathcal{A}_Q \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} \varphi_F(\emptyset) &= 0, \\ \varphi_F((a, b]) &= F(b) - F(a) \quad \text{für } a < b, \\ \varphi_F\left(\bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j]\right) &= \sum_{j=1}^m \varphi_F((a_j, b_j]) \quad \text{für } b_j \leq a_{j+1} \quad \forall j \leq m, \end{aligned} \quad (1.8)$$

so ist φ_F ein elementares Maß (speziell ein Inhalt) über $\mathcal{A}_Q$, das man als **Lebesgue-Stieltjes'schen Inhalt bzgl. F** bezeichnet. Da man $\mathbb{R}$ durch abzählbar viele Intervalle der Form $(a_j, b_j]$ mit $a_j < b_j$ und $\varphi_F((a_j, b_j]) < \infty$ überdecken kann, handelt es sich um einen σ -endlichen Inhalt. Das zugehörige äußere Lebesgue-Maß μ^* über $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ ist gemäß (1.3) in Abschn. 1.3 definiert. Es läßt sich zeigen, daß φ_F genau dann σ -additiv (somit ein Prämaß) ist, wenn die Funktion F rechtsstetig ist mit $\lim_{r \rightarrow -\infty} F(r) = F(-\infty)$ und $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = F(+\infty)$. In diesem Falle existiert nach Satz 1.3.4 genau eine Fortsetzung von φ_F zu einem vollständigen Maß – dem **Lebesgue-Stieltjes'schen Maß λ_F** . Dazu die

Definition 1.4.2 (Lebesgue-Stieltjes'sches Maß) *Es sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton nicht abnehmende und von rechts stetige reellwertige Funktion mit $|F(r)| < \infty$ für $|r| \neq \infty$. $\mathcal{Q}$ bezeichne die Familie aller halboffenen Intervalle der Form $(a, b]$ für $a < b$ unter Einschluß der leeren Menge. Wird die Mengenfunktion φ_F durch $\varphi_F(\emptyset) = 0$ und*

$$\varphi_F(Q_{a,b}) = F(b) - F(a) \quad \text{für } Q_{a,b} = (a, b]$$

*definiert, und ist damit das **Lebesgue-Stieltjes'sche äußere Maß μ_φ^*** gemäß Gleichung (1.3) bestimmt, so heißt das über der σ -Algebra $\mathcal{C}^*$ aller Carathéodory-meßbaren Mengen zum Basispaar $(\mathcal{Q}, \varphi_F)$ definierte vollständige Maß $\lambda_F = \mu_{\varphi_F}^*|_{\mathcal{C}^*}$ das **Lebesgue-Stieltjes'sche Maß bzgl. F** .*

Während somit ein Lebesgue-Stieltjes'scher Inhalt φ_F und damit das Lebesgue-Stieltjes'sche Maß mit Hilfe einer monoton nicht abnehmenden Funktion F definiert sind, kann auch der umgekehrte Weg beschritten werden, der von einer erweitert-reellwertigen und endlich additiven Mengenfunktion θ ausgeht. Dieser Weg ist in der Integrationstheorie üblich, d. h. insbesondere im Falle des meßbaren Raumes $[\mathbb{R}^n, \mathcal{B}]$ (wir beschränken uns auf den eindimensionalen Fall). Da hierbei nicht ausgeschlossen ist, daß die Mengenfunktion θ auch negative Werte annimmt, spricht man von einem **Stieltjes'schen Quasi-Inhalt** [169]. Sei $Q = [a, b]$ ein ggf. nicht endliches abgeschlossenes Intervall der reellen Achse. Als **Subintervall** bezeichnen wir jedes halboffene Intervall $(x, y] \subset Q$ mit $x > a$ und jedes abgeschlossene Intervall $[a, y]$ mit $y \leq b$. Um beide Subintervalltypen mit gleicher Symbolik zu versehen, schreibt man dafür $\{x, y\}$.

Definition 1.4.3 Es sei $\mathcal{S}$ eine Menge von Subintervallen des Intervalls $Q = [a, b]$. Eine reellwertige und endlich additive Mengenfunktion $\theta : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\theta(\emptyset) = 0$ heißt **Stieltjes'scher Quasi-Inhalt**.

Die durch die Inhaltswerte (Volumina) $\text{vol}(\{x, y\}) = y - x$ definierte Mengenfunktion $\theta = \varphi$ ist natürlich auch ein solcher Stieltjes'scher Quasi-Inhalt, und generell ist jeder Inhalt (und, allgemeiner, jedes Prämaß oder Maß) auch ein Stieltjes'scher Quasi-Inhalt.

In praktischen Fällen und in der Integrationstheorie reicht es i. a. aus, die Stieltjes'schen Quasi-Inhalte über einer *dichten Menge von Subintervallen* zu definieren. Dazu die folgende

Definition 1.4.4 Es sei $\mathcal{D}$ eine in $Q = [a, b]$ dichte Menge, die beide Endpunkte a und b enthält. Die Gesamtheit $\mathcal{S}$ aller derjenigen Subintervalle $\{x, y\}$, deren Endpunkte zu $\mathcal{D}$ gehören, wird als in Q **dichte Menge von Subintervallen** bezeichnet.

Jedem Stieltjes'schen Quasi-Inhalt θ ist eine Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vermöge

$$F(x) = \begin{cases} \theta([a, x]) & \text{für } x \in \mathcal{D}, x \neq a, \\ 0 & \text{für } x = a \end{cases}$$

zuzuordnen, die man als die **zu θ gehörige erzeugende Funktion** bezeichnet [169]; sie erfüllt die Relation

$$\theta((x, y]) = F(y) - F(x).$$

F ist offenbar dann und nur dann monoton nicht abnehmend über $[a, b]$, wenn θ ein nicht-negativer Stieltjes'scher Quasi-Inhalt ist. In diesem Falle ist F – sofern $b = \infty$ und $F(\infty) = 1$ gilt – eine Verteilung im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie. Umgekehrt definiert jede über einer in $Q = [a, b]$ dichten Menge $\mathcal{D}$ endliche Funktion $F(x)$, die in $x = a$ verschwindet, einen Stieltjes'schen Quasi-Inhalt. Im Falle monoton nicht abnehmender Funktionen F wird damit der Zusammenhang sowohl zum Lebesgue-Stieltjes'schen Inhalt als auch zum Riemann-Stieltjes'schen Inhalt (sowie dem Riemann-Stieltjes-Integral) hergestellt; letzteres dann, wenn anstelle der Konstruktion über das Lebesgue'sche äußere Maß direkt Quasi-Inhalte endlicher Variation herangezogen werden.

1.4.2 Das Helly'sche Auswahlprinzip

Ein Satz von Eduard Helly besagt, daß aus einer Menge punktweise gleichmäßig beschränkter Funktionen endlicher Variation, definiert über einem kompakten Intervall, stets eine Teilfolge ausgewählt werden kann, die punktweise gegen eine Grenzfunktion endlicher Variation konvergiert [78]. Dieser Satz kann auf Folgen von Quasi-Inhalten über $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ verallgemeinert werden, sofern entsprechende Beschränktheitseigenschaften vorliegen. Wir konzentrieren uns im Folgenden wieder auf den eindimensionalen Fall.

Satz 1.4.1 (Helly'sches Auswahlprinzip) *$\mathcal{D}$ sei eine in dem Intervall $Q = [a, b]$ der reellen Achse dichte Menge, die beide Endpunkte a und b enthält. $\mathcal{S}$ bezeichne eine im Sinne der Definition 1.4.4 dazu gehörige dichte Menge von Subintervallen von Q . Eine über $\mathcal{S}$ definierte unendliche Menge $\mathcal{F} = \{\theta_i\}_{i \in I}$ von Stieltjes'schen Quasi-Inhalten gleichmäßig beschränkter Variation¹⁹ enthält stets eine (Teil-)Folge $\{\theta_v\}_{v \in \mathbb{N}}$, die gegen einen Quasi-Inhalt θ über $\mathcal{S}$ von endlicher Variation konvergiert.*

Beweis Da $\mathbb{R}$, versehen mit der natürlichen Topologie, separabel ist, kann man davon ausgehen, daß $\mathcal{S}$ eine in Q dichte Folge $\{\{x_j, y_j\}\}_{j \in \mathbb{N}}$ von Subintervallen enthält. Die Menge der Werte $\theta_i(\{x_1, y_1\})$ ($i \in I$) ist beschränkt und enthält daher eine konvergente Folge $\{\theta_n(\{x_1, y_1\})\}_{n \in \mathbb{N}}$. Die entsprechende Folge $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Quasi-Inhalte sei in $\{\theta_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ umbenannt; aus ihr kann aus gleichem Grunde eine Teilfolge $\{\theta_{n_v}^{(1)}\}_{v \in \mathbb{N}}$ derart ausgewählt werden, daß die Werte $\theta_{n_v}^{(1)}(\{x_2, y_2\})$ über dem zweiten Subintervall eine konvergente Zahlenfolge bilden, so daß – mit der Umbenennung $\{\theta_{n_v}^{(1)}\}_{v \in \mathbb{N}} = \{\theta_n^{(2)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ – sowohl die Zahlenfolge $\{\theta_n^{(2)}(\{x_1, y_1\})\}_{n \in \mathbb{N}}$ als auch die Zahlenfolge $\{\theta_n^{(2)}(\{x_2, y_2\})\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, d. h. $\{\theta_n^{(2)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist über beiden ersten Subintervallen konvergent. Entsprechend gibt es in $\{\theta_n^{(2)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $\{\theta_n^{(3)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, die über den ersten drei Subintervallen konvergente Folgen bildet, usw. Die Fortführung dieser Konstruktion garantiert zu jedem $j \in \mathbb{N}$ die Existenz einer Teilfolge $\{\theta_n^{(j)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ der ursprünglichen Folge $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Quasi-Inhalten, mit der alle j Zahlenfolgen $\{\theta_n^{(j)}(\{x_k, y_k\})\}_{n \in \mathbb{N}}$, $k = 1, \dots, j$, mit $n \rightarrow \infty$ konvergieren. Man wähle nun die Diagonalfolge $\{\theta_n^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, die auf allen Subintervallen der in Q dichten Folge konvergiert und daher eine über Q gegen eine Mengenfunktion θ konvergente Folge von Quasi-Inhalten darstellt. θ besitzt alle Eigenschaften eines Stieltjes'schen Quasi-Inhalts und ist wegen

$$\sum_{j=0}^{m_\Pi} |\theta(\{x_j, x_{j+1}\})| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{m_\Pi} |\theta_n^{(n)}(\{x_j, x_{j+1}\})| \quad \text{für jede Partition } \Pi$$

von beschränkter Variation. □

Für eine Folge $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Maßen über $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ können nun stets Funktionen $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ vermöge $f_n(x) = \mu_n((-x, +x))$ gebildet werden; diese Funktionen sind bzgl. x offenbar monoton nicht abnehmend, und monotone Funktionen sind stets von endlicher Variation [124]. Daraus ist folgender Schluß zu ziehen [59]:

Korollar 1.4.2 *Ist $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von solchen Maßen über $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, die für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine gleichmäßig beschränkte Zahlenfolge $\{\mu_n((-x, +x))\}_{n \in \mathbb{N}}$ bilden, so enthält $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine*

¹⁹ Definition 1.2.9, Abschn. 1.2. Ein Menge von Quasi-Inhalten ist von *gleichmäßig endlicher Variation*, wenn es eine für jeden Quasi-Inhalt θ_i geltende gemeinsame Konstante K mit $\text{Var}_Q(\theta_i) \leq K$ (gemäß Definition 1.2.9) gibt.

Teilfolge $\{\mu_{n_v}\}_{v \in \mathbb{N}}$, die gegen ein Maß μ über $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ im Sinne von

$$(\{\mu_{n_v}\}_{v \in \mathbb{N}} \rightarrow \mu) \iff \left(\lim_{v \rightarrow \infty} \mu_{n_v}(B) = \mu(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \text{ beschränkt} \right)$$

konvergiert, wobei $\mu((-\infty, +\infty))$ nicht notwendig endlich sein muß.

1.4.3 Wahrscheinlichkeitsmaße

Eine Besonderheit der Lebesgue-Stieltjes'schen Maße stellen die Wahrscheinlichkeitsmaße dar, die wir im Kap. 2 behandeln. Dazu bemerken wir Folgendes: Der Spezialfall einer in das Intervall $[0, 1]$ abbildenden rechtsstetigen und monoton nicht abnehmenden Funktion

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

führt zu einem vollständigen und total endlichen Maß $\mathbb{P}$ über der σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma = \sigma(\mathcal{A}_Q)$ mit $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ für $\Omega = \mathbb{R}$. Ein solches Maß wird als **Wahrscheinlichkeitsmaß** bezeichnet, und $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}]$ heißt **Wahrscheinlichkeitsraum**. Bei gegebenem Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}]$ nennt man eine meßbare und $\mathbb{P}$ -fast überall endliche Funktion $\xi : (\Omega, \mathcal{A}_\sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine **reellwertige Zufallsvariable** bzgl. $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}]$ ²⁰. Jede monoton nicht abnehmende und rechtsseitig stetige Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, die $F(-\infty) = 0$ und $F(+\infty) = 1$ erfüllt, ist **Verteilungsfunktion** einer Zufallsvariablen ξ , für die $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq r\}) = F(r)$ gilt (zu weiteren Einzelheiten vergl. Kap. 2).

Im mehrdimensionalen Fall, d. h. bei gegebener Funktion $F : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ mit $d > 1$, reichen allerdings die genannten Eigenschaften nicht aus, um F als Verteilungsfunktion eines **Zufallsvektors** $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ festzulegen. Dies beweist u. a. ein in [165] genanntes Beispiel für $d = 2$: Die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$, definiert durch

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x_1 + x_2 \geq 0, \\ 0, & \text{falls } x_1 + x_2 < 0, \end{cases}$$

ist offenbar in jeder Komponente von rechts stetig und monoton nicht fallend und garantiert für alle $x_i, x_2 \in \mathbb{R}$ das Bestehen der Gleichungen

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= F(x_2, x_1), \\ F(x_1, -\infty) &= F(-\infty, x_2) = 0, \\ F(+\infty, +\infty) &= 1. \end{aligned}$$

²⁰ Die Schreibweise $\xi : (\Omega, \mathcal{A}_\sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ für die Abbildung $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ soll den Bezug zur Meßbarkeitseigenschaft herstellen.

Man kann jedoch kein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_F$ über einer σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ zu einer Menge Ω angeben, so daß F gemeinsame Verteilungsfunktion zweier Zufallsvariablen $\xi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist ($i = 1, 2$), denn dies würde die Gültigkeit von

$$\mathbb{P}_F(\{\omega \in \Omega : -\infty < \xi_1(\omega) \leq x_1, -\infty < \xi_2(\omega) \leq x_2\}) = F(x_1, x_2)$$

erfordern, so daß insbesondere das Maß $\mathbb{P}_F(Q_{-1,1})$ des Quaders

$$Q_{-1,1} = \{(z_1, z_2) : -1 < z_1 \leq 1, -1 < z_2 \leq 1\}$$

als $\mathbb{P}_F(Q_{-1,1}) = F(1, 1) - F(1, -1) - (F(-1, 1) - F(-1, -1))$ darstellbar sein müßte; dieser letztere Ausdruck hat jedoch den Wert -1 .

Nachfolgend werden Vektoren wieder durch Fettdruckbuchstaben gekennzeichnet. Entsprechende Relationen sind komponentenweise zu verstehen, d. h. $\mathbf{a} < \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ steht für $a_i < x_i \leq b_i$ ($i = 1, \dots, d$), usw. Eine Funktion F über dem $\mathbb{R}^d$ ist in jeder Komponente monoton nicht abnehmend, wenn aus $x_i^{(1)} \leq x_i^{(2)} \forall i \in \{1, \dots, d\}$ folgt $F(x_1^{(1)}, \dots, x_d^{(1)}) \leq F(x_1^{(2)}, \dots, x_d^{(2)})$.

Die nach obiger Erkenntnis notwendige zusätzliche Eigenschaft zur Kennzeichnung von Verteilungsfunktionen im mehrdimensionalen Fall nennen wir „Quader-Monotonie“²¹.

Definition 1.4.5 (Quadermonotonie) *Es sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ eine in jeder Komponente von rechts stetige und monoton nicht abnehmende Funktion. F heißt **quadermonoton**, falls für jeden halboffenen Quader $Q_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \{\mathbf{x} : \mathbf{a} < \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ der Ausdruck*

$$I_F(Q_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \dots \sum_{i_d=0}^1 (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_d} \cdot F(b_1 - i_1(b_1 - a_1), b_2 - i_2(b_2 - a_2), \dots, b_d - i_d(b_d - a_d)) \quad (1.9)$$

stets größer oder gleich Null ist.

Wie leicht nachprüfbar, ist (1.9) im Falle des Quaders $Q_{-1,1}$ aus obigem Beispiel gerade der Ausdruck $I_F(Q_{-1,1}) = F(1, 1) - F(1, -1) - (F(-1, 1) - F(-1, -1))$.

Satz 1.4.3 (Spezieller Maßeerweiterungssatz) *Es sei $F : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ eine in jeder Komponente von rechts stetige und monoton nicht abnehmende quadermonotone Funktion über dem $\mathbb{R}^d$ mit folgenden Eigenschaften ($i_1, \dots, i_d$ sei eine beliebige Permutation der Zahlen $1, \dots, d$):*

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_d) &= F(x_{i_1}, \dots, x_{i_d}), \\ F(x_1, \dots, x_{k-1}, -\infty, x_{k+1}, \dots, x_d) &= 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, d\}, \\ F(+\infty, \dots, +\infty) &= 1. \end{aligned}$$

²¹ In [165] „Rechtecks-Monotonie“ genannt.

Es gibt dann genau einen Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}_F]$, in dem F die **gemeinsame Verteilungsfunktion** von d Zufallsvariablen $\xi_1, \dots, \xi_d$ in $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}_F]$ repräsentiert, d. h.

$$\mathbb{P}_F(\{\omega : \xi_1(\omega) \leq x_1, \dots, \xi_d(\omega) \leq x_d\}) = F(x_1, \dots, x_d).$$

$\mathbb{P}_F$ ist das Lebesgue-Stieltjes'sche Maß bzgl. F .

Beweis Die Familie $\mathcal{Q}$ aller halboffenen Quader $Q_{a,b} = \{\mathbf{x} : \mathbf{a} < \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ formt ein zerlegbares System im $\mathbb{R}^d$ (vergl. etwa [68]). Über $\mathcal{Q}$ definieren wir die Mengenfunktion $\varphi_F : \mathcal{Q} \rightarrow [0, 1]$ unter Verwendung von (1.9) durch

$$\varphi_F(Q_{a,b}) = I_F(Q_{a,b}).$$

Aufgrund der Quader-Monotonie von F gilt $\varphi_F(Q_{a,b}) \geq 0$; mit $\varphi_F(\emptyset) = 0$ stellt daher φ_F ein elementares Maß dar. Bei gegebenem Quader $Q_{a,b}$ sei $b_{\max} = \max\{b_1, \dots, b_d\}$, und man setze $\mathbf{b}_{\max} = (b_{\max}, \dots, b_{\max})$; dann ist $Q_{a,b} \subset Q_{-\infty, \mathbf{b}_{\max}}$, und es gilt

$$I_F(Q_{a,b}) \leq I_F(Q_{-\infty, \mathbf{b}_{\max}}) = F(b_{\max}, \dots, b_{\max}) \leq 1.$$

Dies beweist, daß stets $\varphi_F(Q_{a,b}) \leq 1$ und $\varphi_F(Q_{-\infty, \infty}) = 1$ ist. Man sieht weiterhin leicht ein, daß φ_F endlich additiv ist, d. h. für eine Vereinigung $\bigcup_{n=1}^k U_{a_n, b_n}$ wechselseitig disjunkter halboffener Quader $U_{a_n, b_n} = \{\mathbf{x} : \mathbf{a}_n < \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_n\}$ gilt

$$\varphi_F\left(\bigcup_{n=1}^k U_{a_n, b_n}\right) = \sum_{n=1}^k \varphi_F(U_{a_n, b_n}).$$

Im Folgenden wird nun gezeigt, daß φ_F die Relation 1.7 erfüllt. Es bezeichne $\bigcup_{n=1}^\infty Q_{a_n, b_n}$ eine Überdeckung von $Q_{a,b}$. Aufgrund der Rechtsstetigkeit von F gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $\delta > 0$ ein $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\delta) > 0$ derart, daß mit $\boldsymbol{\varepsilon}_n = (\varepsilon_n, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^d$

$$\varphi_F(Q_{a_n, b_n + \boldsymbol{\varepsilon}_n}) - \varphi_F(Q_{a_n, b_n}) < \frac{\delta}{2^n} \quad (1.10)$$

wird. Die Vereinigung der abzählbar vielen offenen Quader $Q_{a_n, b_n + \boldsymbol{\varepsilon}_n}^\circ = \{\mathbf{x} : \mathbf{a}_n < \mathbf{x} < \mathbf{b}_n + \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ überdeckt den halboffenen Quader $Q_{a,b}$ und damit auch den abgeschlossenen Quader $\bar{Q}_{a+\boldsymbol{\eta}, b} = \{\mathbf{x} : \mathbf{a} + \boldsymbol{\eta} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ für jedes $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_d) \in \mathbb{R}^d$ mit $0 < \eta_k < \min_{k \in \{1, \dots, d\}} \{b_k - a_k\}$. Dieser ist kompakt (Satz von Heine-Borel, s. Satz A.1.17 in Abschn. A.1), so daß es unter den $Q_{a_n, b_n + \boldsymbol{\varepsilon}_n}^\circ$ ($n \in \mathbb{N}$) bereits eine endliche Familie

$$\mathcal{F} = \{Q_{a_{v_1}, b_{v_1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{v_1}}^\circ, \dots, Q_{a_{v_m}, b_{v_m} + \boldsymbol{\varepsilon}_{v_m}}^\circ\}$$

gibt, die $\bar{Q}_{a+\boldsymbol{\eta}, b}$ überdeckt. Es sei $\boldsymbol{\varepsilon} = \max\{\boldsymbol{\varepsilon}_{v_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{v_m}\}$, und man wähle $\boldsymbol{\eta}$ zu $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\varepsilon}$ ($\boldsymbol{\varepsilon}$ als genügend klein vorausgesetzt); die zugehörigen Vektoren des $\mathbb{R}^d$ seinen $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\eta} = (\varepsilon, \dots, \varepsilon)$.

Die endliche Familie $\mathcal{F}$ überdeckt dann auch den halboffenen Quader $Q_{a+\varepsilon, b} = \{\mathbf{x} : \mathbf{a}_n + \varepsilon < \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_n\}$. Man setze

$$M_\ell = Q_{a+\varepsilon, b} \cap \left(Q_{a_{v_\ell}, b_{v_\ell}+\varepsilon} \setminus \bigcup_{j=1}^{\ell-1} Q_{a_{v_j}, b_{v_j}+\varepsilon} \right), \quad \ell = 1, \dots, m.$$

Jede dieser Punkt Mengen $M_\ell \in \mathbb{R}^d$ besteht aus einer Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{r_\ell} Q'_i$ wechselseitig disjunkter halboffener Quader, die innerhalb von $Q_{a, b}$ liegt, und für die $Q_{a+\varepsilon, b} = \bigcup_{\ell=1}^m \bigcup_{i=1}^{r_\ell} Q'_i$ gilt. Aufgrund der endlichen Additivität von φ_F folgt für geeignete $Q_{a_{v_j}, b_{v_j}+\varepsilon} = \{\mathbf{x} : \mathbf{a}_{v_j} < \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{v_j} + \varepsilon\}$

$$\varphi_F(Q_{a+\varepsilon, b}) = \sum_{\ell=1}^m \sum_{i=1}^{r_\ell} \varphi_F(Q'_i) \leq \sum_{j=1}^m \varphi_F(Q_{a_{v_j}, b_{v_j}+\varepsilon}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_F(Q_{a_n, b_n+\varepsilon}),$$

worin wegen (1.10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_F(Q_{a_n, b_n+\varepsilon}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_F(Q_{a_n, b_n}) + \frac{\delta}{2^n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_F(Q_{a_n, b_n}) + \delta$$

ist. $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert $\varphi_F(Q_{a, b}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_F(Q_{a_n, b_n}) + \delta$ für beliebig kleines δ , was

$$\varphi_F(Q_{a, b}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_F(Q_{a_n, b_n})$$

und somit die Gültigkeit von (1.7) impliziert. Nach Satz 1.3.3 ist φ_F zu einem vollständigen Maß fortsetzbar, und zwar in Gestalt des vermöge der Beziehung (1.3) (Satz 1.3.1) definierten äußeren Lebesgue-Maßes $\mu_{\varphi_F}^*|_{C^*}$ (eingeschränkt auf die σ -Algebra $C^* \supset \mathcal{Q}$ der $\mu_{\varphi_F}^*$ -meßbaren Mengen). Da der $\mathbb{R}^d$ offenbar durch abzählbar viele Quader Q_{a_n, b_n} mit $\varphi_F(Q_{a_n, b_n}) < \infty$ überdeckbar ist, liegt mit φ_F zudem ein σ -endliches elementares Maß vor, so daß Satz 1.3.4 die Eindeutigkeit von $\mathbb{P}_F$ impliziert. $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} = C^*$ und $\mathbb{P}_F = \mu_{\varphi_F}^*|_{C^*}$ liefern die behauptete Aussage. $\square$

1.4.4 Radon-Maße

Es möge nun $\mathcal{O}_X$ das System aller offenen, $\mathcal{C}_X$ das System aller abgeschlossenen und $\mathcal{K}_X$ das System aller kompakten Teilmengen eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$ bezeichnen. Während die von $\mathcal{C}_X$ erzeugte σ -Algebra mit der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O}_X)$ zusammenfällt, ist die von den kompakten Mengen erzeugte σ -Algebra $\sigma(\mathcal{K}_X)$ im allgemeinen echt in der σ -Algebra $\sigma(\mathcal{C}_X)$ enthalten. Ist allerdings $(X, \mathcal{O}_X)$ ein kompakter Hausdorff-Raum (T_2 -Raum), so fallen die kompakten Mengen mit den abgeschlossenen zusammen,

und $(X, \mathcal{O}_X)$ verhält sich bzgl. der Borel- σ -Algebra wie der durch Hinzunahme des Punktes ∞ kompaktifizierte $\mathbb{R}^d$, d. h. es gilt

$$\sigma(\mathcal{O}_X) = \sigma(\mathcal{C}_X) = \sigma(\mathcal{K}_X), \quad \text{falls } X \text{ kompakter Hausdorff-Raum.}$$

Die Kompaktheit des Raumes ist hierin eine wichtige Voraussetzung, denn in einem beliebigen Hausdorff-Raum sind zwar alle kompakten Mengen abgeschlossen und daher auch Borel-Mengen, jedoch sind i. a. nicht alle abgeschlossenen Mengen kompakt.

Definition 1.4.6 (Borel-Maß) *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein T_2 -Raum mit der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$. Ein Maß μ über $\mathcal{B}(X)$ heißt*

- **Borel-Maß** auf X , falls für jede kompakte Menge $K \in \mathcal{B}(X)$ gilt $\mu(K) < \infty$,
- **von innen regulär**, falls für jede Borel-Menge $A \in \mathcal{B}(X)$ das Maß $\mu(A)$ schreibbar ist als $\mu(A) = \sup \{ \mu(K) : K \subset A, K \text{ kompakt} \}$,
- **von außen regulär**, falls für jede Borel-Menge $A \in \mathcal{B}(X)$ das Maß $\mu(A)$ schreibbar ist als $\mu(A) = \inf \{ \mu(O) : A \subset O, O \text{ offen} \}$.

Alle endlichen Maße über $\mathcal{B}(X)$ sind somit Borel-Maße. Ein Maß, das sowohl von innen als auch von außen regulär ist, wird kurz als **reguläres Maß** bezeichnet. Ist ein Maß von innen (bzw. außen) regulär, so wird es bereits durch seine Werte auf den kompakten (bzw. offenen) meßbaren Mengen vollständig bestimmt.

In einem Hausdorff-Raum X ist jede kompakte Menge abgeschlossen; die Umkehrung gilt, falls X selbst kompakt ist, d. h. in einem kompakten Raum sind Abgeschlossenheit und Kompaktheit äquivalent. Demnach kann man die *Regularität eines Maßes in einem kompakten Raum* mit dem Bestehen folgender Relationen erklären:

$$\mu(M) = \sup \{ \mu(C) : C \subset M, C \in \mathcal{C}_X \} \quad \forall M \in \mathcal{B}(X), \quad (1.11)$$

$$\mu(M) = \inf \{ \mu(O) : M \subset O, O \in \mathcal{O}_X \} \quad \forall M \in \mathcal{B}(X). \quad (1.12)$$

Lemma 1.4.4 *Es sei μ ein endliches Maß über der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$ eines (nicht notwendig kompakten) Hausdorff-Raumes X . Für jede meßbare Menge M gilt dann: Erfüllt M eine der Bedingungen (1.11), (1.12), so erfüllt das Komplement von M die jeweils andere Bedingung.*

Beweis Zu $M \in \mathcal{B}(X)$ sei O eine M umfassende offene Menge. $O^c =: C$ ist dann abgeschlossen, und es gilt $C \subset M^c$. Aufgrund der Endlichkeit des Maßes μ hat man

$$\mu(M^c) - \mu(C) = (\mu(X) - \mu(M)) - (\mu(X) - \mu(O)) = \mu(O) - \mu(M).$$

Erfüllt nun M die Relation (RK2), so gibt es zu jedem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ eine offene Menge O_ε mit $\mu(O_\varepsilon) - \mu(M) \leq \varepsilon$, also eine abgeschlossene Menge $C_\varepsilon = X \setminus O_\varepsilon \subset M^c$

mit $\mu(M^c) - \mu(C_\varepsilon) \leq \varepsilon$, so daß das Supremum $\sup \{ \mu(C) : C \subset M, C \in \mathcal{C}_X \}$ nicht echt kleiner als $\mu(M^c)$ sein kann. Entsprechendes ist bzgl. (RK2) für M^c zu schließen, falls M die Relation (RK1) erfüllt. $\square$

Definition 1.4.7 (Radon-Maß) *Ein auf der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$ eines T_2 -Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$ definiertes Maß μ heißt **lokal-endlich**, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ von x gibt, für die $\mu(U) < \infty$ gilt. Ein lokalendliches und von innen reguläres Maß auf X nennt man ein **Radon-Maß**.*

Jede offene Überdeckung einer kompakten Menge $K \in \mathcal{K}$ enthält per definitionem eine endliche Überdeckung. Ist μ lokal-endliches Maß, existiert also zu jedem $x \in K$ eine offene Umgebung $O_x \in \mathcal{O}_X$ mit $\mu(O_x) < \infty$, so kann stets eine endliche Überdeckung von K aus offenen Umgebungen endlichen Maßes konstruiert werden, d. h. *unter einem lokal-endlichen Maß μ ist $\mu(K) < \infty$ für jede kompakte Menge K* . Folglich ist jedes lokal-endliche Maß ein Borel-Maß. Weiterhin läßt sich zeigen, daß in polnischen Räumen die Radon-Maße auch von außen regulär sind (zur Erinnerung: Ein metrischer Raum $(X; d)$ wird als *polnischer Raum* bezeichnet, wenn er vollständig ist und eine abzählbare Basis besitzt; vergl. Definition A.1.25 in Abschn. A.1). Die Existenz einer abzählbaren Basis ist für metrische Räume mit der Eigenschaft der Separabilität gleichwertig, d. h. mit der Eigenschaft, eine überall dichte und abzählbare Teilmenge zu enthalten. Zu weiteren Eigenschaften polnischer Räume s. Satz A.1.39, Abschn. A.1.6. Wir beweisen zunächst einige Hilfsaussagen.

Lemma 1.4.5 *Es sei μ ein über der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$ eines polnischen Raumes $(X; d)$ definiertes endliches Maß; dann gibt es zu jedem $\eta > 0$ eine kompakte Teilmenge $K_\eta \subset X$ mit $\mu(X) - \mu(K_\eta) < \eta$, und es gilt*

$$\mu(X) = \sup \{ \mu(K) : K \subset X, K \text{ kompakt} \}.$$

Beweis Als polnischer Raum besitzt X eine abzählbare Basis, daher enthält nach Aussage des Satzes A.1.8 von Lindelöf (s. Abschn. A.1) jede offene Überdeckung eine abzählbare Überdeckung, d. h. es gibt eine in X dichte Punktfolge $D = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\bar{D} = X$. Für beliebiges $\ell > 1$ bilden daher die Kreismengen

$$\bar{K}_\ell(x_k) = \left\{ y : d(x_k, y) \leq \frac{1}{\ell} \right\}$$

eine abgeschlossene Überdeckung von X . Setzt man $\bar{A}_n := \bigcup_{k=1}^n \bar{K}_\ell(x_k)$, so folgt für die monoton nicht abnehmende Folge $\{\bar{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ abgeschlossener Mengen

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{A}_n = X, \quad \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{A}_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\bar{A}_n) = \mu(X) < \infty.$$

Zu jedem $\eta > 0$ läßt sich daher ein $n_\ell(\eta)$ derart finden, daß $\mu(X) - \mu(\bar{A}_{n_\ell(\eta)}) < \frac{\eta}{2^\ell}$ wird. Es sei $\bigcap_{\ell=1}^{\infty} \bar{A}_{n_\ell(\eta)} =: K_\eta$; wegen $X \setminus K_\eta = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} (X \setminus \bar{A}_{n_\ell(\eta)})$ hat man

$$\mu(X) - \mu(K_\eta) \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu(X \setminus \bar{A}_{n_\ell(\eta)}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (\mu(X) - \mu(\bar{A}_{n_\ell(\eta)})) < \eta.$$

Dabei gilt $K_\eta \subset \bar{A}_{n_\ell(\eta)} = \bigcup_{k=1}^{n_\ell(\eta)} \bar{K}_\ell(x_k)$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ setze man $\ell_\varepsilon = \lceil \frac{4}{\varepsilon} \rceil$. K_η ist dann enthalten in der Vereinigung $\bar{K}_{\ell_\varepsilon}(x_1) \cup \dots \cup \bar{K}_{\ell_\varepsilon}(x_{n_{\ell_\varepsilon}(\eta)})$ endlich vieler Kreismengen, deren Durchmesser

$$d(\bar{K}_{\ell_\varepsilon}(x_k)) = \sup \{d(x, y) : x, y \in \bar{K}_{\ell_\varepsilon}(x_k)\} \leq \frac{2}{\ell_\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ist, d. h. jedes K_η ist total-beschränkt und demnach kompakt (vergl. Satz A.1.39 in Abschn. A.1). Folglich kann $\mu(X)$ nicht echt größer als das Supremum $\sup\{\mu(K) : K \subset X, K \text{ kompakt}\}$ sein, womit alles bewiesen ist. $\square$

Als abkürzende Schreibweise benutzen wir im Folgenden die Symbole $\text{Reg}(\mu)$ für die Familie aller Borel-Mengen M , bzgl. derer ein über $\mathcal{B}(X)$ definiertes Maß μ regulär ist, und $\text{Reg}_i(\mu)$ bzw. $\text{Reg}_a(\mu)$ für die Familie aller solchen Borel-Mengen M , bzgl. derer μ von innen regulär bzw. von außen regulär ist:

$$\begin{aligned} \text{Reg}(\mu) &= \text{Reg}_i(\mu) \cap \text{Reg}_a(\mu) \subseteq \mathcal{B}(X), \\ \text{Reg}_i(\mu) &= \{M : \mu(M) = \sup\{\mu(K) : K \subset M, K \text{ kompakt}\}\}, \\ \text{Reg}_a(\mu) &= \{M : \mu(M) = \inf\{\mu(O) : M \subset O, O \text{ offen}\}\}. \end{aligned}$$

Lemma 1.4.6 *Ist μ ein über der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$ eines polnischen Raumes $(X; d)$ definiertes endliches Maß, so gilt $C_X \subset \text{Reg}(\mu)$, d. h. μ ist regulär bzgl. aller abgeschlossenen Mengen $C \subset X$.*

Beweis 1. Für die (sowohl offene als auch abgeschlossene) leere Menge $\emptyset$ ist die Behauptung offensichtlich richtig, so daß wir von vornherein $C \neq \emptyset$ voraussetzen können (auch für X selbst ist nach Lemma 1.4.5 nichts mehr zu zeigen). Zu einer abgeschlossenen Menge $C \neq \emptyset$ gibt es eine abnehmende Folge $\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ offener Mengen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = C$ (s. Lemma A.1.25 in Abschn. A.1). Da μ endlich ist, hat man $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(O_n) = \mu(\lim_{n \rightarrow \infty} O_n) = \mu(C)$, woraus sofort $\mu(C) = \inf\{\mu(O) : C \subseteq O, O \text{ offen}\} \iff C \in \text{Reg}_a(\mu)$ folgt.

2. Es sei K kompakt. Wegen $\mu(C \cup K) < \infty$ ist $\mu(C \setminus K) = \mu(C \cup K) - \mu(K)$, so daß sich aus $\mu(C) = \mu(C \setminus K) + \mu(C \cap K)$ die Beziehung

$$\mu(C) - \mu(C \cap K) = \mu(C \setminus K) = \mu(C \cup K) - \mu(K)$$

ergibt, in der $C \cap K$ kompakt ist. Dies gilt insbesondere für die gemäß Lemma 1.4.5 zu beliebigem $\eta > 0$ existierenden kompakten Mengen K_η , für die man

$$\eta > \mu(X) - \mu(K_\eta) \geq \mu(C) - \mu(C \cap K_\eta)$$

hat. Demnach kann nicht $\mu(C) > \sup\{\mu(K) : K \subseteq C, K \text{ kompakt}\}$ sein, d. h. es ist $C \in \mathcal{R}eg_i(\mu)$. $\square$

Lemma 1.4.7 *Unter den Voraussetzungen des Lemmas 1.4.6 (μ endlich, X polnisch) gilt*

$$M \in \mathcal{R}eg(\mu) \implies X \setminus M \in \mathcal{R}eg(\mu).$$

Beweis Es sei $M \in \mathcal{R}eg(\mu)$.

1. Aufgrund der Endlichkeit von μ hat man für jede kompakte Teilmenge $K \in \mathcal{K}_X$ mit $K \subset M$ die Beziehung $\mu(K^c) - \mu(M^c) = \mu(M) - \mu(K)$. $M \in \mathcal{R}eg_i(\mu)$ bedeutet, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine derartige kompakte Menge K gibt, die $|\mu(M) - \mu(K)| < \varepsilon$ erfüllt, d. h. eine offene Menge $O_K = K^c$ mit $|\mu(O_K) - \mu(M^c)| < \varepsilon$. Daraus folgt $M^c \in \mathcal{R}eg_a(\mu)$.

2. $M \in \mathcal{R}eg_a(\mu)$ bedeutet nach Lemma 1.4.4, daß $\mu(M^c) = \sup\{\mu(C) : C \subset M, C \in \mathcal{C}_X\}$ ist (man beachte auch $\mu(M^c) - \mu(O^c) = \mu(O) - \mu(M)$ für jede offene Menge $O \supset M!$), und Lemma 1.4.6 besagt $\mu(C) = \sup\{\mu(K) : K \subset C, K \text{ kompakt}\}$, so daß $\mu(M^c) = \sup\{\mu(K) : K \subset M^c, K \text{ kompakt}\} \iff M^c \in \mathcal{R}eg_i(\mu)$ folgt. $\square$

Satz 1.4.8 *Jedes Radon-Maß μ auf einem polnischen Raum ist σ -endlich und regulär.*

Beweis 1. Da μ lokal-endlich ist, gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung O_x mit $\mu(O_x) < \infty$. Als polnischer Raum besitzt X eine abzählbare Basis. Nach Aussage des Satzes A.1.8 von Lindelöf (s. Abschn. A.1) enthält daher die offene Überdeckung $\bigcup_{x \in X} O_x$ eine abzählbare Überdeckung $\bigcup_{k=1}^\infty O_{x_k}$, für die $\mu(O_{x_k}) < \infty \forall k \in \mathbb{N}$ gilt. Das bedeutet, daß μ σ -endlich ist.

2. Nach Lemma 1.3.8 ist die Mengenfunktion $\mu^* : \mathfrak{P}(X) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, definiert durch

$$\mu^*(M) = \inf\{\mu(O) : M \subset O, O \text{ offen}\} \forall M \in \mathfrak{P}(X),$$

ein äußeres Maß. Wir zeigen, daß dieses äußere Maß von außen regulär ist und mit μ übereinstimmt. Setzt man unter Verwendung der unter 1 genannten offenen Umgebungen $V_n^\circ := \bigcup_{k=1}^n O_{x_k}$, so bilden die V_n° eine monoton nicht abnehmende Folge offener Mengen von endlichem Maß, die X überdecken:

$$V_n^\circ \subseteq V_{n+1}^\circ, \quad \mu(V_n^\circ) < \infty \forall n \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{n=1}^\infty V_n^\circ = X.$$

Mit Hilfe der V_n° läßt sich eine Folge von endlichen Mäßen μ_n vermöge der Definition

$$\mu_n(M) := \mu(M \cap V_n^\circ) \forall M \in \mathcal{B}(X)$$

angeben (die Maßeigenschaften lassen sich leicht nachweisen). Die Maße μ_n sind von außen regulär. Man kann nämlich mit Rückgriff auf die Metrik d des polnischen Raumes O . E. d. A. voraussetzen, daß die offenen Umgebungen O_{x_k} von der Form $O_{x_k} = \{y : d(y, x_k) < r_k \in \mathbb{R}\}$ sind. Zu jeder Teilmenge $M \in \mathcal{B}(X)$ gibt es daher höchstens abzählbar viele Punkte x_k und offene Kreisumgebungen O_{x_k} , so daß $F := \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} O_{x_k}$ ist. Setzt man für $\ell \geq 1$

$$U_\ell = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{y : d(y, x_k) < r_k/\ell\},$$

so folgt wegen $U_{\ell+1} \subset U_\ell \forall \ell \in \mathbb{N}$ und $\mu_n(U_\ell) = \mu(U_\ell \cap M_n^\circ) < \infty$

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} U_\ell = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} U_\ell \subseteq M, \quad \mu_n\left(\lim_{\ell \rightarrow \infty} U_\ell\right) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mu_n(U_\ell) \leq \mu_n(M),$$

während andererseits für alle $\ell \in \mathbb{N}$, für die $U_\ell \supseteq M$ ist, $\mu_n(U_\ell) \geq \mu_n(M)$ und somit $\mu_n(M) \geq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mu_n(U_\ell)$ ist. Da die U_ℓ offen sind, kann $\inf\{\mu_n(O) : M \subset O, O \text{ offen}\}$ nicht größer als $\mu_n(M)$ sein, d. h. μ_n ist von außen regulär.

Man betrachte nun eine beliebige kompakte Teilmenge K von X . Wegen $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n^\circ = X$ gibt es aufgrund der Kompaktheit von K bereits endlich viele V_n° , die K überdecken, und somit wegen $V_n^\circ \subset V_{n+1}^\circ$ ein $n_K \in \mathbb{N}$ mit $K \subset V_{n_K}^\circ$, so daß $\mu(K) = \mu_{n_K}(K) < \infty$ ist. Die Offenheit der V_n° impliziert

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \mu_{n_K}(K) = \inf\{\mu_{n_K}(O \cap V_{n_K}^\circ) : K \subset O, O \text{ offen}\} \\ &= \inf\{\mu(O) : K \subset O, O \text{ offen}\}, \end{aligned}$$

woraus $\mu^*(K) = \mu(K)$ für die (also jede) kompakte Menge K folgt. Für offene Mengen einschließlich X selbst ist diese Übereinstimmung per definitionem gegeben. Insbesondere besagt die Maßeigenschaft von μ , daß $\mu^*(K_1 \cup K_2) = \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2)$ für disjunkte kompakte Mengen K_1, K_2 gilt. Damit sind für das äußere Maß μ^* die im Satz 1.3.9 als Voraussetzung genannten Eigenschaften 1–3 gegeben, d. h. die Einschränkung des äußeren Maßes μ^* auf die Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$ ist ein Maß. Dieses Maß ist lokal-endlich und ein Borel-Maß, da auf kompakten Mengen mit μ identisch. In Analogie zur Konstruktion der V_n° bezüglich des Maßes μ kann somit eine Folge offener Mengen $V_n^{*\circ} = \bigcup_{k=1}^n O_{x_k}^*$ mit $O_{x_k}^* = \{y : d(y, x_k^*) < r_k\}$ und $\mu^*(V_n^{*\circ}) < \infty$ gefunden werden, so daß für eine beliebige Menge $M \in \mathcal{B}(X)$ eine Punktfolge $F^* := \{x_1^*, x_2^*, \dots\} \subseteq M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} O_{x_k}^*$ angebar ist und – wieder in Analogie zum Vorigen – die offenen Mengen $U_\ell^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{y : d(y, x_k^*) \leq r_k/\ell\}$ zu

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} U_\ell^* = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} U_\ell^* \subseteq M \subseteq U_j^* \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

führen. Setzt man $S_\ell := \sup\{\mu^*(K) : K \subset U_\ell^*, K \text{ kompakt}\}$, so folgt offenbar

$$\begin{aligned}\mu^*(M) &\leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} S_\ell = \sup\{\mu^*(K) : K \subset M, K \text{ kompakt}\} \\ &= \sup\{\mu(K) : K \subset M, K \text{ kompakt}\} = \mu(M),\end{aligned}$$

während man stets $\mu^*(M) \geq \sup\{\mu^*(K) : K \subset M, K \text{ kompakt}\}$ hat; das impliziert $\mu^* = \mu$ auf $\mathcal{B}(X)$. $\square$

Maße mit Werten in $\mathbb{N}_0$ nennt man **Zählmaße**. In vielen Anwendungen werden vornehmlich Radon'sche Zählmaße betrachtet, und zwar solche auf polnischen Räumen, also vollständigen und separablen metrischen Räumen. Nach obigem Satz 1.4.8 ist jedes derartige Maß σ -endlich. Häufig verwendet man – im Gegensatz zur o. gen. Definition – den Begriff *Radon-Maß* von vornherein nur für Radon'sche Zählmaße auf polnischen Räumen (vergl. etwa [7, 101]). Bzgl. der folgenden Definition sei daran erinnert, daß in einem T_2 -Raum jede einelementige Menge abgeschlossen ist und damit zur Borel- σ -Algebra des Raumes gehört.

Definition 1.4.8 Es sei μ ein Maß mit Werten in $\mathbb{N}_0$ (ein **Zählmaß**) über der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$ eines T_2 -Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$. Diejenigen Punkte $x \in X$, für die $\mu(\{x\}) > 0$ ist, heißen **Atome** von μ . Die Menge aller Atome in X heißt der **Träger** von μ . Ist $\mu(\{x\}) = 1$ für jedes Atom $x \in X$, so heißt das ein Zählmaß μ **einfach**.

Satz 1.4.9 Ist $(X; d)$ ein polnischer Raum, so gelten für den Träger T_μ eines Radon'schen Zählmaßes μ über der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$ die Aussagen

1. T_μ ist höchstens abzählbar unendlich,
2. $\mu(M) = \sum_{x \in T_\mu} \mu(\{x\}) \cdot 1_M(x)$ für jede Borel-Menge $M \in \mathcal{B}(X)$.

Beweis 1. Die Existenz einer abzählbaren in X dichten Teilmenge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ bedeutet zusammen mit der lokalen Endlichkeit von μ , daß es abzählbar viele offene Mengen O_k mit $x_k \in O_k$, $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} O_k = X$ und $\mu(O_k) < \infty$ gibt, d. h. T_μ ist höchstens abzählbar.

2. Zu jedem O_k sei $T_\mu(O_k)$ die (endliche) Anzahl aller Punkte $y \in O_k$ mit $\mu(y) > 0$, wobei O_k eine der eben erwähnten Überdeckungsmengen sei ($k \in \mathbb{N}$); dann gilt

$$\mu(M) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(M \cap O_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{x \in T_\mu(O_k)} \mu(\{x\}) \cdot 1_M(x) = \sum_{x \in T_\mu} \mu(\{x\}) \cdot 1_M(x)$$

für $M \in \mathcal{B}(X)$. $\square$

Ein spezielles einfaches Radon'sches Zählmaß ist das sog. Dirac-Maß.

Definition 1.4.9 (Dirac-Maß) *Es sei $(X, \mathcal{O}_d)$ polnischer Raum mit der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$, $x \in X$ ein fest gewählter Punkt. Das Maß δ_x , definiert durch*

$$\delta_x(M) = 1_M(x) \quad \text{für } M \in \mathcal{B}(X),$$

*heißt **Dirac-Maß** über $\mathcal{B}(X)$.*

1.5 Meßbare Abbildungen

Der Begriff der Meßbarkeit von Abbildungen zwischen meßbaren Räumen weist eine gewisse Analogie zum Stetigkeitsbegriff für Abbildungen zwischen topologischen Räumen auf, und zwar insofern, als die jeweiligen Urbildmengen von meßbaren Bildmengen (im Falle der Stetigkeit von offenen Bildmengen) meßbar (im Falle der Stetigkeit offen) sein müssen.

Definition 1.5.1 (Meßbare Abbildungen) *Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von einem meßbaren Raum $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ in einen anderen meßbaren Raum $[Y, \mathcal{B}_\sigma]$ heißt **meßbare Abbildung**, wenn das Urbild $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$ jeder meßbaren Menge $B \in \mathcal{B}_\sigma$ eine meßbare Menge in $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ ist, d. h. $f^{-1}[B] \in \mathcal{A}_\sigma$.*

Wie man leicht nachprüfen kann²², formen die Mengenfamilien

$$\mathcal{A}_f(\mathcal{B}_\sigma) = \{f^{-1}[B] : B \in \mathcal{B}_\sigma\} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{M}_f(Y) = \{M \subset Y : f^{-1}[M] \in \mathcal{A}_\sigma\}$$

der Urbildmengen aller meßbaren Mengen aus $[Y, \mathcal{B}_\sigma]$ bzw. aller Teilmengen aus Y , deren Urbilder in $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ meßbar sind, σ -Algebren in X bzw. in Y . Mit Hilfe dieser σ -Algebren können wir die Meßbarkeit einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ offenbar auch folgendermaßen charakterisieren (nachfolgend bezeichne $\mathcal{L} \subset \mathfrak{P}(Y)$ ein beliebiges Erzeugendensystem der σ -Algebra $\mathcal{B}_\sigma$, ggf. also auch $\mathcal{B}_\sigma = \mathcal{L}$ selbst):

$$f : [X, \mathcal{A}_\sigma] \rightarrow [Y, \mathcal{B}_\sigma] \quad \text{meßbar} \iff \mathcal{A}_f(\mathcal{B}_\sigma) \subseteq \mathcal{A}_\sigma \quad \text{oder} \quad \mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}_f(Y).$$

Es ist möglich, daß $\mathcal{A}_f(\mathcal{B}_\sigma)$ nur aus X selbst und der leeren Menge besteht, oder daß $\mathcal{M}_f(Y) = \{\emptyset, f[X], (f[X])^c, Y\}$ gilt. Derartige Fälle sind bei surjektiven Abbildungen und nicht trivialen σ -Algebren i. a. ausgeschlossen. Für eine surjektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ wird $\mathcal{M}_f(Y)$ auch als **Bild $f(\mathcal{A}_\sigma)$ der σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma$** bezeichnet [68].

Es sei nun $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ ein Maßraum. Die auf der σ -Algebra $\mathcal{B}_\sigma$ vermöge

$$\nu_f(B) = \mu(f^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}_\sigma \tag{1.13}$$

²² Hierzu sind u. a. die für jede beliebige Indexmenge I und jede Abbildung f gültigen Relationen der Form $\bigcup_{i \in I} f^{-1}[M_i] = f^{-1}[\bigcup_{i \in I} M_i]$ bzw. $\bigcap_{i \in I} f^{-1}[M_i] = f^{-1}[\bigcap_{i \in I} M_i]$ zu beachten.

definierte Mengenfunktion $\nu_f : \mathcal{B}_\sigma \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ist dann ein Maß, denn für wechselseitig disjunkte B_n aus $\mathcal{B}_\sigma$ ($n \in \mathbb{N}$) sind auch die Mengen $f^{-1}(B_n)$ wechselseitig disjunkt, so daß die σ -Additivität von ν_f aus derjenigen von μ folgt (die Relationen $\nu_f(B) \geq 0$ und $\nu_f(\emptyset) = 0$ bestehen trivialerweise).

Definition 1.5.2 (Induzierte Maße) $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ und $[Y, \mathcal{B}_\sigma]$ seien meßbare Räume, $f : [X, \mathcal{A}_\sigma] \rightarrow [Y, \mathcal{B}_\sigma]$ eine meßbare Abbildung, μ ein Maß über $\mathcal{A}_\sigma$. Das vermöge (1.13) definierte Maß ν_f heißt **das durch die Abbildung f induzierte Maß über $\mathcal{B}_\sigma$** .

Für Abbildungen meßbarer Räume in meßbare Räume ist eine erweiterte Version des Begriffes „ σ -Operator“ gebräuchlich, die insbesondere in der Theorie stochastischer Prozesse Anwendung findet.

Definition 1.5.3 Es seien I eine Indexmenge, $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ und $\{[Y_i, \mathcal{B}_i]\}_{i \in I}$ meßbare Räume. Über der Menge der meßbaren Abbildungen von $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ in die Räume $[Y_i, \mathcal{B}_i]$ ($i \in I$) wird der **Operator σ** definiert durch

$$\sigma(\varphi_i : i \in I) = \sigma(\{\varphi_i^{-1}(B_i) : B_i \in \mathcal{B}_i, i \in I\}). \quad (1.14)$$

Die Meßbarkeit von (erweitert-reellwertigen) Funktionen²³, d. h. von Abbildungen von einem meßbaren Raum in den durch Hinzunahme von $+\infty$ und $-\infty$ kompaktifizierten $\mathbb{R}$, wird häufig nur unter Bezugnahme auf die offenen Mengen aus $\mathbb{R}$ definiert. Genauer nennt man eine erweitert-reellwertige Funktion $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ über dem meßbaren Raum $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ eine **meßbare Funktion**, falls das Urbild $f^{-1}[O]$ jeder offenen Menge aus $\mathbb{R}$ und zusätzlich die Mengen $f^{-1}(-\infty) = \{x : f(x) = -\infty\}$ und $f^{-1}(+\infty) = \{x : f(x) = +\infty\}$ meßbar sind. Daß diese Form der Definition keine Einschränkung bedeutet, zeigt die Tatsache, daß die Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ von der Familie aller offenen Mengen erzeugt wird. Enthält nämlich die σ -Algebra $\mathcal{M}_f(\bar{\mathbb{R}})$ aller Teilmengen M aus $\bar{\mathbb{R}}$, deren Urbilder meßbar sind, alle offenen Mengen aus $\mathbb{R}$, so folgt $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{M}_f(\bar{\mathbb{R}})$, so daß f auch meßbar im Sinne der Definition 1.5.1 ist.

Die Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ enthält alle offenen, halboffenen sowie abgeschlossenen Intervalle und wird von der Mengenfamilie $\tilde{\mathcal{E}} = \{[r, +\infty] : r \in \mathbb{R}\}$ erzeugt, denn wegen

$$\{+\infty\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} [j, +\infty], \quad \{-\infty\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} [-j, +\infty]^c$$

enthält $\sigma(\tilde{\mathcal{E}})$ die „Kompaktifizierungsmengen“ $\{+\infty\}$ und $\{-\infty\}$ sowie – wie leicht nachzuprüfen – auch alle Intervalle der Form $[r, s)$, $(r, s]$, (r, s) , $[r, s]$, $(-\infty, r]$, $[r, +\infty)$. Eine erweitert-reellwertige Funktion $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ist also d. u. n. d. meßbar, wenn $\tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{M}_f(\bar{\mathbb{R}})$ ist. Mit $\mathcal{E} = \{(r, +\infty] : r \in \mathbb{R}\}$ gilt insgesamt

$$f \text{ meßbar} \iff \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{M}_f(\bar{\mathbb{R}}) \iff \mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_f(\bar{\mathbb{R}}) \iff \tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{M}_f(\bar{\mathbb{R}}).$$

²³ Erweitert-reellwertige Funktionen werden häufig auch als *numerische Funktionen* bezeichnet.

Damit ergibt sich folgende wichtige Aussage, die wir als Lemma formulieren:²⁴

Lemma 1.5.1 *Eine erweitert-reellwertige Funktion $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ über einem meßbaren Raum $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ ist d. u. n. d. meßbar, wenn die Mengen $f^{-1}(-\infty)$, $f^{-1}(+\infty)$ sowie $f^{-1}[r, +\infty)$ (oder $f^{-1}(r, +\infty)$, oder $f^{-1}(-\infty, r]$, oder $f^{-1}(-\infty, r)$) für jedes $r \in \mathbb{R}$ meßbar sind.*

Sind f_1, f_2 erweitert-reellwertige Funktionen über $[X, \mathcal{A}_\sigma]$, so läßt sich die Menge $\{x : f_1(x) < f_2(x)\}$ als Durchschnitt zweier Mengen obigen Typs darstellen:²⁵

$$\{x : f_1(x) < f_2(x)\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{x : f_1(x) < q\} \cap \{x : q < f_2(x)\}).$$

Weiterhin bestehen offenbar die Beziehungen

$$\begin{aligned} \{x : f_1(x) \leq f_2(x)\} &= \{x : f_1(x) > f_2(x)\}^c, \\ \{x : f_1(x) = f_2(x)\} &= \{x : f_1(x) \leq f_2(x)\} \cap \{x : f_1(x) \geq f_2(x)\}, \\ \{x : f_1(x) \neq f_2(x)\} &= \{x : f_1(x) = f_2(x)\}^c; \end{aligned}$$

daher liefern die bisherigen Ergebnisse auch noch zu das nachstehende Resultat.

Korollar 1.5.2 *Sind die erweitert-reellwertigen Funktionen f_1, f_2 über $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ meßbar, so sind die Mengen $\{x : f_1(x) < f_2(x)\}$, $\{x : f_1(x) \leq f_2(x)\}$, $\{x : f_1(x) = f_2(x)\}$, $\{x : f_1(x) \neq f_2(x)\}$ Elemente der σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma$.*

Funktionen der Form $f_1 \pm f_2 : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ bzw. $f_1 f_2 : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ werden im Folgenden definiert durch $(f_1 \pm f_2)(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ bzw. $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, sofern die jeweiligen rechten Seiten stets eindeutig bestimmt sind²⁶. Für eine Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Abbildungen $X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ sind Supremum, Infimum sowie oberer und unterer Limes erklärt als

$$\begin{aligned} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n\right)(x) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), & \left(\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n\right)(x) &= \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \\ \left(\overline{\lim}_{n \in \mathbb{N}} f_n\right)(x) &= \overline{\lim}_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), & \left(\underline{\lim}_{n \in \mathbb{N}} f_n\right)(x) &= \underline{\lim}_{n \in \mathbb{N}} f_n(x). \end{aligned}$$

Eine Funktionenfolge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ über einem Maßraum heißt **fast überall** (bzw. **überall**) **punktweise konvergent**, falls es eine Funktion φ gibt mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \varphi(x) \quad \text{fast überall (bzw. überall).}$$

²⁴ Meßbare Funktionen $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ werden häufig als *Borel-Funktionen* bezeichnet.

²⁵ $\mathbb{Q}$ bezeichne die (abzählbare) Menge der rationalen Zahlen.

²⁶ Demnach wird verlangt, daß im Falle der Summe nicht gleichzeitig $f_1(x) = +\infty$ und $f_2(x) = -\infty$ oder umgekehrt – bzw. im Falle des Produktes nicht gleichzeitig $f_1(x) = 0$ und $f_2(x) = \pm\infty$ oder umgekehrt – möglich sind.

Ohne Angabe von Beweisen nennen wir noch drei leicht nachprüfbare Resultate zu Eigenschaften meßbarer Funktionen (vergl. [10, 63]).

Satz 1.5.3 *Es seien $f_n : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ meßbare Funktionen über dem meßbaren Raum $[X, \mathcal{A}_\sigma]$. Dann sind auch die Funktionen $f_i \pm f_j$, $f_i f_j$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n$ und $\underline{\lim}_{n \in \mathbb{N}} f_n$ meßbar.*

Satz 1.5.4 *Bildet ein vollständiger metrischer Raum X einen Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$, und gleicht $\varphi(x)$ f. ü. einer meßbaren Funktion $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, so ist auch φ selbst meßbar.*

Satz 1.5.5 *Konvergiert eine Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ meßbarer erweitert-reellwertiger Funktionen über einem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ überall gegen eine gegebene Funktion φ , so ist φ meßbar. Ist darüberhinaus X ein vollständiger metrischer Raum, so genügt für die Meßbarkeit von φ die Forderung, daß die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ f. ü. gegen φ konvergiert.*

Ist $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ ein meßbarer Raum, so repräsentiert offenbar für jedes $U \in \mathcal{A}_\sigma$ die Familie $\mathcal{U} = \{A \cap U : A \in \mathcal{A}_\sigma\}$ eine σ -Algebra in $\mathfrak{P}(U)$, mit der $[U, \mathcal{U}]$ ebenfalls ein meßbarer Raum ist. $\mathcal{U}$ wird als die **Spur- σ -Algebra** zu U bezeichnet. Wegen $\{0\} \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ gilt nun für jede über einem meßbaren Raum $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ definierte meßbare Funktion f , daß $T(f)^c = \{x : f(x) = 0\} \in \mathcal{A}_\sigma$ ist, also auch $T(f) = \{x : f(x) \neq 0\} \in \mathcal{A}_\sigma$. Daher definiert bei gegebenem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ der Träger $T(f)$ einer meßbaren Funktion f über X einen Maßraum $[T(f), \mathcal{T}_f, \mu]$ mit der σ -Algebra $\mathcal{T}_f = \{A \cap T(f) : A \in \mathcal{A}_\sigma\}$. Diese Feststellung erweist sich für viele Überlegungen als hilfreich.

Die Ideen Henri Léon Lebesgues haben über die Untersuchung sog. einfacher Funktionen zur Definition von Integralen in allgemeinen Maßräumen geführt. Die Elemente dieser Integrationstheorie werden im folgenden Abschnitt kurz skizziert. Um den Hinweis auf beliebige Maßräume zu betonen, sprechen wir von der „Integrabilität“ einer Funktion anstelle von „Integrierbarkeit“.

1.6 Integrale in Maßräumen I: Einfache Funktionen

Wir gehen im Folgenden stets von einem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ aus.

Definition 1.6.1 *Eine meßbare Abbildung $s : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt **einfache Funktion**, falls es endlich viele wechselseitig disjunkte und meßbare Mengen $E_1, \dots, E_m$ sowie reelle Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ derart gibt, daß*

$$s(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot 1_{E_k}(x). \quad (1.15)$$

Sind alle α_k in dieser Summe verschieden, so sagt man, daß $s(x)$ **in kanonischer Form** vorliegt. Sind alle α_k verschieden und ungleich Null, so bezeichnet man die Darstellung (1.15) als **reduzierte kanonische Form** von s . Eine einfache Funktion s heißt **integrierbar**²⁷, falls die in der reduzierten kanonischen Form auftretenden Mengen E_k von endlichem Maße sind, d. h. $\mu(E_k) < \infty$ für jedes $k \in \{1, \dots, m\}$ mit $\alpha_k \neq 0$. Das Integral ist definiert als

$$\int_X s(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mu(E_k). \quad (1.16)$$

Liegt eine einfache Funktion s in nicht kanonischer Form vor, so pflegt man im Falle $\alpha_k = 0$ und $\mu(E_k) = \infty$ $\alpha_k \mu(E_k) =_{def.} 0$ zu setzen; die Bedingung für die Integrabilität lautet dann $\mu(E_k) < \infty$ für $\alpha_k \neq 0$. Der Integrationsbereich X in (1.16) ist offenbar mit dem Definitionsbereich des Maßes identisch; der Hinweis darauf kann daher entfallen. Auch benutzt man häufig die durch Weglassung der Argumente verkürzte Schreibweise, so daß (1.16) auch in der Form

$$\int s d\mu = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mu(E_k)$$

schreibbar ist. Die Wohldefiniertheit der linken Seiten von (1.16) ergibt sich daraus, daß aus $s(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot 1_{E_k}(x) = \sum_{\ell=1}^n \beta_\ell \cdot 1_{G_\ell}(x)$ mit anderen wechselseitig disjunkten Mengen $G_1, \dots, G_n$ endlichen Maßes stets $\sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mu(E_k) = \sum_{\ell=1}^n \beta_\ell \cdot \mu(G_\ell)$ folgt. Man beachte, daß das Integral einer einfachen Funktion stets endlich ist.

Definition 1.6.2 Eine einfache Funktion $s(x)$ heißt **integrierbar über einer meßbaren Teilmenge A** , falls die ebenfalls einfache Funktion $1_A(x)s(x)$ integrierbar über X ist. Ihr Integral über A wird durch

$$\int_A s(x) d\mu(x) = \int 1_A(x) \cdot s(x) d\mu(x) \quad \text{bzw.} \quad \int_A s d\mu = \int 1_A \cdot s d\mu$$

erklärt.

Für jede meßbare Teilmenge A endlichen Maßes ist die Indikatorfunktion 1_A einfach und integrierbar mit $\int 1_A(x) d\mu(x) = \mu(A)$; daher folgt speziell

$$\int_A d\mu = \mu(A) \quad \text{für } \mu(A) < \infty, \quad A \in \mathcal{A}_\sigma. \quad (1.17)$$

Darüberhinaus besitzen integrierbare einfache Funktionen folgende Eigenschaften, die wir ohne Beweis in einer Satzaussage zusammenfassen.

²⁷ Genauer sollte man sagen „integrierbar bzgl. μ “ oder kurz „ μ -integrierbar“. Solange jedoch keine Zweideutigkeiten auftreten können, behalten wir die Bezeichnung „integrierbar“ bei.

Satz 1.6.1 Es seien $c_1, \dots, c_m$ reelle Zahlen und $s, s_1, \dots, s_m$ einfache integrable Funktionen über einem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$.

- Jede Linearkombination $\sum_{k=1}^m c_k s_k$ ist selbst integrable einfache Funktion mit

$$\int \sum_{k=1}^m c_k s_k d\mu = \sum_{k=1}^m c_k \int s_k d\mu;$$

- mit $s(x)$ ist stets auch die Funktion $|s|(x) = |s(x)|$ integrable einfache Funktion, und es ist

$$\left| \int s d\mu \right| \leq \int |s| d\mu;$$

- $\int |s_1 + s_2| d\mu \leq \int |s_1| d\mu + \int |s_2| d\mu$,
- $s(x) \geq 0$ f. ü. $\implies \int s d\mu \geq 0$;
- $s(x) = 0$ f. ü. $\iff \int_A s d\mu = 0$ für jedes $A \in \mathcal{A}_\sigma$;
- $s_1(x) \geq s_2(x)$ f. ü. $\implies \int s_1 d\mu \geq \int s_2 d\mu$;
- ist $\mu(A) < \infty$ und $a \leq s(x) \leq b$ f. ü. in A , so gilt

$$a \cdot \mu(A) \leq \int_A s d\mu \leq b \cdot \mu(A);$$

- sind A und B meßbar mit $A \subset B$ und ist $s(x) \geq 0$ f. ü. in B , so gilt

$$\int_A s d\mu \leq \int_B s d\mu;$$

- das Integral einer integrablen einfachen Funktion $s(x)$ über einer abzählbaren Vereinigung $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ disjunkter meßbarer Mengen A_n ist die Summe der Integrale über den A_n :

$$\int_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} s d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} s d\mu, \quad \text{falls } A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j;$$

- mit $s_1(x)$ und $s_2(x)$ ist auch $s_1 s_2(x) = s_1(x) \cdot s_2(x)$ integrable einfache Funktion.

1.7 Konvergenz in Maßräumen

Wir beginnen mit einer viel zitierten und für die Frage der Integrierbarkeit allgemeiner Funktionen wichtigen Aussage.

Satz 1.7.1 Zu jeder nicht negativen meßbaren Funktion f über einem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ gibt es eine monoton nicht abnehmende Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ einfacher nicht negativer Funktionen, die überall gegen f konvergiert.

Beweis Man betrachte die sog. **dyadischen Elementarzellen**

$$E_k(n) = \left\{ x \in X : f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) \right\}, \quad k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$$

$$E_\infty(n) = \{x \in X : f(x) \geq n\},$$

und definiere die Elementarfunktionen s_n für alle positiven natürlichen Zahlen n vermöge

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{falls } x \in E_k(n) \text{ für } 0 \leq k \leq n \cdot 2^n - 1 \\ n, & \text{falls } x \in E_\infty(n) \end{cases}$$

$$= \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \cdot 1_{E_k(n)}(x) + n \cdot 1_{E_\infty(n)}(x). \quad (1.18)$$

Da die halboffenen Intervalle in $\mathbb{R}$ zur Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ gehören und f eine meßbare Funktion ist, sind die Urbildmengen $E_k(n)$ und $E_\infty(n)$ meßbar. Dies impliziert die Meßbarkeit der Funktionen s_n . Wie leicht nachzuprüfen, ist $s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \quad \forall x \in X$, d. h. die Elementarfunktionen s_n bilden eine monoton nicht abnehmende Folge mit der Eigenschaft

$$0 \leq |f(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{für } f(x) \leq n.$$

Da zudem $s_n(x) = n$ für alle x mit $f(x) = \infty$ gilt, folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$ für jeden Punkt $x \in X$. $\square$

Definition 1.7.1 Es sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge μ -endlicher meßbarer Funktionen. Die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **fast gleichmäßig konvergent** gegen die meßbare Funktion φ , falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine meßbare Menge N_ε mit $\mu(N_\varepsilon) < \varepsilon$ existiert, so daß $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $X \setminus N_\varepsilon$ gleichmäßig gegen φ konvergiert²⁸.

Es läßt sich leicht zeigen, daß aus der fast gleichmäßigen Konvergenz einer Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μ -endlicher meßbarer Funktionen gegen eine meßbare Funktion φ deren gewöhnliche Konvergenz gegen φ fast überall folgt. Außerdem ist die Grenzfunktion φ dann ebenfalls μ -endlich. Da es nämlich zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine meßbare Menge A_k gibt mit $\mu(A_k) < 1/k$, in deren Komplement $A_k^c = X \setminus A_k$ die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen φ konvergiert, ist $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ auch in allen Punkten der Vereinigung

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right)^c$$

²⁸ Wir erinnern daran, daß eine Funktionenfolge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion φ konvergiert, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine nicht von x abhängige natürliche Zahl n_0 derart gibt, daß $|f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ (und alle $x \in X$) ist.

konvergent, wobei aus $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \mu(A_\ell) < 1/\ell$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ folgt, daß das Komplement dieser Vereinigung vom Maße Null ist. Die nicht triviale Umkehrung dieser Aussage – für den Fall eines total endlichen Maßes – wurde von D.F. Egoroff bewiesen.

Satz 1.7.2 (Egoroff) *Es sei $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ ein Maßraum mit total endlichem Maße μ . Konvergiert eine Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μ -endlicher meßbarer Funktionen f ü. gegen eine μ -endliche meßbare Funktion φ , so konvergiert $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ auch fast gleichmäßig gegen φ .*

Beweis Wir konstruieren zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine Menge N_ε mit $\mu(N_\varepsilon) < \varepsilon$, in deren Komplement $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen φ konvergiert. Dazu setze man $D_{j,n} = \{x : |f_j(x) - \varphi(x)| < \frac{1}{n}\}$ für $j \in \mathbb{N}$. Offenbar ist jedes $D_{j,n} \in \mathcal{A}_\sigma$, und somit auch $A_{k,n} = \bigcap_{j=k}^{\infty} D_{j,n} \in \mathcal{A}_\sigma$, wobei die $A_{k,n}$ bzgl. k eine monoton abfallende (zumindest nicht zunehmende) Mengenfolge bilden: $A_{k,n} \subseteq A_{k+1,n}$. Da fast überall $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = \varphi(x)$ gilt, ist das Komplement von $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{k,n}$ eine Nullmenge: $\mu(X \setminus \lim_{k \rightarrow \infty} A_{k,n}) = 0$. Außerdem folgt nach Lemma 1.2.2 aus $\mu(X) < \infty$ und der Monotonie-Eigenschaft der Mengenfolge $\{A_{k,n}\}_{k \in \mathbb{N}}$, daß

$$\mu(X \setminus \lim_{k \rightarrow \infty} A_{k,n}) = \mu\left(\lim_{k \rightarrow \infty} (X \setminus A_{k,n})\right) \stackrel{!}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(X \setminus A_{k,n})$$

ist. Daher kann man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ und zu jedem n ein k_n finden mit $\mu(X \setminus A_{k_n,n}) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ für alle $k \geq k_n$. Der Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n,n} =: X \setminus N_\varepsilon$ genügt also den Beziehungen

$$\mu(N_\varepsilon) = \mu\left(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n,n}\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_{k_n,n})\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

während in $X \setminus N_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n,n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=k_n}^{\infty} D_{j,n}$ offenbar $|f_n(x) - \varphi(x)| < \frac{1}{n}$ für jedes x gilt, also $|f_n(x) - \varphi(x)| < \delta$ für alle $n \geq n_0(\delta) = \frac{1}{\delta}$ unabhängig von x , so daß dort die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen φ konvergiert. $\square$

Definition 1.7.2 Eine Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μ -endlicher meßbarer Funktionen über dem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ heißt **konvergent im Maß** oder **μ -stochastisch konvergent**, falls es eine meßbare Funktion φ derart gibt, daß für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x : |f_n(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad (1.19)$$

wird.

Die Grenzfunktion φ ist bis auf eine Menge vom Maße Null eindeutig bestimmt und μ -endlich. Ist nämlich ψ eine weitere meßbare Funktion, gegen die $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ im Maße konvergiert, so folgt aus

$$0 < 2\varepsilon = |\varphi(x_0) - \psi(x_0)| \leq |\varphi(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - \psi(x_0)|,$$

daß $x_0 \notin \{x : |\varphi(x) - f_n(x)| < \varepsilon\} \cap \{x : |f_n(x) - \psi(x)| < \varepsilon\}$ ist, vielmehr $x_0 \in \{x : |\varphi(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} \cup \{x : |f_n(x) - \psi(x)| \geq \varepsilon\}$ gilt; das bedeutet aber für $N = \{x : |\varphi(x) - \psi(x)| > 0\}$

$$\mu(N) \leq \mu(\{x : |f_n(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon\}) + \mu(\{x : |f_n(x) - \psi(x)| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Daß die Grenzfunktion φ in (1.19) μ -endlich ist, ergibt sich unmittelbar aus der entsprechenden Eigenschaft der f_n .

Zuweilen wird die Kennzeichnung der μ -stochastischen Konvergenz mit Hilfe der schwächeren Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x : |f_n(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon\} \cap A) = 0 \quad (1.20)$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $A \in \mathcal{A}_\sigma$ mit $\mu(A) < \infty$ angegeben [10]. Im Falle eines totalendlichen Maßes fällt diese Bedingung allerdings mit der hier genannten zusammen. (1.20) erlaubt die Betrachtung derart μ -stochastisch konvergenter Folgen, für die die Maßzahlen $\mu(\{x : |f_n(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon\})$ selbst unendlich werden. In [10] findet man ein Beispiel einer solchen gegen die Nullfunktion im Sinne von (1.20) μ -stochastisch konvergierenden Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in einem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ mit σ -endlichem, aber nicht total endlichen Maß μ , die die schärfere Bedingung (1.19) nicht erfüllt: Mit $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_\sigma = \mathfrak{P}(\mathbb{N})$, $\mu(\{n\}) = 1/n$ und $f_n(k) = 1_{A_n}(k)$ für $A_n = \{n, n+1, \dots\}$ konvergiert die monoton abnehmende Mengenfølge $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen die leere Menge, so daß mit $\{x : |f_n(x)| \geq \varepsilon\} = A_n$ für $0 < \varepsilon < 1$ einerseits $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \cap A) = 0$ wird, andererseits aber $\mu(A_n) = \infty$ ist für jedes n .

Satz 1.7.3 *Konvergiert die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μ -endlicher meßbarer Funktionen fast gleichmäßig gegen eine meßbare Funktion φ , so konvergiert sie auch im Maß gegen φ . Ist μ total endlich, so genügt statt fast gleichmäßiger Konvergenz die einfache Konvergenz fast überall.*

Beweis 1. Laut Voraussetzung gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine meßbare Menge N_ε mit $\mu(N_\varepsilon) < \varepsilon$ und $|f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X \setminus N_\varepsilon$ und $n \geq n_0(\varepsilon)$. Es sei $G_n(\varepsilon) = \{x : |f_n(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon\}$, womit man $G_n(\varepsilon) \subseteq N_\varepsilon$ für $n \geq n_0(\varepsilon)$ und $G_n(\varepsilon_1) \subseteq G_n(\varepsilon_2)$ für $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ erhält. Gäbe es ein ε_0 sowie eine Menge A endlichen Maßes, so daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_n(\varepsilon_0) \cap A) = \delta > 0$ bleibt, so hätte man wegen $(G_n(\varepsilon_0) \cap A) \subseteq (N_{\varepsilon_0} \cap A)$ die Relation $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_n(\varepsilon_0) \cap A) \leq \mu(N_{\varepsilon_0}) < \varepsilon_0$, während mit der Wahl $\varepsilon = \delta < \varepsilon_0$ auch $G_n(\varepsilon_0) \subseteq G_n(\delta)$ wird und daher

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_n(\varepsilon_0) \cap A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_n(\delta) \cap A) \leq \mu(N_\delta \cap A) < \delta,$$

ein offensichtlicher Widerspruch.

2. Ist das Maß μ total endlich, so konvergiert nach Satz 1.7.2 eine gegen φ fast überall konvergente Folge auch fast gleichmäßig gegen φ , so daß der Aussagenteil 1 greift. $\square$

Definition 1.7.3 *Die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **Cauchy-Folge im Maß** oder **μ -stochastische Cauchy-Folge**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ gilt*

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0 \quad \text{für } m, n \rightarrow \infty.$$

Satz 1.7.4 Ist $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge im Maß mit μ -endlichen meßbaren Funktionen f_n , so enthält $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen eine meßbare Funktion φ fast gleichmäßig konvergierende Teilfolge $\{f_{n_v}\}_{v \in \mathbb{N}}$.

Beweis Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ gibt es ein $n(\varepsilon_k) =: n_k$ derart, daß

$$\mu \left(\left\{ x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{2^k} \right\} \right) < \frac{1}{2^k} \quad \text{für } n, m \geq n_k$$

ist, wobei man o. E. d. A. $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ annehmen kann. Setzt man $G_k = \{x : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \geq \frac{1}{2^k}\}$, so folgt für jedes $\ell \geq 1$ und jedes $x \in X \setminus (\bigcup_{k=\ell}^{\infty} G_k)$

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| < \frac{1}{2^\ell} \quad \text{für } i \leq j \leq \ell,$$

d. h. $|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| \rightarrow 0$ mit $i, j \rightarrow \infty$. Die Teilfolge $\{f_{n_v}\}_{v \in \mathbb{N}}$ bildet also eine gleichmäßige Cauchy-Folge²⁹ über $X \setminus (\bigcup_{k=\ell}^{\infty} G_k)$ für jedes $\ell \geq 1$. Daher existiert eine über

$$\bigcup_{\ell=1}^{\infty} \left(X \setminus \left(\bigcup_{k=\ell}^{\infty} G_k \right) \right) =: M$$

definierte Funktion φ_0 , gegen die $\{f_{n_v}\}_{v \in \mathbb{N}}$ in jeder der Mengen $X \setminus (\bigcup_{k=\ell}^{\infty} G_k)$, $\ell \geq 1$, gleichmäßig konvergiert. Nach Satz 1.5.5 ist φ_0 meßbar über M . Sei nun $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ für $x \in M$ und $\varphi(x) = 0$ für $x \in M^c = X \setminus M$; dann ist diese über ganz X definierte Funktion wegen $\varphi^{-1}[U] = \varphi_0^{-1}[U] \cup \{0\}$ offensichtlich ebenfalls meßbar. Zu $\varepsilon > 0$ wähle man den Index $\ell(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^{\ell(\varepsilon)-1}} \leq \varepsilon < \frac{1}{2^{\ell(\varepsilon)-2}}$ und bilde die Menge $N_\varepsilon = \bigcup_{k=\ell(\varepsilon)}^{\infty} G_k$; dann konvergiert $\{f_{n_v}\}_{v \in \mathbb{N}}$ in $X \setminus N_\varepsilon$ gleichmäßig gegen φ , und es ist $\mu(N_\varepsilon) < \frac{1}{2^{\ell(\varepsilon)-1}} \leq \varepsilon$, d. h. die Teilfolge konvergiert in X fast gleichmäßig gegen φ . $\square$

Satz 1.7.4 liefert zusammen mit Satz 1.7.3 das

Korollar 1.7.5 Zu einer μ -stochastischen Cauchy-Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ f. ü. reellwertiger meßbarer Funktionen gibt es stets eine Teilfolge $\{f_{n_v}\}_{v \in \mathbb{N}}$ sowie eine meßbare Funktion φ , so daß $\{f_{n_v}\}_{v \in \mathbb{N}}$ μ -stochastisch gegen φ konvergiert.

1.8 Integrale in Maßräumen II: Allgemeine Funktionen

Definition 1.8.1 Eine Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ integrierbarer einfacher Funktionen über dem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ heißt **Cauchy-Folge im Mittel** oder **$\mathcal{L}^1$ -Cauchy-Folge**, falls mit $n, m \rightarrow \infty$ das Integral $\int |s_n - s_m| d\mu$ gegen Null strebt³⁰.

²⁹ Für $k_1, k_2 > k_0(\delta)$ wird $|f_{n_{k_1}}(x) - f_{n_{k_2}}(x)| < \delta$ unabhängig von x .

³⁰ Eine meßbare Funktion heißt p -fach μ -integrierbar, wenn $\int |f|^p d\mu$ erklärt ist ($p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$). Die Menge der reellwertigen p -fach μ -integrierbaren Funktionen bezeichnet man mit dem Symbol

Definition 1.8.2 Eine erweitert reellwertige meßbare Funktion f über dem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ heißt **integrabel**, wenn es eine $\mathcal{L}^1$ -Cauchy-Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ integrierbarer einfacher Funktionen gibt, die f ü. gegen f konvergiert, für die also $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X \setminus N$ ist mit einer Nullmenge N . Das Integral von f ist definiert als

$$\int f(x) d\mu(x) =: \int f d\mu \stackrel{!}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n d\mu. \quad (1.21)$$

Die Existenz des Grenzwertes folgt aus der $\mathcal{L}^1$ -Cauchy-Folgen-Eigenschaft der s_n und der Tatsache, daß jede Cauchy-Folge im vollständigen reellen Raum $\mathbb{R}$ konvergiert (mit $n, m \rightarrow \infty$ geht $|\int s_n d\mu - \int s_m d\mu| \leq \int |s_n - s_m| d\mu$ gegen 0). Die eindeutige Bestimmtheit und damit die Wohldefiniertheit des Integrals wird unten (Satz 1.8.5) gezeigt. Es läßt sich leicht nachweisen, daß eine meßbare Funktion f d. u. n. d. integrabel ist, wenn dies für die Funktionen f^+ und f^- zutrifft, oder wenn $|f|$ integrabel ist³¹. Das Integral von f ist daher stets schreibbar als

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu. \quad (1.22)$$

Die Integrabilität von f impliziert offenbar diejenige von $1_A f$. Über einer meßbaren Teilmenge A ist das Integral der integrierbaren Funktion f definiert als

$$\int_A f d\mu = \int 1_A f d\mu. \quad (1.23)$$

Da für diese Festlegung die Integrabilität von $1_A f$ ausreicht, ist (1.23) auch dann erklärt, wenn zwar $1_A f$ integrabel, f jedoch lediglich meßbar ist.

Das Integral (1.21) einer über einem beliebigen Maßraum $[X, \mathcal{A}, \mu]$ definierten integrierbaren Funktion ist im Sinne obiger Definition 1.8.2 zwangsläufig endlich, da die Folge $\{\int s_n d\mu\}_{n \in \mathbb{N}}$ wegen $|\int (s_n - s_m) d\mu| \leq \int |s_n - s_m| d\mu \rightarrow 0$ für $n, m \rightarrow \infty$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ darstellt, die einem endlichen Grenzwert zustrebt. Umgekehrt ist eine beschränkte nicht negative Funktion bzgl. eines total endlichen Maßes integrabel, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 1.8.1 In einem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ mit total endlichem Maße μ ist jede nicht negative meßbare und nach oben durch eine Konstante $K > 0$ beschränkte Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ endlich μ -integrabel.

Beweis Nach Satz 1.7.1 gibt es stets eine monoton nicht abnehmende Folge einfacher, überall gegen f konvergierender Funktionen s_n der Form (1.18) mit den Trägermengen $E_k(n)$,

$\mathcal{L}^p(\mu)$ oder kurz $\mathcal{L}^p$ (in Anlehnung an die Notation für p -fach Lebesgue-integrierbare Funktionen in der Analysis).

³¹ Positiv- bzw. Negativanteil einer Funktion f sind definiert als $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ bzw. $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.

$1 \leq k \leq n 2^n - 1$ und $E_\infty(n)$, und diese s_n erfüllen $0 \leq f(x) - s_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$, falls $f(x) < n$ ist, und $s_n(x) = n$, falls $f(x) = \infty$ wird. Sie sind bzgl. des total endlichen Maßes zwangsläufig integrierbar. Ist $f(x)$ für jedes $x \in X$ durch eine Konstante K nach oben beschränkt, so ist für alle $n > K$ jede der Funktionen $|f - s_n|$ integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int s_m d\mu - \int s_n d\mu \right| &\leq \int |s_m - s_n| d\mu \leq \int (|s_m - f| + |f - s_n|) d\mu \\ &\leq \int |s_m - f| d\mu + \int |f - s_n| d\mu \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

d. h. die Zahlen $\int s_n d\mu$ bilden eine Cauchy-Folge und konvergieren gegen $\int f d\mu < \infty$. $\square$

Unbefriedigend bleibt, daß in allgemeinen Maßräumen gemäß Definition 1.8.2 (die nur zu endlichen Integralwerten führt) sogar beschränkte stetige Funktionen – definiert etwa über der reellen Achse – nicht integrierbar sein müssen. Dem begegnet man durch eine Erweiterung des Integralbegriffes: Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine meßbare und nicht negative, jedoch nicht im Sinne der Definition 1.8.2 integrierbare Funktion, so wird

$$\int f d\mu = \infty \quad (1.24)$$

gesetzt. Einer beliebigen, nicht notwendig integrierbaren, einfachen und nicht negativen Funktion $s(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot 1_{E_k}(x)$ ist demnach stets ein Integral zugeordnet:

$$\int s(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mu(E_k)$$

($E_1, \dots, E_m$ wechselseitig disjunkt und meßbar mit der Möglichkeit, daß $\mu(E_k) = \infty$ wird). Folglich ist die Definition der Integrierbarkeit nicht negativer meßbarer Funktionen aufgrund des Satzes 1.7.1 (Abschn. 1.7) folgendermaßen formulierbar.

Definition 1.8.3 *Es sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine meßbare nicht negative Funktion, $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die nach Satz 1.7.1 existierende monoton nicht abnehmende Folge einfacher Funktionen, die f. ü. punktweise gegen f konvergiert. Dann besitzt f das Integral*

$$\int f(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n(x) d\mu(x).$$

Für Funktionen, die sowohl positive als auch negative Werte annehmen können, wird Folgendes festgelegt.

Definition 1.8.4 *Es sei f meßbar. Ist mindestens eine der Funktionen f^+ und f^- integrierbar im Sinne der Definition 1.8.2, besitzt also insbesondere einen endlichen Integralwert, so wird das μ -Integral $\int f d\mu$ von f vermöge (1.22) erklärt:*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu. \quad (1.25)$$

Ist genau eines der Integrale $\int f^+ d\mu$ und $\int f^- d\mu$ (jedoch nicht das jeweils andere) im Sinne der Definition 1.8.3 unendlich, so heißt f **quasi-integrierbar** mit $|\int f d\mu| = \infty$. Sind beide Anteile, also sowohl f^+ als auch f^- , (endlich) integrierbar gemäß Definition 1.8.2, so heißt f (endlich) **μ -integrierbar**.

Zu einer quasi-integrierbaren Funktion **existiert** also das Integral als endlicher oder unendlicher Wert. Man sagt dann, das Integral von f sei *wohldefiniert*. Sind dagegen die Integrale *beider* Anteilfunktionen f^+ , f^- einer Funktion f unendlich, so besitzt f kein Integral, d. h. die Symbolfolge $\int f d\mu$ bleibt *undefiniert*.

Für $X = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A}_\sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mu = \lambda$ (das Lebesgue-Maß) bezeichnet (1.25) das **Lebesgue-Integral von f** . Falls $\mu = \lambda_F$ ein Lebesgue-Stieltjes'sches Maß bzgl. F ist, repräsentiert $\int f d\lambda_F$ das **Lebesgue-Stieltjes'sche Integral von f bzgl. F** . Die üblichen Schreibweisen für das Lebesgue-Integral und das Lebesgue-Stieltjes-Integral sind³²

$$\int f d\lambda = \int f(x) d(x), \quad \int f d\lambda_F = \int f dF = \int f(x) dF(x). \quad (1.26)$$

Da im eindimensionalen reellen Raum $\mathbb{R}$ das Lebesgue-Maß jedem Intervall $I = (a, b]$ dessen Inhalt $b - a$ zuordnet, wird aus obigen Festlegungen ersichtlich, daß jede meßbare beschränkte Funktion über $\mathbb{R}$ im Sinne von Lebesgue integrierbar ist (vergl. hierzu [124] sowie auch Abschn. A.2).

Bemerkung 1.8.1 Für eine $\mathcal{L}^1$ -Cauchy-Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ einfacher integrierbarer Funktionen, die f. ü. (bzw. im Maße) gegen f konvergiert, gilt für jedes festes k_0

$$\int ||s_{k_0} - s_n| - |s_{k_0} - s_m|| d\mu \leq \int |s_n - s_m| d\mu \rightarrow_{n,m \rightarrow \infty} 0.$$

$\{|s_{k_0} - s_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ bildet daher eine Cauchy-Folge im Mittel mit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \{|s_{k_0} - s_n|\}_{n \in \mathbb{N}} &= |s_{k_0} - f| \quad \text{f. ü. (bzw. im Maße),} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int |s_{k_0} - s_n| d\mu &= \int |s_{k_0} - f| d\mu. \end{aligned}$$

Da $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ selbst Cauchy-Folge im Mittel ist, folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int |s_k - f| d\mu = \lim_{k,n \rightarrow \infty} \int |s_k - s_n| d\mu = 0. \quad \square$$

Bemerkung 1.8.2 Gleicht eine meßbare Funktion φ fast überall einer integrierbaren Funktion f , so ist sie offenbar selbst integrierbar mit $\int f d\mu = \int \varphi d\mu$; denn jede gegen f f. ü. konvergierende $\mathcal{L}^1$ -Cauchy-Folge einfacher integrierbarer Funktionen konvergiert auch fast überall gegen φ . Daraus können wir schließen, daß über einer Nullmenge $N \in \mathcal{A}_\sigma$ jede meßbare Funktion f integrierbar ist mit $\int_N f d\mu = 0$ (denn $1_N(x)f(x) \stackrel{\text{f. ü.}}{=} 0$). $\square$

³² Siehe Definitionen 1.4.1 und 1.4.2, Abschn. 1.4.1.

An die Stelle der fast überall gültigen Konvergenz kann in Definition 1.8.2 auch die Konvergenz im Maß treten:

Lemma 1.8.2 *f ist d. u. n. d. endlich integrierbar, wenn eine $\mathcal{L}^1$ -Cauchy-Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ integrierbarer einfacher Funktionen μ -stochastisch gegen f konvergiert.*

Beweis 1. Ist f integrierbar und $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathcal{L}^1$ -Cauchy-Folge, die f. ü. gegen $f(x)$ konvergiert, so gibt es zu $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine f. ü. reellwertige meßbare Funktion φ , gegen die $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μ -stochastisch konvergiert. Nach Satz 1.7.4 enthält $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $\{s_{n_v}\}_{v \in \mathbb{N}}$, die gegen φ fast gleichmäßig konvergiert. Das bedeutet, daß es zu jedem $\varepsilon_n = 1/n$ eine Menge N_{ε_n} mit $\mu(N_{\varepsilon_n}) \leq \varepsilon_n$ derart gibt, daß $\{s_{n_v}\}_{v \in \mathbb{N}}$ in $X \setminus N_{\varepsilon_n}$ gleichmäßig gegen φ konvergiert. Die Teilfolge ist also in $\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus N_{\varepsilon_n}) = (\bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\varepsilon_n})^c$ gleichmäßig konvergent, wobei $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\varepsilon_n}) \leq 1/n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, also $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\varepsilon_n}) = 0$ gilt, d. h. $\{s_{n_v}\}_{v \in \mathbb{N}}$ konvergiert fast überall gegen φ , woraus $f = \varphi$ f. ü. folgt. Die gegen φ μ -stochastisch konvergente Teilfolge konvergiert also μ -stochastisch auch gegen f .

2. Es sei umgekehrt $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen f μ -stochastisch konvergente $\mathcal{L}^1$ -Cauchy-Folge integrierbarer einfacher Funktionen. Eine Teilfolge $\{s_{n_v}\}_{v \in \mathbb{N}}$ dieser Folge konvergiert dann gemäß Satz 1.7.4 fast gleichmäßig gegen eine meßbare Funktion φ , und eine zum vorangegangenen Schluß analoge Überlegung impliziert $\{s_{n_v}\}_{v \in \mathbb{N}} \rightarrow_{f. \text{ ü.}} \varphi$. $\square$

Ist eine erweitert-reellwertige Funktion φ_M nur auf einer Teilmenge $M \in \mathcal{A}_\sigma$ definiert, so ist der Begriff der Integrierbarkeit von φ_M auf den Maßraum $[M, \mathcal{A}_M, \mu_M]$ zu beziehen, worin $\mathcal{A}_M = \{M \cap A : A \in \mathcal{A}_\sigma\}$ die Spur- σ -Algebra in M ist und μ_M die Restriktion von μ auf M darstellt. φ_M ist d. u. n. d. integrierbar (über M), wenn die auf dem ganzen Raum X definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_M(x) & \text{für } x \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(über X) integrierbar ist. Man schreibt in diesem Falle $\int_M \varphi_M d\mu_M = \int_M \varphi_M d\mu$.

Satz 1.8.3 *Es sei $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathcal{L}^1$ -Cauchy-Folge integrierbarer einfacher Funktionen, die f. ü. gegen die erweitert-reellwertige meßbare Funktion f konvergiert. Die Abbildung $v : \mathcal{A}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch*

$$v(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A s_n d\mu = \int_A f d\mu = \int 1_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{A}_\sigma,$$

ist eine vollständig additive Mengenfunktion.

Beweis Zunächst ist festzustellen, daß der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A s_n d\mu$ existiert und sogar gleichmäßig erreicht wird, da wegen der Cauchy-Folgen-Eigenschaft im Mittel

$$\left| \int_A s_n d\mu - \int_A s_m d\mu \right| \leq \int_A |s_n - s_m| d\mu \leq \int |s_n - s_m| d\mu \rightarrow 0 \quad \text{für } n, m \rightarrow \infty$$

gilt. Sei nun $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ eine Vereinigung disjunkter meßbarer Mengen. Da die Integrale (einfacher Funktionen) additiv sind, hat man für jedes k und $M^{(k)} = \bigcup_{j=1}^k A_j$ die Beziehungen

$$\int_{M^{(k)}} s_n d\mu = \sum_{j=1}^k \int_{A_j} s_n d\mu, \quad v(M^{(k)}) = \sum_{j=1}^k v(A_j).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \left| v(M) - \sum_{j=1}^k v(A_j) \right| &\leq \left| v(M) - \int_M s_n d\mu \right| + \left| \int_M s_n d\mu - \sum_{j=1}^k \int_{A_j} s_n d\mu \right| \\ &\quad + \left| \int_{M^{(k)}} s_n d\mu - v(M^{(k)}) \right|. \end{aligned}$$

Gemäß Definition von v ist für beliebiges $\varepsilon > 0$ und geeignetes $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\left| v(M) - \int_M s_n d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \left| \int_{M^{(k)}} s_n d\mu - v(M^{(k)}) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

wobei $n_0(\varepsilon)$ als abhängig vom Gesamtintegral, jedoch unabhängig von M und $M^{(k)}$ (insbesondere von k) wählbar ist. Das Integral $\int_M s_n d\mu$ ist vollständig additiv für jede der integrierbaren einfachen Funktionen s_n (Satz 1.6.1). Somit hat man für beliebiges ε

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| v(M) - \sum_{j=1}^k v(A_j) \right| \leq \varepsilon + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \int_M s_n d\mu - \sum_{j=1}^k \int_{A_j} s_n d\mu \right| = \varepsilon,$$

also $v(M) = \sum_{j=1}^{\infty} v(A_j)$. □

Satz 1.8.4 Es seien $\{s_n^{(\ell)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\ell = 1, \dots, w$, $\mathcal{L}^1$ -Cauchy-Folgen integrierbarer einfacher Funktionen über dem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$, die f. ü. gegen dieselbe meßbare Funktion f konvergieren. Ist das Maß μ σ -additiv, so stimmen die vermöge

$$v^{(\ell)}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A s_n^{(\ell)} d\mu \quad \text{für } A \in \mathcal{A}_\sigma$$

definierten vollständig additiven Mengenfunktionen über den meßbaren Mengen $A \in \mathcal{A}_\sigma$ überein.

Beweis Die vollständige Additivität der $v^{(\ell)}$ wurde in Satz 1.8.3 festgestellt. Es sei $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ mit $A_j \in \mathcal{A}_\sigma$ und $\mu(A_j) < \infty$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ (σ -Additivität von μ). Man setze $E_1 = A_1$, $E_k = A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$ für $k > 1$, so daß $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = X$ wird und somit X als abzählbare Vereinigung disjunkter meßbarer Mengen E_k endlichen Maßes darstellbar ist.

Wir zeigen nachfolgend, daß für jede der Mengen E_k und jedes Indexpaar $\ell_1 \neq \ell_2$ eine Abschätzung der Form

$$|\nu^{(\ell_1)}(E_k) - \nu^{(\ell_2)}(E_k)| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{E_k} |s_n^{(\ell_1)} - s_n^{(\ell_2)}| d\mu \leq \varepsilon$$

mit beliebigem $\varepsilon > 0$ gilt. Dazu setze man $\eta = \varepsilon/[4 + \mu(E_k)]$ und

$$U_n(\eta; \ell_1, \ell_2) = \left\{ x : |s_n^{(\ell_1)}(x) - s_n^{(\ell_2)}(x)| \geq \eta \right\},$$

womit offenbar

$$U_n(\eta; \ell_1, \ell_2) \subset \left\{ x : |s_n^{(\ell_1)}(x) - f(x)| \geq \frac{\eta}{2} \right\} \cup \left\{ x : |s_n^{(\ell_2)}(x) - f(x)| \geq \frac{\eta}{2} \right\}$$

gilt. Da nach Lemma 1.8.2 jede der $\mathcal{L}^1$ -Cauchy-Folgen $\{s_n^{(\ell)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ μ -stochastisch gegen f konvergiert, hat man $\mu(U_n(\eta; \ell_1, \ell_2)) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Des weiteren gilt offenbar

$$\begin{aligned} \int_{E_k} |s_n^{(\ell_1)} - s_n^{(\ell_2)}| d\mu &\leq \int_{E_k \setminus U_n(\eta; \ell_1, \ell_2)} |s_n^{(\ell_1)} - s_n^{(\ell_2)}| d\mu \\ &\quad + \int_{E_k \cap U_n(\eta; \ell_1, \ell_2)} |s_n^{(\ell_1)}| d\mu + \int_{E_k \cap U_n(\eta; \ell_1, \ell_2)} |s_n^{(\ell_2)}| d\mu, \end{aligned}$$

worin $\int_{E_k \setminus U_n(\eta; \ell_1, \ell_2)} |s_n^{(\ell_1)} - s_n^{(\ell_2)}| d\mu \leq \eta \cdot \mu(E_k)$ ist. Die Cauchy-Folgen-Eigenschaft impliziert, daß für genügend große Zahlen n und m die Abschätzung

$$\int_{E_k \cap U_n(\eta; \ell_1, \ell_2)} |s_n^{(\ell_s)} - s_m^{(\ell_s)}| d\mu \leq \eta \quad \text{für } s \in \{1, 2\}$$

erfüllt wird, so daß

$$\begin{aligned} \int_{E_k \cap U_n(\eta; \ell_1, \ell_2)} |s_n^{(\ell_s)}| d\mu &\leq \int_{E_k \cap U_n(\eta; \ell_1, \ell_2)} (|s_n^{(\ell_s)} - s_m^{(\ell_s)}| + |s_m^{(\ell_s)}|) d\mu \\ &\leq \eta + \int_{E_k \cap U_n(\eta; \ell_1, \ell_2)} |s_m^{(\ell_s)}| d\mu \end{aligned}$$

für $s \in \{1, 2\}$ folgt. Wird nun m festgehalten, so daß $|s_m^{(\ell_s)}(x)| \leq c_s(m)$ f. ü. mit einer Konstanten $c_s(m)$ und $\int_{E_k \cap U_n(\eta; \ell_1, \ell_2)} |s_m^{(\ell_s)}| d\mu \leq c_s(m) \cdot \mu(U_n(\eta; \ell_1, \ell_2))$ ist, so bedeutet $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(U_n(\eta; \ell_1, \ell_2)) = 0$, daß auch $\int_{E_k \cap U_n(\eta; \ell_1, \ell_2)} |s_m^{(\ell_s)}| d\mu \leq \eta$ wird, sofern nur n genügend groß ist. Dies impliziert $\int_{E_k \cap U_n(\eta; \ell_1, \ell_2)} |s_n^{(\ell_s)}| d\mu \leq 2\eta$ ($s = 1, 2$), also

$$|\nu^{(\ell_1)}(E_k) - \nu^{(\ell_2)}(E_k)| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{E_k} |s_n^{(\ell_1)} - s_n^{(\ell_2)}| d\mu \leq \eta \mu(E_k) + 4\eta = \varepsilon$$

für beliebig kleines $\varepsilon > 0$, und daher $\nu^{(\ell_1)}(E_k) = \nu^{(\ell_2)}(E_k)$ für jede der disjunkten Mengen E_k endlichen Maßes. Aus der vollständigen Additivität der Mengenfunktionen ν_ℓ folgt nun die Satzbehauptung: $\nu^{(\ell_1)}(E) = \nu^{(\ell_1)}(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu^{(\ell_1)}(E_k) = \nu^{(\ell_2)}(E)$ für alle ℓ_1, ℓ_2 aus $\{1, \dots, w\}$. $\square$

Mit Hilfe der letzten beiden Sätze läßt sich nun zeigen, daß die Integral-Definition gemäß (1.21) nicht von der Wahl einer speziellen Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ einfacher, gegen f konvergierender Funktionen abhängt.

Satz 1.8.5 *Es sei f eine erweitert reellwertige meßbare Funktion über dem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$, und $\{s_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ($i = 1, \dots, m$) seien $\mathcal{L}^1$ -Cauchy-Folgen integrierbarer einfacher Funktionen mit der Eigenschaft*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(i)}(x) = f(x) \quad \text{fast überall.}$$

Dann ist das (endliche) Integral $\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n^{(i)} \, d\mu$ für alle i gleich, also unabhängig von der Wahl einer speziellen Folge $\{s_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Beweis Aufgrund der Eigenschaften einfacher Funktionen sind die meßbaren Mengen $M_n^{(i)} := \{x : s_n^{(i)}(x) \neq 0\}$ für jedes i in einer Vereinigungsmenge $\bigcup_{j=1}^{k(i)} E_j^{(i)}$ meßbarer Mengen $E_j^{(i)}$ enthalten, die zusammen mit $\{x : s_n^{(i)}(x) = 0\}$ eine Partition von X bilden und von endlichem Maße sind: $\mu(E_j^{(i)}) < \infty$. Daher bildet die Menge $M = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{n=1}^\infty M_n^{(i)}$ mit der σ -Algebra $\mathcal{A}_M = \mathcal{A}_\sigma \cap \{M_n^{(i)}\}_{i \in \{1, \dots, m\}, n \in \mathbb{N}}$ und dem auch auf $\mathcal{A}_M$ definierten Maß μ einen Maßraum $[M, \mathcal{A}_M, \mu]$ mit σ -endlichem Maß. Nach Satz 1.8.4 sind alle Integrale $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M s_n^{(i)} \, d\mu$ gleich, und wegen $s_n^{(i)}(x) = 1_M(x) s_n^{(i)}(x)$ auch die Integrale $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n^{(i)} \, d\mu = \int f \, d\mu$. $\square$

Es macht nun auch Sinn, im Falle einer integrierbaren Funktion f von dem durch f vermöge

$$v_f(A) = \int_A f \, d\mu \quad \text{für } A \in \mathcal{A}_\sigma,$$

definierten endlichen signierten Maß $v_f : \mathcal{A}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$ zu sprechen, das man als das **unbestimmte Integral** von f bezeichnet.

In Anbetracht der Bemerkungen zu lediglich meßbaren Funktionen kann man nun allgemeiner die folgende Feststellung treffen.

Korollar 1.8.6 *Für jede nicht negative meßbare Funktion f ist die Mengenfunktion $v_f : \mathcal{A}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$ ein (ggf. nicht total endliches) Maß. Für eine beliebige meßbare Funktion f mit der Eigenschaft, daß nicht gleichzeitig $v_{f^+}(X)$ und $v_{f^-}(X)$ den Wert ∞ annehmen, repräsentiert v_f ein signiertes Maß.*

Lemma 1.8.7 *Kann einer meßbaren Funktion f ein Integralwert zugeordnet werden, so ist das vermöge $v_f(A) = \int_A f \, d\mu$ definierte signierte Maß $v_f : \mathcal{A}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$ absolut stetig bzgl. μ . Ist f über jeder meßbaren Teilmenge endlichen Maßes integrierbar (besitzt also ein endliches Integral), so ist v_f auch absolut stetig im Sinne der Definition 1.2.10.*

Beweis 1. Über einer Nullmenge N ist jede meßbare Funktion f integrierbar (vergl. Bemerkung 1.8.2), und es ist $\nu_f(N) = \int_N f \, d\mu = 0$, d. h. ν_f ist absolut stetig.

2. Ist f integrierbar über jeder meßbaren Menge A mit $\mu(A) < \infty$, so gilt $|\nu_f(A)| < \infty$, also ist ν_f nach Satz 1.2.7 auch absolut stetig im Sinne der Definition 1.2.10. $\square$

Lemma 1.8.8 *Ist f nicht negativ und integrierbar, so sind alle Mengen der Form $A_n = \{x : \frac{1}{n} \leq f(x) < n\}$ bzw. $B_n = \{x : \frac{1}{n} \leq f(x)\}$ für $n \in \mathbb{N}$ von endlichem Maße.*

Beweis Nach Lemma 1.5.1 sind alle $B_n = f^{-1}[\frac{1}{n}, \infty)$ und damit auch alle Mengen A_n für $n \geq 1$ meßbar. Es sei $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine gegen f f. ü. konvergierende $\mathcal{L}^1$ -Cauchy-Folge einfacher integrierbarer Funktionen. Zu jedem s_k gehören endlich, etwa $m(k)$, viele Mengen $X_i(k)$ mit $s_k(x) = \alpha_i(k)$ für $x \in X_i(k)$, und $s_k(x) = 0$ sonst, wobei $\mu(X_i(k)) < \infty$ für $1 \leq i \leq m(k)$ ist. Die Mengen $R_{n,k}, S_{n,k}$, definiert durch

$$R_{n,k} = \left\{x : \frac{1}{2n} \leq s_k(x) \leq n + \frac{1}{2n}\right\}, \quad S_{n,k} = \left\{x : \frac{1}{2n} \leq s_k(x)\right\}, \quad n, k \in \mathbb{N},$$

sind in der Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{m(k)} X_i(k)$ enthalten. Wählt man $k \geq k_0(\frac{1}{2n})$ derart, daß f. ü. $|s_k(x) - f(x)| < \frac{1}{2n}$ wird, so hat man (ggf. bis auf eine Menge vom Maße Null) $A_n \subseteq R_{n,k}$ sowie $B_n \subseteq S_{n,k}$, woraus $\mu(A_n) < \infty$ und $\mu(B_n) < \infty$ folgt. $\square$

Die Eigenschaften von Integralen meßbarer Funktionen gleichen im wesentlichen denen, die in Satz 1.6.1 für einfache Funktionen genannt wurden. Sie werden nachfolgend lediglich aufgezählt; zu Einzelnachweisen vergl. man [63] oder [68].

Satz 1.8.9 (Eigenschaften integrierbarer Funktionen) *Es seien f_n, f, g integrierbare Funktionen über dem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$.*

- Jede Linearkombination $\sum_{n=1}^m c_n f_n$ ist integrierbar mit

$$\int \sum_{n=1}^m c_n f_n(x) \, d\mu(x) = \sum_{n=1}^m c_n \int f_n(x) \, d\mu(x);$$

- mit $f(x)$ ist stets auch die Funktion $|f|(x) = |f(x)|$ integrierbar, und es ist

$$\left| \int f(x) \, d\mu(x) \right| \leq \int |f|(x) \, d\mu(x);$$

- $\int |f+g|(x) \, d\mu(x) \leq \int |f|(x) \, d\mu(x) + \int |g|(x) \, d\mu(x)$,
- $f(x) \geq 0$ f. ü. $\implies \int f(x) \, d\mu(x) \geq 0$;
- $f(x) = 0$ f. ü. $\iff \int_A f(x) \, d\mu(x) = 0$ für jedes $A \in \mathcal{A}_\sigma$;
- $f(x) \geq g(x)$ f. ü. $\implies \int f(x) \, d\mu(x) \geq \int g(x) \, d\mu(x)$;

- ist $\mu(A) < \infty$ und $a \leq f(x) \leq b$ f. ü. in A , so gilt

$$a \cdot \mu(A) \leq \int_A f(x) d\mu(x) \leq b \cdot \mu(A);$$

- sind A und B meßbar mit $A \subset B$ und ist $f(x) \geq 0$ f. ü. in B , so gilt

$$\int_A f(x) d\mu(x) \leq \int_B f(x) d\mu(x);$$

- das Integral einer integrierbaren Funktion $f(x)$ über einer abzählbaren Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ disjunkter meßbarer Mengen A_n ist die Summe der Integrale über den A_n :

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu(x), \quad \text{falls } A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j;$$

- ist $0 < c \leq f(x)$ in einer meßbaren Menge A , so ist $\mu(A) < \infty$.

Bemerkung 1.8.3 Die Indikatorfunktion $1_M(x)$ einer beliebigen meßbaren Menge M ist stets eine einfache Funktion. Wählt man $M = \{x : f(x) = \pm\infty\}$, so wird offenbar $1_M(x)$ für jedes $\varepsilon > 0$ durch $\varepsilon |f|(x)$ majorisiert. Daraus folgt: Ist f integrierbar, so gilt $\mu(M) \leq \varepsilon \int |f| d\mu$ $\forall \varepsilon > 0$, und es ist $\mu(M) = 0$, d. h. jede integrierbare Funktion f ist μ -endlich. $\square$

Auch die Charakterisierung von Eigenschaften „im Mittel“ für allgemeine integrierbare Funktionen entspricht derjenigen für einfache Funktionen:

Definition 1.8.5 Eine Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ integrierbarer Funktionen heißt **Cauchy-Folge im Mittel**, falls $\int |f_n - f_m| d\mu \rightarrow 0$ für $n, m \rightarrow \infty$ ³³. Sie heißt **konvergent im Mittel** gegen φ , sofern $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - \varphi| d\mu = 0$ für die integrierbare Funktion φ gilt.

Lemma 1.8.10 Ist $f : [X, \mathcal{A}_\sigma, \mu] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so ist das durch Einschränkung von μ auf die Menge $U = \{x : f(x) \neq 0\}$ definierte Maß μ_U σ -endlich³⁴.

Beweis Mit f ist auch $|f|$ integrierbar. Die Mengen $B_n = \{x : \frac{1}{n} \leq |f|(x)\}$ sind gemäß Lemma 1.8.8 von endlichem Maße und erfüllen $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = U$. $\square$

Satz 1.8.11 Es sei f integrierbar über $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$. Verschwindet das Integral $\int_P f d\mu$ über einer meßbaren Menge P , in der $f(x) > 0$ ist, so ist P Nullmenge. Ist andererseits $\int_A f d\mu = 0$ über jeder meßbaren Menge A , so ist $f(x) = 0$ fast überall in X .

Beweis 1. Sei $f(x) > 0$ für $x \in P$, $\int_P f d\mu = 0$. Für $U = \{x : |f|(x) > 0\}$ folgt aus Lemma 1.8.10, daß $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit $A_n = \{x : \frac{1}{n} \leq |f|(x) < n\}$ ist, wobei $\mu(A_n) < \infty$

³³ Von einer $\mathcal{L}^1$ -Cauchy-Folge spricht man dann, wenn $f(x) \neq \pm\infty \forall x$ ist.

³⁴ Man sagt in diesem Falle, U ist σ -endlich.

$\forall n \in \mathbb{N}$ ist (vergl. Beweis zu Lemma 1.8.8). Die Mengen $E_n = \{x \in P : \frac{1}{n} \leq f(x) \leq n\}$ sind dann ebenfalls von endlichem Maße und bilden eine monoton ansteigende Mengenfolge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = P$. Die Endlichkeit der Maßwerte $\mu(E_n)$ impliziert

$$0 = \int_{E_n} f d\mu \geq \frac{1}{n} \int_{E_n} d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(E_n),$$

so daß $\mu(E_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ und daher $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$ folgt. Lemma 1.2.2 garantiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \mu(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n)$, also $\mu(P) = 0$.

2. Es sei $\int_A f d\mu = 0$ über jeder meßbaren Menge A . Aufgrund des unter 1 Gesagten gilt offenbar sowohl $\mu(\{x : f(x) > 0\}) = 0$ als auch $\mu(\{x : f(x) < 0\}) = 0$, so daß f. ü. $f(x) = 0$ ist. $\square$

1.9 Konvergenz von Folgen integrierbarer Funktionen

Satz 1.9.1 Jede gegen eine meßbare Funktion f μ -stochastisch konvergente Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von integrierbaren Funktionen über $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$, für die es eine integrierbare Funktion φ gibt mit $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ f. ü., ist Cauchy-Folge im Mittel.

Beweis Gemäß Lemma 1.8.10 gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Überdeckung $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{k;n}$ der meßbaren Menge $\{x : f_n(x) \neq 0\}$ mit $\mu(A_{k;n}) < \infty$. Da die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar ist, existiert auch eine abzählbare Überdeckung der Menge $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x : f_n(x) \neq 0\}$ dieser Art:

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x : f_n(x) \neq 0\} = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} A_\ell \quad \text{mit } \mu(A_\ell) < \infty \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

O. E. d. A. kann man voraussetzen, daß die A_ℓ als monoton ansteigende Mengenfolge angeordnet sind: $A_\ell \subseteq A_{\ell+1}$. Da offenbar $\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \gamma\} \subset \{x : |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \geq \gamma\}$ für jedes $\gamma > 0$ ist, folgt aus der μ -stochastischen Konvergenz von $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Eigenschaft

$$\mu(S_{n,m}(\gamma)) \rightarrow 0 \quad \text{für } n, m \rightarrow \infty, \quad (1.27)$$

worin $S_{n,m}(\gamma) = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \gamma\}$ ist (die Meßbarkeit der entsprechenden Mengen wird durch Korollar 1.5.2 und Satz 1.5.3 garantiert). Setzt man daher $K_{n,m}(\ell; \gamma) = A_\ell \setminus S_{n,m}(\gamma)$ und $G_{n,m}(\ell; \gamma) = A_\ell \cap S_{n,m}(\gamma)$, so erhält man unter Beachtung von (1.27)

$$\begin{aligned} \int_{A_\ell} |f_n - f_m| d\mu &= \int_{K_{n,m}(\ell; \gamma)} |f_n - f_m| d\mu + \int_{G_{n,m}(\ell; \gamma)} |f_n - f_m| d\mu \\ &\leq \gamma \mu(A_\ell) + \int_{S_{n,m}(\gamma)} |f_n - f_m| d\mu \leq \gamma \mu(A_\ell) + \beta \end{aligned}$$

für genügend große n, m und beliebiges $\beta > 0$, da nach Lemma 1.8.7 die Mengenfunktion $v_{|f_n - f_m|} : \mathcal{A}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$ mit $v_{|f_n - f_m|}(A) = \int_A |f_n - f_m| d\mu$ absolut stetig ist. Hierbei sind sowohl β als auch γ unabhängig von $\mu(A_\ell)$. Es sei $E_\ell = U \setminus A_\ell$; dann gilt $E_\ell \supseteq E_{\ell+1}$ für jedes ℓ , und es ist $\lim_{\ell \rightarrow \infty} E_\ell = \emptyset$. Die Abbildung $v_\varphi : \mathcal{A}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $v_\varphi(A) = \int_A \varphi d\mu$, ist wegen $\varphi(x) \geq 0$ ein Maß über $[X, \mathcal{A}]$, für das $v_\varphi(U) < \infty$ gilt. Lemma 1.2.3 garantiert daher $\lim_{\ell \rightarrow \infty} v_\varphi(E_\ell) = v_\varphi(\lim_{\ell \rightarrow \infty} E_\ell) = 0$ (Eigenschaft M4). Dies impliziert, daß es zu beliebigem $\alpha > 0$ stets ein $\ell_0 = \ell_0(\alpha)$ derart gibt, daß

$$\int_{E_\ell} |f_n - f_m| d\mu \leq \int_{E_\ell} (|f_n| + |f_m|) d\mu \leq 2 \int_{E_\ell} \varphi d\mu < \alpha$$

für alle $\ell \geq \ell_0(\alpha)$. Für das Integral über für $U = (U \cap A_\ell) \cup (U \setminus A_\ell)$ gilt daher

$$\int_U |f_n - f_m| d\mu \leq \alpha + \beta + \gamma \mu(A_\ell),$$

sofern nur n, m, ℓ genügend groß sind. β und γ hängen nicht von ℓ ab. α ist beliebig klein wählbar, da stets ein geeignetes ℓ_0 auffindbar ist. Wählt man zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ den Index ℓ_0 so groß, daß $\alpha < \varepsilon/3$ wird, und n, m so groß, daß $\gamma < \varepsilon/(3\mu(A_{\ell_0}))$ sowie $\beta < \varepsilon/3$ wird, so erhält man $\overline{\lim}_{n, m \rightarrow \infty} \int_U |f_n - f_m| d\mu < \varepsilon$, woraus schließlich die Cauchy-Folgen-Eigenschaft im Mittel

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int |f_n - f_m| d\mu = 0$$

folgt, da das Integral über $\{x : |f_n(x) - f_m(x)| = 0\}$ für $n, m \rightarrow \infty$ verschwindet. $\square$

Lemma 1.9.2 *Jede nicht negative meßbare Funktion f , die fast überall von einer integrierbaren Funktion φ majorisiert wird, ist selbst integrierbar.*

Beweis Laut Voraussetzung hat man $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$. Nach Satz 1.7.1 gibt es eine gegen die meßbare Funktion f konvergierende und monoton nicht abnehmende Folge einfacher Funktionen $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n(x) = \frac{k}{2^n}$ für $f(x) \in E_k(n)$ ($0 \leq k \leq n \cdot 2^n - 1$), sowie $s_n(x) = n$ für $f(x) \in E_\infty(n)$, wobei

$$E_k(n) = \left\{ x \in X : f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) \right\}, \quad E_\infty(n) = \{x \in X : f(x) > n\}$$

ist. Aus $f(x) \leq \varphi(x)$ folgt $E_k(n) \subseteq \{x : \varphi(x) \geq \frac{k}{2^n}\}$ und $E_\infty(n) \subseteq \{x : \varphi(x) \geq n\}$, und die Integrierbarkeit von φ impliziert gemäß Lemma 1.8.8 $\mu(E_k(n)) < \infty$ ($0 \leq k \leq n \cdot 2^n - 1$) und $\mu(E_\infty(n)) < \infty$; daher sind die einfachen Funktionen s_n integrierbar. Es sei $A_n(\varepsilon) = \{x : |s_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Aus $s_m(x) \geq s_n(x)$ für $m > n$ folgt $A_{n+1}(\varepsilon) \subseteq A_n(\varepsilon)$, so daß $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\varepsilon)$ existiert. Wegen $\bigcap_n A_n(\varepsilon) = \emptyset$ ist $\mu(\bigcap_n A_n(\varepsilon)) = 0$ und daher $\mu(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\varepsilon)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n(\varepsilon)) = 0$ (vergl. Ausdruck (1.1) im Beweis des

Lemmas 1.2.3), d. h. die Folge $\{s_n - f\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert μ -stochastisch gegen Null. Nach Satz 1.9.1 bilden daher die s_n eine Cauchy-Folge im Mittel, und somit ist f integrierbar mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n d\mu = \int f d\mu$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |s_n - f| d\mu = 0$. $\square$

Da für jede fast überall gegen f konvergierende Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ auch $|f|(x) \leq \varphi(x)$ f. ü. folgt, liefert Lemma 1.9.2, bezogen auf $|f|$, die folgende weitertragende Aussage.

Korollar 1.9.3 *Es sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen, die f. ü. gegen eine meßbare Funktion f konvergiert und die von der integrierbaren Funktion φ f. ü. absolut majorisiert wird, d. h. $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ f. ü.; dann ist f integrierbar.*

Lemma 1.9.4 *Ist $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge im Mittel, so gibt es stets eine f. ü. reellwertige meßbare Funktion φ , gegen die eine Teilfolge $\{f_{n_v}\}_{v \in \mathbb{N}}$ μ -stochastisch konvergiert. Konvergiert andererseits $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ im Mittel gegen φ , so konvergiert $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ auch im Maße gegen φ .*

Beweis Mit

$$E_{n,m}(\varepsilon) = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}, \quad F_n(\varepsilon) = \{x : |f_n(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon\}$$

hat man gemäß Lemma 1.8.8 $\mu(E_{n,m}(\varepsilon)) < \infty$ und $\mu(F_n(\varepsilon)) < \infty$, so daß sowohl $\int_{E_{n,m}(\varepsilon)} |f_n - f_m| d\mu \geq \varepsilon \mu(E_{n,m}(\varepsilon))$ als auch $\int_{F_n(\varepsilon)} |f_n - \varphi| d\mu \geq \varepsilon \mu(F_n(\varepsilon))$ für jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$ folgt. Ist nun $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge im Mittel, so strebt das Integral über $E_{n,m}(\varepsilon)$ – und damit auch $\mu(E_{n,m}(\varepsilon))$ – für $n, m \rightarrow \infty$ gegen Null, und die Folge erweist sich als μ -stochastische Cauchy-Folge, so daß Korollar 1.7.5 zu Satz 1.7.4 greift.

Konvergiert andererseits $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ im Mittel gegen φ , so strebt entsprechend das Integral über $F_n(\varepsilon)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen Null, was offensichtlich die Konvergenz im Maße von $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bedeutet. $\square$

Satz 1.9.5 *Eine Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ integrierbarer Funktionen konvergiert d. u. n. d. im Mittel gegen eine integrierbare Funktion f , wenn sie Cauchy-Folge im Mittel ist. Eine solche Folge konvergiert auch im Maße gegen f .*

Beweis 1. Konvergiert $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ im Mittel gegen die integrierbare Funktion f , so gilt

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \int |f_n - f_m| d\mu \leq \lim_{n,m \rightarrow \infty} \left(\int |f_n - f| d\mu + \int |f - f_m| d\mu \right) = 0,$$

d. h. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge im Mittel.

2. Ist $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge im Mittel, so enthält $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nach Lemma 1.9.4 eine gegen eine meßbare Funktion f μ -stochastisch konvergente Teilfolge $\{f_{n_\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$. Zu jedem n_ℓ gibt es eine Folge $\{s_k^{(n_\ell)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ einfacher integrierbarer Funktionen, die Cauchy-Folge im

Mittel ist und gegen f_{n_ℓ} im Mittel konvergiert: $\lim_{k \rightarrow \infty} \int |s_k^{(n_\ell)} - f_{n_\ell}| d\mu = 0$ (vergl. Bemerkung 1.8.1). Nach Lemma 1.9.4 konvergiert die Folge $s_k^{(n_\ell)}$ dann auch im Maße gegen f_{n_ℓ} , d. h. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\{x : |s_k^{(n_\ell)}(x) - f_{n_\ell}(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$. Insbesondere kann stets zu n_ℓ ein Index $k_0(n_\ell, \varepsilon)$ derart gefunden werden, daß die einfache Funktion $e_\ell = s_{k_0(n_\ell, \varepsilon)}^{(n_\ell)}$ die Abschätzung

$$\int |e_\ell - f_{n_\ell}| d\mu < \frac{\varepsilon}{n_\ell}$$

erlaubt. Wir setzen $C_{n_\ell}(\varepsilon) = \{x : |e_\ell(x) - f_{n_\ell}(x)| \geq \varepsilon/2 > 0\}$; wegen $\mu(C_{n_\ell}(\varepsilon)) < \infty$ (Lemma 1.8.8) hat man dann

$$\frac{\varepsilon}{2} \mu(C_{n_\ell}(\varepsilon)) \leq \int_{C_{n_\ell}(\varepsilon)} |e_\ell - f_{n_\ell}| d\mu \leq \int |e_\ell - f_{n_\ell}| d\mu < \frac{\varepsilon}{2n_\ell},$$

also $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \mu(C_{n_\ell}(\varepsilon)) = 0$. Da mit $A_\ell(\varepsilon) = \{x : |e_\ell(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ und $B_{n_\ell}(\varepsilon) = \{x : |f_{n_\ell}(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\}$ offensichtlich die Inklusion

$$A_\ell(\varepsilon) \subseteq B_{n_\ell}(\varepsilon) \cup C_{n_\ell}(\varepsilon)$$

besteht, bedeutet die μ -stochastische Konvergenz von $\{f_{n_\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ gegen f

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \mu(A_\ell(\varepsilon)) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mu(\{x : |e_\ell(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Aus $|e_\ell - e_k| \leq |e_\ell - f_{n_\ell}| + |f_{n_\ell} - f_{n_k}| + |f_{n_k} - e_k|$ liest man außerdem ab, daß $\{e_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge im Mittel ist; also ist f integrierbar mit $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \int e_\ell d\mu = \int f d\mu$ und $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \int |e_\ell - f| d\mu = 0$. Mit $\int |f_{n_\ell} - f| d\mu \leq \int |f_{n_\ell} - e_\ell| d\mu + \int |e_\ell - f| d\mu$ folgt daher die Konvergenz im Mittel der Teilfolge $\{f_{n_\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ gegen f , die (aufgrund der Cauchy-Folgen-Eigenschaft im Mittel) diejenige von $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen f nach sich zieht: $\int |f_n - f| d\mu \leq \int |f_n - f_{n_\ell}| d\mu + \int |f_{n_\ell} - f| d\mu \rightarrow_{n, \ell \rightarrow \infty} 0$. Nach Lemma 1.9.4 konvergiert $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ auch im Maße gegen f . $\square$

Der nachfolgend genannte Satz über die Konvergenz majorisierter Folgen ist im Englischen als „Lebesgue’s bounded convergence theorem“ bekannt und stellt das zentrale Ergebnis dieses Abschnittes dar (vergl. auch [63, 68] und die klassischen Darlegungen in Natansons „Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen“ [124]). Der Satz ist mit Hilfe der vorbereitenden Sätze 1.9.1 (s. Korollar 1.9.3) und 1.9.5 relativ einfach beweisbar.

Satz 1.9.6 (Satz von der majorisierten Konvergenz³⁵) *Ist $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen über dem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$, die fast überall oder im Maß gegen die meßbare*

³⁵ Man spricht auch vom „Satz von der beschränkten Konvergenz“, engl. „the bounded convergence theorem“.

Funktion f konvergiert, und werden alle f_n in der Form

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

von einer integrierbaren Funktion φ majorisiert, so ist f integrierbar und erfüllt die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f - f_n| d\mu = 0.$$

Beweis 1. Es konvergiere $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μ -stochastisch gegen f . Nach Satz 1.9.1 ist $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge im Mittel, und nach Satz 1.9.5 gibt es eine integrierbare Funktion g mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - g| d\mu = 0$, gegen die $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls μ -stochastisch konvergiert. Demnach gilt $g(x) = f(x)$ fast überall (vergl. Text im Anschluß an Definition 1.7.2, Abschn. 1.7), und f ist integrierbar (Bemerkung 1.8.2, Abschn. 1.8). Daraus resultiert $\int |f - g| d\mu = 0$ sowie $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|$ für fast alle $x \in X$, so daß auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$ folgt.

2. Die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere fast überall gegen f . Nach Korollar 1.9.3 ist dann f integrierbar. Es sei $A_{n_v}(\varepsilon) = \{x : |f_{n_v}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ für eine Teilfolge $\{f_{n_v}\}_{v \in \mathbb{N}}$, die so gewählt sei, daß $|f_{n_{v+1}}(x) - f(x)| \leq |f_{n_v}(x) - f(x)| \forall v \in \mathbb{N}$ ist. Damit wird $A_{n_v}(\varepsilon)$ zu einer monoton nicht zunehmenden Mengenfolge mit $\bigcap_v A_{n_v}(\varepsilon) = \emptyset$, so daß

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \mu(A_{n_v}(\varepsilon)) = \mu\left(\lim_{v \rightarrow \infty} A_{n_v}(\varepsilon)\right) = 0$$

folgt (vergl. Ausdruck (1.1), Abschn. 1.2). Die ausgewählte Teilfolge konvergiert also μ -stochastisch gegen f , und wie im Teil 1 des Beweises ist zu schließen, daß sie auch im Mittel gegen f konvergiert. Die μ -stochastische Konvergenz impliziert, daß f fast überall reellwertig ist. Wir setzen $N = M_1 \cup M_2$ mit $M_1 = \{x : |f(x)| = \infty\}$, $M_2 = \{x : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)\}$. Für alle $x \in X \setminus N$ und jedes $f_{n_k}(x)$ gilt dann

$$\lim_{v, m \rightarrow \infty} |f_{n_v}(x) - f_m(x)| \leq \lim_{v \rightarrow \infty} |f_{n_v}(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x) - f(x)| + \lim_{m \rightarrow \infty} |f(x) - f_m(x)|,$$

so daß die Relationen $\lim_{v, m \rightarrow \infty} |f_{n_v}(x) - f_m(x)| \leq \lim_{k, v \rightarrow \infty} |f_{n_v}(x) - f_{n_k}(x)|$ und $\lim_{v, m \rightarrow \infty} \int |f_{n_v} - f_m| d\mu \leq \lim_{k, v \rightarrow \infty} \int |f_{n_v} - f_{n_k}| d\mu = 0$ folgen. Letzteres impliziert

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int |f_n - f_m| d\mu \leq \lim_{n, v \rightarrow \infty} \int |f_n - f_{n_v}| d\mu + \lim_{v, m \rightarrow \infty} \int |f_{n_v} - f_m| d\mu = 0,$$

d. h. auch $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ selbst ist Cauchy-Folge im Mittel. Gemäß Teil 1 des Beweises gilt daher die Behauptung. $\square$

Wegen $\int (f - f_n) d\mu \leq \int |f - f_n| d\mu$ besteht unter den Voraussetzungen des Satzes 1.9.6 (jedoch nicht generell) die Beziehung $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$. Die folgende diesbezügliche Aussage geht auf B. Levi und H.L. Lebesgue zurück, zitiert zuweilen als „Lebesgues' Satz von der monotonen Konvergenz“ (vergl. [10, 63, 68, 124]).

Satz 1.9.7 (Satz von der monotonen Konvergenz) *Es sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton nicht abnehmende Folge nicht negativer integrierbarer erweitert-reellwertiger Funktionen, und es sei $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Dann gilt³⁶*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ integrierbar, so folgt $\int f_k d\mu \leq \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, d. h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ nicht integrierbar (wegen $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ also quasiintegrierbar) ist, wird der Integralwert auf der rechten Seite zu ∞ festgelegt (vergl. Text im Anschluß an Definition 1.8.2). Im Falle $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \infty$ ist die Satzaussage also trivialerweise richtig. Nachfolgend wird der Fall $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu < \infty$ betrachtet. Die Monotonie von $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ impliziert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_{n+k} - f_n| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{n+k} d\mu - \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

d. h. die f_n bilden eine Cauchy-Folge im Mittel (CFM), die nach Satz 1.9.5 im Mittel und im Maße gegen eine bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmte integrierbare Funktion φ konvergiert. Da die CFM-Eigenschaft bedeutet, daß $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ auch μ -stochastische Cauchy-Folge ist (vergl. etwa Beweis zu Lemma 1.9.4), kann Satz 1.7.4 herangezogen werden, der die fast gleichmäßige Konvergenz gegen φ konstatiert; aus dieser wiederum folgt die Konvergenz fast überall. Somit ist $f = \varphi$ f. ü., und wegen $f_n \leq \varphi$ liefert Satz 1.9.6 $\int f d\mu - \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f - f_n| d\mu = 0$. $\square$

Korollar 1.9.8 *Es sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen mit der Eigenschaft $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$; dann gilt: Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert gegen eine integrierbare Funktion f , und es ist $\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$.*

Beweis Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n^+(x) = \max\{0, f_n(x)\}$, $f_n^- = \max\{0, -f_n(x)\}$. Mit $g_j^+ = \sum_{n=1}^j f_n^+$ erhält man eine monoton nicht abnehmende Folge nicht negativer integrierbarer Funktionen, für die Satz 1.9.7 $\int \lim_{j \rightarrow \infty} g_j^+ d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j^+ d\mu$ liefert, also $\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n^+ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n^+ d\mu$. Die Ungleichung $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$ bedeutet daher $\lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j^+ d\mu < \infty$, und die g_j^+ bilden eine Cauchy-Folge im Mittel, die gegen eine bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmte integrierbare Funktion g^+ im Mittel und im Maße konvergiert (vergl. Beweis des vorigen Satzes). Demnach hat man $\lim_{j \rightarrow \infty} \int (g_j^+ - g^+) d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int |g_j^+ - g^+| d\mu = 0$, also $\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n^+ d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j^+ d\mu = \int g^+ d\mu$.

³⁶ Wegen $\{x : \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \leq \eta\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) \leq \eta\}$ und $\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ für die aufsteigende Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist $\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n$ meßbar (vergl. Satz 1.5.3).

Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^+ = f$; dann folgt $\int_A f_n^+ d\mu = \int_A g^+ d\mu$ für jedes $A \in \mathcal{A}$, so daß f.ü. $f^+ = g^+$ gilt (Satz 1.8.11). Entsprechendes ist für die Funktionen f_n^- zu konstatieren, mit denen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^- = f^-$ definiert sei. Die integrierbare Funktion $f = f^+ - f^-$ erfüllt $\sum_{n=1}^{\infty} \int (f_n^+ - f_n^-) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$. $\square$

Lemma 1.9.9 (Fatous Lemma) *Für jede Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nicht-negativer integrierbarer erweitert-reellwertiger Funktionen gilt*

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis Im Falle $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \infty$ ist die Aussage trivial, daher kann o.E.d.A. $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu < \infty$ vorausgesetzt werden. Es sei $\tilde{f}_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x)$; dann ist $\{\tilde{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton nicht abnehmende Folge nicht negativer – und gemäß Lemma 1.9.2 integrierbarer – Funktionen, die gegen $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n =: \varphi$ konvergiert und wegen $\tilde{f}_n \leq f_n \forall n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int \tilde{f}_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$ erfüllt. Aufgrund des Satzes 1.9.7 von der monotonen Konvergenz folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \tilde{f}_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n d\mu,$$

wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ also die Behauptung. $\square$

Konkretisierungen Anwendungen der Sätze 1.9.6 und 1.9.7 bzw. des Lemmas 1.9.9 von Fatou und des Korollars 1.9.8 finden sich insbesondere in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Wir geben nachfolgend einige dort benötigte Resultate an. Zuvor jedoch – im Vorgriff auf die Ausführungen in Kap. 2 – verweisen wir auf die unterschiedlichen Arten der Konvergenz von Folgen meßbarer Abbildungen über einem Maßraum $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}]$, dessen Maß vollständig und total endlich mit $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ist (Wahrscheinlichkeitsraum).

Typen der Konvergenz in Wahrscheinlichkeitsräumen

- Es seien $\xi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ meßbare Funktionen über $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}]$, bezeichnet als *reellwertige Zufallsvariable*. L sei die Menge aller Punkte $\omega \in \Omega$, in denen die Folge $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ einen endlichen Grenzwert erreicht:

$$L = \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega), |\xi(\omega)| < \infty \right\}.$$

Ist $\mathbb{P}(L) = 1$, d. h. konvergiert $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ f. ü. gegen einen endlichen Wert, so heißt $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **$\mathbb{P}$ -fast sicher konvergent** oder **konvergent mit Wahrscheinlichkeit 1**, geschrieben $\xi_n \rightarrow_{\mathbb{P}\text{-f. s.}} \xi$, d. h.

$$\xi_n \rightarrow_{\mathbb{P}\text{-f. s.}} \xi \iff \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi < \infty\right) = 1. \quad (1.28)$$

- Existiert zu der Folge $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Zufallsvariable ξ derart, daß für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = 0$, so heißt $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **$\mathbb{P}$ -stochastisch konvergent** oder **konvergent in Wahrscheinlichkeit**, geschrieben $\xi_n \rightarrow_{i. W.} \xi$, d. h.

$$\xi_n \rightarrow_{i. W.} \xi \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (1.29)$$

- Eine Folge $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit endlichen Erwartungswerten $\mathbb{E}[\xi_n^p]$ (endlichen p -ten Momenten, s. Abschn. 2.13) für $1 \leq p < \infty$ heißt **im p -ten Mittel konvergent** oder auch **$\mathcal{L}^p$ -konvergent**, wenn es eine Zufallsvariable ξ derart gibt, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|\xi_n - \xi|^p] = 0 \quad \forall p \in [1, \infty) \quad (1.30)$$

gilt.

- Es seien F_{ξ_n} die Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen ξ_n (s. Kap. 2). Gibt es eine Wahrscheinlichkeitsverteilung F_ξ derart, daß für jedes $x \in \mathbb{R}$, in dem F_ξ stetig ist, der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$ existiert, so heißt $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergent in der Verteilung** oder auch **schwach konvergent** gegen eine Zufallsvariable ξ , in Zeichen $\xi_n \rightarrow_{i. V.} \xi$ oder $\xi_n \rightarrow_w \xi$:

$$\xi_n \rightarrow_{i. V.} \xi \iff \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x). \quad (1.31)$$

Der Leser möge zum Vergleich die Definitionen in Abschn. 2.8 des Kap. 2 sowie die Zusammenfassung in Abschn. 2.8 heranziehen.

Anwendungsbeispiele

1. Die Aussage des Satzes 1.9.6 für unendliche Summen: Es sei $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge stetiger Funktionen in x , so daß für $x_n \rightarrow x$ stets auch gilt $f_k(x_n) \rightarrow f_k(x)$. Man definiere $f_{k;n}(x) := f_k(x + \frac{1}{n})$; ist dann $|f_{k;n}(x)| \leq \varphi_k$ mit $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \varphi_k < \infty$, so besagt der Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} |f_k(x) - f_{k;n}(x)| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} f_{k;n}(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} f_k(x).$$

Entsprechendes gilt für $g_{k;n}(x) = f_k(x - \frac{1}{n}) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f_k(x)$. Grenzübergang und Summenoperation sind also vertauschbar, und die Summe $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} f_k(x)$ ist eine stetige Funktion in x .

2. $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge von Zufallsvariablen über dem Maßraum $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}]$ mit $\mathbb{E}[\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|] < \infty$. Unter Verwendung der Abkürzungen

$$f_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad f = \sum_{k=1}^\infty \xi_k, \quad \varphi = \sum_{k=1}^\infty |\xi_k|$$

besagt der Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f - f_n| d\mathbb{P} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mathbb{P} = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mathbb{P}$$

(da alle f_n von φ majorisiert werden und $\int \varphi d\mathbb{P} = \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|] < \infty$ ist). Mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mathbb{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n \xi_k \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\xi_k] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[\xi_k]$$

hat man also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[\xi_k] = \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \right]$$

(s. Korollar 1.9.8). Insbesondere ist Folgendes zu konstatieren: Sind ξ_k , $k \in \mathbb{N}_0$, nicht negative Zufallsvariablen, und existiert der Erwartungswert der Summe $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$, so gleicht dieser Erwartungswert der Summe der Einzel-Erwartungswerte.

3. Es sei $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Familie von – durch eine nicht negative Zufallsvariable φ mit $\mathbb{E}[\varphi] < \infty$ absolut beschränkten – Zufallsvariablen mit der Eigenschaft $\mathbb{P}$ -fast sicherer Konvergenz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega) \quad \text{für fast alle } \omega \in \Omega.$$

Dann garantiert der Satz von der majorisierten Konvergenz die Gültigkeit der Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\xi_n] = \mathbb{E}[\xi].$$

4. Die Folge $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ von Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen F_{ξ_n} konvergiere *stochastisch zunehmend* schwach gegen eine Verteilung F_{ξ} . Stochastisch zunehmend für die Folge der *Zufallsvariablen* bedeutet, daß die Folge $\{F_{\xi_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ der *Verteilungen* nicht zunehmend in n ist, so daß andererseits die Folge $\{1 - F_{\xi_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ nicht abnehmend ist. Dann besagt der Satz von der monotonen Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (1 - F_{\xi_n}(t)) dt = \int \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - F_{\xi_n}(t)) dt = \int (1 - F_{\xi}(t)) dt,$$

und die Integration von 0 bis ∞ bedeutet $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\xi_n] = \mathbb{E}[\xi]$.

1.10 Der Satz von Radon-Nikodym

Wir haben gesehen, daß jeder erweitert-reellwertigen Funktion f mit der Eigenschaft, daß nicht gleichzeitig $\int f^+ d\mu$ und $\int f^- d\mu$ den Wert unendlich annehmen, nach Definition 1.8.4 ein Integralwert $\int f d\mu$ zukommt. Die Mengen $\{x : f(x) \geq 0\} = P$ und $\{x :$

$f(x) \leq 0\} = N$ formen offenbar eine Jordan-Zerlegung des Raumes X bzgl. des signierten Maßes $\nu_f : [X, \mathcal{A}_\sigma, \mu] \rightarrow \mathbb{R}$, das durch $\nu_f(A) = \int_A f d\mu$ definiert wird, denn

$$\nu_f(A) = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu = \nu_{f^+}(A) - \nu_{f^-}(A) \quad (1.32)$$

impliziert $\nu_f(A \cap P) \geq 0$ und $\nu_f(A \cap N) \leq 0 \ \forall A \in \mathcal{A}_\sigma$. Gleichung (1.32) definiert daher die Jordan-Hahn-Zerlegung des signierten Maßes ν_f (vergl. Satz 1.2.5). Die Frage nach der Integrierbarkeit kann man also auch so beantworten: Eine meßbare erweitert-reellwertige Funktion f besitzt d. u. n. d. einen Integralwert, wenn die Maß-Summe $\nu_{f^+}(X) + \nu_{f^-}(X) < \infty$ ist. In diesem Falle repräsentiert $\nu_{f^+}(X) + \nu_{f^-}(X)$ die absolute Variation $|\nu_f|$ eines signierten Maßes ν_f mit $\nu_f(A) = \nu_{f^+}(A) - \nu_{f^-}(A)$. Man bezeichnet f als **Dichte des signierten Maßes ν bezüglich des Maßes μ** oder auch als **Ableitung von ν nach μ** . Die umgekehrte Frage, nämlich wann ein signiertes Maß eine derartige Dichte bzw. Ableitung besitzt, wird mit dem Satz von J. Radon und O.M. Nikodym beantwortet. Zur Vorbereitung des Beweises betrachten wir zunächst den speziellen Fall total endlicher Maße.

Hilfssatz 1.10.1 (Radon-Nikodym) *Es seien μ und ν total endliche Maße über der σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma$, und ν sei absolut stetig bzgl. μ ($\nu \ll \mu$); dann gibt es eine μ -fast überall eindeutig bestimmte μ -meßbare Funktion f derart, daß*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}_\sigma. \quad (1.33)$$

Beweis Es sei $\mathcal{H}$ die Menge aller μ -integrierbaren nicht negativen Funktionen, für die in obiger Beziehung nur das „ $\geq$ “-Zeichen gilt:

$$\mathcal{H} = \left\{ h : X \rightarrow \mathbb{R} : h \geq 0, h \text{ integrierbar, } \nu(A) \geq \int_A h d\mu \ \forall A \in \mathcal{A}_\sigma \right\}.$$

$\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ sei eine Folge von Funktionen, deren Integrale gegen das Supremum $\sup_{h \in \mathcal{H}} \int h d\mu$ konvergieren:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n d\mu = \sup_{h \in \mathcal{H}} \int h d\mu.$$

Die gesuchte μ -meßbare Funktion f konstruieren wir mittels der Folge $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ als

$$f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} h_n(x).$$

Zu zeigen ist die Integrierbarkeit von f sowie das Bestehen der Gleichung (1.33). Sei

$$g_n(x) = \max\{h_1(x), \dots, h_n(x)\} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

$\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist in $\mathcal{H}$ enthalten, denn zu jedem $A \in \mathcal{A}_\sigma$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ kann eine Partition $\{E_1^{(n)}, \dots, E_n^{(n)}\}$ von A gefunden werden, so daß $g_n(x) = h_j(x)$ für $x \in E_j^{(n)}$ ist. Man setze nämlich

$$\begin{aligned} E_1^{(n)} &= \{x \in A : h_1(x) \geq h_i(x), i = 2, \dots, n\}, \\ E_2^{(n)} &= \{x \in A : h_2(x) \geq h_i(x), i = 3, \dots, n\} \setminus E_1, \\ &\vdots \\ E_{n-1}^{(n)} &= \{x \in A : h_{n-1}(x) \geq h_n(x)\} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-2} E_i, \\ E_n^{(n)} &= A \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i = \{x : h_n(x) > h_j(x) \forall j \leq n-1\}, \end{aligned}$$

so daß ein Punkt $x \in A$ d. u. n. d. zu einer Menge $E_j^{(n)}$ gehört, wenn $h_j(x) \geq h_i(x) \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ist. Wegen $A = \bigcup_{i=1}^n E_i^{(n)}$ mit $E_i^{(n)} \cap E_j^{(n)} = \emptyset$ für $i \neq j$ folgt $g_n(x) = h_j(x)$ für $x \in E_j^{(n)}$. Insbesondere ist $g_n \in \mathcal{H}$, da

$$\int_A g_n d\mu = \sum_{j=1}^n \int_{E_j^{(n)}} g_n d\mu = \sum_{j=1}^n \int_{E_j^{(n)}} h_j d\mu \leq \sum_{j=1}^n \int_{E_j^{(n)}} v(E_j^{(n)}) = v(A) < \infty.$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\max\{h_1(x), \dots, h_n(x)\}) = \sup_n h_n(x) = f(x)$ liefert der Satz 1.9.7 von der monotonen Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu = \int f d\mu$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu = \int_A f d\mu \leq v(A) < \infty \quad \forall A \in \mathcal{A}_\sigma,$$

d. h. $f \in \mathcal{H}$ mit $\int f d\mu = \sup_n \int h_n d\mu$. Um $\int_A f d\mu = v(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}_\sigma$ nachzuweisen, betrachte man das Maß $\theta : \mathcal{A}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $\theta(A) = v(A) - \int_A f d\mu$. Zu zeigen ist $\theta(A) = 0$ für jedes $A \in \mathcal{A}_\sigma$. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ betrachte man das signierte Maß $v_k = \theta - \frac{1}{k} \mu$, bezüglich dessen die meßbaren Mengen P_k und N_k eine Hahn-Zerlegung bilden: $P_k \cup N_k = X$, $P_k \cap N_k = \emptyset$, $v_k(A \cap P_k) \geq 0$, $v_k(A \cap N_k) \leq 0$ für $A \in \mathcal{A}_\sigma$. Die beiden meßbaren Mengen $P = \bigcup_{k=1}^\infty P_k$ und $N = \bigcap_{k=1}^\infty N_k$ bilden dann – wie leicht nachzuprüfen – ebenfalls eine Partition von X : $X = P \cup N$, $P \cap N = \emptyset$. Für jeden Index ℓ erhält man $0 \leq \theta(N) = v_\ell(N) + \frac{1}{\ell} \mu(N) \leq \frac{1}{\ell} \mu(N)$, woraus vermöge $\ell \rightarrow \infty$ auf $\theta(N) = 0$ zu schließen ist. Laut Vor. ist $v \ll \mu$ und daher auch $\theta \ll \mu$ (Lemma 1.8.7), so daß die Annahme, $\theta(P)$ sei größer Null, zu $\mu(P) > 0$ führen würde. $\mu(P) > 0$ impliziert $\mu(P_k) > 0$ für mindestens ein k . Wir zeigen, daß dies im Widerspruch zur Supremumseigenschaft des Integrals $\int f d\mu$

stände. Man betrachte die Funktion $\psi = f + (1/k)1_{P_k}$, deren Integral im Falle $\mu(P_k) > 0$ offensichtlich größer als $\int f d\mu$ ist (d. h. ψ kann nicht in $\mathcal{H}$ enthalten sein). ψ erfüllt

$$\int_A \psi d\mu = \int_A f d\mu + \frac{1}{k} \mu(A \cap P_k) = \int_{A \setminus P_k} f d\mu + \int_{A \cap P_k} f d\mu + \frac{1}{k} \mu(A \cap P_k).$$

Aus $v_k(A) + \frac{1}{k} \mu(A) = \theta(A) = v(A) - \int_A f d\mu$ für jedes $A \in \mathcal{A}_\sigma$ und $v_k(A \cap P_k) \geq 0$ folgt die Ungleichung $\frac{1}{k} \mu(A \cap P_k) \leq v(A \cap P_k) - \int_{A \cap P_k} f d\mu$, mit der

$$\begin{aligned} \int_A \psi d\mu &= \int_{A \setminus P_k} f d\mu + \int_{A \cap P_k} f d\mu + \frac{1}{k} \mu(A \cap P_k) \\ &\leq \int_{A \setminus P_k} f d\mu + v(A \cap P_k) \leq v(A \setminus P_k) + v(A \cap P_k) = v(A), \end{aligned}$$

wird, was $\psi \in \mathcal{H}$ impliziert. Dieser Widerspruch zeigt, daß $\mu(P) > 0$ und daher auch $\theta(P) > 0$ nicht möglich ist, so daß $\theta(A) = v(A) - \int_A f d\mu = 0 \forall A \in \mathcal{A}_\sigma$ folgt. $\square$

Satz 1.10.1 (Radon-Nikodym) *Es sei $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ ein σ -endlicher Maßraum, und v bezeichne ein σ -endliches signiertes Maß über $\mathcal{A}_\sigma$. Ist v absolut stetig bzgl. μ , so gibt es eine meßbare erweitert-reellwertige Funktion $f : [X, \mathcal{A}_\sigma] \rightarrow [\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})]$, die für jede meßbare Menge $A \in \mathcal{A}_\sigma$ mit $|v|(A) < \infty$ den Integralwert $v(A)$ besitzt:*

$$v(A) = \int_A f d\mu.$$

Beweis Aufgrund der σ -Endlichkeit von μ und $|v|$ gibt es eine abzählbare Überdeckung $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von X mit wechselseitig disjunkten Mengen endlichen Maßes $\mu(U_i) \forall i \in \mathbb{N}$ derart, daß jede dieser Mengen U_i selbst als abzählbare Vereinigung disjunkter Mengen V_{ij} mit $|v|(V_{ij}) < \infty \forall j \in \mathbb{N}$ darstellbar ist:

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad \mu(U_i) < \infty \forall i \in \mathbb{N}, \quad U_{i_1} \cap U_{i_2} = \emptyset \quad \text{für } i_1 \neq i_2, \\ U_i &= \bigcup_{j=1}^{\infty} V_{ij}, \quad |v|(V_{ij}) < \infty \forall j \in \mathbb{N}, \quad V_{ij_1} \cap V_{ij_2} = \emptyset \quad \text{für } j_1 \neq j_2. \end{aligned}$$

Durch geeignete Numerierung kann die Familie der V_{ij} als einfach indiziert dargestellt werden³⁷, d. h. $\{V_{ij}\}_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} = \{W_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}, X = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} W_\ell$. Es sei nun $X = P \cup N$ eine Jordan-Hahn-Zerlegung des Raumes X bezüglich des signierten Maßes v , d. h. $P \cap N = \emptyset$ mit $v(A \cap P) \geq 0$ und $v(A \cap N) \leq 0$ für jedes $A \in \mathcal{A}_\sigma$ (Hahn-Zerlegung des Raumes), sowie $v = v^+ - v^-$ mit

$$v^+(A) = v(A \cap P), \quad v^-(A) = -v(A \cap N)$$

³⁷ Man setze etwa $\ell = K(i, j) - i$, falls $i + j =$ gerade, und $\ell = K(i, j) - j$, falls $i + j =$ ungerade, $K(i, j) = 1 + \frac{(i+j)^2 - (i+j)}{2}$.

(Jordan-Zerlegung von ν). Wir betrachten zunächst nur P und setzen $E_\ell = W_\ell \cap P$, so daß $\sum_{\ell=1}^\infty E_\ell = P$ wird. Wegen $\mu(E_\ell) < \infty$ und $\nu^+(E_\ell) < \infty$ garantiert Hilfssatz 1.10.1 zu jedem ℓ die Existenz einer μ -fast überall eindeutig bestimmten μ -integrierbaren Funktion f_ℓ , mit der $\int_{A \cap E_\ell} f_\ell d\mu = \nu^+(A \cap E_\ell) = \nu(A \cap E_\ell)$ für jedes $A \in \mathcal{A}_\sigma$ wird. Es sei A eine μ -meßbare Menge mit $|\nu|(A) < \infty$; dann gilt

$$\sum_{\ell=1}^\infty \int_{A \cap E_\ell} f_\ell d\mu = \sum_{\ell=1}^\infty \nu^+(A \cap E_\ell) = \sum_{\ell=1}^\infty \nu(A \cap E_\ell) \leq |\nu|(A) < \infty.$$

Sei $f^{(P)}(x) = f_\ell(x)$ für $x \in A \cap E_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$; dann ist zum einen $\int_{A \cap E_\ell} f^{(P)} d\mu = \int_{A \cap E_\ell} f_\ell d\mu$, und zum anderen – wegen $\int_{A \cap E_\ell} f_\ell d\mu = \int_{A \cap E_\ell} f_\ell^+ d\mu - \int_{A \cap E_\ell} f_\ell^- d\mu \geq 0$ – auch $\sum_{\ell=1}^\infty \int_{A \cap E_\ell} |f_\ell| d\mu < \infty$. Setzt man $h_\ell(x) = 1_{A \cap E_\ell}(x) \cdot f_\ell(x)$, so ist $\int_{A \cap E_\ell} f_\ell d\mu = \int_A h_\ell d\mu$, und das Korollar 1.9.8 besagt, daß es eine μ -integrierbare Funktion h gibt mit $\sum_{\ell=1}^\infty h_\ell = h$, $\int_{A \cap P} h d\mu = \sum_{\ell=1}^\infty \int_{A \cap P} h_\ell d\mu = \int_{A \cap P} f^{(P)} d\mu$. Da die letzte Gleichheit für jede meßbare Teilmenge in $A \cap P$ gilt, folgt $h = f^{(P)}$ fast überall in $A \cap P$ (Satz 1.8.11). Demnach ist $f^{(P)}$ integrierbar über jeder meßbaren Menge $A \cap P$ mit $|\nu|(A) < \infty$, und dabei gilt $\int_{A \cap P} f^{(P)} d\mu = \nu^+(A \cap P) = \nu(A \cap P)$. Ist $g^{(P)}$ eine weitere Funktion über P mit der Eigenschaft $\int_{A \cap P} g^{(P)} d\mu = \nu^+(A \cap P)$ für alle $A \in \mathcal{A}_\sigma$ mit $|\nu|(A) < \infty$, so gilt dies auch für jede meßbare Teilmenge einer solchen Menge $A \cap P$, so daß $g^{(P)}(x) = f^{(P)}(x)$ μ -fast überall in $A \cap P$ folgt. Dies impliziert $g^{(P)}(x) = f^{(P)}(x)$ μ -fast überall in P aufgrund der σ -Endlichkeit von ν .

Eine völlig analoge Überlegung führt zum Auffinden einer μ -eindeutig bestimmten Funktion $f^{(N)}$, für die $\int_{A \cap N} f^{(N)} d\mu = \nu^-(A \cap N) = -\nu(A \cap N)$ für alle $A \in \mathcal{A}_\sigma$ mit $|\nu|(A) < \infty$ gilt. Setzt man daher

$$f(x) = \begin{cases} f^{(P)}(x) & \text{für } x \in P, \\ -f^{(N)}(x) & \text{für } x \in N, \end{cases}$$

so ist f eine μ -eindeutig bestimmte Funktion über X , die über jeder meßbaren Menge A mit $|\nu|(A) < \infty$ μ -integrierbar ist und dort

$$\int_A f d\mu = \int_{A \cap P} f^{(P)} d\mu - \int_{A \cap N} f^{(N)} d\mu = \nu^+(A \cap P) - \nu^-(A \cap N) = \nu(A)$$

erfüllt. Damit ist alles bewiesen. $\square$

Definition 1.10.1 $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ sei σ -endlicher Maßraum, $\nu \ll \mu$ ein σ -endliches signiertes Maß über $\mathcal{A}_\sigma$. Die μ -eindeutig bestimmte meßbare Funktion f , für die $\nu(A) = \int_A f d\mu$ für jede meßbare Menge A mit $|\nu|(A) < \infty$ gilt, heißt **Radon-Nikodym-Ableitung von ν bzgl. μ** , und man schreibt

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}, \quad d\nu = f d\mu.$$

f ist die **Dichte von ν bezüglich des Maßes μ** . f ist d. u. n. d. integrierbar, wenn $|\nu|(X) < \infty$ ist; in diesem Falle repräsentiert ν das **unbestimmte Integral von f bzgl. μ** .

Es läßt sich zeigen, daß der Satz 1.10.1 von Radon-Nikodym auch für signierte Maße μ gilt, sofern man das Integral einer Funktion f bzgl. eines solchen signierten Maßes mit Hilfe seiner Jordan-Zerlegung $\mu = \mu^+ - \mu^-$ vermöge

$$\int f d\mu = \int f d\mu^+ - \int f d\mu^-$$

definiert [10, 63].

1.11 Produktmaße und der Satz von Fubini

$X_1, X_2, \dots, X_m$ seien nicht leere Mengen³⁸. Die Gesamtheit aller Elemente der Form $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ mit $x_i \in X_i$ heißt **cartesisches Produkt** der X_i , geschrieben $\prod_{i=1}^m X_i = X_1 \times \dots \times X_m$.

Für Teilmengen $M_i \subseteq X_i$ heißt $\mathcal{Q} = \prod_{i=1}^m M_i$ (verallgemeinerter) **Quader**³⁹ mit den **Seiten** M_i ($i = 1, \dots, m$). (vergl. Abschn. A.2). Sind einige der M_i identisch mit der jeweiligen Gesamtmenge, also $M_i = X_i$, so spricht man auch von **Zylindermengen** (s. auch Abschn. 1.12). Ein Element von $\prod_{i=1, i \neq k}^m X_i$ kennzeichnen wir durch $\mathbf{x}_{-k}$, d. h.

$$\mathbf{x}_{-k} = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m).$$

Definition 1.11.1 Ist $M \subseteq \prod_{i=1}^m X_i$ eine beliebige nicht leere Teilmenge der Produktmenge, so bezeichnet man die Menge

$$p_{\{k\}}[M] = \left\{ x_k \in X_k : \exists \mathbf{x}_{-k} \in \prod_{i=1, i \neq k}^m X_i \text{ mit } (x_1, \dots, x_k, \dots, x_m) \in M \right\} \subset X_k$$

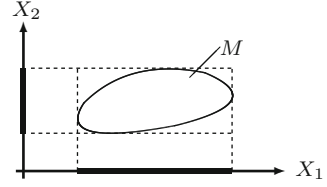
als **Projektion von M auf X_k** . Mit der Notation $\mathbf{x}_{(k_1, \dots, k_\ell)}$ für Vektoren aus $\prod_{i \neq k_j, j \in \{1, \dots, \ell\}} X_i$ (für $\ell < m$) ist die Projektion von M auf ein ℓ -dimensionales cartesisches Teilprodukt $X_{k_1} \times \dots \times X_{k_\ell}$ in der Form

$$p_{\{k_1, \dots, k_\ell\}}[M] = \left\{ (x_{k_1}, \dots, x_{k_\ell}) \in X_{k_1} \times \dots \times X_{k_\ell} : \right. \\ \left. \exists \mathbf{x}_{-(k_1, \dots, k_\ell)} \text{ mit } (x_1, \dots, x_{k_1}, \dots, x_{k_\ell}, \dots, x_m) \in M \right\} \quad (1.34)$$

definiert.

³⁸ Im allgemeinen wird man von strukturierten Mengen ausgehen, etwa von topologischen Räumen.

³⁹ Im Englischen „generalized rectangle“.

Abb. 1.1 Projektionen

Mit $K = \{1, \dots, m\}$ und $L = \{k_1, \dots, k_\ell\} \subset K$ wird im Falle $M = \prod_{i \in K} X_i$ anstelle von $p_{\{k_1, \dots, k_\ell\}}[\prod_{i \in K} X_i]$ die Notation p_L^K benutzt. p_L^K ist also die Projektion des cartesischen Produktes der Mengen $X_1, \dots, X_m$ in das cartesische Produkt der Mengen $X_{k_1}, \dots, X_{k_\ell}$. Die Projektionsmenge (1.34) fällt i. a. *nicht* mit dem cartesischen Produkt der Einzelprojektionen zusammen, vielmehr ist die Inklusion

$$p_{\{k_1, \dots, k_\ell\}}[M] \subset \prod_{j=1}^{\ell} p_{\{k_j\}}[M]$$

i. a. echt, es sei denn, M wäre ein Quader mit den Seiten $M_k = p_{\{k\}}[M]$, $k \in K$ (Abb. 1.1).

Definition 1.11.2 Für meßbare Räume $[X_t, \mathcal{A}_t]$ heißt die von allen Quadern $Q_A = \prod_{t=1}^m A_t$ mit $A_t \in \mathcal{A}_t$ erzeugte σ -Algebra $\sigma(\prod_{t=1}^m \mathcal{A}_t) = \otimes_{t=1}^m \mathcal{A}_t$ die **σ -Algebra des Produktraumes der meßbaren Räume $[X_t, \mathcal{A}_t]$** oder kurz die **Produkt- σ -Algebra** von $\prod_{t=1}^m X_t$.

Man beachte, daß das cartesische Produkt $\prod_{t=1}^m \mathcal{A}_t$ der σ -Algebren $\mathcal{A}_t$ selbst i. a. keine σ -Algebra ist, vielmehr bildet es ein sog. **zerlegbares Mengensystem**, d. h. ein durchschnittsstabiles System von Teilmengen, in dem die Differenz zweier Elemente als endliche Vereinigung disjunkter Elemente darstellbar ist (vergl. Abschn. 1.1). Ein über einem zerlegbaren Mengensystem definierter Inhalt⁴⁰ ist ein **elementares Maß**.

Das Urbild $(p_{\{j\}}^K)^{-1}(A_j) = A_j \times \prod_{t \in K, t \neq j} X_t$ einer jeden meßbaren Menge $A_j \in \mathcal{A}_j$ ist als Zylindermenge (mit den meßbaren Seiten X_t für $t \neq j$ und A_j) in $\otimes_{t=1}^m \mathcal{A}_t$ enthalten, d. h. jede der Projektionen $p_{\{j\}}^K$ ist meßbar; Analoges gilt offenbar für Projektionen p_L^K mit $L \subset K$. $\otimes_{t=1}^m \mathcal{A}_t$ ist daher die kleinste σ -Algebra, bzgl. der alle Projektionen meßbar sind. Die σ -Algebren

$$\mathcal{M}_j = \left\{ A_j \subset X_j : \left(A_j \times \prod_{t \in K, t \neq j} X_t \right) \in \otimes_{t \in K} \mathcal{A}_t \right\}, \quad j \in K,$$

werden als **Marginal- σ -Algebren** von $\otimes_{t \in K} \mathcal{A}_t$ bezeichnet.

Im Folgenden beschränken wir uns der Einfachheit halber (und bzgl. endlich-dimensionalen cartesischen Produkte ohne Einschränkung der Allgemeinheit) auf den Fall $m = 2$. Es sei $M \subset X_1 \times X_2$. Für fest gewählte Elemente $\hat{x}_i \in X_i$ setzen wir $M|_{\hat{x}_1} = \{(\hat{x}_1, x_2) \in M :$

⁴⁰ Also eine erweitert-reellwertige und endlich additive Mengenfunktion $\eta \geq 0$ mit $\eta(\emptyset) = 0$.

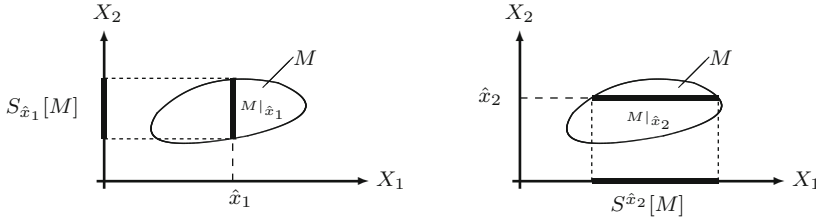


Abb. 1.2 Schnitte

$x_2 \in X_2$ und $M|_{\hat{x}_2} = \{(x_1, \hat{x}_2) \in M : x_1 \in X_1\}$. Die Projektionen dieser Teilmengen von M bezeichnet man als **Schnitte**. Genauer heißt die Teilmenge $S_{\hat{x}_1}[M] = p_{\{2\}}[M|_{\hat{x}_1}] \subset X_2$ ein **X_1 -Schnitt von M in X_2** , und die Teilmenge $S^{\hat{x}_2}[M] = p_{\{1\}}[M|_{\hat{x}_2}] \subset X_1$ ein **X_2 -Schnitt von M in X_1** (vergl. Abb. 1.2). Ist insbesondere $Q = Q_1 \times Q_2$ ein verallgemeinerter Quader, so hat man

$$S_{\hat{x}_1}[Q] = \begin{cases} Q_2, & \text{falls } \hat{x}_1 \in Q_1, \\ \emptyset, & \text{falls } \hat{x}_1 \notin Q_1, \end{cases} \quad S^{\hat{x}_2}[Q] = \begin{cases} Q_1, & \text{falls } \hat{x}_2 \in Q_2, \\ \emptyset, & \text{falls } \hat{x}_2 \notin Q_2. \end{cases}$$

Man erkennt leicht, daß die Familie $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{P}(X_1 \times X_2)$ aller derjenigen Elemente der σ -Algebra $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$, die die Eigenschaft besitzen, daß jeder X_1 -Schnitt einer Menge aus $\mathfrak{F}$ in $\mathcal{A}_2$ enthalten ist, eine σ -Algebra in $X_1 \times X_2$ bildet. Da diese Familie in der minimal umfassenden σ -Algebra $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ enthalten ist, folgt $\mathfrak{F} = \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$. Entsprechendes gilt mutatis mutandis für X_2 -Schnitte; daher können wir feststellen, daß alle Schnitte von Elementen A aus $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ meßbare Mengen sind, d. h. jeder X_1 -Schnitt $S_{\hat{x}_1}(A)$ ist Element von $\mathcal{A}_2$, jeder X_2 -Schnitt $S^{\hat{x}_2}(A)$ ist Element von $\mathcal{A}_1$.

Es seien nun $[X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i]$ ($i = 1, 2$) σ -endliche Maßräume; der Produktraum $X_1 \times X_2$ (und damit auch jede Teilmenge dieses Raumes) kann dann durch eine abzählbare Vereinigung disjunkter Quader $A_1^{(k)} \times A_2^{(k)} \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ mit $\mu_i(A_i^{(k)}) < \infty \forall k \in \mathbb{N}$ überdeckt werden; dazu sind nämlich lediglich entsprechende disjunkte Überdeckungen $X_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_i^{(k)}$ mit $A_i^{(k_i)} \in \mathcal{A}_i$ ($i = 1, 2$) der einzelnen Maßräume heranzuziehen, aus denen eine Überdeckung $\bigcup_{k_1=1}^{\infty} \bigcup_{k_2=1}^{\infty} (A_1^{(k_1)} \times A_2^{(k_2)}) = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} (B_1^{(\ell)} \times B_2^{(\ell)})$ mit disjunkten Quadern $B_i^{(\ell)} \in \mathcal{A}_i$ bildbar ist⁴¹.

Lemma 1.11.1 *Es sei $Q = Q_1 \times Q_2 \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ ein verallgemeinerter Quader mit $\mu_i(Q_i) < \infty$ ($i = 1, 2$). Die Familie $\mathcal{V}_Q$ aller endlichen disjunkten Vereinigungen von meßbaren Quadern, die in Q enthalten sind, bildet einen Ring.*

⁴¹ Man setze etwa $\ell = \ell(k_1, k_2) = K(k_1, k_2) - k_1$ für $k_1 + k_2 = \text{gerade}$, $\ell(k_1, k_2) = K(k_1, k_2) - k_2$ für $k_1 + k_2 = \text{ungerade}$ und $B_i^{\ell(k_1, k_2)} = A_i^{(k_i)}$, worin $K(k_1, k_2) = 1 + \frac{k_1 + k_2}{2}(k_1 + k_2 - 1)$ ist.

Beweis $\mathcal{V}_Q$ enthält die leere Menge. Die Differenz zweier Quader $A = A_1 \times A_2$ und $B = B_1 \times B_2$ ist offenbar stets als Vereinigung zweier disjunkter Quader darstellbar:

$$(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = ((A_1 \setminus B_1) \times A_2) \cup ((B_1 \cap A_1) \times (A_2 \setminus B_2)).$$

Daraus ist zu schließen, daß die Differenz zweier endlichen disjunkten Vereinigungen von Quadern wieder eine disjunkte Vereinigung von Quadern ergibt (ein detaillierter Beweis dieses Faktums ist etwa in [63] nachzulesen). Folglich enthält $\mathcal{V}_Q$ mit je zwei Elementen auch deren Differenz und – eine gemäß Definition von $\mathcal{V}_Q$ unmittelbar ersichtliche Eigenschaft – auch deren Vereinigung. Also ist $\mathcal{V}_Q$ ein Ring. $\square$

Zu einer beliebigen im Produktraum $X_1 \times X_2$ meßbaren Menge $A \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ definiere man die Funktionen $f_A^{(i)} : X_i \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ($i = 1, 2$) durch

$$f_A^{(1)}(x_1) = \mu_2(S_{x_1}[A]), \quad f_A^{(2)}(x_2) = \mu_1(S^{x_2}[A]). \quad (1.35)$$

Lemma 1.11.2 *Ist $A = A_1 \times A_2 \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$, $A_i \in \mathcal{A}_i$ ($i = 1, 2$), ein meßbarer Quader mit Seiten endlichen Maßes, so sind die Funktionen (1.35) integrierbar und erfüllen die Beziehung*

$$\int_{X_1} f_A^{(1)} d\mu_1 = \int_{X_2} f_A^{(2)} d\mu_2 = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2). \quad (1.36)$$

Beweis Wegen $S_{x_1}(A_1 \times A_2) = A_2$ für $x_1 \in A_1$ und $S^{x_2}(A_1 \times A_2) = A_1$ für $x_2 \in A_2$ (anderenfalls sind die Schnitte leer) hat man $f_{A_1 \times A_2}^{(1)}(x_1) = 1_{A_1}(x_1) \cdot \mu_2(A_2)$ und $f_{A_1 \times A_2}^{(2)}(x_2) = 1_{A_2}(x_2) \cdot \mu_1(A_1)$ mit $\mu_1(A_1) < \infty$, $\mu_2(A_2) < \infty$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Die folgende Verallgemeinerung repräsentiert eine Kernaussage dieses Abschnittes.

Satz 1.11.3 *$[X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i]$ ($i = 1, 2$) seien Maßräume mit σ -endlichen Maßes μ_1, μ_2 . Die zu einer meßbaren Menge $A \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ definierten Funktionen (1.35) sind meßbar, und es gilt*

$$\int_{X_1} f_A^{(1)} d\mu_1 = \int_{X_2} f_A^{(2)} d\mu_2.$$

Beweis Es sei $\mathcal{W}$ die Familie aller meßbaren Mengen $M \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$, für die die Satzaussage zutrifft. Zu zeigen ist $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{W}$.

1. Gemäß Lemma 1.11.2 sind alle verallgemeinerten Quader $A_1 \times A_2$ aus $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ mit $\mu_i(A_i) < \infty$ in $\mathcal{W}$ ($i = 1, 2$).

2. Gehört eine Folge $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ wechselseitig disjunkter Mengen aus $X_1 \times X_2$ zu $\mathcal{W}$, so gilt dies auch für die Vereinigung $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, also $V \in \mathcal{W}$. Das ist wie folgt einzusehen: Wegen $f_V^{(1)}(x_1) = \mu_2(S_{x_1}[V]) = \mu_2(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_{x_1}[E_k]) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_2(S_{x_1}[E_k]) \quad \forall x_1 \in X_1$ und $f_V^{(2)}(x_2) = \mu_1(S^{x_2}[V]) = \mu_1(\bigcup_{k=1}^{\infty} S^{x_2}[E_k]) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(S^{x_2}[E_k]) \quad \forall x_2 \in X_2$ hat man

$f_V^{(i)}(x_i) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{E_k}^{(i)}(x_i)$ ($i = 1, 2$) mit nicht negativen meßbaren Funktionen. Setzt man $g_n^{(i)} = \sum_{k=1}^n f_{E_k}^{(i)}$, so bilden die $g_n^{(i)}$ monoton nicht abnehmende Folgen, so daß der Satz 1.9.7 über die monotone Konvergenz die Relationen $\sum_{k=1}^{\infty} \int f_{E_k}^{(i)} d\mu_i = \int \sum_{k=1}^{\infty} f_{E_k}^{(i)} d\mu_i$ liefert ($i = 1, 2$)⁴². Laut Vor. ist hierin $\int f_{E_k}^{(1)} d\mu_1 = \int f_{E_k}^{(2)} d\mu_2 \forall k \in \mathbb{N}$, womit $\int f_V^{(1)} d\mu_1 = \int f_V^{(2)} d\mu_2$ folgt.

3. Da jede Teilmenge von $X_1 \times X_2$ – einschließlich des Produktraumes selbst – durch wechselseitig disjunkte Quader $A_1^{(k)} \times A_2^{(k)} \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ mit $\mu_i(A_i^{(k)}) < \infty \forall k \in \mathbb{N}$ überdeckt werden kann, folgt $X_1 \times X_2 \in \mathcal{W}$.

4. Zum Beweis des Satzes haben wir $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{W}$ zu zeigen. Hierzu betrachten wir einen meßbaren Quader $Q = Q_1 \times Q_2$ mit Seiten endlicher Maße $\mu_i(Q_i) < \infty$ ($i = 1, 2$), sowie die folgenden Mengenfamilien:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_Q &= \{M \in \mathcal{W} : M \subset Q\}, \\ \mathcal{V}_Q &= \left\{ \bigcup_{n=1}^m Q^{(n)} : m \in \mathbb{N}, Q^{(n)} = (Q_1^{(n)} \times Q_2^{(n)}) \subset Q \forall n \in \{1, \dots, m\}, \right. \\ &\quad \left. Q_1^{(n)} \in \mathcal{A}_1, Q_2^{(n)} \in \mathcal{A}_2, Q^{(n_1)} \cap Q^{(n_2)} = \emptyset \text{ für } n_1 \neq n_2 \right\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{W}_Q$ ist eine monotone Familie⁴³, denn für jede monotone Mengenfolge $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{W}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = L$ gilt einerseits $L \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ (Eigenschaft der σ -Algebra) und $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{x_1}[E_n] = S_{x_1}[L]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S^{x_2}[E_n] = S^{x_2}[L]$ (da Monotonie „vererbbar“), zum anderen hat man für die Funktionen $\varphi_n^{(1)}(x_1) = \mu_2(S_{x_1}[E_n])$, $\varphi_n^{(2)}(x_2) = \mu_1(S^{x_2}[E_n])$ die Abschätzungen $0 \leq \varphi_n^{(1)}(x_1) \leq \mu_2(Q_2) < \infty$, $0 \leq \varphi_n^{(2)}(x_2) \leq \mu_1(Q_1) < \infty$, so daß aufgrund des Satzes 1.9.6 von der majorisierten Konvergenz die Funktionen $\varphi^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^{(1)}$ und $\varphi^{(2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^{(2)}$ integrierbar sind und die Relation

$$\int \varphi^{(1)} d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n^{(1)} d\mu_1 \stackrel{!}{=} \int \varphi^{(2)} d\mu_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n^{(2)} d\mu_2$$

erfüllen, was $L = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \in \mathcal{W}_Q$ impliziert.

Nach Lemma 1.11.1 ist $\mathcal{V}_Q$ ein Ring, und dieser ist nach dem unter 1. und 2. Gesagten in $\mathcal{W}_Q$ enthalten. Daher besagt das Korollar 1.1.7 aus Abschn. 1.2, daß die von $\mathcal{V}_Q$ erzeugte monotone Familie $\mathcal{M}(\mathcal{V}_Q)$ mit dem von $\mathcal{V}_Q$ erzeugten σ -Ring zusammenfällt und in $\mathcal{W}_Q$ enthalten ist:

$$\mathcal{M}(\mathcal{V}_Q) = \mathcal{R}_{\sigma}(\mathcal{V}_Q) \subseteq \mathcal{W}_Q. \quad (1.37)$$

Weiterhin hat man offenbar die Relation

$$(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \cap Q \subseteq \mathcal{V}_Q \subseteq \mathcal{W}_Q \subseteq \mathcal{W},$$

⁴² Die Kennzeichnung der Integrationsbereiche X_1, X_2 ist der Einfachheit halber weggelassen.

⁴³ Vergl. Abschn. 1.1.

aus der unter Beachtung von Lemma 1.1.1

$$\mathcal{R}_\sigma((\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \cap Q) = \mathcal{R}_\sigma((\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)) \cap Q \stackrel{!}{=} \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \cap Q \subseteq \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{V}_Q)$$

folgt. Beachtet man (1.37), so besagt diese Beziehung

$$\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \cap Q \subseteq \mathcal{W}_Q \subseteq \mathcal{W}, \quad (1.38)$$

mit deren Hilfe schließlich $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{W}$ wie folgt nachzuweisen ist: Es sei M ein beliebiges Element aus $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$. Da jede solche Teilmenge des Raumes $X_1 \times X_2$ durch eine abzählbare Vereinigung disjunkter Quader $Q^{(k)} = A_1^{(k)} \times A_2^{(k)} \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ mit $\mu_i(A_i^{(k)}) < \infty \forall k \in \mathbb{N}$ überdeckt werden kann, ist gemäß (1.38) $M \cap Q^{(k)} \in \mathcal{W}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ (man interpretiere in (1.38) $Q^{(k)}$ als Q). Unter 2. hatten wir jedoch gezeigt, daß damit auch die (disjunkte) Vereinigung aller dieser Elemente aus $\mathcal{W}$ in $\mathcal{W}$ liegt, d. h. wir haben

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (M \cap Q^{(k)}) = M \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} Q^{(k)} = M \in \mathcal{W},$$

und damit $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{W}$. □

Satz 1.11.4 $[X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i] \ (i = 1, 2)$ seien Maßräume mit σ -endlichen Maßen μ_1, μ_2 ; dann ist die Mengenfunktion $\nu : \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, definiert durch

$$\nu(A) = \int_{X_1} f_A^{(1)} d\mu_1 = \int_{X_2} f_A^{(2)} d\mu_2 \quad \forall A \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2), \quad (1.39)$$

ein σ -endliches Maß, das für Quader $A = A_1 \times A_2 \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ in der Form

$$\nu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \quad (1.40)$$

darstellbar ist. ν ist durch (1.40) eindeutig bestimmt.

Beweis Die Funktionen $f_A^{(i)}$ sind nicht negativ und meßbar; daher ist ν eine nicht negative Mengenfunktion über $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ mit $\nu(\emptyset) = 0$, wobei $\nu(A)$ im Falle der Integrabilität der $f_A^{(i)}$ endlich ist und im Falle der Nicht-Integrabilität den Wert ∞ annimmt. Es sei $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit $A_n \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \forall n \in \mathbb{N}$. Da ein Schnitt von A gleich der Vereinigung der entsprechenden Schnitte der A_n ist, folgt aufgrund der σ -Additivität der Maße μ_i

$$f_A^{(1)}(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{A_n}^{(1)}(x_1), \quad f_A^{(2)}(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{A_n}^{(2)}(x_2).$$

Setzt man $g_k^{(i)} = \sum_{n=1}^k f_{A_n}^{(i)}$, so besagt der Satz 1.9.7 von der monotonen Konvergenz, daß $\lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k^{(i)} d\mu_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int f_{A_n}^{(i)} d\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_{A_n}^{(i)} d\mu_i \stackrel{!}{=} \int f_A^{(i)} d\mu_i$ ist, d. h. ν ist σ -additiv, also ein Maß über $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$.

Da die Maße μ_i σ -endlich sind, gibt es eine Überdeckung $\bigcup_{\ell=1}^{\infty} (B_1^{(\ell)} \times B_2^{(\ell)})$ des Raumes $X_1 \times X_2$ mit $B_i^{(\ell)} \in \mathcal{A}_i$ und $\mu_i(B_i^{(\ell)}) < \infty \forall \ell \in \mathbb{N}$ ($i = 1, 2$). Für diese gilt nach Lemma 1.11.2 $\nu(B_1^{(\ell)} \times B_2^{(\ell)}) = \mu_1(B_1^{(\ell)}) \cdot \mu_2(B_2^{(\ell)}) < \infty \forall \ell \in \mathbb{N}$, d. h. ν ist σ -endlich.

Zu zeigen bleibt die eindeutige Bestimmtheit von ν durch Gleichung (1.40). Angenommen, ein Maß θ wäre ebenfalls vermöge (1.40) festgelegt. Unter Rückgriff auf die eben genannte Überdeckung $\bigcup_{\ell=1}^{\infty} (B_1^{(\ell)} \times B_2^{(\ell)}) =: \bigcup_{\ell=1}^{\infty} B^{(\ell)}$ des Raumes $X_1 \times X_2$ definiere man für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ die Mengenfamilien $\mathcal{H}_\ell$ und $\mathcal{V}_\ell$ durch⁴⁴

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\ell &= \{M : M \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \cap B^{(\ell)}, \nu(M) = \theta(M)\}, \\ \mathcal{V}_\ell &= \left\{ \bigcup_{n=1}^m Q^{(n)} : m \in \mathbb{N}, Q^{(n)} = (Q_1^{(n)} \times Q_2^{(n)}) \subset B^{(\ell)} \forall n \in \{1, \dots, m\}, \right. \\ &\quad \left. Q_1^{(n)} \in \mathcal{A}_1, Q_2^{(n)} \in \mathcal{A}_2, Q^{(n_1)} \cap Q^{(n_2)} = \emptyset \text{ für } n_1 \neq n_2 \right\}. \end{aligned}$$

Jedes $\mathcal{H}_\ell$ ist eine monotone Familie, da bekanntlich für monotone Folgen $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(M_n) = \nu(\lim_{n \rightarrow \infty} M_n)$ (und ebenso mit θ). Jedes $\mathcal{V}_\ell$ andererseits ist ein Ring (s. Lemma 1.11.1), und man hat offenbar $\mathcal{V}_\ell \subset \mathcal{H}_\ell$. Nach Korollar 1.1.7 in Abschn. 1.2 enthält $\mathcal{H}_\ell$ daher den von $\mathcal{V}_\ell$ erzeugten σ -Ring $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{V}_\ell)$. Da jedes Element $U = (A_1 \times A_2) \cap B^{(\ell)}$ aus $(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1) \cap B^{(\ell)}$ in der Form $U = (A_1 \cap B_1^{(\ell)}) \times (A_2 \cap B_2^{(\ell)})$ als zu $\mathcal{V}_\ell$ gehörig erkennbar ist, folgen die Beziehungen

$$\begin{aligned} (A_1 \times A_1) \cap B^{(\ell)} &\subseteq \mathcal{V}_\ell \subset \mathcal{M}(\mathcal{V}_\ell) = \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{V}_\ell) \subseteq \mathcal{H}_\ell, \\ \mathcal{R}_\sigma((A_1 \times A_1) \cap B^{(\ell)}) &= \mathcal{R}_\sigma(A_1 \times A_1) \cap B^{(\ell)} \\ &= \sigma(A_1 \times A_1) \cap B^{(\ell)} \subseteq \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{V}_\ell) \subseteq \mathcal{H}_\ell, \end{aligned}$$

deren letzte $\mathcal{H}_\ell = \sigma(A_1 \times A_1) \cap B^{(\ell)}$ impliziert. Demnach besteht für jede meßbare Menge $A \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ und jedes $\ell \in \mathbb{N}$ die Gleichheit $\nu(A \cap B^{(\ell)}) = \theta(A \cap B^{(\ell)})$. Da weiterhin aufgrund der Überdeckungseigenschaft der Familie aller $B^{(\ell)}$ jedes solche A auch in der Form $A = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} (A \cap B^{(\ell)})$ schreibbar ist, folgt $\nu(A) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \nu(A \cap B^{(\ell)}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \theta(A \cap B^{(\ell)}) = \theta(A)$ für jedes $A \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$, d. h. $\nu = \theta$. $\square$

Definition 1.11.3 Das vermöge (1.39) definierte Maß $\nu : \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ wird als das **Produkt der σ -endlichen Maße μ_1, μ_2** oder als **Produktmaß der Räume $[X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i]$ ($i = 1, 2$)** bezeichnet. Man schreibt $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2$ oder auch $\nu = \mu_1 \times \mu_2$.

⁴⁴ Diese Beweisführung ähnelt der zu Satz 1.11.3, s. dort Beweispunkt 4.

Bemerkung 1.11.1 Die Wichtigkeit dieser Aussagen möge an folgendem Beispiel verdeutlicht werden: Es sei $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}]$ ein Wahrscheinlichkeitsraum über $\bar{\mathbb{R}}$, also ein Maßraum mit vollständigem und total endlichem Maß (und $\mathbb{P}(\bar{\mathbb{R}}) = 1$). Wir betrachten zwei Zufallsvariable ξ_1, ξ_2 über Ω , d. h. zwei f. ü. endliche meßbare Abbildungen $\xi_i : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, $i = 1, 2$, (s. Abschn. 2). Ein meßbarer verallgemeinerter Quader $Q = B_1 \times B_2$ führt damit zur Definition der Funktionen $f_Q^{(i)} : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$,

$$f_Q^{(1)}(x_1) = \mathbb{P}_{\xi_2}(S_{x_1}[Q]) = \mathbb{P}_{\xi_2}(B_2), \quad f_Q^{(2)}(x_2) = \mathbb{P}_{\xi_1}(S_{x_2}[Q]) = \mathbb{P}_{\xi_1}(B_1)$$

für $x_i \in B_i$, worin die $\mathbb{P}_{\xi_i}$ die vermöge $\mathbb{P}_{\xi_i}(B) = \mathbb{P}(\xi_i^{-1}[B])$ für $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ induzierten Wahrscheinlichkeitsmaße sind ($i = 1, 2$). Diese Maße sind über der σ -Algebra $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ des $\bar{\mathbb{R}}$ definiert und führen nach Satz 1.11.4 zur Definition eines σ -endlichen – hier sogar total endlichen – Maßes $\nu : \sigma(\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \times \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})) \rightarrow [0, 1]$,

$$\nu(M) = \int f_M^{(1)} d\mathbb{P}_{\xi_1} = \int f_M^{(2)} d\mathbb{P}_{\xi_2} \quad \forall M \in \sigma(\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \times \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})),$$

welches das Produktmaß $\mathbb{P}_{\xi_1} \times \mathbb{P}_{\xi_2}$ der Maße $\mathbb{P}_{\xi_i}$ repräsentiert und für verallgemeinerte Quader $Q = B_1 \times B_2$ aus $\sigma(\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \times \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ die Form

$$(\mathbb{P}_{\xi_1} \times \mathbb{P}_{\xi_2})(B_1 \times B_2) = \mathbb{P}_{\xi_1}(B_1) \cdot \mathbb{P}_{\xi_2}(B_2)$$

annimmt. Sei ξ der aus den Komponenten-Variablen ξ_1, ξ_2 gebildete Zufallsvektor über Ω mit Werten in $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$:

$$\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Das Urbild $\xi^{-1}[Q]$ eines verallgemeinerten Quaders $Q = B_1 \times B_2 \in \sigma(\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \times \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ hat die Form $\xi^{-1}[Q] = \xi_1^{-1}[B_1] \cap \xi_2^{-1}[B_2]$, so daß für das durch $\mathbb{P}_\xi(B) = \mathbb{P}(\xi^{-1}[B])$ $\forall B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}})$ definierte induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_\xi$ folgt

$$\mathbb{P}_\xi(B_1 \times B_2) = \mathbb{P}(\xi^{-1}[B_1 \times B_2]) = \mathbb{P}(\xi_1^{-1}[B_1] \cap \xi_2^{-1}[B_2]).$$

Zwei Zufallsvariablen ξ_1, ξ_2 werden als stochastisch unabhängig bezeichnet, wenn

$$\mathbb{P}(\xi_1^{-1}[B_1] \cap \xi_2^{-1}[B_2]) = \mathbb{P}(\xi_1^{-1}[B_1]) \cdot \mathbb{P}(\xi_2^{-1}[B_2])$$

für B_1, B_2 aus $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ gilt. Somit ist das Produktmaß der beiden Bildmaße $\mathbb{P}_{\xi_1}, \mathbb{P}_{\xi_2}$ im Falle der stochastischen Unabhängigkeit der beiden Zufallsvariablen ξ_1, ξ_2 nichts anderes als das Bildmaß $\mathbb{P}_\xi$ des aus ξ_1, ξ_2 gebildeten Zufallsvektors:

$$\mathbb{P}_\xi = \mathbb{P}_{\xi_1} \times \mathbb{P}_{\xi_2}.$$

□

Es sei $\phi : X_1 \times X_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ eine über dem Produktraum $[X_1 \times X_2, \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2), \mu_1 \times \mu_2]$ integrable oder zumindest nicht negative (erweitert-integrable)⁴⁵ Funktion. Das Integral $\int \phi d(\mu_1 \times \mu_2)$ heißt **Doppelintegral von ϕ** .

Es ist naheliegend, die Eigenschaften der über einem Produkt von Maßräumen definierten Funktionen hinsichtlich ihrer Einschränkungen auf jeweils einen der beteiligten Maßräume zu untersuchen. Hierzu betrachtet man sog. Funktionsschnitte.

Definition 1.11.4 Es sei $\phi : X_1 \times X_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Für fest gewählte Punkte $\hat{x}_i \in X_i$ heißt $\phi_{\hat{x}_1} : X_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, definiert durch $\phi_{\hat{x}_1}(x_2) = \phi(\hat{x}_1, x_2)$ (bzw. $\phi^{\hat{x}_2} : X_1 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, definiert durch $\phi^{\hat{x}_2}(x_1) = \phi(x_1, \hat{x}_2)$) ein **X_1 -Funktionsschnitt von ϕ** (bzw. ein **X_2 -Funktionsschnitt von ϕ**).

Ist $\phi : X_1 \times X_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ meßbar, so gilt für das Urbild einer offenen Menge O aus $\bar{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} (\phi_{\hat{x}_1})^{-1}[O] &= \{x_2 : \phi(\hat{x}_1, x_2) \in O\} = S_{\hat{x}_1}[\phi^{-1}[O]], \\ (\phi^{\hat{x}_2})^{-1}[O] &= \{x_1 : \phi(x_1, \hat{x}_2) \in O\} = S^{\hat{x}_2}[\phi^{-1}[O]]. \end{aligned}$$

Da Schnitte meßbarer Mengen meßbar sind (s. o.), folgt damit auch die Meßbarkeit der Funktionen $\phi_{\hat{x}_1}$ und $\phi^{\hat{x}_2}$. Ist zudem ϕ integrabel oder erweitert-integrabel, so sind auch die Funktionsschnitte $\phi_{\hat{x}_1}$ und $\phi^{\hat{x}_2}$ integrabel bzw. erweitert-integrabel (das folgt leicht aus den Eigenschaften der entsprechenden Funktionsschnitte einer Folge integrierbarer einfacher Funktionen über $X_1 \times X_2$, die f. ü. oder im Maße gegen ϕ konvergiert). In diesem Falle können wir die Funktionen $f_{\phi}^{(i)} : X_i \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ($i = 1, 2$) vermöge

$$f_{\phi}^{(1)}(\hat{x}_1) = \int \phi_{\hat{x}_1} d\mu_2, \quad f_{\phi}^{(2)}(\hat{x}_2) = \int \phi^{\hat{x}_2} d\mu_1 \quad (1.41)$$

definieren. Falls die $f_{\phi}^{(i)}$ integrabel oder nicht negativ sind, existieren auch die Integrale

$$\begin{aligned} \int f_{\phi}^{(1)}(x_1) d\mu_1(x_1) &= \int \left(\int \phi_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1), \\ \int f_{\phi}^{(2)}(x_2) d\mu_2(x_2) &= \int \left(\int \phi^{x_2}(x_1) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2), \end{aligned}$$

die als **iterierte Integrale der Funktion ϕ** bezeichnet werden; man schreibt kurz

$$\int f_{\phi}^{(1)} d\mu_1 = \iint \phi d\mu_2 d\mu_1, \quad \int f_{\phi}^{(2)} d\mu_2 = \iint \phi d\mu_1 d\mu_2.$$

Den Zusammenhang zwischen iterierten Integralen und Doppelintegral klärt ein Satz von Fubini.

⁴⁵ Zur Erinnerung: Einer nicht integrierbaren nicht negativen Funktion wird der Integralwert ∞ zugeordnet.

Satz 1.11.5 (Fubini) *Es sei ϕ eine meßbare erweitert-reellwertige Funktion über $X_1 \times X_2$. Ist ϕ nicht negativ oder ist $\int |\phi| d(\mu_1 \times \mu_2) < \infty$, so gilt: Die vermöge (1.41) definierten Funktionen $f_\phi^{(i)} : X_i \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ($i = 1, 2$) sind meßbar, und es ist*

$$\int \phi d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \iint \phi d\mu_2 d\mu_1 = \iint \phi d\mu_1 d\mu_2. \quad (1.42)$$

Beweis 1. Sei ϕ nicht negativ. Im einfachsten Fall ist $\phi : X_1 \times X_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ Indikatorfunktion einer meßbaren Menge $M \subset X_1 \times X_2$, d. h. $\phi(\mathbf{x}) = 1_M(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Damit folgt für festgehaltene $\hat{x}_i$ ($i = 1, 2$) $\phi_{\hat{x}_1}(x_2) = 1_{S_{\hat{x}_1}[M]}(x_2)$ und $\phi^{\hat{x}_2}(x_1) = 1_{S^{\hat{x}_2}[M]}(x_1)$, so daß die Funktionen $f^{(i)}$ von der Form $f^{(1)}(\hat{x}_1) = \mu_2(S_{\hat{x}_1}[M])$ bzw. $f^{(2)}(\hat{x}_2) = \mu_1(S^{\hat{x}_2}[M])$ sind. Nach Satz 1.11.3 und Gleichung (1.39) hat man für diesen Fall sofort die Beziehung (1.42). Demnach gilt die Behauptung auch für jede einfache Funktion (als Linearkombination charakteristischer Funktionen). Nach Satz 1.7.1 (Abschn. 1.7) gibt es eine monoton nicht abnehmende Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ einfacher nicht negativer Funktionen, die überall gegen ϕ konvergiert. Für diese besagt der Satz 1.9.7 von der monotonen Konvergenz, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n d(\mu_1 \times \mu_2) = \int \phi d(\mu_1 \times \mu_2)$ ist. Die analog zu (1.41) definierten Funktionen $f_{s_n}^{(1)}(\hat{x}_1) = \int s_n(\hat{x}_1, x_2) d\mu_2(x_2)$ und $f_{s_n}^{(2)}(\hat{x}_2) = \int s_n(x_1, \hat{x}_2) d\mu_1(x_1)$ mit festen $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ führen zu

$$\begin{aligned} \int f_{s_n}^{(1)}(\hat{x}_1) d\mu_1(\hat{x}_1) &= \iint s_n(\hat{x}_1, x_2) d\mu_2(x_2) d\mu_1(\hat{x}_1) \\ \int f_{s_n}^{(2)}(\hat{x}_2) d\mu_2(\hat{x}_2) &= \iint s_n(x_1, \hat{x}_2) d\mu_1(x_1) d\mu_2(\hat{x}_2), \end{aligned}$$

wobei nach dem vorher Gesagten für die einfachen Funktionen $s_n(x_1, x_2)$ gilt

$$\iint s_n(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1) = \iint s_n(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2). \quad (1.43)$$

Da die $\{f_{s_n}^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ihrerseits nicht abnehmende Folgen nicht negativer integrierbarer Funktionen sind ($i = 1, 2$), bestehen – wieder gemäß Satz 1.9.7 – die Gleichungen

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{s_n}^{(1)}(x_1) d\mu_1(x_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\int s_n(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int s_n(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \iint \phi(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{s_n}^{(2)}(x_2) d\mu_2(x_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\int s_n(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) \\ &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int s_n(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) = \iint \phi(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2). \end{aligned}$$

Mit (1.43) folgt daher (1.42).

2. Ist $|\phi|$ integrierbar, so auch ϕ , und es gibt eine $\mathcal{L}^1$ -Cauchy-Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ einfacher integrierbarer Funktionen, die fast überall gegen ϕ konvergiert und deren Absolutwerte durch

eine integrable Funktion majorisiert werden. In diesem Falle kann also der Satz 1.9.6 von der majorisierten Konvergenz herangezogen werden (Abschn. 1.9), um analoge Schlüsse zu ziehen. Das beweist die Behauptung. $\square$

Bemerkung 1.11.2 Wir wollen diese Aussagen wieder am Beispiel geeigneter Zufallsabbildungen illustrieren: Es seien $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}]$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion und $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Zufallsvektor, der die Zufallsvariablen ξ_1, ξ_2 vermöge $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ bestimmt. Die Komposition $\phi \circ \xi$ sei $\mathbb{P}$ -quasi-integabel (also $\mathbb{P}$ -integabel oder $\mathbb{P}$ -erweitert-integabel). Wie im Abschn. 2 gezeigt wird, gilt dann

$$\int_{\Omega} \Phi \circ \xi d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \Phi d\mathbb{P}_{\xi}$$

(vergl. Ausdruck (2.31), Abschn. 2.8). Sind ξ_1 und ξ_2 stochastisch unabhängig, so folgt $\mathbb{P}_{\xi} = \mathbb{P}_{\xi_1} \times \mathbb{P}_{\xi_2}$ (s. Bemerkung 1.11.1). Aufgrund des Satzes von Fubini hat man daher im Falle stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen folgende Darstellung:

$$\int_{\Omega} \Phi \circ \xi d\mathbb{P} = \int \left(\int \Phi(x_1, x_2) d\mathbb{P}_{\xi_1} \right) d\mathbb{P}_{\xi_2} = \int \left(\int \Phi(x_1, x_2) d\mathbb{P}_{\xi_2} \right) d\mathbb{P}_{\xi_1}. \quad (1.44)$$

Entsprechendes gilt offensichtlich auch für $d > 2$ Dimensionen. $\square$

Wohl am häufigsten wird der Satz von Fubini dann herangezogen, wenn es um die Frage geht, ob eine Summation mit einer Integration vertauschbar ist. So ist der Erwartungswert einer Summe von Zufallsvariablen zuweilen leichter bestimmbar, wenn man statt der Berechnung des Integrals über diese Summe die Erwartungswerte der Summanden addieren kann. Hierzu nennen wir das

Korollar 1.11.6 Es sei $X_1 = \mathbb{N}_0$. Die Mengenfunktion $\mu_1 : \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0) \rightarrow \mathbb{N}_0$, die jeder Teilmenge $B \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0)$ die Anzahl $|B|$ der in B enthaltenen nicht negativen ganzen Zahlen zuordnet, ist offensichtlich ein Maß über $\mathfrak{P}(\mathbb{N}_0)$, und $[\mathbb{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0), \mu_1] = [X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1]$ formt einen Maßraum. $[X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2]$ sei ein weiterer Maßraum, und es bezeichne $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ den Produktraum der $[X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i]$ ($i = 1, 2$). Über X werde die reellwertige Funktion $g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2)$ (mit $x_i \in X_i$) definiert. Falls für jede meßbare Menge $M \subset X$ mindestens eine der Relationen

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\int_{S_n[M]} |g(n, x_2)| d\mu_2 \right) < \infty, \quad \int_{X_2} \left(\sum_{n \in S_{\hat{x}_2}[M]} |g(n, \hat{x}_2)| \right) d\mu_2 < \infty$$

gilt, so ist g bzgl. μ quasiintegabel, und der Satz von Fubini liefert

$$\int_M g(\mathbf{x}) d(\mu_1 \times \mu_2) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\int_{S_n[M]} g(n, x_2) d\mu_2 \right) = \int_{X_2} \left(\sum_{n \in S_{\hat{x}_2}[M]} g(n, \hat{x}_2) \right) d\mu_2.$$

Zu diesen Aussagen vergleiche man auch [10] und [84]. Eine im obigen Sinne oft anwendbare Konkretisierung lautet⁴⁶

Korollar 1.11.7 Sind ξ_n ($n \in \mathbb{N}$) nicht negative Zufallsvariablen, und besteht mindestens eine der Beziehungen $\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n] < \infty$ oder $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\xi_n] < \infty$, so gilt

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\xi_n]. \quad (1.45)$$

1.12 Formale Verallgemeinerungen

Die Resultate des Abschn. 1.11 sind leicht auf den Fall endlich vieler Mengen $X_1, \dots, X_m$ übertragbar. Für $m = 3$ etwa ist ein X_1 -Schnitt $S_{\hat{x}_1}[M]$ einer Menge $M \subset X_1 \times X_2 \times X_3$ als Projektion $p_{\{2,3\}}[M|_{\hat{x}_1}] \subset X_2 \times X_3$ definiert, wobei $M|_{\hat{x}_1}$ für festes $\hat{x}_1$ in der Form $M|_{\hat{x}_1} = \{(\hat{x}_1, x_2, x_3) \in M : (x_2, x_3) \in X_2 \times X_3\}$ gegeben ist. Sind $[X_t, \mathcal{A}_t, \mu_t]$ Maßräume ($t \in \{1, 2, 3\}$), so ist über der Produktalgebra $\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$ entsprechend den früheren Resultaten in eindeutiger Weise ein Maß $\mu_2 \otimes \mu_3$ definiert, das für Quader $Q = A_2 \times A_3$ mit $A_2 \in \mathcal{A}_2, A_3 \in \mathcal{A}_3$ die Relation $\mu_2 \otimes \mu_3(Q) = \mu_2(A_2) \cdot \mu_3(A_3)$ erfüllt. Gemäß Satz 1.11.4 gibt es dann ein Maß ν über der Produkt- σ -Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$, das mit $f_A^{(1)}(x_1) := \mu_2 \otimes \mu_3(p_{\{2,3\}}[A|_{x_1}])$ vermöge

$$\nu(A) = \int_{X_1} f_A^{(1)}(x_1) d\mu_1$$

definiert ist ($A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$). Dieses Maß ist eindeutig bestimmt⁴⁷ und erfüllt für Quader $Q_A = A_1 \times A_2 \times A_3$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i \forall i \in \{1, 2, 3\}$ die Relation

$$\nu(Q_A) = \bigotimes_{t=1}^3 \mu_t(A_t).$$

Analog dazu kann man die Existenz eines Maßes ν über der Produkt- σ -Algebra $\bigotimes_{t=1}^m \mathcal{A}_t$ des cartesischen Produktes endlich vieler Maßräume $[X_t, \mathcal{A}_t, \mu_t]$, $t = 1, \dots, m$, konstatieren, das eindeutig bestimmt ist und für Quader aus $\prod_{t=1}^m \mathcal{A}_t$ dem Produkt des Einzelmaße gleicht.

Die Definition endlicher cartesischer Produkte läßt sich nun – ebenso wie der Begriff der Zylindermengen – leicht auf nicht endliche Indexmengen verallgemeinern. Dazu beachte man, daß ein Produkt der Form $\prod_{t=1}^m X_t$ isomorph ist zur Menge aller Abbildungen f der Indexmenge $T = \{1, \dots, m\}$ in die Vereinigung $\bigcup_{t=1}^m X_t$ mit $f(t) \in X_t \forall t \in T$, so daß

⁴⁶ Siehe dazu die Bemerkung vor Beginn des Abschn. 1.10.

⁴⁷ Beweise sind ähnlich wie im vorigen Abschnitt zu führen.

man als alternative Schreibweise

$$\prod_{t=1}^m X_t = \left\{ f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \bigcup_{t=1}^m X_t \text{ mit } f(t) \in X_t \forall t \in \{1, \dots, m\} \right\}$$

verwenden kann. Diese Schreibweise ist auch für nicht endliche Indexmengen geeignet: Zu einer beliebigen (ggf. überabzählbaren) nicht leeren Indexmenge T bezeichne X_t für jedes $t \in T$ eine beliebige Menge. Das **cartesische Produkt der Mengen** X_t ist dann die Abbildungsmenge

$$\prod_{t \in T} X_t = \left\{ f : T \rightarrow \bigcup_{t \in T} X_t \text{ mit } f(t) \in X_t \forall t \in T \right\}. \quad (1.46)$$

Im allgemeinen geht man von topologischen Räumen aus, daher sprechen wir im Folgenden auch meist von *Räumen* X_t .

Definition 1.12.1 Es bezeichne T eine Indexmenge und $\prod_{t \in T} X_t = F$ die vermöge (1.46) definierte Menge aller Abbildungen von $T \rightarrow \bigcup_{t \in T} X_t$ mit $f(t) \in X_t \forall t \in T$. Sind dann zu endlich vielen Indices $t_1, \dots, t_\ell$ aus T die Mengen $M_{t_j} \subset X_{t_j}$, $j = 1, \dots, \ell$, Teilmengen der zugehörigen Räume und bezeichnet $Q_M \subset \prod_{j=1}^\ell X_{t_j}$ den verallgemeinerten Quader mit den Seiten $M_{t_1}, \dots, M_{t_\ell}$, so wird

$$Z_{t_1, \dots, t_\ell}(Q_M) = \left\{ f \in \prod_{t \in T} X_t : f(t_j) \in M_{t_j} \forall j \in \{1, \dots, \ell\} \right\}$$

als **Zylindermenge in $\prod_{t \in T} X_t$ mit der Basis Q_M über den Koordinaten $t_1, \dots, t_\ell$** bezeichnet. Für eine beliebige Menge $B^{(\ell)} \subset \prod_{j=1}^\ell X_{t_j}$ (die also nicht notwendig einen verallgemeinerten Quader darstellt) heißt entsprechend

$$Z_{t_1, \dots, t_\ell}(B^{(\ell)}) = \left\{ f \in \prod_{t \in T} X_t : (f(t_1), \dots, f(t_\ell)) \in B^{(\ell)} \right\}$$

Zylindermenge in $\prod_{t \in T} X_t$ mit der Basis $B^{(\ell)}$ über den Koordinaten $t_1, \dots, t_\ell$.

Im Falle einer abzählbaren Indexmenge $T \subset \mathbb{N}$ und der Festlegung $X_t = X \forall t \in T$ stellt $\prod_{t \in T} X_t = F$ den Raum aller Folgen $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus X dar. Ein Beispiel hierfür liefert der Elementarereignisraum $\Omega = \prod_{t \in T} \tilde{\Omega}_t$ mit $\tilde{\Omega}_t = \{1, \dots, 6\} \forall t \in T$ eines Experimentes, in dem ein Würfel abzählbar oft geworfen wird – etwa mit dem Ziel, eine „6“ zu würfeln (wozu ja ggf. ein beliebig häufiges Würfeln erforderlich wird).

Es seien nun $[X_t, \mathcal{A}_t, \mu_t]$ Maßräume ($t \in T$). In direkter Verallgemeinerung des Falles $T = \{1, 2\}$ können wir für jedes *endliche* $T = \{1, \dots, m\}$ Folgendes sagen:

1. Die von allen Quadern $\prod_{t \in T} A_t$ mit $A_t \in \mathcal{A}_t$ erzeugte σ -Algebra $\sigma(\prod_{t=1}^m \mathcal{A}_t) = \otimes_{t=1}^m \mathcal{A}_t$ ist die Produkt- σ -Algebra des cartesischen Produktes $\prod_{t \in T} X_t$ der Räume $X_1, \dots, X_m$, so daß $[\prod_{t \in T} X_t, \sigma(\prod_{t \in T} \mathcal{A}_t)]$ ein meßbarer Raum ist.
2. Das vermöge $\nu(A_1 \times \dots \times A_m) = \mu_1(A_1) \cdot \dots \cdot \mu_m(A_m)$ für $A_t \in \mathcal{A}_t$, $t \in T$ nach Satz 1.11.4 eindeutig bestimmte σ -endliche Maß $\nu = \otimes_{t \in T} \mu_t$ über $\sigma(\prod_{t \in T} \mathcal{A}_t)$ macht diesen meßbaren Raum zu einem Produkt-Maßraum

$$\left[\prod_{t \in T} X_t, \bigotimes_{t \in T} \mathcal{A}_t, \bigotimes_{t \in T} \mu_t \right] =: \bigotimes_{t \in T} [X_t, \mathcal{A}_t, \mu_t],$$

den man als den **Produktraum der Maßräume** $[X_t, \mathcal{A}_t, \mu_t]$ ($t = 1, \dots, m$) bezeichnet.

3. Die σ -Algebra $\bigotimes_{t \in T} \mathcal{A}_t$ ist die kleinste σ -Algebra, bzgl. der alle Projektionen p_K^T für $K \subset T$ meßbar sind.

Auch für eine beliebige, nicht notwendig endliche, Indexmenge T bezeichne p_K^T für $K = \{k_1, \dots, k_m\}$ die Projektion des cartesischen Produktes $\prod_{t \in T} X_t$ in das cartesische Produkt der Mengen $X_{k_1}, \dots, X_{k_m}$. Man realisiert leicht, daß mit einer weiteren Teilsequenz $L \subset K$ mit $|L| = \ell < |K| = m$ die Verknüpfung (Hintereinanderausführung)

$$p_L^T = p_L^K \circ p_K^T$$

gilt. Des weiteren können wir Folgendes feststellen.

Lemma 1.12.1 Für $K = \{1, \dots, m\}$ gilt

$$\bigotimes_{t=1}^m \mathcal{A}_t = \sigma \left(\bigcup_{t=1}^m (p_{\{t\}}^K)^{-1} [\mathcal{A}_t] \right) = \sigma \left(\bigcup_{L \subset K} (p_L^K)^{-1} \left[\prod_{t \in L} A_t \right] \right). \quad (1.47)$$

Beweis Jede Menge der Form $(p_{\{t\}}^K)^{-1} [A_t]$ ist offenbar eine Zylindermenge, und der Durchschnitt solcher Mengen bestimmt Quader in Teilräumen von $\prod_{t=1}^m X_t$. Daraus folgt, daß $\bigotimes_{t=1}^m \mathcal{A}_t$ in der von der Vereinigung $\bigcup_{t=1}^m (p_{\{t\}}^K)^{-1} [A_t]$ erzeugten σ -Algebra enthalten ist ($K = \{1, \dots, m\}$). Andererseits kann jede Zylindermenge $(p_{\{t_0\}}^K)^{-1} [A_{t_0}]$ als (verallgemeinerter) Quader mit Seiten $(p_{\{t_0\}}^K)^{-1} [A_{t_0}]$ sowie $(p_{\{t\}}^K)^{-1} [X_t]$ für $t \neq t_0$ angesehen werden, d. h. jedes Element aus $\bigcup_{t=1}^m (p_{\{t\}}^K)^{-1} [A_t]$ ist im Falle $A_t \in \mathcal{A}_t \forall t$ auch in $\bigotimes_{t=1}^m \mathcal{A}_t$ enthalten. Es gilt also $\bigotimes_{t=1}^m \mathcal{A}_t = \sigma \left(\bigcup_{t=1}^m (p_{\{t\}}^K)^{-1} [A_t] \right)$. Für $L \subset K$ sind die Zylindermengen $(p_L^K)^{-1} [\prod_{t \in L} A_t] = (p_L^K)^{-1} [Q_A]$ auch darstellbar als $(p_L^K)^{-1} [\prod_{t \in L} A_t] = \{(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{t=1}^m X_t : x_{t_j} \in A_{t_j} \forall t_j \in L\}$, und jede solche Zylindermenge ist Durchschnitt von Mengen der Form $(p_{\{t\}}^K)^{-1} [A_t]$. $\square$

Diese Zusammenhänge werden für nicht endliche Indexmengen T zur Definition der Produkt- σ -Algebra eines nicht endlichen cartesischen Produktes herangezogen. Dabei beachte man, daß aus (1.12.1) die Meßbarkeit aller Projektionen p_L^K für $|K| > |L| > 1$ folgt. Wir beweisen zunächst folgende Aussage.

Satz 1.12.2 *Es bezeichne T eine beliebige Indexmenge. Für alle $t \in T$ seien $[X_t, \mathcal{A}_t]$ meßbare Räume. $F = \{f : T \rightarrow \bigcup_{t \in T} X_t \text{ mit } f(t) \in X_t \forall t \in T\}$ sei die zum cartesischen Produkt $\prod_{t \in T} X_t$ der X_t isomorphe Abbildungsmenge, und $\mathcal{Z}$ bezeichne das System aller Zylindermengen der Form*

$$\mathcal{Z}_{\{t_1, \dots, t_m\}}(Q_A) = \{f \in F : f(t_j) \in A_{t_j} \forall j \in \{1, \dots, m\}\} \quad (1.48)$$

mit $0 < m < \infty$, $A_{t_j} \in \mathcal{A}_{t_j}$ für $j \in \{1, \dots, m\}$ und $Q_A = \prod_{j=1}^m A_{t_j}$; dann gilt: Die von dem System $\bigcup_{t \in T} (p_{\{t\}}^T)^{-1}[\mathcal{A}_t]$ erzeugte σ -Algebra ist mit der von allen Zylindermengen der Form (1.48) erzeugten σ -Algebra $\sigma(\mathcal{Z})$ identisch.

Beweis $\sigma(\mathcal{Z})$ fällt mit der von dem Mengensystem $\bigcup_{\substack{K \subset T \\ 0 < |K| < \infty}} (p_K^T)^{-1}[\bigotimes_{t \in K} \mathcal{A}_t]$ erzeugten σ -Algebra zusammen; dies ist unmittelbar aus der Bedeutung der jeweiligen Elementmengen ersichtlich. Zu beweisen bleibt daher die Gleichung

$$\sigma\left(\bigcup_{t \in T} (p_{\{t\}}^T)^{-1}[\mathcal{A}_t]\right) = \sigma\left(\bigcup_{\substack{K \subset T \\ 0 < |K| < \infty}} (p_K^T)^{-1}\left[\bigotimes_{t \in K} \mathcal{A}_t\right]\right).$$

Da auf der rechten Seite alle endlichen Teil-Indexmengen berücksichtigt sind, ist die links stehende σ -Algebra in der rechts stehenden enthalten. Um die umgekehrte Relation zu zeigen, betrachte man eine Zylindermenge

$$U \in \bigcup_{\substack{K \subset T \\ 0 < |K| < \infty}} (p_K^T)^{-1}\left[\bigotimes_{t \in K} \mathcal{A}_t\right],$$

also eine Menge U der Form $U = (p_K^T)^{-1}[V]$ mit $V \in \bigotimes_{t \in K} \mathcal{A}_t$ (für eine nichtleere endliche Teil-Indexmenge $K \subset T$). Da $\bigcup_{t=1}^m (p_{\{t\}}^K)^{-1}[\mathcal{A}_t]$ Erzeugendensystem von $\bigotimes_{t \in K} \mathcal{A}_t$ ist, hat man $V \in \bigcup_{t=1}^m (p_{\{t\}}^K)^{-1}[\mathcal{A}_t]$. Demnach gibt es ein $t_0 \in K$ und ein $A_{t_0} \in \mathcal{A}_{t_0}$ mit $V = (p_{\{t_0\}}^K)^{-1}[A_{t_0}]$. Das bedeutet

$$U = (p_K^T)^{-1}[V] = (p_{t_0}^K \circ p_K^T)^{-1}[A_{t_0}] = (p_{t_0}^T)^{-1}[A_{t_0}],$$

aufgrund der Meßbarkeit aller Projektionen also

$$U = (p_{t_0}^T)^{-1}[V] \in \sigma\left(\bigcup_{t \in T} (p_{\{t\}}^T)^{-1}[\mathcal{A}_t]\right). \quad \square$$

Damit kann für eine nicht endliche Indexmenge T die zum Produkt der Mengen X_t , $t \in T$, gehörende Produkt- σ -Algebra ähnlich wie im endlich-dimensionalen Falle wie folgt definiert werden.

Definition 1.12.2 Es bezeichne T eine beliebige Indexmenge. Für alle $t \in T$ seien $[X_t, \mathcal{A}_t]$ meßbare Räume. $F = \{f : T \rightarrow \bigcup_{t \in T} X_t \text{ mit } f(t) \in X_t \forall t \in T\}$ sei die zum cartesischen Produkt $\prod_{t \in T} X_t$ der X_t isomorphe Abbildungsmenge, und $\mathcal{Z}$ bezeichne das System aller Zylindermengen

$$\mathcal{Z}_{\{t_1, \dots, t_\ell\}}(Q_A) = \{f \in F : f(t_j) \in A_{t_j} \forall j \in \{1, \dots, \ell\}\} \quad (1.49)$$

mit $\ell \in \mathbb{N}$, $A_{t_j} \in \mathcal{A}_{t_j}$ für $j \in \{1, \dots, \ell\}$ und $Q_A = \prod_{j=1}^{\ell} A_{t_j}$. Dann heißt die von $\mathcal{Z}$ erzeugte σ -Algebra die **Produkt- σ -Algebra** $\bigotimes_{t \in T} \mathcal{A}_t$ **des cartesischen Produktes** der meßbaren Räume $[X_t, \mathcal{A}_t]$, und es gilt aufgrund der Aussagen des Lemmas 1.12.1 und des Satzes 1.12.2

$$\bigotimes_{t \in T} \mathcal{A}_t = \sigma \left(\prod_{t=1}^m \mathcal{A}_t \right) = \sigma \left(\bigcup_{t \in T} (p_{\{t\}}^T)^{-1} [A_t] \right). \quad (1.50)$$

Der meßbare Raum

$$\left[\prod_{t \in T} X_t, \bigotimes_{t \in T} \mathcal{A}_t \right] =: \bigotimes_{t \in T} [X_t, \mathcal{A}_t]$$

heißt **Produktraum** der $[X_t, \mathcal{A}_t]$.

Bemerkung 1.12.1 $\mathcal{Z}$ bezeichnet die Gesamtheit aller derjenigen verallgemeinerten Quader $\prod_{t \in T} A_t$ aus $\prod_{t \in T} X_t$, deren Seiten $A_t \in \mathcal{A}_t$ bis auf endlich viele gleich X_t sind, die also $A_t = X_t$ für $t \in T \setminus \{t_1, \dots, t_\ell\}$ mit $\ell \in \mathbb{N}$ erfüllen und daher Zylindermengen sind. Die σ -Algebra $\bigotimes_{t \in T} \mathcal{A}_t$ wird von $\mathcal{Z}$ erzeugt. Diese Eigenschaften sind von besonderer Wichtigkeit für die wahrscheinlichkeitstheoretische Einordnung von solchen Zufallsexperimenten, bei denen ein Ereignis aus unendlich vielen unabhängigen Einzelereignissen besteht, wie etwa im Falle des bereits erwähnten Beispiels abzählbar oft geworfener Würfel (... mit dem Ziel, eine „6“ zu würfeln, s. Abschn. 1.12): Führen z. B. die meßbaren Elementarereignismengen⁴⁸ $A_t \in \mathcal{A}_t$ für $t = 1, \dots, \ell - 1$ zu Einzelergebnissen $\neq 6$, während beim ℓ -ten Wurf eine 6 erzielt wurde (Einzelereignis A_ℓ), so ist $\prod_{j=1}^{\ell-1} A_j \times A_\ell \times \prod_{t > \ell} \tilde{\Omega}_t$ ein Ereignis aus $\bigotimes_{t \in T} \mathcal{A}_t \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ für $\Omega = \prod_{t \in T} \tilde{\Omega}_t$, $\tilde{\Omega}_t = X_t$. $\square$

Das in dieser Bemerkung angesprochene Beispiel legt den Wunsch nahe, im Falle von Wahrscheinlichkeitsräumen $[\tilde{\Omega}_t, \mathcal{A}_t, \mathbb{P}_t]$ und abzählbarer Indexmenge T einem Ereignis der Form

$$E = \tilde{\Omega}_1 \times \dots \times \tilde{\Omega}_{t_1-1} \times A_{t_1} \times \tilde{\Omega}_{t_1+1} \times \dots \times \tilde{\Omega}_{t_\ell-1} \times A_{t_\ell} \times \tilde{\Omega}_{t_\ell+1} \times \tilde{\Omega}_{t_\ell+2} \times \dots$$

die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(E) = \prod_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}_{t_j}(A_{t_j})$ zuzuordnen. Daß dies möglich ist, daß also ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ über der σ -Algebra $\bigotimes_{t \in T} \mathcal{A}_t$ von $\Omega = \prod_{t \in T} \tilde{\Omega}_t$ existiert, welches als Fortsetzung eines vermöge $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_\ell}(A) = \bigotimes_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}_{t_j}(A_{t_j})$ für alle $A \in \bigotimes_{j=1}^{\ell} \mathcal{A}_{t_j}$ definierten Maßes interpretierbar und eindeutig bestimmt wäre, ist keineswegs trivial. Zwar

⁴⁸ Die Konkretisierung der Begriffe erfolgt in Kap. 2.

sind die Werte $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_\ell}(A)$ im Sinne induktiv erweiterter Aussage des Satzes 1.11.4 wohldefiniert, und man kann (im Falle von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathbb{P}_t$) anstelle von $\mathbb{P}(E) = \prod_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}_{t_j}(A_{t_j})$ wegen $\mathbb{P}_t(\tilde{\Omega}_t) = 1$ auch $\mathbb{P}(E) = \prod_{t \in T, t \neq t_j, j=1, \dots, \ell} \mathbb{P}_t(\tilde{\Omega}_t) \cdot \prod_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}_{t_j}(A_{t_j})$ schreiben, doch bedarf es eines Beweises für die Existenz und Eindeutigkeit von $\mathbb{P}$ bei nicht endlicher Indexmenge T . Die Unmöglichkeit der Konstruktion eines entsprechenden Maßes μ im Falle nicht total-endlicher Maße μ_t ist offensichtlich, denn $\mu(E)$ als Maß einer Zylindermenge der Form (1.48) wäre stets unendlich. Wir gehen auf diese Fragen im nächsten Kapitel ein (s. Abschn. 2.4).

Grundlagen der Warteschlangentheorie

Baum, D.

2013, XI, 602 S. 37 Abb., Hardcover

ISBN: 978-3-642-39631-1