

5 Wasserbau, Siedlungswasserwirtschaft, Abfalltechnik

Inhalt

5.1 Technische Hydraulik 1739

5.2 Hydrologie und Wasserwirtschaft 1816

5.3 Wasserbau 1855

5.4 Wasserversorgung 1895

5.5 Abwassertechnik 1943

5.6 Abfalltechnik 2002

5.1 Technische Hydraulik

Franz Valentin

5.1.1 Allgemeine Einführung

5.1.1.1 Anmerkungen zur Darstellung

Neue Erkenntnisse über die Eigenschaften turbulenter Strömungen und die Verbesserung der Rechenteknik haben die Entwicklung der technischen Hydraulik in den vergangenen Jahrzehnten entscheidend geprägt. Auch in der gedrängten Darstellung für ein Handbuch kann die alleinige Wiedergabe einer eindimensionalen Stromfadentheorie als Anwendung der Bernoulli-Gleichung in Verbindung mit Verlustansätzen den heutigen Anforderungen und den verfügbaren Lösungsmöglichkeiten nicht mehr genügen. Die gewählte Darstellung dieses Fachgebiets ist daher ein Kompromiss, bei dem mehr auf die konsequente Aufbereitung der Grundlagen als auf eine vollständige Wiedergabe der praxisrelevanten Beiwerte geachtet wurde.

Die verwendeten Einheiten sind dem internationalen Einheitensystem angepasst. Es wurden die international üblichen Zeichen verwendet, die nicht immer mit DIN 4044 übereinstimmen.

5.1.1.2 Physikalische Eigenschaften von Wasser

Allgemein ist die *Dichte* ρ als Quotient aus Masse m und Volumen V , also

$$\rho = m/V \text{ (in kg/m}^3\text{)}, \tag{5.1.1}$$

definiert. Die Dichte von Wasser ist v. a. temperaturabhängig: $\rho = \rho(T)$.

Für viele Vorgänge in der Natur ist die *Dichteanomalie* des Wassers entscheidend. Bei $T = 4^\circ\text{C}$ hat reines Wasser seine größte Dichte mit $\rho = 999,97 \text{ kg/m}^3$. Dies hat zur Folge, dass sich z. B. in Seen bei Lufttemperaturen oberhalb und unterhalb des Gefrierpunktes von Wasser eine stabile Schichtung ein-

Tabelle 5.1-1 Physikalische Eigenschaften von reinem Wasser

Temperatur in °C	ρ in g/cm ³	η $\times 10^{-3}$ in Ns/m ²	$\nu = \eta/\rho$ $\times 10^{-6}$ in m ² /s	$h_d = p_d/(\rho \cdot g)$ in m
0	0,999840	1,7921	1,7924	0,06
5	0,999964	1,5108	1,5189	0,09
10	0,999700	1,3077	1,3081	0,12
15	0,999101	1,1404	1,1414	0,17
20	0,998206	1,0050	1,0068	0,24
20	0,995650	0,8007	0,8042	0,43
50	0,988050	0,5494	0,5560	1,25
100	0,958350	0,2838	0,2961	10,33

stellen kann. In Tabelle 5.1-1 ist die Dichte von reinem Wasser für den Temperaturbereich 0°C bis 100°C angegeben. Die Dichte ist allerdings sehr stark von gelösten und suspendierten Stoffen abhängig.

Eine Erwärmung über 4°C oder eine Abkühlung unter 4°C führt zur Volumenausdehnung. Ebenfalls von großer physikalischer Bedeutung ist die Unstetigkeit der Dichte beim Übergang zum festen Aggregatzustand (Eis). Diese Änderung ist mit einer Volumenvergrößerung von etwa 9% verbunden.

Der *Elastizitätsmodul* von Wasser kann mit $E_W = 2,1 \cdot 10^3 \text{ MPa} = 2,1 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ angesetzt werden. Ein Vergleich mit dem E-Modul von Stahl zeigt, dass Wasser etwa um den Faktor 10^2 kompressibler ist. Bei großen Druckunterschieden ist zu beachten, dass mit $\rho = \rho(p, T)$ die Dichte auch vom Druck p abhängt. Dieser Umstand ist bei gespannten Grundwasservorkommen in der Grundwasserhydraulik und bei Kompressionswellen in der instationären Rohrhydraulik von Bedeutung. Die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Druckwellen* im Medium Wasser beträgt

$$a = \sqrt{E_W / \rho} = 1450 \text{ m/s}.$$

Die *Viskosität* ist ein Maß für die innere Reibung, deren Ursache die molekulare Impulsübertragung ist. Nach dem Newton'schen Ansatz ist die Schubspannung τ , die als innere Reibung in einem Fluid auftritt, abhängig vom Geschwindigkeitsgradienten dv/dn :

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dn}. \quad (5.1.2)$$

Bei der Bewegung einer ebenen Platte mit der Geschwindigkeit v über einen Wasserfilm der Höhe h ist dieser Gradient v/h . Der Proportionalitätsfaktor η ist die *dynamische Viskosität* in Pa·s. Auf die Dichte bezogen, kann die dynamische Viskosität in die *kinematische Viskosität* übergeführt werden.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \text{ in } \frac{\text{m}^2}{\text{s}}. \quad (5.1.3)$$

Leider hat der Newton'sche Ansatz nur Gültigkeit für die sog. „laminare“ Bewegung (Schichtenströmung). Oberhalb bestimmter Grenzen erfahren Flüssigkeitsballen, deren Durchmesser um Zehnerpotenzen oberhalb des Molekülabstands von etwa $3 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ liegt, Eigenbewegungen in Form von unregelmäßigen Schwankungen, welche den Impulsaustausch wesentlich verstärken. Man spricht dann von der „turbulenten“ Fließbewegung. Flüssigkeiten (z. B. Suspensionen), die keine lineare Abhängigkeit nach Gl. (5.1.2) aufweisen, werden als „nichtNewton'sche Flüssigkeiten“ bezeichnet.

Bei Erreichen des *Dampfdruckes* p_d wird Wasser zu Wasserdampf. Dieser Wechsel zum gasförmigen Aggregatzustand ist zusätzlich vom Gehalt an gelösten Gasen und vom Druck im Strömungsfeld abhängig. In Unterdruckgebieten sind daher Grenzen für den Druck unterhalb des Atmosphärendrucks zu beachten (s. auch 5.1.2). Nur so wird die Bildung von Wasserdampfblasen (Kavitation) verhindert. In Gebieten höheren Druckes implodieren diese Blasen, und es kommt zur Material zerstörenden Kavitationserosion. In Tabelle 5.1-1 ist die Dampfdruckhöhe h_d in Abhängigkeit von der Temperatur bei Atmosphärendruck angegeben. Hierfür gilt

$$h_d = p_d / (\rho \cdot g).$$

Die *Oberflächenspannung* ist eine Grenzflächen-spannung an der Phasentrennfläche gegen Luft, hervorgerufen durch Adhäsionskräfte zwischen den Flüssigkeitsmolekülen. Definiert wird die Oberflächenspannung zu $\sigma = \text{Arbeit} / \text{Fläche}$ mit der Einheit Nm/m². Für $T = 20^\circ\text{C}$ ist $\sigma = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ an der Trennfläche Wasser/Luft.

Von praktischer Bedeutung ist die *kapillare Steighöhe* h_k für runde Kapillaren vom Durchmesser d_k .

$$h_k = \frac{4\sigma}{\rho g d_k} \quad (5.1.4)$$

Die kapillare Steighöhe ist zu beachten an der Grenze des Grundwasserkörpers zu den luftgefüllten Hohlräumen des Untergrunds im Bereich der Grundwasserhydraulik.

5.1.2 Hydrostatik

Hydrostatik ist die Lehre von der ruhenden Flüssigkeit. Ihre Hauptanwendung findet die Hydrostatik bei der Ermittlung von Kräften auf Bauwerke unter Einwirkung des Wasserdrucks.

5.1.2.1 Allgemeine Angaben zum Begriff des Druckes

Im Inneren einer ruhenden Flüssigkeit können nur Normalspannungen auftreten. Die dort wirksam werdenden Spannungen sind daher isotrop und bilden ein skalares Druckfeld. Auf der Grundlage des Internationalen Einheitensystems (SI) ist der Druck eine abgeleitete Größe. Seine Einheit ist das Pascal (Pa), wobei $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$. Bei größeren Drücken wird die Einheit bar verwendet. Es gilt $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$. In der Hydraulik ist die Reduktion auf den anschaulichen Begriff der *Druckhöhe* (in Meter Wassersäule) üblich. Hierbei entspricht $1 \text{ mWS} = 9,81 \text{ kPa}$.

Zwischen der aus der offiziellen Einheit Pascal abgeleiteten Größe $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ und der Druckhöhe besteht die Beziehung $1 \text{ bar} = 10,20 \text{ m WS}$. Der Gesamtdruck im Inneren einer Flüssigkeit mit freier Oberfläche setzt sich aus dem Atmosphärendruck und dem Druck infolge der Überdeckung mit Flüssigkeit zusammen. Der Atmosphärendruck ist der Fluidruck der Luft, welcher wiederum abhängig ist von der überlagerten Luftsäule und damit vom Bezugsniveau. Für die internationale Normatmosphäre beträgt der *Luftdruck auf Meereshöhe* ($z = 0$)

$$p_{a,0} = 1,01325 \text{ bar} = 1013,25 \text{ mbar.}$$

Dem entspricht eine Druckhöhe von

$$h_{a,0} = 10,33 \text{ m (WS).}$$

In der Hydraulik ist nicht der absolute Druck, sondern der Atmosphärendruck p_a der *Bezugsdruck*. Auf den absoluten Druck muss bezogen werden, wenn die Kompressibilität von Luft berücksichtigt werden muss. Dies ist bei Wasserspiegeländerungen in Druckbehältern mit Luftpolstern der Fall. Hier gilt z. B. unter der Voraussetzung konstanter Temperatur das Boyle-Mariotte'sche Gesetz

$$p \cdot V = \text{const.}$$

Von „Druck“ wird somit nur gesprochen, wenn dieser den Atmosphärendruck übersteigt. Bei einem Abfall unter diesen Wert herrscht *Unterdruck*. Der Abnahme des Druckes sind allerdings physikalische Grenzen gesetzt. Ursache ist die begrenzte Aufnahme von Zugspannungen im Inneren der Flüssigkeit. Bei einer Überschreitung kommt es zum Abreißen der Flüssigkeitssäule. Dabei erfolgt ein Übergang vom flüssigen zum gasförmigen Aggregatzustand.

Angaben zum temperaturabhängigen Dampfdruck p_d sind in Tabelle 5.1-1 für die zugehörige Druckhöhe h_d zu finden. Gelöste Luft in Wasser erniedrigt diesen Wert, der bei 20°C für destilliertes Wasser in Meereshöhe $\min h \approx -10 \text{ m}$ beträgt. Eine praktikable Größe für die minimale Druckhöhe ohne Gefahr des Abreißen der Wassersäule ist $h \approx -7,5 \text{ m}$.

5.1.2.2 Gleichgewichtsbedingungen in einer ruhenden Flüssigkeit

Zur Ableitung der Gleichgewichtsbedingung wird ein infinitesimal kleiner Flüssigkeitsquader in einem kartesischen Koordinatensystem betrachtet, bei dem ausnahmsweise die z-Achse in Richtung der Fallbeschleunigung weist. Dieser Quader nach Abb. 5.1-1 hat die Masse $dm = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$. In ruhender Flüssigkeit sind nur Druckkräfte als Oberflächenkräfte denkbar. Im Schwerpunkt des Quaders wirken wegen dessen träger Masse Massenkraft nach dem Newton'schen Grundgesetz

$$dF_m = a \cdot dm, \quad (5.1.5)$$

wobei der Beschleunigungsvektor a die Komponenten a_x , a_y und a_z aufweist. In z-Richtung muss der Zuwachs der Oberflächenkraft durch die entsprechende Komponente der Massenkraft ausge-

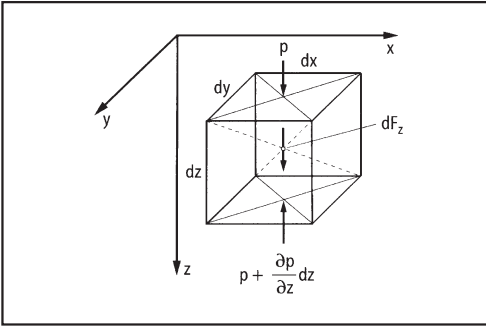


Abb. 5.1-1 Gleichgewichtsbedingungen

glichen werden. Für das Gleichgewicht in z-Richtung wird somit

$$p \cdot dx \cdot dy + a_z \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx \cdot dy.$$

Sinngemäß gilt für die drei zu betrachtenden Richtungen

$$\begin{aligned} z\text{-Richtung} \quad \varrho \cdot a_z &= \frac{\partial p}{\partial z}, \\ x\text{-Richtung} \quad \varrho \cdot a_x &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\ y\text{-Richtung} \quad \varrho \cdot a_y &= \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Aus den Veränderungen in den drei vorgegebenen Richtungen folgt das totale Differential des Druckes zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \\ = \varrho(a_x \cdot dx + a_y \cdot dy + a_z \cdot dz). \end{aligned}$$

Für Flächen gleichen Druckes wird dieses totale Differential zu Null. Somit gilt für die sog. „Niveaulächen“ (Flächen gleichen Druckes) $dp = 0$ und wegen $p = \text{const}$

$$a_x \cdot dx + a_y \cdot dy + a_z \cdot dz = 0. \quad (5.1.7)$$

Bei ebenen Druckfeldern entfällt die Ableitung nach einer dieser Richtungen. Man spricht dann von „Niveaulinien“.

Im Normalfall ist im Inneren der Flüssigkeit lediglich die in z-Richtung wirkende Fallbeschleunigung g zu berücksichtigen. Somit gilt für die Beschleunigungen im kartesischen Koordinatensystem

$$a_x = a_y = 0; \quad a_z = g.$$

Von den drei Komponenten in Gl. (5.1.6) bleibt somit nur diejenige für die z-Richtung erhalten.

$$\varrho g = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz}, \quad (5.1.8)$$

$$dp = \varrho g dz.$$

Nach Integration dieses Ausdrucks ist für die Bestimmung der Integrationskonstanten die Randbedingung am Wasserspiegel $z = 0$ maßgebend. Wird der absolute Druck benötigt, so ist $p = p_a$ am Ort $z = 0$ und damit

$$p = \varrho g z + p_a. \quad (5.1.9)$$

Nach Gl. (5.1.9) setzt sich der absolute Druck in der Tiefe z unter dem Wasserspiegel zusammen aus dem Druck infolge der Luftsäule über dem Wasserspiegel und der Druckzunahme infolge der Überdeckung mit Wasser. Interessiert dagegen nur die relative Zunahme des Druckes, so ist für $z = 0$ auch $p = 0$, somit ist

$$p = \varrho g z. \quad (5.1.10)$$

Ein einfaches Beispiel soll dies verdeutlichen (Abb. 5.1-2).

5.1.2.3 Druckkraft

Die auf das Flächenelement ausgeübte Druckkraft wirkt normal zur Fläche, da in der ruhenden Flüssigkeit nur Normalkräfte, nicht jedoch Scherkräfte, übertragen werden können. Die differentiellen Druckkräfte dF stehen daher immer senkrecht auf dem Flächenelement dS der festen Berandung. Die Richtung des gekrümmten Flächenelements dS wird durch den Normalenvektor $\mathbf{n}$ festgelegt. An der Berandung von Behältern weist er grundsätzlich in den Bereich der Flüssigkeit. Die in Richtung der festen Berandung wirkende Druckkraft bildet daher mit der Flächennormalen einen Winkel von 180° und wird damit negativ. Dadurch wird berücksich-

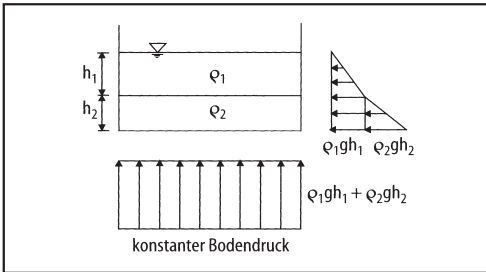


Abb. 5.1-2 Gefäß gefüllt mit Flüssigkeiten der Dichte ρ_1 und ρ_2

tigt, dass das Innere einer Flüssigkeit einer Kompression ausgesetzt ist. Da in der Hydrostatik ausschließlich Druckkräfte von Bedeutung sind, wird dieses Vorzeichen hier nicht weiter beachtet.

Die Druckkraft auf ein Flächenelement ist $d\mathbf{F} = p \cdot \mathbf{n} \cdot dS$ und wegen Gl. (5.1.10)

$$d\mathbf{F} = \rho g z \mathbf{n} dS. \quad (5.1.11)$$

Im allgemeinsten Fall der Bestimmung der Druckkraft $\mathbf{F}$ auf ein räumlich gekrümmtes Flächenelement S ist die Bestimmung der Komponenten der Druckkraft über die in die Koordinatenebenen projizierten Teilflächen erforderlich, bei denen die Richtungen der Kräfte mit denen der Flächennormalen zusammenfallen (Abb. 5.1-3). Folgende Bezeichnungen werden verwendet

dA_x Schnittfläche der Projektion des Flächenelements dS in die y - z -Ebene,

dA_y Schnittfläche der Projektion des Flächenelements dS in die x - z -Ebene,

dA_z Schnittfläche der Projektion des Flächenelements dS in die x - y -Ebene.

Im kartesischen Koordinatensystem für diese Projektionen wird dann z. B. für die x -Richtung

$$F_x = \iint_{A_x} dF_x = \rho g \iint_{A_x} z dA_x$$

$$\text{mit } \iint_{A_x} z dA_x = z_{Sx} A_x$$

(z_{Sx} Abstand des Schwerpunkts S der Projektionsfläche A_x vom Wasserspiegel ($z = 0$)).

Für die drei Komponenten gelten dann die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \rho g z_{Sx} A_x, \\ F_y &= \rho g z_{Sy} A_y, \\ F_z &= \rho g \iint_{A_z} z dA_z = \rho g V. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.12)$$

Der Betrag der *resultierenden Druckkraft* kann dann aus den drei Einzelkomponenten durch

$$F = \rho g \iint_A \mathbf{z} \mathbf{n} dS = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (5.1.13)$$

berechnet werden.

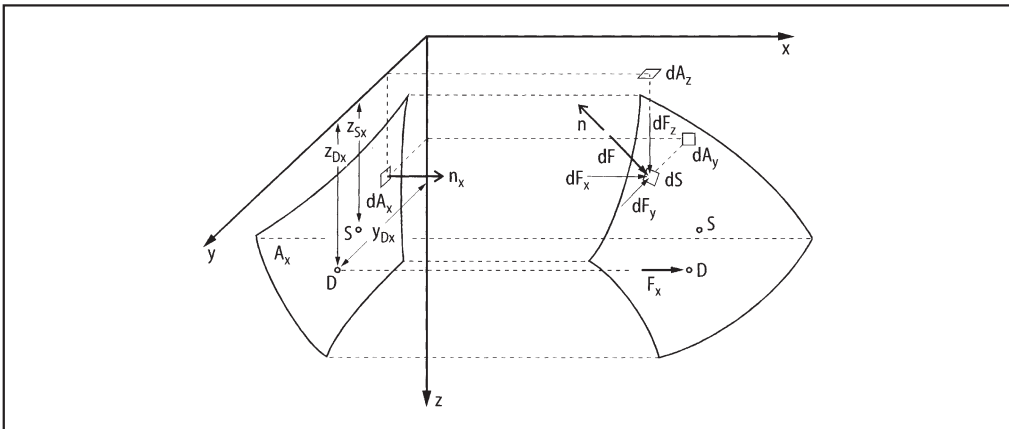


Abb. 5.1-3 Druckkraft auf eine beliebig gekrümmte Fläche

Die horizontale Komponente der Druckkraft in x-Richtung F_x ist demnach gleich dem Produkt aus der Projektion der Fläche in die z-y-Ebene und dem im Flächenschwerpunkt herrschenden Druck $\rho g z_{Sx}$. Die Vertikalkomponente ist gleich dem mit $\rho \cdot g$ multiplizierten Volumen senkrecht über der Fläche bis in die Höhe des Wasserspiegels (Gewichtskraft). Da der Druck über die Fläche nicht gleich verteilt ist, gehen die Druckkraft und ebenso ihre Komponenten nicht durch den Flächenschwerpunkt S. Die Angriffspunkte der Horizontalkomponenten F_x und F_y liegen tiefer als die jeweiligen Flächenschwerpunkte im *Druckmittelpunkt* D. Die Komponente F_x hat die Koordinaten z_{Dx} und y_{Dx} . Deren Lage wird über das statische Moment ermittelt. Es gelten

$$z_{Dx} \cdot F_x = \iint z dF_x, \quad y_{Dx} F_x = \iint y dF_x, \quad (5.1.14)$$

$$z_{Dx} = \frac{\rho g \iint z^2 dA_x}{\rho g z_{Sx} A_x} = \frac{I_y}{z_{Sx} A_x},$$

$$y_{Dx} = \frac{\rho g \iint y z dA_x}{\rho g z_{Sx} A_x} = \frac{I_{yz}}{z_{Sx} A_x}.$$

In den Gln. 5.1.14 ist I_y das Trägheitsmoment der Fläche A_x bezüglich der y-Achse und I_{yz} das Zentrifugalmoment bezüglich der Achsen y und z. Für die Komponente F_y sind in analoger Weise Beziehungen für die Koordinaten z_{Dy} und x_{Dy} abzuleiten.

Auftrieb

Auf einen eingetauchten Körper wirkt der Wasserdruck von allen Seiten. Während sich die Horizontalkomponenten der Druckkraft gegenseitig aufheben, resultiert aus den Vertikalkomponenten der sog. „Auftrieb“. Da die an der Körperoberseite angreifende Druckkraft stets geringer ist als diejenige an der Körperunterseite, entsteht eine *Auftriebskraft* F_A . Während in ruhendem Wasser die Richtung der Auftriebskraft entgegen der Richtung der Fallbeschleunigung vorgegeben ist, sind bei bewegtem Wasser mit freier Oberfläche auch für die Auftriebswirkung die Niveauflächen maßgebend, welche i. d. R. nicht waagrecht verlaufen. Ganz allgemein gilt (Abb. 5.1-4) für einen eingetauchten Körper $dF_A = dF_{zu} - dF_{zo} = \rho \cdot g \cdot z \cdot dA_z$ mit $z_0 - z_u = z$ und dA_z als zugehörige Projektionsfläche eines infinitesimal schmalen Streifens.

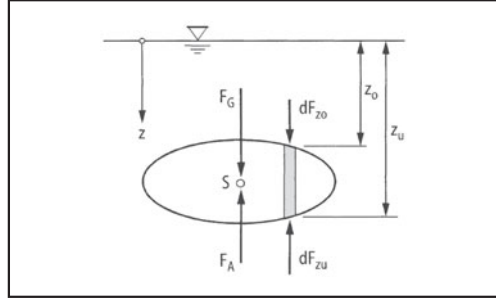


Abb. 5.1-4 Auftrieb auf einen eingetauchten Körper

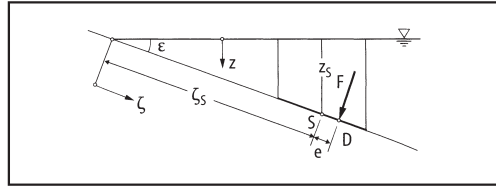


Abb. 5.1-5 Druckkraft auf eine geneigte Wand

Der Gesamtauftrieb des Körpers ist somit

$$F_A = \rho g \iint_A z dA = \rho g V. \quad (5.1.15)$$

Die Auftriebswirkung ist auch für die Ermittlung der Druckkraft auf eine beliebig geformte Berandung von Bedeutung.

Druckkraft auf die ebene Wand

Betrachtet wird der allgemeine Fall einer um den Winkel ε gegen die Horizontale geneigten Wand (Abb. 5.1-5). Nach Gl. (5.1.13) ist $F = \rho g \iint z n dA$.

Da bei der ebenen Wand die Richtung der Druckkraft bekannt ist, werden nur noch die Beträge bestimmt. Demnach ist

$$F = \rho \cdot g \cdot z_s \cdot A = \rho \cdot g \cdot \sin \varepsilon \cdot \zeta_s A.$$

Dies entspricht dem Gewicht der Flüssigkeitssäule mit der Grundfläche A und dem lotrechten Abstand z_s ihres Schwerpunktes von der Oberfläche als Höhe. Nach Gl. (5.1.14) gilt für den Druckmittelpunkt

$$\zeta_D = \frac{\int \zeta^2 dA}{\int \zeta dA} = \frac{I}{\zeta_S A}.$$

Nach dem Satz von Steiner ist $I = I_S + \zeta_S^2 \cdot A$ und demnach

$$\zeta_D = \zeta_S + \frac{I_S}{\zeta_S A} = \zeta_S + e.$$

Für den Abstand zwischen Flächenschwerpunkt und Druckmittelpunkt gilt daher

$$e = \frac{I_S}{\zeta_S A}. \quad (5.1.16)$$

Beispiel 5.1-1: Druckkraft auf eine Rechteckfläche mit $A = b \cdot h$ entsprechend Abb. 5.1-6. Nach Gl. (5.1.13) ist

$$F = \rho g b \frac{1}{2} (z_1 + z_2) h = \rho g b f.$$

Der Abstand zwischen S und Druckmittelpunkt D ist

$$e = \frac{I_S}{\zeta_S A} = \frac{bh^3}{12\zeta_S bh} = \frac{h^2}{12\zeta_S}.$$

Mit

$$f = \frac{1}{2} (z_1 + z_2) h$$

ist in Abb. 5.1-6 die Druckfigur bezeichnet, da mit f die Fläche aus Druckhöhen und Grundlinie in der Schnittebene gebildet wird.

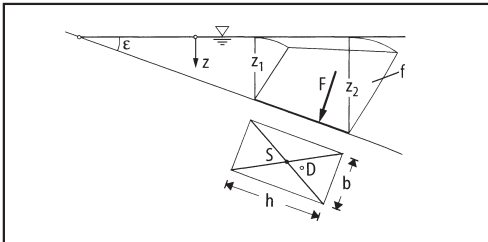


Abb. 5.1-6 Druckkraft auf eine Rechteckfläche in einer geneigten Wand

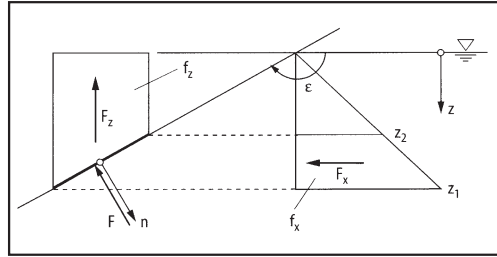


Abb. 5.1-7 Druckfiguren bei Auftriebswirkung

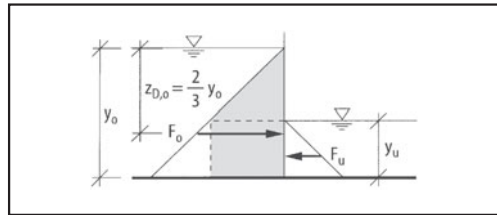


Abb. 5.1-8 Druckkräfte auf eine Stauwand

Besondere Bedeutung kommt dem Sonderfall der geneigten Wand zu, bei dem $\varepsilon > 90^\circ$ beträgt. Auch hier steht die resultierende Druckkraft F senkrecht auf der Berandung und weist somit eine vertikal nach oben gerichtete Komponente F_z auf. Damit wird die Auftriebswirkung angedeutet. In Abb. 5.1-7 sind die Druckfiguren für die x - und z -Komponente der Druckkraft eingezeichnet.

Von Bedeutung ist auch der Angriffspunkt der Druckkraft auf eine Seitenwand im Abstand von zwei Dritteln der Wassertiefe von der Wasseroberfläche aus (Abb. 5.1-8).

$$F = \rho \cdot g \cdot z_S \cdot b \cdot y \quad \text{mit } z_S = y/2,$$

$$F = \rho \cdot g \cdot b \cdot y^2/2,$$

$$z_D = z_S + \frac{I}{z_S A_y} = \frac{y}{2} + \frac{by^3/2}{12yyb} = \frac{y}{2} + \frac{y}{6} = \frac{2}{3}y.$$

Beispiel 5.1-2: Kraftwirkung auf eine Wand nach Abb. 5.1-8, die auf beiden Seiten eingestaut ist. In diesem Fall ist die resultierende Druckkraft zu bestimmen.

$$F = F_o - F_u = \frac{1}{2} \rho g b (y_o^2 - y_u^2).$$

Angriffspunkt der resultierenden Druckkraft von der Sohle y_D oder vom Wasserspiegel z_D wird über Momentenansatz ermittelt.

Druckkraft auf einfach gekrümmte Flächen

Für die resultierende Druckkraft ist auch hier Gl. (5.1.13) anzuwenden. Im Sonderfall der einfach gekrümmten Fläche bleibt die Betrachtung auf die y -Ebene mit den Koordinaten z und x beschränkt. Es sind daher nur die Komponenten F_x und F_z zu bestimmen, die nach Gl. (5.1.12) definiert sind.

$$F_x = \rho g \iint z dA_x = \rho g z_S A_x,$$

$$F_z = \rho g \iint z dA_z = \rho g V.$$

Zweckmäßigerweise werden die Komponenten der Druckkraft über die Druckfiguren bestimmt (Abb. 5.1-9).

Bei der x -Komponente ist diese unabhängig von der Gestalt der betrachteten Wand. Für die Breite b ist

$$F_x = \rho g b \int z dz = \rho g b f_x = \rho g b \frac{y^2}{2}.$$

Bei der z -Komponente sind wasserseitige Auflast- und luftseitige Auftriebskräfte gegeneinander aufzuaddieren. Hierbei spielt der Fußpunkt der Wand eine besondere Rolle. Die zugehörigen Druckfiguren $f_z = \int z dx$ sind ggf. planimetrisch zu ermitteln.

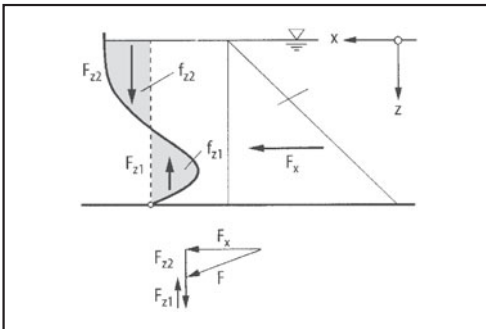


Abb. 5.1-9 Resultierende Druckkraft auf eine einfach gekrümmte Fläche

$$\text{Auflast:} \quad \downarrow F_{z2} = \rho g b f_z,$$

$$\text{Auftrieb:} \quad \uparrow F_{z1} = \rho g b f_z,$$

$$\text{Gesamtdruckkraft:} \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}.$$

5.1.2.4 Spiegellagen in bewegten Gefäßen

Bei der Betrachtung der Kraftwirkung im bewegten, beschleunigten Bezugssystem gilt grundsätzlich, dass sich für den bewegten Beobachter ein dynamisches Gleichgewicht zwischen der Antriebskraft F und der Trägheitskraft F_T einstellt (d'Alembert'sches Prinzip). Die Trägheitskraft F_T ist der Antriebskraft entgegengerichtet, gleiches gilt auch für die Beschleunigungen.

Bei der Drehung des Gefäßes mit einer konstanten Umfangsgeschwindigkeit muss jedes Flüssigkeitsteilchen nach innen beschleunigt werden (Zentripetalbeschleunigung), da es sich sonst unter der Wirkung der als Fliehkraft wirkenden Trägheitskraft nach außen bewegen würde. Es wirken die von der Umfangsgeschwindigkeit v_φ abhängige radiale Beschleunigung a_r und die in z -Richtung vorhandene Fallbeschleunigung $a_z = g$. Die Gleichung für die Niveaulinie ist somit

$$a_r \cdot dr + a_z \cdot dz = 0.$$

Die infolge der Trägheitskraft wirkende Fliehbeschleunigung kann mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeit ω oder durch die Umfangsgeschwindigkeit v_φ dargestellt werden. Für die Winkelgeschwindigkeit ist $\omega = \dot{\varphi} = d\varphi/dt = \text{const.}$ Die Umfangsgeschwindigkeit ist mit der Winkelgeschwindigkeit über die Beziehung $v_\varphi = \omega \cdot r$ verknüpft. Die Fliehbeschleunigung ist dann durch $a_r = \omega^2 \cdot r = v_\varphi^2/r$ gegeben. Für die Niveaulinie gilt somit $\omega^2 \cdot r \cdot dr + g \cdot dz = 0$. Nach der Integration ist $(r^2/2)\omega^2 = -g \cdot z + C$. Wegen $z = z_2$ für $r = 0$ folgt (Abb. 5.1-10)

$$z = z_2 - \frac{r^2 \omega^2}{2g}. \quad (5.1.17)$$

Der Neigungswinkel β der Niveaulinie gegenüber der Senkrechten ist an jedem Punkt durch das Verhältnis der beiden Beschleunigungen gegeben.

$$\tan \beta = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{v_\varphi^2}{rg}.$$

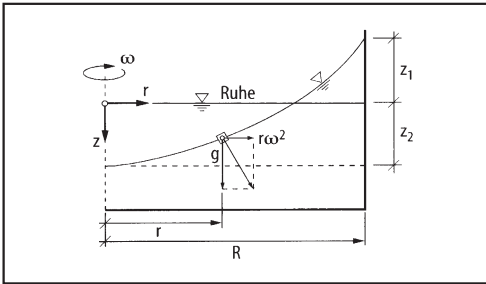


Abb. 5.1-10 Flüssigkeit in einem rotierenden Behälter

5.1.3 Kinematik der Flüssigkeiten

Kinematik ist die Lehre von der Bewegung ohne Berücksichtigung von Kräften.

Als „Strömungsfeld“ wird für diese Anwendungen der jeweils von der Flüssigkeit eingenommene Raum bezeichnet. Die Behandlung der Strömung unter variablen Bedingungen setzt voraus, dass die Anwendung entsprechender Rechenregeln den Abmessungen des jeweiligen Strömungsfeldes gerecht wird. Ein *Flüssigkeitsteilchen* mit dem Volumen V wird demnach so definiert, dass seine Abmessungen klein sind im Vergleich zum zu beschreibenden Strömungsfeld. Gleichzeitig muss diese Abmessung noch groß sein im Vergleich zum Molekülabstand.

5.1.3.1 Beschreibung der Bewegung innerhalb des Strömungsfeldes

Bei der materiellen Betrachtung (Lagrange'sche Methode) folgt man der Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens. Seine Anfangslage ist zum Zeitpunkt $t = t_0$ durch die Festlegung des Ortsvektors $\mathbf{r}(t = t_0) = \mathbf{r}_0$ und des an diesem Ort vorhandenen Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{v}(t = t_0)$ gegeben. Die Bewegung des Teilchens ist dann durch die Angabe des zeitabhängigen Ortsvektors im Hinblick auf ein gewähltes Koordinatensystem zum jeweiligen Zeitpunkt t bestimmt.

Da die Verfolgung von einzelnen Flüssigkeitsteilchen wenig aussagekräftig ist, hat sich in der Strömungsmechanik die *Feldbeschreibung* oder Euler'sche Methode durchgesetzt. Nach ihr wird die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ an einem bestimmten Punkt beschrieben. Zu einem späteren Zeitpunkt

befindet sich am gleichen Ort ein anderes Flüssigkeitsteilchen. In einem kartesischen Koordinatensystem kann die Geschwindigkeit bei dieser Methode als Funktion $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x, y, z)$ angegeben werden, wobei mit x, y, z die Feldkoordinaten des betrachteten Punktes des Strömungsfeldes bezeichnet sind.

Ortsfeste Sonden im *Strömungsfeld* ermitteln die Geschwindigkeit nach der Euler'schen Methode. Zur Beschreibung des Strömungsfeldes wird eine beliebige Fläche innerhalb des Feldes laufend von neuen Flüssigkeitsteilchen durchströmt. Man spricht dabei von einem „Fluss“ oder „Strom“. Beispiele dafür sind der Volumenstrom, der Temperaturfluss oder der Impulsstrom. Der *diffusive* Transport wird dabei geprägt vom Gradienten, also der partiellen Ableitung nach den Feldkoordinaten. Der diffuse Wärmefluss z. B. ist vom Temperaturgradienten abhängig. Transportvorgänge im Strömungsfeld werden allerdings in erster Linie geprägt von der Bewegung der Flüssigkeitsteilchen, dem *konvektiven* Transport.

5.1.3.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Definitionsgemäß ist die momentane Geschwindigkeit am Ort mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}$ durch das in der Zeiteinheit durchlaufene Wegelement für den Grenzübergang $ds \rightarrow 0$

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \quad (5.1.18)$$

Im Fall des kartesischen Koordinatensystems sind für die x -, y - und z -Richtung die Komponenten v_x , v_y und v_z vorhanden.

Im allgemeinsten Fall zeigt wegen der Abhängigkeit der Geschwindigkeit von Ort und Zeit auch jede der Geschwindigkeitskomponenten diese Eigenschaft, z. B. gilt für die x -Komponente

$$v_x = f(x, y, z, t).$$

Wegen dieser funktionalen Abhängigkeit wird auch die Veränderung der einzelnen Geschwindigkeitskomponente durch das totale Differential

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz$$

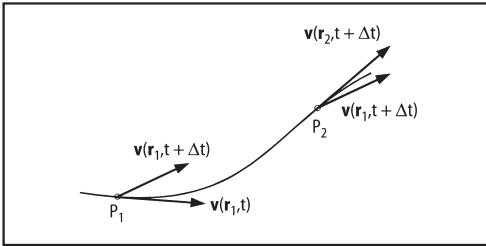


Abb. 5.1-11 Beschleunigung eines Flüssigkeitsteilchens bei instationärer Bewegung

bestimmt. Dadurch wird berücksichtigt, dass sowohl an einem festen Ort eine Veränderung der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit erfolgt als auch die Bewegung des Teilchens innerhalb des Geschwindigkeitsfeldes zu Geschwindigkeitsänderungen führen kann (Abb. 5.1-11). Die Beschleunigung in x-Richtung wird deshalb durch

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (5.1.19)$$

beschrieben. Hierbei werden mit

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}$$

die *lokale* Beschleunigung, d. h. die Veränderung von v_x mit der Zeit an einem bestimmten Ort, und mit

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

die *konvektiven* Beschleunigungen, hervorgerufen durch die Ungleichförmigkeit in der Geschwindigkeitsverteilung, bezeichnet.

Unter Berücksichtigung von Gl. (5.1.19) kann die Beschleunigung in der verkürzten Vektorschreibweise durch

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} \quad (5.1.20)$$

wiedergegeben werden. Im allgemeinsten Fall einer Strömung ist demnach wegen

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$$

die Geschwindigkeit orts- und zeitabhängig. Man spricht hier von einer *instationären* Strömung. Entfällt die zeitliche Abhängigkeit, ist also

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{s}),$$

so ist die Strömung *stationär*.

Entfällt bei einer stationären Strömung überdies die konvektive Beschleunigung eines Teilchens längs seines Weges $\mathbf{s}$ wegen $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{s} = 0$, so ist die Strömung *stationär gleichförmig*. Dieser Sonderfall, der in der Natur streng genommen nie auftritt, spielt bei der Formulierung der Grundgleichungen eine wichtige Rolle. Eine Strömung ist daher

gleichförmig für $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{s} = 0$,

ungleichförmig für $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{s} \neq 0$.

Für die Bewegung auf gekrümmten Bahnen spielt die durch Gl. (5.1.21) wiedergegebene *Zentripetalbeschleunigung* eine wichtige Rolle.

$$a_n = -v^2/r. \quad (5.1.21)$$

5.1.3.3 Ausgezeichnete Linien eines Strömungsfeldes

Eine Strömung ist dann ausreichend beschrieben, wenn an jedem Punkt des Strömungsfeldes Druck und Geschwindigkeit bekannt sind. Im skalaren Druckfeld bilden Linien gleichen Druckes die *Niveau*linien. Die Feldlinien eines Vektorfeldes sind im Fall des Geschwindigkeitsfeldes die *Stromlinien* (Abb. 5.1-12). In jedem Punkt einer Stromlinie gibt die Tangente die Richtung der örtlichen Geschwindigkeit an. Nachdem nach dieser Definition $\mathbf{s}$ und $\mathbf{v}$ gleichgerichtet sind, ist

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{s} = 0 \quad (5.1.22)$$

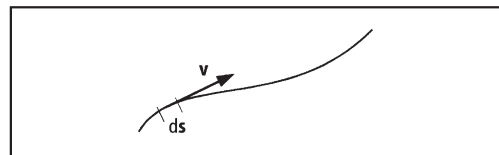


Abb. 5.1-12 Stromlinie

Wasserbau, Siedlungswasserwirtschaft, Abfalltechnik
Zilch, K.; Diederichs, C.J.; Katzenbach, R.; Beckmann, K.J.
(Hrsg.)
2013, XIII, 314 S. 222 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-41873-0