

2 Matrizen

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit Matrizen. Sie eignen sich insbesondere zur Darstellung von Gleichungssystemen und linearen Abbildungen. Wir führen eine Addition und eine Multiplikation für Matrizen ein, und wir werden sehen, dass die so entstehende Rechenstruktur einen Ring mit Einselement bildet. Für die Lösung von linearen Gleichungssystemen ist der Rang der Koeffizientenmatrix von Bedeutung. Deshalb betrachten wir den Rang einer Matrix sowie Matrizenumformungen, die den Rang invariant lassen. Die Umformungen, die die Zeilen einer Matrix betreffen, sind ebenfalls bei Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme von Bedeutung.

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

Lernziele

- alle Grundbegriffe über Matrizen kennen und an Beispielen erläutern können,
- erklären können, dass Matrizen mit Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation einen Ring mit Einselement bilden,
- wissen, was der Rang einer Matrix ist, diesen bestimmen können und die elementaren Matrizenumformungen kennen, die den Rang invariant lassen.

2.1 Definitionen und elementare Eigenschaften

In diesem Abschnitt betrachten wir – insbesondere im Hinblick auf die Betrachtungen in den folgenden Abschnitten – Begriffe zu Matrizen und deren elementare Eigenschaften.

Definition 2.1 Es sei $m, n \in \mathbb{N}$ und \mathcal{K} ein Körper. Eine $(m \times n)$ -Matrix \mathbf{A} über \mathcal{K} ist gegeben durch **$(m \times n)$ -Matrix**

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

wobei $a_{i,j} \in \mathcal{K}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, ist.² Während wir mit $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{i,j})$ die gesamte Matrix darstellen, bedeutet $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}$ das Element von \mathbf{A} in der i -ten Zeile und j -ten Spalte.

² Falls keine Missverständnisse möglich sind, schreiben wir anstelle von $a_{i,j}$ auch a_{ij} sowie anstelle von $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ auch $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{i,j})$ oder $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$.

Für $1 \leq i \leq m$ heißt

$$\mathbf{a}_{i\star} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

Zeilenvektor die i -te Zeile oder i -ter Zeilenvektor sowie für $1 \leq j \leq n$ heißt

$$\mathbf{a}_{\star j} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$$

Spaltenvektor die j -te Spalte oder j -ter Spaltenvektor von \mathbf{A} .

Mit $\mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$ bezeichnen wir die Menge aller $(m \times n)$ -Matrizen über \mathcal{K} .

Gleichheit von Matrizen Zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$ sind *gleich*, falls $a_{ij} = b_{ij}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, gilt.

Nullmatrix Gilt für eine Matrix \mathbf{A} , dass $a_{ij} = 0$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, dann heißt \mathbf{A} *Nullmatrix* (Schreibweise: $\mathbf{A} = \mathbf{0}_{mn}$ oder $\mathbf{A} = \mathbf{0}$).

Transponierte einer Matrix Sei $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$, dann heißt die Matrix $\mathbf{A}^T \in \mathcal{M}_{nm}^{\mathcal{K}}$ definiert durch

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = a_{ij}^T = a_{ji} = (\mathbf{A})_{ji}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

die *Transponierte* von \mathbf{A} . Transponieren bedeutet also quasi das Vertauschen von Zeilen und Spalten.

Quadratische Matrix Die Matrizen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mm}^{\mathcal{K}}$ (anstelle von $\mathcal{M}_{mm}^{\mathcal{K}}$ schreiben wir auch $\mathcal{M}_m^{\mathcal{K}}$) heißen *quadratisch*.

Obere, untere Dreiecksmatrix Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_m^{\mathcal{K}}$ mit $a_{ij} = 0$ für $i > j$ heißt *obere Dreiecksmatrix*. Entsprechend heißt eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_m^{\mathcal{K}}$ mit $a_{ij} = 0$ für $i < j$ *untere Dreiecksmatrix*.

Diagonalelemente Diagonalmatrix Die Elemente a_{ii} einer Matrix heißen *Diagonalelemente*. Eine Matrix heißt *Diagonalmatrix*, falls $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$ ist, d.h. alle Elemente, die keine Diagonalelemente sind, sind gleich Null.

Einheitsmatrix Eine Diagonalmatrix $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_m^{\mathcal{K}}$ mit $a_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq m$, heißt *Einheitsmatrix* (Schreibweise: $\mathbf{A} = \mathbf{E}_m$ oder $\mathbf{A} = \mathbf{E}$).

Symmetrische Matrix Gilt für eine quadratische Matrix \mathbf{A} , dass $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq m$, ist dann heißt \mathbf{A} *symmetrisch*. \square

Folgerung 2.1 a) Für alle Matrizen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$ gilt: $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

b) $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_m^{\mathcal{K}}$ ist genau dann symmetrisch, falls $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ ist. \square

Man kann $(m \times n)$ -Matrizen über einem Körper \mathcal{K} auch als Vektoren des Vektorraums $\mathcal{K}^{m \cdot n}$ betrachten, indem man etwa alle Spalten oder alle Zeilen hintereinander auflistet. Die folgende Definition und die anschließende Folgerung 2.2 a) sind uns – so gesehen – bereits aus dem vorigen Kapitel bekannt.

Definition 2.2 Es seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$ sowie $\alpha \in \mathcal{K}$. Dann ist

a) $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ definiert durch $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ die *Summe* von \mathbf{A} und \mathbf{B} ;

b) $\alpha \cdot \mathbf{A}$ definiert durch $(\alpha \cdot \mathbf{A})_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ das *skalare Produkt* von α und \mathbf{A} . \square

Folgerung 2.2 a) $\mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$ bildet einen Vektorraum über \mathcal{K} .

b) Es seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$ und $\alpha \in \mathcal{K}$. Für die Matrixtransposition gelten folgende Rechenregeln:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \text{ sowie } (\alpha \cdot \mathbf{A})^T = \alpha \cdot \mathbf{A}^T \quad \square$$

Umgekehrt kann man einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{K}^l$ – als Zeile betrachtet – auch als $(1 \times l)$ -Matrix ansehen. \mathbf{x}^T stellt dann diesen Vektor als $(l \times 1)$ -Matrix, bestehend aus einer Spalte, dar. Diese Notation haben wir schon im Kapitel 1.6 beim Skalarprodukt von Vektoren benutzt. Wir verallgemeinern nun diese Definition auf Matrizen, indem wir ein Matrizenprodukt durch skalare Multiplikation der Zeilenvektoren der einen mit den Spaltenvektoren der anderen Matrix festlegen.

Definition 2.3 Es sei $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{ml}^{\mathcal{K}}$ sowie $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{ln}^{\mathcal{K}}$. Dann ist das *Produkt* $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$ definiert durch

**Produkt
von Matrizen**

$$\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ mit } c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n \quad \square$$

Unter Beachtung der Bemerkungen vor der Definition können wir die Multiplikation auch wie folgt festlegen (siehe Definition 1.13):

$$c_{ij} = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{b}_{*j}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

Folgerung 2.3 Sei $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$, dann gilt $\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_n = \mathbf{A}$, womit die Bezeichnung *Einheitsmatrix* für die Matrizen \mathbf{E}_k , $k \geq 1$, gerechtfertigt ist. \square

Nach den bisherigen Darstellungen ist die Aussage des folgenden Satzes nicht überraschend und lässt sich leicht verifizieren.

Satz 2.1 $\mathcal{M}_m^{\mathcal{K}}$ bildet mit den Operationen Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation einen (im Allgemeinen nicht kommutativen) Ring mit Einselement. \square

Mit der Frage, ob es eine Menge von quadratischen Matrizen gibt, die sogar einen Körper bilden, d.h. insbesondere mit der Frage, ob es bezüglich der Multiplikation invertierbare Matrizen gibt, und wenn ja, wie diese beschaffen sind, beschäftigen wir uns in Kapitel 4.2.

Für Multiplikation und Transposition gilt die folgende Rechenregel (Fortsetzung von Folgerungen 2.1 und 2.2 b):

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \quad (2.1)$$

Dies können wir mithilfe obiger Definitionen und Eigenschaften wie folgt nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\left((\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T \right)_{ij} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{ji} \\
&= \mathbf{a}_{j*} \cdot \mathbf{b}_{*i} \\
&= (a_{j1}, \dots, a_{ji}, \dots, a_{jk}) \cdot (b_{1i}, \dots, b_{ii}, \dots, b_{ki}) \\
&= a_{j1}b_{1i} + \dots + a_{ji}b_{ii} + \dots + a_{jk}b_{ki} \\
&= b_{1i}a_{j1} + \dots + b_{ii}a_{ji} + \dots + b_{ki}a_{jk} \\
&= b_{i1}^T a_{1j}^T + \dots + b_{ii}^T a_{ij}^T + \dots + b_{ik}^T a_{kj}^T \\
&= (b_{i1}^T + \dots + b_{ii}^T + \dots + b_{ik}^T) \cdot (a_{1j}^T + \dots + a_{ij}^T + \dots + a_{kj}^T) \\
&= \mathbf{b}_{i*}^T \cdot \mathbf{a}_{*j}^T \\
&= (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T)_{ij}
\end{aligned}$$

Durch geeignete Partitionierung lässt sich die Matrizenmultiplikation in speziellen Fällen vereinfachen. Sei \mathbf{A} eine $(m \times l)$ -Matrix und \mathbf{B} eine $(l \times n)$ -Matrix. Wir teilen diese in jeweils zwei Matrizen \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 bzw. \mathbf{B}_1 und \mathbf{B}_2 wie folgt auf:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{A}_2) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{array} \right)$$

Dabei habe \mathbf{A}_1 p Spalten und \mathbf{B}_1 p Zeilen, $1 \leq p \leq l$. Dann gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_2$$

Das entspricht quasi der skalaren Multiplikation zweier Vektoren.

Beispiel 2.1 Durch die Wahl der folgenden Beispielmatrizen wird klar, wann diese Art der Aufteilung bei der Multiplikation Vorteile (Effizienzgewinne) bringen kann.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & 8 \\ 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 7 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{array} \right) \quad \square$$

Diese blockweise Multiplikation kann sogar noch verallgemeinert werden, indem man die Matrizen A und B in weitere kompatible Blöcke einteilt:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \hline \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{array} \right) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{array} \right)$$

Dann gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_3 & \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_4 \\ \hline \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_4 \cdot \mathbf{B}_3 & \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_4 \cdot \mathbf{B}_4 \end{array} \right)$$

Das entspricht quasi der Multiplikation zweier (2×2) -Matrizen, wenn man die Blöcke als Matrixelemente ansieht.

Beispiel 2.2

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 8 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 7 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 8 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 7 & 0 \end{array} \right) \quad \square$$

2.2 Elementare Matrizenoperationen

Für die Bestimmung des Rangs einer Matrix, den wir im nächsten Abschnitt betrachten, sowie für das Gaußsche Eliminationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme, welches wir im nächsten Kapitel kennen lernen, benötigen wir Operationen, um Matrizen in eine bestimmte Form zu transformieren. Diese Transformationen können durch Multiplikation mit geeigneten Matrizen durchgeführt werden. In diesem Abschnitt führen wir diese Matrizen ein und betrachten die Eigenschaften, die für die genannten Anwendungen von Bedeutung sind.

Definition 2.4 Matrizen $\mathbf{E}_{ij} \in \mathcal{M}_m^{\mathcal{K}}$ definiert durch

$$\mathbf{E}_{ij} = (\mathbf{e}_{rs})_{1 \leq r, s \leq m} \quad \text{mit} \quad e_{rs} = \begin{cases} 1, & r = i, s = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

heißen *Matrizeneinheiten*. Diese Matrizen haben also die Gestalt

Matrizeneinheit

$$i \quad \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad j$$

(dabei stehen die Punkte für Nullen), d.h. das Element e_{ij} ist gleich 1, alle anderen Elemente sind 0. \square

Satz 2.2 Es sei $\mathbf{E}_{ij} \in \mathcal{M}_m^{\mathcal{K}}$ und $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$, dann gilt

a)

$$\mathbf{E}_{ij} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad i$$

Die Linksmultiplikation einer Matrix mit der Matrizeneinheit \mathbf{E}_{ij} erzeugt also eine Matrix, deren i -te Zeile gleich der j -ten Zeile von \mathbf{A} ist, und alle anderen Matrizenelemente sind gleich Null. Wir bezeichnen diese Matrix mit $\mathbf{A}_{j \rightarrow i}^r$ (r steht für *row*, Zeile), d.h.

$$\mathbf{A}_{j \rightarrow i}^r = \mathbf{E}_{ij} \cdot \mathbf{A}$$

b)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_{1i} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{mi} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

j

Die Rechtsmultiplikation einer Matrix mit der Matrizeneinheit \mathbf{E}_{ij} erzeugt eine Matrix, deren j -te Spalte gleich der i -ten Spalte von \mathbf{A} ist, und alle anderen Matrizenelemente sind gleich Null. Wir bezeichnen diese Matrix mit $\mathbf{A}_{i \rightarrow j}^c$ (c steht für *column*, Spalte), d.h.

$$\mathbf{A}_{i \rightarrow j}^c = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_{ij}$$

□

Folgerung 2.4 a) Für $i \neq j$ gilt $\mathbf{E}_{ij}^2 = \mathbf{0}$, und es gilt $\mathbf{E}_{kk}^2 = \mathbf{E}_{kk}$.

b) $\mathbf{E}_{kk} \cdot \mathbf{A}$ ist die Matrix, die als k -te Zeile die k -te Zeile von \mathbf{A} enthält, alle anderen Elemente sind gleich Null. Wir nennen diese Matrix $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^r$, d.h. es ist

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^r = \mathbf{A}_{k \rightarrow k}^r = \mathbf{E}_{kk} \cdot \mathbf{A}$$

Analog ist $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_{kk}$ die Matrix, die als k -te Spalte die k -te Spalte von \mathbf{A} enthält, alle anderen Elemente sind gleich Null. Wir nennen diese Matrix $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^c$, d.h. es ist

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^c = \mathbf{A}_{k \rightarrow k}^c = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_{kk}$$

c) Für $\alpha \in \mathcal{K}$ ist $\alpha \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^r$ die Matrix, die als k -te Zeile die mit α multiplizierte k -te Zeile von \mathbf{A} enthält, alle anderen Elemente sind gleich Null. Analog ist $\alpha \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^c$ die Matrix, die als k -te Spalte die mit α multiplizierte k -te Spalte von \mathbf{A} enthält, alle anderen Elemente sind gleich Null. □

Wir führen nun mithilfe von Matrizeneinheiten formal die Operationen

a) *Zeilentausch*,

b) *Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar* und

c) *Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen*

sowie die entsprechenden Spaltenoperationen ein.

Satz 2.3 Es seien $\mathbf{E}_{ii}, \mathbf{E}_{jj}, \mathbf{E}_{kk}, \mathbf{E}_{ij}, \mathbf{E}_{ji} \in \mathcal{M}_m^\mathcal{K}$ Matrizeneinheiten, und es sei $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}^\mathcal{K}$.

a) Das Vertauschen der Zeilen i und j von \mathbf{A} wird erreicht durch:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{A}_i^r - \mathbf{A}_j^r + \mathbf{A}_{j \rightarrow i}^r + \mathbf{A}_{i \rightarrow j}^r &= \mathbf{A} - \mathbf{E}_{ii}\mathbf{A} - \mathbf{E}_{jj}\mathbf{A} + \mathbf{E}_{ij}\mathbf{A} + \mathbf{E}_{ji}\mathbf{A} \\ &= (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{ii} - \mathbf{E}_{jj} + \mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji})\mathbf{A} \end{aligned}$$

Wir setzen

**Vertauschen
von Zeilen**

$$\mathbf{C}(i, j) = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{ii} - \mathbf{E}_{jj} + \mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & 0 & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

d.h. es ist $\mathbf{C}(i, j) = (\mathbf{c}_{rs})_{1 \leq r, s \leq m}$ mit

$$c_{rs} = \begin{cases} 1, & r = s, 1 \leq r, s \leq i-1, i+1 \leq r, s \leq j-1, j+1 \leq r, s \leq m \\ 0, & r = s = i, r = s = j \\ 1, & r \neq s, r = i, s = j \\ 1, & r \neq s, r = j, s = i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Vertauschen der i -ten mit der j -ten Zeile der Matrix \mathbf{A} wird also durch die (Links-) Multiplikation $\mathbf{C}(i, j) \cdot \mathbf{A}$ erreicht.

Entsprechend wird das Vertauschen der i -ten mit der j -ten Spalte der Matrix \mathbf{A} durch die (Rechts-) Multiplikation $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}(i, j)$ erreicht.

**Vertauschen
von Spalten**

b) Die Multiplikation der k -ten Zeile von \mathbf{A} mit einem Skalar $\alpha \in \mathcal{K}$ wird erreicht durch:

**Multiplikation
einer Zeile mit
einem Skalar**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{A}_k^r + \alpha \cdot \mathbf{A}_k^r &= \mathbf{A} - \mathbf{E}_{kk} \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{E}_{kk} \cdot \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A} + (\alpha - 1) \cdot \mathbf{E}_{kk} \cdot \mathbf{A} \\ &= (\mathbf{E} + (\alpha - 1) \cdot \mathbf{E}_{kk}) \cdot \mathbf{A} \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\mathbf{M}(k, \alpha) = \mathbf{E} + (\alpha - 1) \cdot \mathbf{E}_{kk} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 \\ & & & \alpha & \\ & & & & 1 \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}_k$$

d.h. es ist $\mathbf{M}(k, \alpha) = (\mathbf{m}_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ mit

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, 1 \leq i, j \leq k-1, k+1 \leq i, j \leq m \\ \alpha, & i = j = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Multiplikation der k -ten Zeile der Matrix \mathbf{A} mit einem Skalar $\alpha \in \mathcal{K}$ wird also durch die (Links-) Multiplikation $\mathbf{M}(k, \alpha) \cdot \mathbf{A}$ erreicht.

**Multiplikation
einer Spalte
mit einem
Skalar
Zeilenaddition**

Entsprechend wird die Multiplikation der k -ten Spalte der Matrix \mathbf{A} mit einem Skalar $\alpha \in \mathcal{K}$ durch die (Rechts-) Multiplikation $\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}(k, \alpha)$ erreicht.

c) Für $i \neq j$ wird die Addition des α -fachen der j -ten Zeile zur i -ten Zeile erreicht durch

$$\mathbf{A} + \alpha \mathbf{A}_{j \rightarrow i}^r = \mathbf{A} + \alpha \mathbf{E}_{ij} \mathbf{A} = (\mathbf{E} + \alpha \mathbf{E}_{ij}) \mathbf{A}$$

Wir setzen

$$\mathbf{S}(i, j, \alpha) = \mathbf{E} + \alpha \mathbf{E}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \alpha & & & & 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{S}(i, j, \alpha) = \mathbf{E} + \alpha \mathbf{E}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & \alpha & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

d.h. es ist

$$\mathbf{S}(i, j, \alpha) = (\mathbf{s}_{rs})_{1 \leq r, s \leq m} \quad \text{mit} \quad s_{rs} = \begin{cases} 1, & r = s \\ \alpha, & r = i, s = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Addition des α -fachen der j -ten zur i -ten Zeile wird also durch die (Links-) Multiplikation $\mathbf{S}(i, j, \alpha) \cdot \mathbf{A}$ erreicht.

Entsprechend wird die Addition des α -fachen der j -ten zur i -ten Spalte durch die (Rechts-) Multiplikation $\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}(j, i, \alpha)$ erreicht. \square

Spaltenaddition

Aus den obigen Eigenschaften folgt unmittelbar

Folgerung 2.5 Es gilt $(\mathbf{C}(i, j))^T = \mathbf{C}(i, j)$, $(\mathbf{M}(k, \alpha))^T = \mathbf{M}(k, \alpha)$ sowie $(\mathbf{S}(i, j, \alpha))^T = \mathbf{S}(j, i, \alpha)$. \square

Definition 2.5 Wir nennen für $1 \leq i, j, k \leq m$ und $\alpha \in \mathcal{K}$ die Matrizen

**Elementar-
matrizen**

$$\mathbf{C}(i, j), \mathbf{M}(k, \alpha), \mathbf{S}(i, j, \alpha) \in \mathcal{M}_m^{\mathcal{K}}$$

Elementarmatrizen sowie für $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$ die Linksmultiplikation $\mathbf{L} \cdot \mathbf{A}$ bzw. die Rechtsmultiplikation $\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}$ mit $\mathbf{L}, \mathbf{R} \in \{ \mathbf{E}, \mathbf{C}(i, j), \mathbf{M}(k, \alpha), \mathbf{S}(i, j, \alpha) \}$ eine *Elementaroperation* auf \mathbf{A} . \square

**Elementar-
operationen**

Satz 2.4 Die Elementarmatrizen $\mathbf{C}(i, j), \mathbf{M}(k, \alpha), \mathbf{S}(i, j, \alpha) \in \mathcal{M}_m^{\mathcal{K}}$ sind invertierbar, und es gilt für $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$

- a) $\mathbf{C}^{-1}(i, j) = \mathbf{C}(i, j)$ und damit $\mathbf{C}(i, j) \cdot \mathbf{C}(i, j) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$,
- b) $\mathbf{M}^{-1}(k, \alpha) = \mathbf{M}(k, \alpha^{-1})$ und damit $\mathbf{M}(k, \alpha) \cdot \mathbf{M}(k, \alpha^{-1}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$,
- c) $\mathbf{S}^{-1}(i, j, \alpha) = \mathbf{S}(i, j, -\alpha)$ und damit $\mathbf{S}(i, j, \alpha) \cdot \mathbf{S}(i, j, -\alpha) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ für $i \neq j$.

Beweis a) Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(i, j) \cdot \mathbf{C}(i, j) &= (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{ii} - \mathbf{E}_{jj} + \mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}) \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{ii} - \mathbf{E}_{jj} + \mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}) \\ &= \dots \\ &= \mathbf{E} \end{aligned}$$

(„...“ bedeutet „langwierige Rechnerei“ – aber es kommt letztendlich \mathbf{E} heraus.)

b) Es ist mit Folgerung 2.4 a)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(k, \alpha) \cdot \mathbf{M}(k, \alpha^{-1}) &= (\mathbf{E} + (\alpha - 1)\mathbf{E}_{kk}) \cdot (\mathbf{E} + (\alpha^{-1} - 1)\mathbf{E}_{kk}) \\ &= \mathbf{E} + (\alpha^{-1} - 1)\mathbf{E}_{kk} + (\alpha - 1)\mathbf{E}_{kk} + (\alpha - 1)(\alpha^{-1} - 1)\mathbf{E}_{kk}^2 \\ &= \mathbf{E} + \alpha^{-1}\mathbf{E}_{kk} - \mathbf{E}_{kk} + \alpha\mathbf{E}_{kk} - \mathbf{E}_{kk} + 2\mathbf{E}_{kk} - \alpha\mathbf{E}_{kk} - \alpha^{-1}\mathbf{E}_{kk} \\ &= \mathbf{E} \end{aligned}$$

c) Es ist mit Folgerung 2.4 a)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(i, j, \alpha) \cdot \mathbf{S}(i, j, -\alpha) &= (\mathbf{E} + \alpha\mathbf{E}_{ij})(\mathbf{E} - \alpha\mathbf{E}_{ij}) \\ &= \mathbf{E} - \alpha\mathbf{E}_{ij} + \alpha\mathbf{E}_{ij} - \alpha^2\mathbf{E}_{ij}^2 \\ &= \mathbf{E} \end{aligned}$$

Womit insgesamt alle Behauptungen gezeigt sind. \square

Aus dem Satz folgt unmittelbar

Folgerung 2.6 a) Es sei \mathbf{L} eine Elementaroperation, dann ist auch \mathbf{L}^{-1} eine Elementaroperation.

b) Ist $\mathbf{L} = \mathbf{L}_k \cdot \dots \cdot \mathbf{L}_1$ ein Produkt (man sagt auch eine Folge) von Elementaroperationen, dann ist $\mathbf{L}^{-1} = (\mathbf{L}_k \cdot \dots \cdot \mathbf{L}_1)^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{L}_k^{-1}$ ebenfalls ein Produkt (eine Folge) von Elementaroperationen.³ \square



Übungsaufgaben

2.1 Führen Sie auf die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3^{\mathbb{R}}$$

Folgen von Elementaroperationen nach eigener Wahl aus! \square

2.3 Rang einer Matrix

Zeilenrang
Spaltenrang

Betrachtet man die Zeilen oder Spalten einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$ jeweils als Mengen von Vektoren, so können diese linear unabhängig oder linear abhängig sein. Wir nennen die maximale Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von \mathbf{A} den *Zeilenrang* und entsprechend die Anzahl der unabhängigen Spalten den *Spaltenrang* von \mathbf{A} . Den Zeilenrang bezeichnen wir mit $rrang(\mathbf{A})$ bzw. den Spaltenrang mit $crang(\mathbf{A})$.

Zeilen-
reduktion

Definition 2.6 a) Sei $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$ eine Matrix und $\mathbf{L} = \mathbf{L}_k \cdot \dots \cdot \mathbf{L}_1$ eine Folge von Elementaroperationen, dann heißt

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L}_k \cdot \dots \cdot \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{A}$$

Zeilenreduktion von \mathbf{A} .

Spalten-
reduktion

b) Sei $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$ eine Matrix und $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{R}_l$ eine Folge von Elementaroperationen, dann heißt

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{R}_l$$

Spaltenreduktion von \mathbf{A} .

3 In multiplikativen Strukturen gilt für invertierbare Elemente: $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ (siehe (A.6) im Anhang).

c) Zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$ heißen äquivalent, falls es eine Zeilenreduktion \mathbf{L} und eine Spaltenreduktion \mathbf{R} gibt, so dass

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}$$

gilt. Schreibweise: $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. □

**Äquivalenz
von Matrizen**

Der folgende Satz besagt, dass die Anwendung von Zeilen- und Spaltenreduktionen auf eine Matrix weder deren Zeilen- noch deren Spaltenrang ändert. Bei den Tauschoperationen und der Multiplikation von Spalten oder Zeilen mit Skalaren ist das offensichtlich, und da bei den anderen Operationen Zeilen- bzw. Spaltenvektoren linear miteinander verknüpft werden, kann man überlegen, dass die lineare Unabhängigkeit oder die lineare Abhängigkeit der Zeilen- bzw. der Spaltenvektoren insgesamt dadurch nicht verändert werden.

Satz 2.5 Sind $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$ Matrizen mit $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, dann ist

$$rang(\mathbf{A}) = rang(\mathbf{B}) \text{ und } crang(\mathbf{A}) = crang(\mathbf{B})$$

□

Durch gezielte Anwendung von Zeilen- und Spaltenreduktionen kann jede Matrix auf eine bestimmte Form, die so genannte Stufenform, transformiert werden.

Satz 2.6 Zu jeder Matrix $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$ mit $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ existiert eine eindeutige Zahl $r \geq 1$, so dass \mathbf{A} äquivalent zur Matrix

$$\mathbf{E}_{m,n}^r = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \mathbf{0}_{m-r,r} & \mathbf{0}_{m-r,n-r} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

ist.

Beweis Da $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ ist, ist mindestens ein Element a_{ij} von \mathbf{A} ungleich 0. Falls $a_{11} = 0$ ist, erreichen wir durch $\mathbf{C}(1, i) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}(1, j)$, dass das Element in der ersten Zeile und ersten Spalte ungleich 0 ist.

Aus diesem Grund gehen wir davon aus, dass das Element a_{11} der gegebenen Matrix \mathbf{A} ungleich 0 ist. Durch Anwenden der Elementaroperation $\mathbf{M}(a_{11}^{-1}, 1)$ machen wir dieses Element zu 1. Wir nennen die bis dato transformierte Matrix weiterhin \mathbf{A} und machen nun alle Elemente in der ersten Spalte unter der 1 und alle Elemente in der ersten Zeile rechts neben der 1 zu 0, indem wir für jedes $a_{1j} \neq 0$, $2 \leq j \leq n$, die Folge $\mathbf{S}(j, 1, -a_{1j})$ von rechts sowie für jedes a_{i1} , $2 \leq i \leq m$, die Folge $\mathbf{S}(i, 1, -a_{i1})$ von links auf \mathbf{A} anwenden. Die Matrix \mathbf{A} hat nun folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x & \dots & x \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Solange die durch x gekennzeichnete Matrix noch mindestens ein von 0 verschiedenes Element enthält, verfahren wir mit dieser Matrix genau wie mit der Ausgangsmatrix \mathbf{A} . Es ist offensichtlich, dass letztendlich mit diesem Verfahren die Matrix $\mathbf{E}_{m,n}^r$ erreicht wird. \square

Stufenform

Definition 2.7 Die Form (2.2) $\mathbf{E}_{m,n}^r$ einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$ heißt *Stufenform* von \mathbf{A} . \square

Aus den Sätzen 2.5 und 2.6 folgt unmittelbar, dass der Zeilenrang und der Spaltenrang jeder Matrix identisch ist.

Folgerung 2.7 Es sei $\mathbf{E}_{m,n}^r$ die Stufenform der Matrix $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$, dann ist $r = r\text{rang}(\mathbf{A})$ und $r = c\text{rang}(\mathbf{A})$ und damit $r\text{rang}(\mathbf{A}) = c\text{rang}(\mathbf{A})$. \square

Wir brauchen also nicht mehr zwischen dem Zeilenrang und dem Spaltenrang einer Matrix zu unterscheiden.

**Rang
einer Matrix**

Definition 2.8 Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren (Spaltenvektoren) einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$ heißt der *Rang* von \mathbf{A} , dieser wird mit $\text{rang}(\mathbf{A})$ bezeichnet. \square

Folgerung 2.8 Es sei $\mathbf{E}_{m,n}^r$ die Stufenform der Matrix $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}^{\mathcal{K}}$, dann ist $r = \text{rang}(\mathbf{A})$. \square



Übungsaufgaben

2.2 Transformieren Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 20 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,5}^{\mathbb{R}}$$

in Stufenform und geben Sie den Rang von \mathbf{A} an! \square

2.4 Zusammenfassung

$m \times n$ -Matrizen über einem Körper \mathcal{K} bestehen aus m Zeilenvektoren und n Spaltenvektoren über \mathcal{K} .

Mit der elementweisen Addition zweier Matrizen und mit einer elementweisen skalaren Multiplikation bilden die Matrizen einen Vektorraum.

Matrizen bilden mit der Matrizenaddition und der Matrizenmultiplikation einen Ring mit Einselement; das Einselement ist die Einheitsmatrix.

Die Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren einer Matrix ist immer gleich der Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren. Diese Anzahl ist der Rang der Matrix. Zeilen- oder Spaltenvertauschungen, Multiplikation einer Zeile oder einer Spalte mit einem Skalar sowie Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen oder Addition des Vielfachen einer Spalte zu einer anderen ändert den Rang einer Matrix nicht. Mit den genannten Matrizenumformungen lässt sich jede $m \times n$ -Matrix \mathbf{A} in eine Matrix $\mathbf{E}_{m,n}^r$ umwandeln, die („links oben“) die $r \times r$ -Einheitsmatrix \mathbf{E}_r enthält, und alle anderen Matrixelemente sind gleich 0. $\mathbf{E}_{m,n}^r$ ist die Stufenform zu \mathbf{A} . r ist gleich dem Rang von \mathbf{A} .

Die genannten Matrizenumformungen können durch Links- und Rechtsmultiplikation mit geeigneten Elementarmatrizen realisiert werden. Elementarmatrizen ergeben sich durch geeignete Verknüpfung von Einheitsmatrix und Matrizeneinheiten.

Lineare Algebra für die Informatik
Vektorräume, Gleichungssysteme, Codierung,
Quantenalgorithmen

Witt, K.-U.

2013, VIII, 186 S. 2 Abb., 1 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-00188-9