

# **Teil II**

## **Lösungen**

## §1. Topologie metrischer Räume

**Aufgabe 1 A.** Durch  $\delta$  wird eine Metrik auf  $\mathbb{R}$  definiert, denn:

- (1) Die  $\arctan$ -Funktion hat *genau eine* Nullstelle bei  $x = 0$  (die  $\arctan$ -Funktion ist streng monoton wachsend und hat eine Nullstelle bei  $x = 0$ ). Daher gilt für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\delta(x, y) = 0 \iff \arctan |x - y| = 0 \iff |x - y| = 0 \iff x = y.$$

- (2) (Symmetrie). Es gilt für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\delta(x, y) = \arctan |x - y| = \arctan |y - x| = \delta(y, x).$$

- (3) (Dreiecksungleichung). Zunächst zeigen wir, dass

$$\arctan(x + y) \leq \arctan x + \arctan y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Man schließt mit Hilfe der Substitution  $z := t - x$  folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \arctan(x + y) &= \int_0^{x+y} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_x^{x+y} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \arctan x + \int_0^y \frac{1}{1+(z+x)^2} dz \\ &\leq \arctan x + \int_0^y \frac{1}{1+z^2} dz \\ &= \arctan x + \arctan y. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \delta(x, z) &= \arctan |(x - y) + (y - z)| \\ &\leq \arctan (|x - y| + |y - z|) \quad (\text{Monotonie}) \\ &\leq \arctan |x - y| + \arctan |y - z| \\ &= \delta(x, y) + \delta(y, z). \end{aligned}$$

für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$  bewiesen.

Nun zum Beweis, dass die offenen Mengen bzgl. der Metrik  $\delta$  dieselben sind, wie bzgl. der üblichen Metrik  $d(x, y) = |x - y|$  und umgekehrt.

Mit  $\tilde{B}_r(\cdot)$  bezeichnen wir im folgenden eine offene Kugel bzgl. der Metrik  $\delta$  und mit  $B_r(\cdot)$  eine offene Kugel bzgl. der Metrik  $d$ .

Es sei  $U$  eine offene Menge bzgl. der Metrik  $\delta$  und  $x \in U$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon_1 \in ]0, \pi/2[$  mit  $\tilde{B}_{\varepsilon_1}(x) \subset U$ . Mit  $\varepsilon_2 := \tan \varepsilon_1 > 0$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned} B_{\varepsilon_2}(x) &= \{\xi \in \mathbb{R} : |x - \xi| < \tan \varepsilon_1\} \\ &= \{\xi \in \mathbb{R} : \arctan |x - \xi| < \varepsilon_1\} \\ &= \tilde{B}_{\varepsilon_1}(x) \subset U, \end{aligned}$$

womit bewiesen ist, dass  $U$  auch bzgl. der Metrik  $d$  offen ist.

Es sei nun umgekehrt  $U$  eine offene Menge bzgl. der Metrik  $d$  und  $x \in U$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon_1 > 0$  mit  $B_{\varepsilon_1}(x) \subset U$ . Wir setzen dann  $\varepsilon_2 := \arctan \varepsilon_1 > 0$  und erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{\varepsilon_2}(x) &= \{\xi \in \mathbb{R} : \arctan |x - \xi| < \arctan \varepsilon_1\} \\ &= \{\xi \in \mathbb{R} : |x - \xi| < \varepsilon_1\} \\ &= B_{\varepsilon_1}(x) \subset U. \end{aligned}$$

Folglich ist  $U$  auch offen bzgl. der Metrik  $\delta$ .

**Aufgabe 1 D.** Wir beweisen nur a) und überlassen b) als Übung für den Leser.

„ $\subset$ “: Es sei  $(x, y) \in (A \times B)^\circ$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon((x, y)) \subset A \times B$ . Setzen wir  $\varepsilon_1 := \varepsilon/\sqrt{2}$ , so gilt

$$B_{\varepsilon_1}(x) \times B_{\varepsilon_1}(y) \subset B_\varepsilon((x, y)) \subset A \times B,$$

d.h. es ist  $(x, y) \in \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$ .

„ $\supset$ “: Ist  $(x, y) \in \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$ , so existieren ein  $\varepsilon_1 > 0$  und ein  $\varepsilon_2 > 0$  mit

$$B_{\varepsilon_1}(x) \subset A \quad \text{und} \quad B_{\varepsilon_2}(y) \subset B.$$

Mit  $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  erhalten wir

$$B_\varepsilon((x, y)) \subset B_{\varepsilon_1}(x) \times B_{\varepsilon_2}(y) \subset A \times B,$$

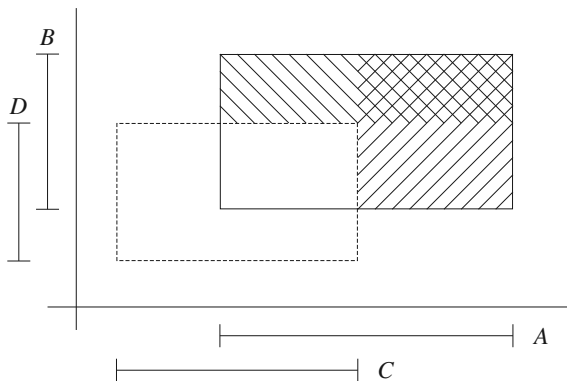
d.h. es ist  $(x, y) \in (A \times B)^\circ$ .

**Aufgabe 1 E.** Es gilt nach Aufgabe 1 D

$$\begin{aligned}
 \partial(A \times B) &= \overline{A \times B} \setminus (A \times B)^\circ \\
 &= (\overline{A} \times \overline{B}) \setminus (\overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}) \\
 &= ((\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times (\overline{B} \setminus \overset{\circ}{B})) \\
 &= (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B),
 \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt von der folgenden, einfach zu beweisenden Gleichung aus der Mengenlehre Gebrauch gemacht haben (vgl. auch Bild 1): Sind  $X$  und  $Y$  Mengen und  $A, C \subset X$  bzw.  $B, D \subset Y$ , so gilt

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D)).$$



**Bild 1**

**Aufgabe 1 F.** Wir benutzen die *de Morganschen Regeln* aus der Mengenlehre: Sei  $Y_i \subset X$ ,  $i \in I$ , eine beliebige (endliche oder unendliche) Familie von Teilmengen einer Menge  $X$ , so gilt

$$(i) \quad \bigcap_{i \in I} (X \setminus Y_i) = X \setminus \bigcup_{i \in I} Y_i,$$

$$(ii) \quad \bigcup_{i \in I} (X \setminus X_i) = X \setminus \bigcap_{i \in I} Y_i.$$

Sei nun  $X$  ein topologischer Raum und es seien  $A_1, \dots, A_n$  endlich viele abgeschlossene Teilmengen von  $X$ . Nach Definition sind dann die Komplemente

$$X \setminus A_1, \dots, X \setminus A_n$$

offene Mengen. Da ein Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen wieder offen ist (An. 2, §1, Bemerkung zu Satz 3), ist auch  $\bigcap_{i=1}^n (X \setminus A_i)$  eine offene Menge. Nach den de Morganschen Regeln gilt

$$\bigcap_{i=1}^n (X \setminus A_i) = X \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Da  $X \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$  offen ist, folgt dass  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  eine abgeschlossene Menge ist.

Analog folgt aus der Tatsache, dass die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen wieder offen ist und den de Morganschen Regeln, dass der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

### Aufgabe 1 G.

a) Aus An. 2, §1, Satz 5 a) folgt

$$Y \cap \partial Y = \emptyset \implies Y \setminus \partial Y = Y \implies Y \text{ ist offen.}$$

Sei umgekehrt  $Y$  offen und wir nehmen an, dass es ein  $x \in Y$  mit  $x \in \partial Y$  gibt. Dann gilt für jede Umgebung  $U$  von  $x$ , dass  $U \setminus Y \neq \emptyset$  und somit  $U \not\subset Y$ . Dies steht jedoch nach An. 2, §1, Satz 4, im Widerspruch dazu, dass  $Y$  eine offene Menge ist! Also  $Y \cap \partial Y = \emptyset$  und damit

$$Y \text{ offen} \iff Y \cap \partial Y = \emptyset.$$

b) Mit An. 2, §1, Satz 5 b) ergibt sich

$$\partial Y \subset Y \implies Y \cup \partial Y = Y \implies Y \text{ ist abgeschlossen.}$$

Aus a) folgt

$$\begin{aligned} Y \text{ abgeschlossen} &\implies X \setminus Y \text{ offen} \\ &\implies (X \setminus Y) \cap \partial(X \setminus Y) = \emptyset \\ &\implies (X \setminus Y) \cap \partial Y = \emptyset \\ &\implies \partial Y \subset Y. \end{aligned}$$

und damit

$$Y \text{ abgeschlossen} \iff \partial Y \subset Y.$$

**Aufgabe 1 H.** Es genügt zu zeigen, dass jede Teilmenge von  $X$  offen ist. Dies folgt aber unmittelbar daraus, dass für alle  $x \in X$  gilt

$$B_{1/2}(x) = \{x\}.$$

### Aufgabe 1 J.

1) Seien  $U_1, U_2 \subset \mathbb{Z}$  offen, also  $A_i := \mathbb{Z} \setminus U_i$  endlich. Für  $U := U_1 \cap U_2$  gilt dann  $\mathbb{Z} \setminus U = A_1 \cup A_2$ . Da dies endlich ist, ist  $U$  nach Definition offen.

2) Sei  $I$  eine nicht-leere Indexmenge und seien  $U_i \subset \mathbb{Z}$ ,  $i \in I$ , offene Mengen, also  $A_i := \mathbb{Z} \setminus U_i$  endlich. Für die Vereinigung  $V := \bigcup_{i \in I} U_i$  gilt dann  $\mathbb{Z} \setminus V = \bigcap_{i \in I} A_i$ . Dies ist endlich, also  $V$  nach Definition offen.

Da auch  $\mathbb{Z}$  und  $\emptyset$  nach Definition offen sind, sind alle Axiome der Topologie erfüllt.

3) Wir zeigen jetzt, dass der dadurch definierte topologische Raum nicht Hausdorffsch ist. Seien  $x_1 \neq x_2$  Elemente von  $\mathbb{Z}$  und  $U_i$  beliebige Umgebungen von  $x_i$ ,  $i = 1, 2$ . Da jede Umgebung eine offene Umgebung umfasst, sind die Komplemente  $\mathbb{Z} \setminus U_i$  endlich (also die  $U_i$  selbst offen). Daraus folgt  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Daher ist das Hausdorffsche Trennungsaxiom nicht erfüllt.

## §2. Grenzwerte. Stetigkeit

**Aufgabe 2 A.** Nach An. 1, §3, Aufgabe 3.5, gilt für alle  $x \in X$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|),$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|).$$

Daher folgt die Stetigkeit von  $\varphi$  und  $\psi$  unmittelbar aus der Stetigkeit der Betragsfunktion und den Sätzen 5 und 7 aus An. 2, §2.

**Aufgabe 2 C.** Nach An. 2, Beispiel (2.3) ist die Abbildung

$$\varphi : ]-1, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto \varphi(\xi) := \frac{\xi}{1 - |\xi|},$$

ein Homöomorphismus. Daraus folgt nach An. 2, §1, Satz 6, dass auch die Abbildung

$$\Phi : W = ]-1, 1[^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)),$$

ein Homöomorphismus ist. Andererseits ist nach An. 2, Beispiel (2.3) die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow B_1(0), \quad x \mapsto \frac{x}{1 + \|x\|},$$

ein Homöomorphismus. Also liefert die Komposition

$$f \circ \Phi : W \longrightarrow B_1(0)$$

einen Homöomorphismus des Würfels auf die Einheitskugel.

**Aufgabe 2 D.** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $C[a, b]$  bzgl. der Supremums-Norm  $\| \cdot \|$ . Für jeden Punkt  $x \in [a, b]$  und alle  $k, m \in \mathbb{N}$  gilt

$$|f_k(x) - f_m(x)| \leq \|f_k - f_m\|.$$

Daher ist  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$ , die wegen der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  gegen eine reelle Zahl  $f(x) \in \mathbb{R}$  konvergiert. Dies definiert eine Funktion

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Es bleibt zu zeigen:

(i)  $f$  ist stetig, d.h. gehört zu  $C[a, b]$ .

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ .

Wir beginnen mit dem Beweis von (ii). Da  $(f_n)$  eine Cauchyfolge ist, gibt es zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Daraus folgt für jedes  $x \in [a, b]$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N,$$

also durch Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Da dies für alle  $x \in [a, b]$  gilt, heißt das

$$\|f_n - f\| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N,$$

d.h. die Folge  $(f_n)$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f$ .

Daraus folgt auch Behauptung (i), denn ein gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist wieder stetig.

Damit ist insgesamt bewiesen, dass jede Cauchyfolge  $(f_n)$  in  $C[a, b]$  konvergiert, also  $C[a, b]$  vollständig ist.

### Aufgabe 2 E.

a) Bezeichnet  $\|\cdot\|$  die Supremums-Norm für Funktionen auf  $[a, b]$ , so gilt für alle  $f \in C^1[a, b]$  nach Definition der  $\|\cdot\|_{C^1}$ -Norm

$$\|f\| \leq \|f\|_{C^1} \quad \text{und} \quad \|f'\| \leq \|f\|_{C^1}.$$

Daraus folgt: Ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $C^1[a, b]$ , so sind  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolgen in  $C[a, b]$  bzgl. der Supremums-Norm. Da  $C[a, b]$  vollständig ist (Aufgabe 2 C), konvergiert die Folge  $(f_n)$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $f \in C[a, b]$  und die Folge  $(f'_n)$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $g \in C[a, b]$ . Nach An. 1, §21, Satz 5, ist die Funktion  $f$  differenzierbar und es gilt  $f' = g$ , also liegt  $f$  in  $C^1[a, b]$ . Da

$$\|f_n - f\|_{C^1} \leq \|f_n - f\| + \|f'_n - f'\|$$

konvergiert die Folge  $(f_n)$  in der  $\|\cdot\|_{C^1}$ -Norm gegen  $f$ . Dies beweist die Vollständigkeit von  $C^1[a, b]$ .

b) Es folgt unmittelbar aus den Ableitungsregeln, dass die Abbildung

$$D : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b], \quad f \mapsto f'$$

linear ist. Da

$$\|D(f)\| = \|f'\| \leq \|f\|_{C^1},$$

folgt aus An. 2, §2, Satz 11, dass  $D$  stetig ist.

### Aufgabe 2 F. Die Stetigkeit der Abbildung

$$S : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto S(f) := \int_0^\pi \cos(f(x)) dx$$



bedeutet, dass  $S(g)$  nahe bei  $S(f)$  liegt, falls die Funktion  $g$  nahe bei  $f$  liegt (im Sinne der Supremums-Norm). Wir wollen daher  $|S(g) - S(f)|$  als Funktion von  $\|g - f\|$  abschätzen. Dazu verwenden wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Funktion Cosinus. Zu  $u, v \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $\xi$  zwischen  $u$  und  $v$ , so dass

$$\cos(u) - \cos(v) = -\sin(\xi) \cdot (u - v).$$

Daraus folgt für alle  $u, v \in \mathbb{R}$

$$|\cos(u) - \cos(v)| \leq |u - v|.$$

Für zwei stetige Funktionen  $f, g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt deshalb für alle  $x \in [0, \pi]$

$$|\cos(g(x)) - \cos(f(x))| \leq |g(x) - f(x)| \leq \|g - f\|.$$

Daraus erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} |S(g) - S(f)| &= \left| \int_0^\pi (\cos(g(x)) - \cos(f(x))) dx \right| \\ &\leq \int_0^\pi |\cos(g(x)) - \cos(f(x))| dx \\ &\leq \int_0^\pi \|g - f\| dx = \pi \|g - f\|. \end{aligned}$$

Aus  $|S(g) - S(f)| \leq \pi \|g - f\|$  folgt aber mit dem  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium unmittelbar die Stetigkeit der Abbildung  $S$ .

## Aufgabe 2 H.

a) (i) Die Axiome einer Norm für  $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$  sind leicht nachzuprüfen. Wir zeigen als Beispiel die Dreiecks-Ungleichung. Seien

$$a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

zwei Elemente von  $\ell^\infty$ . Dann ist

$$\|a + b\|_{\ell^\infty} = \sup\{|a_n + b_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Da  $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , folgt

$$\sup\{|a_n + b_n| : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\} + \sup\{|b_n| : n \in \mathbb{N}\},$$

also  $\|a + b\|_{\ell^\infty} \leq \|a\|_{\ell^\infty} + \|b\|_{\ell^\infty}$ , d.h. die Dreiecks-Ungleichung ist bewiesen.

(ii) Zum Beweis der Vollständigkeit von  $\ell^\infty$  sei  $(a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine vorgegebene Cauchyfolge in  $\ell^\infty$ ,

$$a^{(n)} = (a_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für jedes feste  $i \in \mathbb{N}$  und alle  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt

$$|a_i^{(n)} - a_i^{(m)}| \leq \|a^{(n)} - a^{(m)}\|_{\ell^\infty}.$$

Daraus ergibt sich, dass die Folge  $(a_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{C}$  ist, also gegen eine Zahl  $a_i^* \in \mathbb{C}$  konvergiert. Wir betrachten nun die Folge  $a^* := (a_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$ . Die Vollständigkeit von  $\ell^\infty$  ist bewiesen, wenn wir zeigen können, dass die Folge  $a^*$  zu  $\ell^\infty$  gehört, d.h. beschränkt ist, und dass  $a^*$  der Grenzwert von  $(a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  im Sinne der Norm  $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$  ist.

*Zur Beschränktheit.* Da  $(a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist, gibt es zu  $\varepsilon = 1$  ein  $N_1 \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\|a^{(n)} - a^{(m)}\|_{\ell^\infty} \leq 1 \quad \text{für alle } n, m \geq N_1.$$

Daraus folgt

$$\|a^{(n)}\|_{\ell^\infty} \leq \|a^{(N_1)}\|_{\ell^\infty} + 1 \quad \text{für alle } n \geq N_1.$$

Mit  $K := \max\{\|a^{(0)}\|_{\ell^\infty}, \|a^{(1)}\|_{\ell^\infty}, \dots, \|a^{(N_1-1)}\|_{\ell^\infty}, \|a^{(N_1)}\|_{\ell^\infty} + 1\}$  ist deshalb

$$\|a^{(n)}\|_{\ell^\infty} \leq K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \quad \text{also} \quad |a_i^{(n)}| \leq K \quad \text{für alle } i, n \in \mathbb{N}.$$

Da  $a_i^* = \lim_{n \rightarrow \infty} a_i^{(n)}$ , folgt  $|a_i^*| \leq K$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , d.h. die Folge  $a^*$  ist beschränkt und liegt deshalb in  $\ell^\infty$ .

*Zur Konvergenz.* Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Es ist zu zeigen, dass ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $\|a^{(n)} - a^*\|_{\ell^\infty} \leq \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ . Dies sieht man so:

Da  $(a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist, gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\|a^{(n)} - a^{(m)}\|_{\ell^\infty} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Das bedeutet

$$|a_i^{(n)} - a_i^{(m)}| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N \text{ und alle } i \in \mathbb{N}.$$

Da  $a_i^* = \lim_{m \rightarrow \infty} a_i^{(m)}$ , folgt daraus

$$|a_i^{(n)} - a_i^*| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N \text{ und alle } i \in \mathbb{N},$$

d.h.  $\|a^{(n)} - a^*\|_{\ell^\infty} \leq \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ , q.e.d.

b) *Behauptung:* Die Teilmenge  $C \subset \ell^\infty$  aller konvergenten Folgen  $a = (a_i) \in \ell^\infty$  ist abgeschlossen.

*Beweis.* Nach An. 2, §2, Satz 2, ist Folgendes zu zeigen: Seien  $a^{(n)} \in C$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $a^* \in \ell^\infty$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^{(n)} - a^*\|_{\ell^\infty} = 0$ . Dann liegt auch  $a^*$  in  $C$ , d.h.  $a^*$  ist eine konvergente Folge komplexer Zahlen. Da der Körper der komplexen Zahlen vollständig ist, muss nur gezeigt werden, dass  $a^* = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{C}$  ist. Sei dazu  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Nach Voraussetzung gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $\|a^{(m)} - a^*\|_{\ell^\infty} < \varepsilon/3$ . Da  $a^{(m)}$  eine konvergente Folge komplexer Zahlen, d.h. eine Cauchyfolge ist, gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$|a_i^{(m)} - a_j^{(m)}| \leq \varepsilon/3 \quad \text{für alle } i, j \geq N.$$

Aus  $|a_k^{(m)} - a_k^*| \leq \varepsilon/3$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  folgt dann

$$|a_i^* - a_j^*| \leq |a_i^* - a_i^{(m)}| + |a_i^{(m)} - a_j^{(m)}| + |a_j^{(m)} - a_j^*| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

für alle  $i, j \geq N$ , d.h.  $a^*$  ist eine Cauchyfolge, q.e.d.

### §3. Kompaktheit

**Aufgabe 3 B.** Es sei  $X$  ein Hausdorff-Raum. Es genügt zu zeigen, dass die Vereinigung zweier kompakter Teilmengen  $K_1, K_2 \subset X$  kompakt ist. Denn dann folgt durch Induktion, dass jede endliche Vereinigung von kompakten Teilmengen von  $X$  wieder kompakt ist.

Sei  $K := K_1 \cup K_2$  und  $(U_i)_{i \in I}$  eine beliebige offene Überdeckung von  $K$ . Da

$$K_v \subset K \subset \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{für } v = 1, 2,$$

ist  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $K_v$ , es gibt also wegen der Kompaktheit von  $K_v$  endliche Teilmengen  $I_1, I_2 \subset I$  mit

$$K_1 \subset \bigcup_{i \in I_1} U_i \quad \text{und} \quad K_2 \subset \bigcup_{i \in I_2} U_i.$$

Daraus folgt

$$K \subset \bigcup_{i \in I_1 \cup I_2} U_i.$$

Wir haben somit eine endliche Teilüberdeckung  $(U_i)_{i \in I_1 \cup I_2}$  von  $K$  gefunden, was zeigt, dass  $K = K_1 \cup K_2$  kompakt ist.

*Bemerkung.* Man beachte, dass die Vereinigung beliebig vieler kompakter Teilmengen eines Hausdorff-Raumes i.Allg. nicht wieder kompakt zu sein braucht. Beispiel:  $X = \mathbb{R}$ ,  $K_n := [0, 1 - 1/n]$ ,  $n \geq 1$ . Dann ist  $K_n$  für jedes  $n \geq 1$  kompakt, aber

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1 - \frac{1}{n}] = [0, 1[$$

ist nicht kompakt.

**Aufgabe 3 C.** Nach An. 2, §3, Satz 4, sind alle  $A_n$  abgeschlossen. Da der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist, ist auch

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

abgeschlossen. Nach demselben Satz ist  $A$  als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge  $A_0$  selbst kompakt. Es ist also nur noch zu beweisen, dass  $A$  nichtleer ist. Dies beweisen wir durch Widerspruch.

*Annahme:* Der Durchschnitt  $A$  ist leer. Die Komplemente  $U_n := X \setminus A_n$  sind offen und aus der Annahme folgt, dass

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} U_n = X \supset A_0.$$

Wegen der Kompaktheit von  $A_0$  genügen endlich viele der  $U_n$ , um  $A_0$  zu überdecken, es existiert also ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$\begin{aligned} U_N \supset A_0 &\implies X \setminus A_N \supset A_0 \\ &\implies A_N \subset X \setminus A_0 \\ &\implies A_N \cap A_0 = A_N = \emptyset. \end{aligned}$$

Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass  $A_N \neq \emptyset$ . Also ist die Annahme falsch und  $A$  nichtleer, q.e.d.

**Aufgabe 3 D.** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine folgenkompakte Teilmenge. Um zu zeigen, dass  $A$  kompakt ist, genügt es nach dem Satz von Heine-Borel (An. 2, §3, Satz 5) zu zeigen:

(1)  $A$  ist abgeschlossen.

(2)  $A$  ist beschränkt.

Zu (1): Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $x_k \in A$ , die gegen  $x \in \mathbb{R}^n$  konvergiere. Da dann auch jede Teilfolge von  $(x_k)$  gegen  $x$  konvergiert, gilt nach Voraussetzung  $x \in A$ . Nach An. 2, §2, Satz 2, ist  $A$  dann abgeschlossen.

Zu (2): *Angenommen*,  $A$  ist nicht beschränkt.

Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  einen Punkt  $x_n \in A$  mit  $\|x_n\| > n$ . Wegen der Folgenkompaktheit von  $A$  existiert eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$ . Diese ist nach An. 2, §3, Corollar zu Satz 3, beschränkt. Da aber  $\|x_{n_k}\| > n_k$ , ist dies ein Widerspruch. Also ist  $A$  doch beschränkt.

**Bemerkung.** Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (An. 2, §3, Satz 9) ist jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes folgenkompakt. Die Aufgabe zeigt also, dass eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  genau dann kompakt ist, wenn sie folgenkompakt ist. Man kann beweisen, dass dies sogar für Teilmengen beliebiger metrischer Räume gilt. Dagegen ist die Aussage in beliebigen topologischen Räumen nicht mehr gültig.

**Aufgabe 3 E.** Es seien  $K$  und  $L$  kompakte, insbesondere abgeschlossene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ . Nach An. 2, Beispiel (1.14), ist dann das Produkt  $K \times L \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$  abgeschlossen. Da  $K \times L$  auch beschränkt ist, ist es kompakt. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\alpha: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \mapsto x + y.$$

Diese Abbildung ist stetig (vgl. An. 2, §2, Satz 7) und es gilt

$$\alpha(K \times L) = K + L.$$

Da das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung wieder kompakt ist (An. 2, §3, Satz 6), folgt dass  $K + L$  kompakt ist, q.e.d.

Wir geben noch einen zweiten Beweis für die Kompaktheit von  $K + L$ .

Nach Aufgabe 3 D genügt es zu zeigen, dass  $K + L$  folgenkompakt ist, d.h. dass jede Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  aus  $K + L$  eine Teilfolge  $(x_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$  besitzt, die gegen ein  $c \in K + L$  konvergiert.

Sei also  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge aus  $K + L$ . Jedes  $x_i$  lässt sich folgendermaßen darstellen

$$x_i = a_i + b_i, \quad \text{wobei } a_i \in K \text{ und } b_i \in L.$$

Dann ist  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge aus  $K$  und  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge aus  $L$ . Da  $K$  kompakt ist, gibt es nach An. 2, §3, Satz 8, eine Teilfolge  $(a_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(a_i)$ , die gegen ein  $a \in K$  konvergiert. Nun ist auch  $(b_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge aus  $L$ , und da  $L$  kompakt ist, gibt es eine Teilfolge  $(b_{i_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$  von  $(b_{i_k})$ , die gegen ein  $b \in L$  konvergiert. Also:

- (1)  $(b_{i_{k_l}})$  ist eine Teilfolge von  $(b_i)$ , die gegen ein  $b \in L$  konvergiert.
- (2)  $(a_{i_k})$  ist eine Teilfolge von  $(a_i)$ , die gegen ein  $a \in K$  konvergiert, und damit ist auch  $(a_{i_{k_l}})$  eine Teilfolge von  $(a_i)$ , die gegen  $a$  konvergiert.

Für die Teilfolge  $(x_{i_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}} = (a_{i_{k_l}} + b_{i_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$  von  $(x_i)$  gilt dann nach den Grenzwertsätzen

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x_{i_{k_l}} = \lim_{l \rightarrow \infty} (a_{i_{k_l}} + b_{i_{k_l}}) = \lim_{l \rightarrow \infty} a_{i_{k_l}} + \lim_{l \rightarrow \infty} b_{i_{k_l}} = a + b \in A + B.$$

Damit haben wir eine konvergente Teilfolge gefunden, also ist  $K + L$  folgenkompakt, q.e.d.

**Aufgabe 3 G.** Da  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $K$  ist, gibt es zu jedem Punkt  $x \in K$  einen Index  $i(x) \in I$  mit  $x \in U_{i(x)}$ . Da  $U_{i(x)}$  offen ist, gibt es sogar ein  $r(x) > 0$ , so dass

$$x \in B_{r(x)}(x) \subset U_{i(x)}.$$

Trivialerweise gilt

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{r(x)/2}(x).$$

Somit ist  $(B_{r(x)/2}(x))_{x \in K}$  eine offene Überdeckung von  $K$ , und da  $K$  kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es existieren  $x_1, \dots, x_n \in K$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , so dass

$$K \subset \bigcup_{v=1}^n B_{r(x_v)/2}(x_v).$$

Als "Lebesguesche Konstante" kann man nun wählen

$$\lambda := \min \left\{ \frac{r(x_1)}{2}, \dots, \frac{r(x_n)}{2} \right\}.$$

Wir zeigen jetzt, dass  $\lambda$  die geforderten Eigenschaften hat. Sei dazu  $A \subset K$  eine Teilmenge mit  $\text{diam}(A) \leq \lambda$ . O.B.d.A. ist  $A$  nicht leer. Wir wählen einen beliebigen Punkt  $a \in A \subset K$ . Dann gibt es ein  $v \in \{1, \dots, n\}$  mit

$$a \in B_{r(x_v)/2}(x_v) \subset B_{r(x_v)}(x_v) \subset U_{i(x_v)}.$$

Wegen  $\text{diam}(A) \leq r(x_v)/2$  folgt offenbar

$$A \subset B_{r(x_v)}(x_v) \subset U_{i(x_v)},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

**Aufgabe 3 H.** Es sei  $X$  ein kompakter metrischer Raum. Es ist zu zeigen, dass jede Cauchyfolge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $X$  konvergiert.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (An. 2, §3, Satz 9) gibt es eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(x_n)$ , die gegen einen Punkt  $a \in X$  konvergiert. Wir zeigen jetzt, dass die Gesamtfolge  $(x_n)$  ebenfalls gegen  $a$  konvergiert.

Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Nach Definition der Cauchyfolge gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\|x_n, x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n, m \geq n_0.$$

Wegen  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$  gibt es ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\|x_{n_k}, a\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Dann gilt für alle  $n \geq N := \max(n_0, n_{k_0})$

$$\|x_n, a\| \leq \|x_n, x_{n_{k_0}}\| + \|x_{n_{k_0}}, a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also konvergiert  $(x_n)$  gegen  $a \in X$ , q.e.d.

**Aufgabe 3 I.** Sei  $g := f^{-1} : Y \rightarrow X$  die Umkehrabbildung von  $f$ . Zum Beweis der Stetigkeit von  $g$  benützen wir das Kriterium im Anschluss an An. 2, §2, Satz 9:  $g$  ist genau dann stetig, wenn das Urbild  $g^{-1}(A)$  jeder abgeschlossenen Teilmenge  $A \subset X$  abgeschlossen in  $Y$  ist. Nach An. 2, §3, Satz 4, ist  $A$  kompakt. Nach §3, Satz 6, ist  $g^{-1}(A) = f(A)$  kompakt in  $Y$ , also (wieder nach §3, Satz 4) auch abgeschlossen, q.e.d.

**Aufgabe 3 K.** Da das Intervall  $J \subset \mathbb{R}$  kompakt ist und für festes  $x \in I$  die Funktion

$$J \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto f(x, y),$$

stetig ist, nimmt die Funktion ihr Supremum an, es gibt also ein  $y(x) \in J$ , so dass

$$F(x) := \sup\{f(x, y) : y \in J\} = f(x, y(x)).$$

(Man beachte:  $y(x)$  braucht nicht stetig von  $x$  abzuhängen.)

Die Funktion  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  ist gleichmäßig stetig (An. 2, §3, Satz 10). Zu beliebig vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  gibt es deshalb ein  $\delta > 0$ , so dass

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$$

für alle  $(x, y), (x', y') \in I \times J$  mit  $\|(x, y) - (x', y')\| < \delta$ .

Wir zeigen nun:

(\*) Für alle  $x, x' \in I$  mit  $|x - x'| < \delta$  gilt  $|F(x) - F(x')| < \varepsilon$ .

Dies bedeutet die dann die behauptete Stetigkeit von  $F$ .

**Beweis von (\*).** Sei  $|x - x'| < \delta$ . Dann ist auch  $\|(x, y(x)) - (x', y(x'))\| < \delta$ , also

$$f(x, y(x)) - f(x', y(x')) < \varepsilon$$

Andrerseits gilt nach Definition von  $y(x')$

$$f(x', y(x)) \leq f(x', y(x')).$$

Zusammen genommen erhalten wir

$$f(x, y(x)) - f(x', y(x')) < \varepsilon$$

Da die analoge Ungleichung auch mit vertauschten Rollen von  $x$  und  $x'$  gilt, erhält man

$$|F(x) - F(x')| = |f(x, y(x)) - f(x', y(x'))| < \varepsilon, \quad \text{q.e.d.}$$

**Aufgabe 3 L.** Wir beweisen hier nur Teil b).

Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  halbstetig von unten. Für jede natürliche Zahl  $n$  ist dann die Menge

$$U_n := \{x \in X : f(x) > -n\}$$

offen in  $X$  und es gilt  $U_1 \subset \dots \subset U_n \subset U_{n+1} \subset \dots$  sowie  $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X$ . Da  $X$  kompakt ist, wird es von endlich vielen der  $U_n$  überdeckt; es gibt also eine natürliche Zahl  $N$  mit  $X = U_N$ . Daraus folgt, dass die Menge

$$A := f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subset \mathbb{R}$$



durch  $-N$  nach unten beschränkt ist. Sei

$$a := \inf(A) \in \mathbb{R}.$$

i) Falls  $a \in A$ , gibt es ein  $x_0 \in X$  mit  $f(x_0) = a$ , d.h.  $f$  nimmt in  $x_0$  sein Minimum an und wir sind fertig.

ii) Falls  $a \notin A$ , gilt  $f(x) > a$  für alle  $x \in X$  und es folgt

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \quad \text{mit} \quad V_n := \{x \in X : f(x) > a + \frac{1}{n}\}.$$

Alle  $V_n$  sind offen und aus der Kompaktheit von  $X$  folgt, dass  $X = V_m$  für ein  $m \geq 1$ . Das heißt aber, dass

$$f(x) > a + \frac{1}{m} \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dies steht im Widerspruch zu  $a = \inf(f(X))$ . Also kann Fall ii) nicht auftreten und wir haben bewiesen, dass  $f$  sein Minimum annimmt.

Ist  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  von oben halbstetig, so wende man den obigen Beweis auf die Funktion  $-f$  an, die von unten halbstetig ist.

### Aufgabe 3 N.

a) Es sei  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  die wie folgt definierte Funktion:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 4x - 2, & \text{falls } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}, \\ -4x + 4, & \text{falls } \frac{3}{4} \leq x < 1, \\ 0, & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$$

Für  $n \geq 0$  setzen wir  $f_n(x) := f(2^n x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , siehe Bild 2.

Offenbar gilt  $\|f_n\| = 1$  für alle  $n \geq 0$ . Da die Funktion  $f_n$  nur im offenen Intervall  $]2^{-n-1}, 2^{-n}[$  von 0 verschiedene Werte annimmt, folgt  $f_n f_m = 0$  für alle  $n \neq m$ .

b) *Behauptung:* Ist  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , irgend eine Folge von Funktionen mit den Eigenschaften in a), so folgt

$$\|f_n - f_m\| \geq 1 \quad \text{für alle } n \neq m.$$

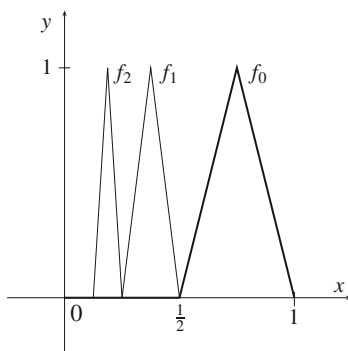


Bild 2

Da  $f_n$  stetig und  $[0, 1]$  kompakt ist, nimmt  $f_n$  das Maximum seines Betrages an, es gibt also einen Punkt  $a \in [0, 1]$  mit  $|f_n(a)| = \|f_n\| = 1$ . Aus  $f_n f_m = 0$  folgt nun  $f_m(a) = 0$ , also

$$\|f_n - f_m\| \geq |f_n(a) - f_m(a)| = 1.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Daraus folgt aber, dass die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine konvergente Teilfolge  $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  besitzen kann, denn eine solche Teilfolge wäre eine Cauchyfolge und die Normen  $\|f_{n_i} - f_{n_j}\|$  müssten für  $i, j \rightarrow \infty$  beliebig klein werden, was hier nicht der Fall ist.

Insgesamt haben wir also bewiesen, dass es in der abgeschlossenen Einheitskugel  $K(1)$  des normierten Vektorraums  $C[0, 1]$  eine Folge gibt, die keine konvergente Teilfolge besitzt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (An. 2, §3, Satz 9) ist daher  $K(1)$  nicht kompakt.

*Bemerkung.* Die gerade bewiesene Aussage steht im Kontrast zur Tatsache, dass die abgeschlossene Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$  kompakt ist. Das unterschiedliche Verhalten ist durch die Dimension begründet, man kann nämlich beweisen: In einem normierten Vektorraum  $V$  über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist die abgeschlossene Einheitskugel genau dann kompakt, wenn  $V$  endlich-dimensional ist.

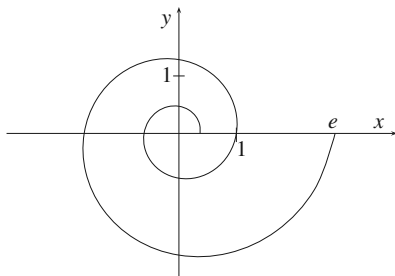
## §4. Kurven im $\mathbb{R}^n$

**Aufgabe 4 A.** Die Kurve  $f$  ist trivialerweise stetig differenzierbar, daher erhält man für die Bogenlänge  $L$  der Kurve  $f$  nach An. 2, §4, Satz 1:

$$\begin{aligned}
 L &= \int_a^b \|f'(t)\| dt \\
 &= \int_a^b \|(-r \sin t, r \cos t, c)\| dt \\
 &= \int_a^b \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + c^2} dt \\
 &= \int_a^b \sqrt{r^2 + c^2} dt \\
 &= (b-a) \sqrt{r^2 + c^2}.
 \end{aligned}$$

### Aufgabe 4 B.

- a) Bild 3 zeigt eine Skizze von  $f$  für  $c = \frac{1}{2\pi}$  im Bereich  $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ .



**Bild 3**

- b)  $f$  ist eine stetig differenzierbare Kurve mit

$$f'(t) = (ce^{ct} \cos t - e^{ct} \sin t, ce^{ct} \sin t + e^{ct} \cos t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Daher gilt nach An. 2, §4, Satz 1:

$$\begin{aligned}
 L_{a,b} &= \int_a^b \|f'(t)\| dt \\
 &= \int_a^b \sqrt{(ce^{ct} \cos t - e^{ct} \sin t)^2 + (ce^{ct} \sin t + e^{ct} \cos t)^2} dt \\
 &= \int_a^b \sqrt{e^{2ct}((c \cos t - \sin t)^2 + (c \sin t + \cos t)^2)} dt \\
 &= \int_a^b e^{ct} \sqrt{c^2 + 1} dt \\
 &= \sqrt{c^2 + 1} \cdot \frac{1}{c} e^{ct} \Big|_a^b \\
 &= \frac{\sqrt{c^2 + 1}}{c} (e^{cb} - e^{ca}).
 \end{aligned}$$

c) Nach b) erhält man  $L_{a,0} = \frac{\sqrt{c^2+1}}{c} (1 - e^{ca})$ . Also gilt:

Für  $c > 0$  ist  $\lim_{a \rightarrow -\infty} e^{ca} = 0$ , also  $\lim_{a \rightarrow -\infty} L_{a,0} = \frac{\sqrt{c^2+1}}{c}$ .

Für  $c < 0$  existiert der Grenzwert nicht.

d) Ein Kreis  $K_r$  vom Radius  $r$  um den Nullpunkt hat nach An. 2, §4, Beispiel (4.1) die Darstellung

$$K_r : [0, 2\pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad K_r(t) := (r \cos t, r \sin t).$$

Nun ist zu zeigen, dass es für jedes  $r > 0$  genau ein  $t_1 \in [0, 2\pi[$  und genau ein  $t_2 \in \mathbb{R}$  mit  $K_r(t_1) = f(t_2)$  gibt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 &K_r(t_1) = f(t_2) \\
 \iff &(r \cos t_1, r \sin t_1) = (e^{ct_2} \cos t_2, e^{ct_2} \sin t_2) \\
 \iff &\begin{cases} r \cos t_1 = e^{ct_2} \cos t_2 \\ r \sin t_1 = e^{ct_2} \sin t_2 \end{cases} \\
 \implies &(r \cos t_1)^2 + (r \sin t_1)^2 = (e^{ct_2} \cos t_2)^2 + (e^{ct_2} \sin t_2)^2 \\
 \implies &r^2 = e^{2ct_2} \\
 \implies &t_2 = \frac{1}{2c} \log r^2 = \frac{1}{c} \log r
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die obige Gleichung erhält man

$$\cos t_1 = \cos t_2, \quad \sin t_1 = \sin t_2$$

d.h. für  $t_1$  muss gelten:

$$t_1 = t_2 \bmod 2\pi.$$

Die mod-Funktion ist dabei für reelle Zahlen  $x \in \mathbb{R}$  wie folgt zu verstehen:

$$x \bmod 2\pi := x - \lfloor x/2\pi \rfloor \cdot 2\pi,$$

wobei  $\lfloor x/2\pi \rfloor$  die größte ganze Zahl  $\leq x/2\pi$  ist.

Eine leichte Probe zeigt, dass sie oben berechneten Werte für  $t_1, t_2$  tatsächlich  $K_r(t_1) = f(t_2)$  erfüllen.

Für den Cosinus des Schnittwinkels  $\gamma$  erhält man dann

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\langle f'(t_2), K_r'(t_1) \rangle}{\|f'(t_2)\| \cdot \|K_r'(t_1)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt insbesondere, dass  $\gamma$  unabhängig vom Radius des Kreises ist.

#### Aufgabe 4 D.

a) Für alle  $k \in [0, 1]$  und alle  $a \in ]0, 1[$  gilt:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{\sqrt{1-k^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt && \text{(Substitution: } t = \sin z) \\ &= \int_0^{\arcsin a} \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 z}}{\sqrt{1-\sin^2 z}} \cos z dz \\ &= \int_0^{\arcsin a} \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 z}}{\sqrt{\cos^2 z}} \cos z dz && \text{(da } \sin^2 z + \cos^2 z = 1) \\ &= \int_0^{\arcsin a} \sqrt{1-k^2 \sin^2 z} dz && \text{(da } \cos z > 0 \text{ in } [0, \arcsin a]). \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der arcsin-Funktion gilt

$$\lim_{a \rightarrow 1} \int_0^{\arcsin a} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 z} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 z} dz.$$

Die Funktion  $z \mapsto \sqrt{1 - k^2 \sin^2 z}$  ist in  $[0, \frac{\pi}{2}]$  stetig, daher existiert nach An. 1, §18, Satz 3, das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 z} dz$$

und damit auch für alle  $k \in [0, 1]$  das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt,$$

und es gilt

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 z} dz.$$

- b) Da  $f$  eine stetig differenzierbare Kurve ist gilt für die Bogenlänge  $L$  der Kurve  $f$  nach An. 2, §4, Satz 1:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \|(-a \sin t, b \cos t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= b \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} \sin^2 t + \cos^2 t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= b \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \sin^2 t} dt \\
&= 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \sin^2 t} dt \\
&\quad \text{(nach An. 1, §14, Satz 1 und Corollar 1)} \\
&\stackrel{\text{a)}}{=} 4b \cdot E \left( \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \right),
\end{aligned}$$

falls  $a^2 \leq b^2$ . Analog erhält man, falls  $a^2 > b^2$ :

$$\begin{aligned}
L &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2 t} dt \\
&= 4a \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) z^2}}{\sqrt{1 - z^2}} dz \\
&\quad \text{(Substitution: } z = \cos t) \\
&= 4a \cdot E \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right),
\end{aligned}$$

also

$$L = \begin{cases} 4b \cdot E \left( \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \right), & \text{falls } a^2 \leq b^2, \\ 4a \cdot E \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right), & \text{falls } a^2 > b^2. \end{cases}$$

## §5. Partielle Ableitungen

**Aufgabe 5 A.**  $f$  ist für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  einmal partiell differenzierbar und man

erhält für die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{2x^2 + y^2}}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2(x^2 + y^2)}{\sqrt{2x^2 + y^2}}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

**Aufgabe 5 B.** Die partielle Differenzierbarkeit von  $F$  außerhalb des Nullpunkts ist klar.

Wir setzen für  $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\Phi(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

und  $\Phi_x := \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ . Analog sei  $\Phi_y$  definiert.

Da  $F(x, y) = xy\Phi(x, y)$ , gilt für  $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y\Phi(x, y) + xy\Phi_x(x, y)$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x\Phi(x, y) + xy\Phi_y(x, y).$$

Daraus folgt für  $h \neq 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, h) = h\Phi(0, h) = -h$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(h, 0) = h\Phi(h, 0) = h.$$

Da  $F$  auf der  $x$ -Achse und der  $y$ -Achse identisch 0 ist, gilt außerdem

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0.$$



Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{\partial F}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (-h) = -1$$

und analog

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{\partial F}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot h = +1.$$

Damit ist gezeigt, dass  $D_1 D_2 F(0,0) \neq D_2 D_1 F(0,0)$ .

Wir beweisen jetzt, dass  $F$  in  $(0,0)$  stetig ist. Da  $|x^2 - y^2| \leq |x^2 + y^2|$ , folgt

$$|\Phi(x,y)| \leq 1 \quad \text{für alle } (x,y) \neq (0,0).$$

Daraus folgt  $|F(x,y)| \leq |xy|$  für alle  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ . Da  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |xy| = 0$ , folgt

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x,y) = 0 = F(0,0),$$

d.h. die Stetigkeit von  $F$  in  $(0,0)$ .

**Aufgabe 5 C.** Man erhält mit An. 2, §5, Satz 1:

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(\operatorname{rot} v) \\ &= \operatorname{div} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Aufgabe 5 E.** Es folgt unmittelbar aus An. 2, §5, Beispiel (5.6) und der Bemerkung zur Definition der Divergenz eines Vektorfeldes:

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= \operatorname{div} \nabla(fg) \\ &= \operatorname{div}(g \nabla f + f \nabla g) \\ &= \operatorname{div}(g \nabla f) + \operatorname{div}(f \nabla g) \\ &= \langle \nabla g, \nabla f \rangle + g \cdot \operatorname{div}(\nabla f) + \langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \cdot \operatorname{div}(\nabla g) \\ &= f \Delta g + 2 \langle \nabla f, \nabla g \rangle + g \Delta f. \end{aligned}$$

**Aufgabe 5 F.** Unter Verwendung der Produkt- und Kettenregel schließt man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 \Delta F(x, t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x, t) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i^2} \underbrace{\left( t^{-n/2} \exp \left( - \sum_{j=1}^n x_j^2 \cdot \frac{1}{4t} \right) \right)}_{=F(x, t)} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( F(x, t) \cdot \frac{-x_i}{2t} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left( F(x, t) \left( \frac{-x_i}{2t} \right)^2 + F(x, t) \cdot \frac{-1}{2t} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n F(x, t) \left( \frac{x_i^2}{4t^2} - \frac{1}{2t} \right) \\
 &= F(x, t) \left( \frac{1}{4t^2} \|x\|^2 - \frac{n}{2t} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left( t^{-n/2} \exp \left( - \sum_{j=1}^n x_j^2 \cdot \frac{1}{4t} \right) \right)}_{=F(x, t)} \\
 &= \frac{-n}{2t} F(x, t) + \frac{1}{4t^2} \|x\|^2 F(x, t) \\
 &= F(x, t) \left( \frac{1}{4t^2} \|x\|^2 - \frac{n}{2t} \right) \\
 &= \Delta F(x, t),
 \end{aligned}$$

also

$$\Delta F - \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

**Aufgabe 5 G.** Setzen wir  $k = (k_1, \dots, k_n)$ , so lautet  $F$  ausgeschrieben

$$F(x, t) = f(\langle k, x \rangle - \omega t) = f(\langle k, x \rangle - \|k\|ct) = f\left(\sum_{v=1}^n k_v x_v - \|k\|ct\right).$$

Für  $i = 1, \dots, n$  gilt nach der Kettenregel:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, t) = f'(\langle k, x \rangle - \|k\|ct) \cdot k_i,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x, t) = f''(\langle k, x \rangle - \|k\|ct) \cdot k_i^2.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \Delta F(x, t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x, t) = f''(\langle k, x \rangle - \|k\|ct) \sum_{i=1}^n k_i^2 \\ &= \|k\|^2 \cdot f''(\langle k, x \rangle - \|k\|ct). \end{aligned}$$

Ferner erhält man für die partiellen Ableitungen nach  $t$  mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = f'(\langle k, x \rangle - \|k\|ct) \cdot (-\|k\|c),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x, t) = f''(\langle k, x \rangle - \|k\|ct) \cdot (-\|k\|c)^2 = \|k\|^2 c^2 \cdot f''(\langle k, x \rangle - \|k\|ct).$$

Damit ist

$$\Delta F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

bewiesen.

## §6. Totale Differenzierbarkeit

**Aufgabe 6 A.** Man erhält für alle  $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$

$$DF(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 6 B.** Mit der Kettenregel und der Schwarzschen Regel schließt man folgendermaßen:

$$\frac{\partial(u \circ p)}{\partial r}(r, \varphi) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_j}(p(r, \varphi)) \cdot \frac{\partial p_j}{\partial r}(r, \varphi)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r, \varphi)) \cdot \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r, \varphi)) \cdot \sin \varphi, \\
\frac{\partial^2(u \circ p)}{\partial r^2}(r, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r, \varphi)) \cdot \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r, \varphi)) \cdot \sin \varphi \right) \\
&= \cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r, \varphi)) \right) + \sin \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r, \varphi)) \right) \\
&= \cos \varphi \cdot \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_j}(p(r, \varphi)) \cdot \frac{\partial p_j}{\partial r}(r, \varphi) \\
&\quad + \sin \varphi \cdot \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_j}(p(r, \varphi)) \cdot \frac{\partial p_j}{\partial r}(r, \varphi) \\
&= \cos \varphi \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(p(r, \varphi)) \cdot \frac{\partial p_1}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}(p(r, \varphi)) \cdot \frac{\partial p_2}{\partial r}(r, \varphi) \right) \\
&\quad + \sin \varphi \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_1}(p(r, \varphi)) \cdot \frac{\partial p_1}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(p(r, \varphi)) \cdot \frac{\partial p_2}{\partial r}(r, \varphi) \right) \\
&= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(p(r, \varphi)) + 2 \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}(p(r, \varphi)) \\
&\quad + \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(p(r, \varphi)), \\
\frac{\partial(u \circ p)}{\partial \varphi}(r, \varphi) &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_j}(p(r, \varphi)) \cdot \frac{\partial p_j}{\partial \varphi}(r, \varphi) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r, \varphi)) \cdot ((-r) \sin \varphi) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r, \varphi)) \cdot r \cos \varphi, \\
\frac{\partial^2(u \circ p)}{\partial \varphi^2}(r, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r, \varphi)) \cdot ((-r) \sin \varphi) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r, \varphi)) \cdot r \cos \varphi \right) \\
&= -r \left( \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r, \varphi)) + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r, \varphi)) \right) \right) \\
&\quad + r \left( -\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r, \varphi)) + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r, \varphi)) \right) \right) \\
&= -r \left( \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r, \varphi)) + \sin \varphi \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_j}(p(r, \varphi)) \cdot \frac{\partial p_j}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + r \left( -\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r, \varphi)) + \cos \varphi \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_j}(p(r, \varphi)) \cdot \frac{\partial p_j}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right) \\
& = -r \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r, \varphi)) - r \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r, \varphi)) \\
& \quad + r^2 \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(p(r, \varphi)) - 2r^2 \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}(p(r, \varphi)) \\
& \quad + r^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(p(r, \varphi)).
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2(u \circ p)}{\partial r^2}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(u \circ p)}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2(u \circ p)}{\partial \varphi^2}(r, \varphi) \\
& = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(p(r, \varphi)) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(p(r, \varphi)) \\
& = ((\Delta u) \circ p)(r, \varphi).
\end{aligned}$$

**Aufgabe 6 C.** Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Setze  $\delta := \varepsilon/K$ , dann gilt für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\xi\| < \delta$  und alle  $x \in U$  mit  $\xi + x \in U$  unter Anwendung von An. 2, §6, Satz 5 und dem Hilfssatz zum Corollar zu Satz 5:

$$\begin{aligned}
\|f(x+\xi) - f(x)\| &= \left\| \left( \int_0^1 Df(x+t\xi) dt \right) \cdot \xi \right\| \\
&\leq \|\xi\| \cdot \int_0^1 \|Df(x+t\xi)\| dt \\
&\leq \|\xi\| \cdot \int_0^1 K dt \\
&= \|\xi\| \cdot K \\
&< \delta \cdot K \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

und damit ist  $f$  in  $U$  gleichmäßig stetig.

An. 2, §6, Satz 5, darf hier angewendet werden, denn  $U$  ist eine offene Kugel, d.h. es gibt ein  $m \in \mathbb{R}^n$  und ein  $r \in \mathbb{R}_+$  mit  $U = B_r(m)$ . Dann gilt für alle  $t \in [0, 1]$  und alle  $x, x + \xi \in U$  unter Benutzung der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|x + t\xi - m\| &= \|t(x + \xi - m) + (1-t)(x - m)\| \\ &\leq \|t(x + \xi - m)\| + \|(1-t)(x - m)\| \\ &= t\|x + \xi - m\| + (1-t)\|x - m\| \\ &< tr + (1-t)r \\ &= r, \end{aligned}$$

d.h.  $x + t\xi \in U$  für alle  $t \in [0, 1]$ .

**Aufgabe 6 D.** Es gilt  $(f \circ \varphi) : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$(f \circ \varphi)(x) = c \quad \text{für alle } x \in ]-\varepsilon, \varepsilon[,$$

da  $\varphi(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset N_f(c)$  nach Voraussetzung. Also ist  $(f \circ \varphi)'(0) = 0$ . Damit gilt nach der Kettenregel

$$0 = (f \circ \varphi)'(0) = Df(\varphi(0)) \cdot D\varphi(0) = \langle \varphi'(0), \operatorname{grad} f(x) \rangle.$$

### Aufgabe 6 F.

- a) Da  $\overline{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ , vgl. Bild 4, ist  $f$  in  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{M}$  (total) differenzierbar (denn  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{M}$  ist offen und  $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{M}} = 0$ ) und damit insbesondere partiell differenzierbar.

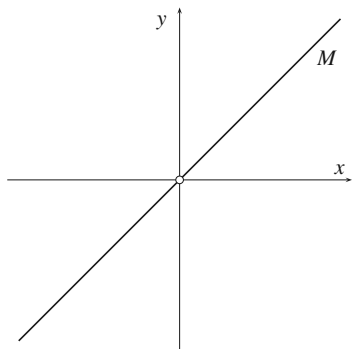
Im Nullpunkt ist  $f$  partiell differenzierbar, da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h)}{h} = 0.$$

Ist  $(x, y) \in M$ , so gilt  $f(x, y) \neq 0$  und die Grenzwerte

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + h e_i) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(x, y)}{h}$$

existieren für  $i = 1, 2$  nicht, d.h.  $f$  ist in  $M$  nicht partiell differenzierbar.

**Bild 4**

- b) Es sei  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|v\| = 1$ . Sind  $v$  und  $(1, 1)$  linear unabhängig, so ist

$$tv \notin M \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}^*$$

und somit

$$D_v f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0.$$

Sind  $v$  und  $(1, 1)$  linear abhängig, so folgt

$$D_v f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{tv_1} - 1}{t} = 1.$$

- c) Für  $v := \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$  gilt  $\|v\| = 1$  und nach a) und b)

$$D_v f(0) = 1 \neq 0 = \langle v, (0, 0) \rangle = \langle v, \text{grad } f(0) \rangle.$$

## §7. Taylor-Formel. Lokale Extrema

**Aufgabe 7 A.** Die Funktion  $(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$  ist in ganz  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  beliebig oft stetig partiell differenzierbar. Für die Ableitungen bis zur zweiten Ordnung

erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2y}{(x+y)^2}, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-2x}{(x+y)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{-4y}{(x+y)^3}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{4x}{(x+y)^3},\end{aligned}$$

Daher gilt nach An. 2, §7, Corollar 1 zu Satz 2, für  $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$

$$\begin{aligned}f(1+\xi, 1+\eta) &= f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)\eta \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1)\frac{\xi^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1)\xi\eta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1)\frac{\eta^2}{2} \\ &\quad + o(\|(\xi, \eta)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\eta^2 + o(\|(\xi, \eta)\|^2).\end{aligned}$$

**Aufgabe 7 B.**  $f$  ist in  $\mathbb{R}^2$  zweimal stetig partiell differenzierbar, und es gilt für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= e^{-x^2-4y^2} (x(-8x^2-2y^2+8), y(-8y^2-32x^2+2)), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= (16x^4-40x^2+4x^2y^2+8-2y^2)e^{-x^2-4y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= (64x^3y-68xy+16xy^3)e^{-x^2-4y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= (64y^4-40y^2+256x^2y^2-32x^2+2)e^{-x^2-4y^2}.\end{aligned}$$

Notwendig für das Vorliegen eines lokalen Extremums in  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ist nach An. 2, §7, Satz 3,

$$\nabla f(x, y) = (0, 0).$$

Dies ist gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem

$$\begin{cases} x(-8x^2-2y^2+8) = 0, \\ y(-8y^2-32x^2+2) = 0. \end{cases}$$



Dies Gleichungssystem ist genau dann erfüllt, wenn eine der folgenden 4 Bedingungen erfüllt ist:

- (i)  $x = 0$  und  $y = 0$ ;
- (ii)  $x = 0$  und  $8y^2 + 32x^2 = 2$ ;
- (iii)  $y = 0$  und  $8x^2 + 2y^2 = 8$ ;
- (iv)  $8x^2 + 2y^2 = 8$  und  $8y^2 + 32x^2 = 2$ .

Die Bedingung (iv) ist unerfüllbar. Also können nur in den folgenden Punkten lokale Extrema vorliegen:

$$(0, 0), \quad (0, \tfrac{1}{2}), \quad (0, -\tfrac{1}{2}), \quad (1, 0), \quad (-1, 0).$$

Für die Hesse-Matrizen an diesen Stellen gilt:

$$(\text{Hess}f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit,}$$

$$\begin{aligned} (\text{Hess}f)(1, 0) &= (\text{Hess}f)(-1, 0) \\ &= \begin{pmatrix} -16e^{-1} & 0 \\ 0 & -30e^{-1} \end{pmatrix} \text{ ist negativ definit,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{Hess}f)(0, \tfrac{1}{2}) &= (\text{Hess}f)(0, -\tfrac{1}{2}) \\ &= \begin{pmatrix} \tfrac{15}{2}e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{pmatrix} \text{ ist indefinit.} \end{aligned}$$

Nach An. 2, §7, Satz 4, folgt dann für die lokalen Extrema von  $f$ :

- $f$  hat in  $(0, 0)$  ein lokales Minimum,
- $f$  hat in  $(1, 0)$  und  $(-1, 0)$  ein lokales Maximum.

**Aufgabe 7 E.**

- a) Sei  $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\beta| = k$ , also  $\beta_1 + \dots + \beta_n = k$ .  $P$  ist beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}
 D^\beta P(x) &= \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} \left( \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha \right) \\
 &= \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \underbrace{\left( \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} x^\alpha \right)}_{=0, \text{ falls } |\alpha|=k \text{ mit } \alpha \neq \beta} \\
 &= c_\beta \left( \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} x^\beta \right) \\
 &= c_\beta \left( \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \dots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} (x^{\beta_1} \cdot \dots \cdot x^{\beta_n}) \right) \\
 &= c_\beta \cdot \beta_1! \cdot \dots \cdot \beta_n! \\
 &= \beta! \cdot c_\beta.
 \end{aligned}$$

- b) Da  $P(x) = 0$  für alle  $x$  aus einer Umgebung um den Nullpunkt, die wir im Folgenden mit  $U$  bezeichnen, gilt

$$D^\alpha P(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in U \text{ und alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |\alpha| = k.$$

Unter Benutzung von a) ergibt sich dann

$$\alpha! c_\alpha = 0 \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |\alpha| = k,$$

und somit

$$c_\alpha = 0 \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |\alpha| = k.$$

- c) Da  $P$  ein homogenes Polynom vom Grad  $k$  ist, gilt

$$P(tx) = t^k P(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Weil  $P$  stetig und die Einheits-Sphäre im  $\mathbb{R}^n$  kompakt ist, folgt

$$M := \sup\{|P(x)| : \|x\| = 1\} < \infty.$$

Zusammen mit der Homogenitäts-Bedingung folgt daraus

$$|P(x)| \leq M \|x\|^k,$$

also

$$P(x) = O(\|x\|^k) = o(\|x\|^m) \quad \text{für alle } m < k.$$

- d) Das Supremum  $M$  von  $|P(x)|$  auf der Einheits-Sphäre (vgl. Teil c) wird in einem gewissen Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x_0\| = 1$  angenommen. Daraus folgt

$$|P(tx_0)| = Mt^k \quad \text{für alle } t > 0.$$

Aus der Voraussetzung  $|P(x)| = o(\|x\|^k)$  folgt andererseits

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{|P(tx_0)|}{t^k} = 0 \quad \implies \quad M = 0,$$

d.h.  $P(x)$  ist identisch Null, q.e.d.

**Aufgabe 7 F.** In einer Umgebung von  $x$  gilt

$$\begin{aligned} 0 = f(x + \xi) - f(x + \xi) &= \sum_{|\alpha| \leq k} (c_\alpha - \tilde{c}_\alpha) \xi^\alpha + \underbrace{(\varphi(\xi) - \tilde{\varphi}(\xi))}_{=: \psi(\xi)} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} (c_\alpha - \tilde{c}_\alpha) \xi^\alpha + \psi(\xi), \end{aligned}$$

wobei  $\psi(\xi) = o(\|\xi\|^k)$  ist.

Wir setzen zur Abkürzung  $b_\alpha := c_\alpha - \tilde{c}_\alpha$  und müssen also zeigen, dass aus

$$(*) \quad \sum_{|\alpha| \leq k} b_\alpha \xi^\alpha = o(\|\xi\|^k) \quad \text{für } \xi \rightarrow 0$$

folgt, dass  $b_\alpha = 0$  für alle  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| \leq k$ .

Dies beweisen wir durch Induktion über  $k$ .

*Induktionsanfang*  $k = 0$ .

Es gibt nur ein  $n$ -tupel  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| = 0$ , nämlich den Nullvektor  $\alpha = (0, \dots, 0) =: 0$ . Die Voraussetzung  $(*)$  lautet in diesem Fall

$$b_0 = o(1).$$

Daraus folgt aber  $b_0 = 0$ .

*Induktionsschritt  $k-1 \rightarrow k$ .*

Wir schreiben  $(*)$  als

$$\sum_{|\alpha| \leq k} b_\alpha \xi^\alpha = \sum_{|\alpha| \leq k-1} b_\alpha \xi^\alpha + P(\xi) = o(\|\xi\|^k)$$

mit  $P(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha \xi^\alpha$ . Da

$$P(\xi) + o(\|\xi\|^k) = O(\|\xi\|^k) + o(\|\xi\|^k) = o(\|\xi\|^{k-1}),$$

folgt

$$\sum_{|\alpha| \leq k-1} b_\alpha \xi^\alpha = o(\|\xi\|^{k-1}),$$

also nach Induktions-Voraussetzung  $b_\alpha = 0$  für alle  $|\alpha| \leq k-1$ . Daraus ergibt sich weiter

$$P(\xi) = o(\|\xi\|^k).$$

Nach Aufgabe 7 E d) ist deshalb  $P(x)$  identisch Null, also  $b_\alpha = 0$  für alle  $|\alpha| = k$ . Damit ist die Induktions-Behauptung vollständig bewiesen.

### Aufgabe 7 G.

- a) Da für alle  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| \leq k$  die Funktion  $D^\alpha f$  in  $U$  beschränkt ist, existiert

$$\sup_{x \in U} |D^\alpha f(x)| \in \mathbb{R}$$

und somit ist auch  $\|f\|_k \in \mathbb{R}$ . Zu bestätigen bleiben noch die drei Normaxiome.

- i) Sei  $f \in C_b^k(U)$  beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned} & \|f\|_k = 0 \\ \iff & \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |D^\alpha f(x)| = 0 \\ \iff & D^\alpha f(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in U \text{ und } |\alpha| \leq k \\ \iff & f(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in U \\ \iff & f = 0. \end{aligned}$$

ii) Es gilt für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und alle  $f \in C_b^k(U)$

$$\begin{aligned}
 \|\lambda \cdot f\|_k &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |D^\alpha(\lambda f)(x)| \\
 &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |\lambda D^\alpha f(x)| \\
 &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |\lambda| \cdot |D^\alpha f(x)| \\
 &= |\lambda| \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |D^\alpha f(x)| \\
 &= |\lambda| \cdot \|f\|_k.
 \end{aligned}$$

iii) Es gilt für alle  $f, g \in C_b^k(U)$

$$\begin{aligned}
 \|f + g\|_k &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |D^\alpha(f + g)(x)| \\
 &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |D^\alpha f(x) + D^\alpha g(x)| \\
 &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} (|D^\alpha f(x)| + |D^\alpha g(x)|) \\
 &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \left( \sup_{x \in U} |D^\alpha f(x)| + \sup_{x \in U} |D^\alpha g(x)| \right) \\
 &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |D^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |D^\alpha g(x)| \\
 &= \|f\|_k + \|g\|_k.
 \end{aligned}$$

b) Zunächst berechnen wir  $D^\alpha(f \cdot g)(x)$  für jedes  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| \leq k$ . Unter Benutzung von An. 1, Aufgabe 15.7 i) (Leibnizsche Formel) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 &D^\alpha(f \cdot g)(x) \\
 &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} (f \cdot g)(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^{|\alpha|-\alpha_1}}{\partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \left( \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \frac{\partial^{\alpha_1-\beta_1} f}{\partial x_1^{\alpha_1-\beta_1}}(x) \frac{\partial^{\beta_1} g}{\partial x_1^{\beta_1}}(x) \right) \\
&= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\beta_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n} \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n-\beta_1-\dots-\beta_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1-\beta_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n-\beta_n}}(x) \\
&\quad \cdot \frac{\partial^{\beta_1+\dots+\beta_n} g}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}(x) \\
&= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\beta_n=0}^{\alpha_n} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \cdot \frac{\partial^{|\alpha|-|\beta|} f}{\partial x_1^{\alpha_1-\beta_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n-\beta_n}}(x) \\
&\quad \cdot \frac{\partial^{|\beta|} g}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}(x) \\
&= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\beta_n=0}^{\alpha_n} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \cdot D^{\alpha-\beta} f(x) D^{\beta} g(x).
\end{aligned}$$

Setzt man  $\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ , so lässt sich obige Gleichung auch in der Form

$$D^{\alpha}(f \cdot g)(x) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n, \\ |\alpha-\beta| \leq k}} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} f(x) D^{\beta} g(x)$$

schreiben. Dann wird die Ähnlichkeit zur Leibnizschen Formel noch deutlicher. (Man beachte, dass  $|\alpha-\beta| \leq k$  insbesondere  $\alpha-\beta \in \mathbb{N}^n$  fordert.) Damit gilt

$$\begin{aligned}
&\|f \cdot g\|_k \\
&= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |D^{\alpha}(f \cdot g)(x)| \\
&\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n, \\ |\alpha-\beta| \leq k}} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} \sup_{x \in U} |D^{\alpha-\beta} f(x) D^{\beta} g(x)| \\
&\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{|\beta| \leq k} \frac{1}{\beta! \alpha!} \sup_{x \in U} |D^{\alpha} f(x) D^{\beta} g(x)| \\
&\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{|\beta| \leq k} \frac{1}{\alpha! \beta!} \sup_{x \in U} |D^{\alpha} f(x)| \cdot \sup_{x \in U} |D^{\beta} g(x)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |D^\alpha f(x)| \right) \cdot \left( \sum_{|\beta| \leq k} \frac{1}{\beta!} \sup_{x \in U} |D^\beta g(x)| \right) \\
&= \|f\|_k \cdot \|g\|_k,
\end{aligned}$$

also

$$\|f \cdot g\|_k \leq \|f\|_k \cdot \|g\|_k.$$

c) Es sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $(C_b^k(U), \|\cdot\|_k)$ , d.h. für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\|f_n - f_m\|_k < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Also gilt für alle  $n, m \geq N$

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |D^\alpha (f_n - f_m)(x)| < \varepsilon,$$

d.h.

$$\frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |D^\alpha (f_n - f_m)(x)| < \varepsilon$$

für alle  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| \leq k$  und somit

$$\frac{1}{\alpha!} |D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f_m(x)| < \varepsilon$$

für alle  $x \in U$  und alle  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| \leq k$ . Aus der Vollständigkeit von  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  folgt dann, dass  $(D^\alpha f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| \leq k$  eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge ist (vgl. Aufgabe 2 C). Setze

$$f_\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} D^\alpha f_n$$

und  $f := f_{(0, \dots, 0)}$ . Im Folgenden zeigen wir, dass

$$f_\alpha = D^\alpha f$$

erfüllt ist. Diese Aussage reduziert sich darauf,

$$f_{(1, 0, \dots, 0)} = D^{(1, 0, \dots, 0)} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

zu bestätigen (die allgemeine Aussage folgt dann induktiv und aus Symmetriegründen). Wir setzen nun für jedes  $x_0 \in U$  und jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \varphi_n^{(x_0)} : [-\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{x_0}] \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi_n^{(x_0)}(t) := f_n(x_0 + te_1), \end{cases}$$

wobei  $\varepsilon_{x_0} > 0$  so gewählt ist, dass  $x_0 + te_1 \in U$  für alle  $t \in [-\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{x_0}]$  (dies ist möglich, da  $U$  eine offene Menge ist). Dann sind  $\varphi_n^{(x_0)}$  stetig differenzierbare Funktionen, welche punktweise gegen  $t \mapsto f(x_0 + te_1)$  konvergieren. Außerdem konvergiert

$$t \mapsto \frac{d}{dt} \varphi_n^{(x_0)}(t) = \frac{\partial}{\partial t} f_n(x_0 + te_1) = \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0 + te_1)$$

gleichmäßig auf  $[-\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{x_0}]$  gegen  $t \mapsto f_{(1,0,\dots,0)}(x_0 + te_1)$  (s.o.). Deshalb gilt nach An. 1, §21, Satz 5,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + te_1) = f_{(1,0,\dots,0)}(x_0 + te_1)$$

und damit, indem man  $t = 0$  setzt,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_{(1,0,\dots,0)},$$

unter der Berücksichtigung, dass  $x_0 \in U$  beliebig vorausgesetzt war. Es gilt also

- $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$  ist eine  $k$ -mal stetig differenzierbare Funktion, da

$$f_\alpha = D^\alpha f$$

und  $f_\alpha$  für alle  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| \leq k$  stetig ist (gleichmäßige Konvergenz).

- $D^\alpha f = f_\alpha$  ist beschränkt in  $U$  für alle  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| \leq k$ , da  $(D^\alpha f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $f_\alpha$  konvergiert und  $D^\alpha f_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  nach Voraussetzung beschränkt ist.

Es bleibt also offenbar nur noch zu bestätigen, dass es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N' \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$\|f_n - f\|_k < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N'.$$



Setze

$$M := |\{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq k\}|.$$

Da  $(D^\alpha f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $D^\alpha f$  konvergiert, gibt es für jedes  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| \leq k$  ein  $N_\alpha \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\sup_{x \in U} |D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{für alle } n \geq N_\alpha.$$

Also gilt für alle  $n \geq \max\{N_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |\alpha| \leq k\}$

$$\begin{aligned} & \|f_n - f\|_k \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f(x)| \\ &< \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \cdot \frac{\varepsilon}{M} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

## §8. Implizite Funktionen

**Aufgabe 8 A.** Es gilt für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Da bekanntlich

$$DF(x, y) \text{ invertierbar} \iff \det(DF(x, y)) \neq 0$$

und  $\det(DF(x, y)) = 4x^2 + 4y^2$ , existiert  $DF^{-1}(x, y)$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ , und es gilt für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\begin{aligned} DF^{-1}(x, y) &= \frac{1}{\det(DF(x, y))} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x}{2(x^2 + y^2)} & \frac{y}{2(x^2 + y^2)} \\ \frac{-y}{2(x^2 + y^2)} & \frac{x}{2(x^2 + y^2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da  $f(0,0) = (0,0)$  ist nur zu zeigen, dass jeder Punkt  $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$  genau zwei Urbildpunkte besitzt.

Dies kann man direkt durch Auflösung des Gleichungssystems

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u, \\ 2xy = v, \end{cases}$$

zeigen, wobei eine Fallunterscheidung  $v = 0$  und  $v \neq 0$  nützlich ist.

Eine elegantere Möglichkeit ergibt sich durch Benutzung von komplexen Zahlen. Setzt man nämlich  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$ , so ist

$$z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy = u + iv = w.$$

Die gegebene Abbildung  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist also, wenn man  $\mathbb{R}^2$  mit der komplexen Ebene  $\mathbb{C}$  identifiziert, nichts anderes als die Abbildung

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto w = z^2.$$

Nun hat bekanntlich jede komplexe Zahl  $w \neq 0$  genau zwei Quadratwurzeln. Ist  $w = re^{i\varphi}$ ,  $r > 0$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , so sind die beiden Lösungen der Gleichung  $z^2 = w$

$$z_{1/2} = \pm \sqrt{r} e^{i\varphi/2}.$$

**Aufgabe 8 B.** Es gilt für alle  $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

$$\text{grad } F(x,y) = ((y - xy)e^{-x-y}, (x - xy)e^{-x-y}),$$

daher verschwindet der Gradient nur, falls

$$(y - xy, x - xy) = (0,0) \iff (x,y) = (1,1).$$

Somit kann nur in  $(1,1)$  ein lokales Extremum vorliegen. Weiter ist

$$\text{Hess } F(x,y) = e^{-x-y} \begin{pmatrix} -2y + xy & 1 - x - y + xy \\ 1 - x - y + xy & -2x + xy \end{pmatrix}$$

und daher

$$\text{Hess } F(1,1) = e^{-2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine negativ definite Matrix (denn alle Eigenwerte sind negativ, vgl. An. 2, §7, Bemerkung im Anschluss an die Definition der Definitheit). Daher besitzt  $F$  in  $(1, 1)$  nach An. 2, §7, Satz 4 b), ein isoliertes lokales Maximum, welches sogar ein absolutes Maximum ist, wie man leicht bestätigt.

Einfacher ist es die Funktion

$$f: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := xe^{-x}$$

zu untersuchen, da

$$F(x, y) = xye^{-x-y} = (xe^{-x})(ye^{-y}).$$

Da

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}, \quad f''(x) = (x-2)e^{-x}$$

besitzt  $f$  folgende Eigenschaften:

- $f$  hat in 1 ein isoliertes Maximum.
- $f$  ist in  $]0, 1]$  streng monoton wachsend.
- $f$  ist in  $[1, \infty[$  streng monoton fallend.
- Nach An. 1, §12, Beispiel (12.2) gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass  $F$  in  $(1, 1)$  ein absolutes Maximum besitzt und

$$F((\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \setminus \{(1, 1)\}) \subset ]0, e^{-2}[.$$

Also besteht die Höhenlinie durch  $(1, 1)$  nur aus einem Punkt, d.h.

$$N_F(e^{-2}) = \{(1, 1)\}.$$

Weiter gilt

$$N_F(c) = \emptyset, \quad \text{falls } c > e^{-2} \text{ oder } c \leq 0.$$

Da

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \iff y - xy = 0 \iff x = 1$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \iff x - xy = 0 \iff y = 1$$

lässt sich über die Darstellung der Höhenlinien mittels differenzierbarer Funktionen für  $c \in ]0, e^{-2}[$  folgende Aussage machen:

(1) Eine Menge

$$\{(x, y) \in I \times J : F(x, y) = c\}$$

lässt sich in der Form

$$\{(x, y) \in I \times J : y = \varphi(x)\}$$

mit einer differenzierbaren Funktion  $\varphi : I \longrightarrow J$  darstellen, wenn  $1 \notin J$  und für alle  $x \in I$  ein  $y \in J$  mit  $F(x, y) = c$  existiert.

(2) Eine Menge

$$\{(x, y) \in I \times J : F(x, y) = c\}$$

lässt sich in der Form

$$\{(x, y) \in I \times J : x = \psi(y)\}$$

mit einer differenzierbaren Funktion  $\psi : J \longrightarrow I$  darstellen, wenn  $1 \notin I$  und für alle  $y \in J$  ein  $x \in I$  mit  $F(x, y) = c$  existiert.

(wobei  $I \times J \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  ein Rechteck ist, d.h.  $I$  und  $J$  sind offene Intervalle). Eine genauere Charakterisierung der Rechtecke mittels differenzierbarer Funktionen würde mehrfache Fallunterscheidungen fordern, deshalb geben wir hier nur noch ein Skizze der Höhenlinien von  $f$  im Bereich  $]0, 3]^2$  an, siehe Bild 5.

**Aufgabe 8 C.** Für die Funktion  $F(x, y, z) := z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1$  gilt

$$F(1, 1, 1) = 0$$

und

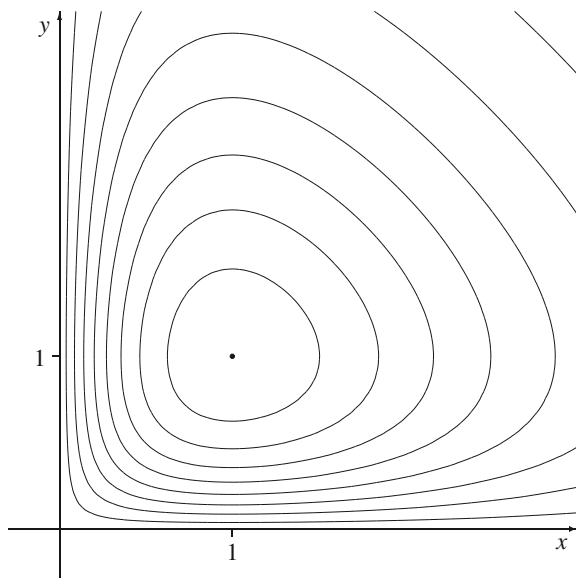
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 - 4x \implies \frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 1) = -1 \neq 0.$$

Nach An. 2, §8, Satz 2, lässt sich die Gleichung  $F(x, y, z) = 0$  also in einer Umgebung von  $(1, 1, 1)$  nach  $z$  auflösen, d.h. es gibt eine in einer Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^2$  von  $(1, 1)$  definierte stetig differenzierbare Funktion  $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi(1, 1) = 1$  und

$$F(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in U.$$

Differentiation dieser Gleichung nach  $x$  und  $y$  ergibt unter Benutzung der Kettenregel

$$\begin{aligned} (D_1 F)(x, y, \varphi(x, y)) + (D_3 F)(x, y, \varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) &= 0, \\ (D_2 F)(x, y, \varphi(x, y)) + (D_3 F)(x, y, \varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

**Bild 5**

Da

$$(D_1F)(x, y, z) = 2y - 4z \implies D_1F(1, 1, 1) = -2,$$

$$(D_2F)(x, y, z) = 2x + 2 \implies D_2F(1, 1, 1) = 4,$$

wird aus dem obigen Gleichungssystem an der Stelle  $(x, y) = (1, 1)$

$$-2 - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 1) = 0,$$

$$4 - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1) = 0,$$

d.h.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 1) = -2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1) = 4.$$

## §9. Untermannigfaltigkeiten

**Aufgabe 9 A.** Wir setzen

$$C_1 := \{(t, t^2, t^3) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Da  $f(t, t^2, t^3) = 0$  und  $g(t, t^2, t^3) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , folgt

$$C_1 \subset C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\}.$$

Zum Beweis der umgekehrten Implikation  $C \subset C_1$  stellen wir fest, dass

$$3f(x, y, z) - g(x, y, z) = x^2 - y$$

und

$$2f(x, y, z) - g(x, y, z) = -xy + z.$$

Für jeden Punkt  $(x, y, z) \in C$  gilt also  $y = x^2$  und  $z = xy = x^3$ , der Punkt hat also die Gestalt  $(x, x^2, x^3)$ , d.h. er liegt auf  $C_1$ . Damit ist bewiesen, dass  $C = C_1$ .

Die Gradienten

$$\text{grad} f(x, y, z) = (2x + y, x - 1, -1)$$

$$\text{grad} g(x, y, z) = (4x + 3y, 3x - 2, -3)$$

sind in jedem Punkt  $(x, y, z) \in C$  linear unabhängig, also ist  $C$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe 9 B.** Sei  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in M$ . Mindestens eine der Koordinaten  $x_i$  ist nach Definition ungleich 0. Wir machen eine Fallunterscheidung:

1. Fall:  $x_1 \neq 0$ . Dann gilt

$$f_1(x) = 0 \implies x_3 = \frac{x_2^2}{x_1}$$

und

$$f_3(x) = 0 \implies x_4 = \frac{x_2 x_3}{x_1}.$$

Daraus folgt

$$x_2 x_4 = \frac{x_2^2 x_3}{x_1} = x_3^2 \implies f_2(x) = 0.$$

Definieren wir also  $U_1 := \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 \neq 0\}$ , so gilt

$$M \cap U_1 = \{x \in U_1 : f_1(x) = f_3(x) = 0\}.$$

Nun ist

$$\operatorname{grad} f_1(x) = (x_3, -2x_2, x_1, 0), \quad \operatorname{grad} f_3(x) = (x_4, -x_3, -x_2, x_1).$$

Da

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix} = x_1^2 \neq 0,$$

sind diese Vektoren linear unabhängig und daher  $M$  in einer Umgebung von  $x$  eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

2. Fall:  $x_2 \neq 0$ . Wegen  $f_1(x) = x_1x_3 - x_2^2 = 0$  folgt dann  $x_1 \neq 0$  und wir sind im 1. Fall.

3. Fall:  $x_3 \neq 0$ . Wegen  $f_2(x) = x_2x_4 - x_3^2 = 0$  folgt dann  $x_2 \neq 0$ , also (Fall 2) auch  $x_1 = 0$  und wir sind wieder im 1. Fall.

4. Fall:  $x_4 \neq 0$ . Dann gilt

$$f_2(x) = 0 \implies x_2 = \frac{x_3^2}{x_4}$$

und

$$f_3(x) = 0 \implies x_1 = \frac{x_2x_3}{x_4}.$$

Daraus folgt

$$x_1x_3 = \frac{x_2x_3x_3}{x_4} = x_2^2 \implies f_1(x) = 0.$$

Definieren wir also  $U_4 := \{x \in \mathbb{R}^4 : x_4 \neq 0\}$ , so gilt

$$M \cap U_4 = \{x \in U_4 : f_2(x) = f_3(x) = 0\}.$$

Die Gradienten

$$\operatorname{grad} f_2(x) = (0, x_4, -2x_3, x_2) \quad \text{und} \quad \operatorname{grad} f_3(x) = (x_4, -x_3, -x_2, x_1)$$

sind wegen

$$\det \begin{pmatrix} 0 & x_4 \\ x_4 & -x_3 \end{pmatrix} = -x_4^2 \neq 0$$

linear unabhängig und daher  $M$  in einer Umgebung von  $x$  eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit, q.e.d.

**Aufgabe 9 C.** Um weniger Indizes schreiben zu müssen, bezeichnen wir die drei Spalten der Matrix  $X$  mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Matrix  $X = (x, y, z)$  zu  $O(3)$  gehört, sind dann die 6 Gleichungen

$$\|x\|^2 = 1, \quad \|y\|^2 = 1, \quad \|z\|^2 = 1, \quad \langle x, y \rangle = 0, \quad \langle x, z \rangle = 0, \quad \langle y, z \rangle = 0,$$

wobei  $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ,  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ , usw. Um zu zeigen, dass  $O(3)$  eine dreidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^9$  bildet, müssen wir die Gradienten dieser Funktionen in bezug auf die 9 Koordinaten

$$(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^9$$

bilden. Z.B. ergibt sich für die erste Funktion  $F_1(x, y, z) := \|x\|^2 - 1$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_i} = 2x_i, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z_i} = 0.$$

Schreibt man alle Gradienten als Zeilen einer  $6 \times 9$ -Matrix, so erhält man

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2z_1 & 2z_2 & 2z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 & z_2 & z_3 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

Es ist zu zeigen, dass der Rang dieser Matrix in jedem Punkt  $X \in O(3)$  den Wert 6 hat. Dazu multiplizieren wir die ersten drei Zeilen der Matrix mit  $1/2$  und permutieren die Zeilen zu

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 & z_2 & z_3 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$



Seien  $a_1, \dots, a_6$  die Zeilen dieser Matrix und seien  $\lambda_i$  irgend welche reelle Zahlen mit

$$\sum_{i=1}^6 \lambda_i a_i = 0.$$

Betrachten wir nur die ersten drei Komponenten dieser Gleichung, so ergibt sich  $\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0$ . Da aber  $x, y, z$  in  $\mathbb{R}^3$  linear unabhängig sind, folgt  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Jetzt betrachten wir die Komponenten 4 bis 6 und erhalten  $\lambda_4 y + \lambda_5 z = 0$ , also  $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$ . Jetzt bleibt nur noch die Gleichung  $\lambda_6 z = 0$  übrig, woraus folgt  $\lambda_6 = 0$ . Damit haben wir bewiesen, dass die Zeilen  $(a_1, \dots, a_6)$  der Matrix linear unabhängig sind. Also hat die Matrix den Rang 6, q.e.d.

### Aufgabe 9 D.

- a) Bestimmung der lokalen Extrema von  $f$  im Inneren von  $K$ , d.h. in

$$\overset{\circ}{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} :$$

$f$  ist in  $\mathbb{R}^2$  beliebig oft stetig partiell differenzierbar mit

$$\nabla f(x, y) = (8x - 3y, -3x),$$

daher ist nach An. 2, §7, Satz 3, *notwendig* für das Vorliegen eines lokalen Extremum von  $f$  in  $(x, y) \in \overset{\circ}{K}$ :

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff (8x - 3y, -3x) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0).$$

Ein hinreichendes Kriterium gibt An. 2, §7, Satz 4, an. Es gilt

$$(\text{Hess } f)(x, y) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = (\text{Hess } f)(0, 0).$$

$(\text{Hess } f)(0, 0)$  ist aber indefinit, denn

$$\begin{vmatrix} 8-t & -3 \\ -3 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 8t - 9 = 0 \iff t = -1 \vee t = 9$$

$((\text{Hess } f)(0, 0))$  hat einen positiven und einen negativen Eigenwert).  $f$  besitzt also keine lokalen Extrema in  $\overset{\circ}{K}$ .

b) Bestimmung der lokalen Extrema von  $f$  auf dem Rand von  $K$ , d.h. auf

$$\partial K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Man bestimmt also die Extrema von  $f$  unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Dazu ist nach An. 2, §9, Satz 4, *notwendig*:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \lambda \nabla g(x, y) \\ \iff (8x - 3y, -3x) &= \lambda(2x, 2y) \\ \iff (8x - 3y = 2\lambda x) \wedge (-3x &= 2\lambda y) \\ \iff ((8 - 2\lambda)x - 3y = 0) \wedge (x &= -\frac{2}{3}\lambda y) \\ \iff ((8 - 2\lambda)(-\frac{2}{3}\lambda y) - 3y = 0) \wedge (x &= -\frac{2}{3}\lambda y) \\ \iff ((\frac{4}{3}\lambda^2 - \frac{16}{3}\lambda - 3)y = 0) \wedge (x &= -\frac{2}{3}\lambda y) \\ \iff ((\frac{4}{3}\lambda^2 - \frac{16}{3}\lambda - 3 = 0) \vee (y = 0)) \wedge (x &= -\frac{2}{3}\lambda y) \end{aligned}$$

I.)  $y = 0$  : Dann ist auch  $x = 0$ . Da aber  $g(0, 0) \neq 0$  ist dieser Fall für uns belanglos.

II.)  $y \neq 0$  :

$$\frac{4}{3}\lambda^2 - \frac{16}{3}\lambda - 3 = 0 \iff \left(\lambda = -\frac{1}{2}\right) \vee \left(\lambda = \frac{9}{2}\right).$$

Also nur Punkte der folgenden Form können Extrema sein:

$$\left(\frac{1}{3}y, y\right) \quad \text{bzw.} \quad (-3y, y).$$

Nun gilt weiter:

$$g\left(\frac{1}{3}y, y\right) = \frac{10}{9}y^2 - 1 = 0 \iff \left(y = -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \vee \left(y = \frac{3}{\sqrt{10}}\right),$$

$$g(-3y, y) = 10y^2 - 1 = 0 \iff \left(y = -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \vee \left(y = \frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

Also nur die vier folgenden Punkte können Extrema sein

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

Durch Einsetzen der Punkte in  $f$  erhält man:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) &= f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{1}{2}, \\ f\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) &= f\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Da  $\partial K$  kompakt und  $f$  stetig ist, nimmt  $f$  nach An. 2, §3, Satz 7, auf  $\partial K$  Minimum und Maximum an. Da in  $\overset{\circ}{K}$  keine Extrema liegen, gilt:

$$\text{Minima von } f \text{ auf } K : \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \text{ und } \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right),$$

$$\text{Maxima von } f \text{ auf } K : \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \text{ und } \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

## §10. Integrale, die von einem Parameter abhängen

**Aufgabe 10 A.** Da  $f: [0, x] \times [\frac{1}{2}, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(t, y) := e^{-ty}$  eine stetige, nach der zweiten Variablen beliebig oft stetig partiell differenzierbare Funktion ist, lässt sich auf das Integral

$$F(y) = \int_0^x f(t, y) dt$$

$n$ -mal An. 2, §10, Satz 2, anwenden, und man erhält

$$F^{(n)}(y) = \int_0^x \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(t, y) dt = \int_0^x (-t)^n \cdot e^{-ty} dt$$

und somit

$$\int_0^x t^n \cdot e^{-t} dt = (-1)^n F^{(n)}(1).$$

Andrerseits lässt sich das Integral direkt berechnen:

$$F(y) = \int_0^x e^{-ty} dt = -\frac{1}{y} e^{-ty} \Big|_{t=0}^{t=x} = -\frac{e^{-xy} - 1}{y}.$$

Es müssen noch die Ableitungen von  $F$  berechnet werden.

*Behauptung.* Es gilt für alle  $n \geq 0$

$$F^{(n)}(y) = \frac{(-1)^n n!}{y^{n+1}} \left( 1 - e^{-xy} \sum_{k=0}^n \frac{(xy)^k}{k!} \right) \quad \text{für alle } y \in [\tfrac{1}{2}, 2].$$

Dies beweisen wir durch vollständige Induktion über  $n$ .

Der Induktionsanfang  $n = 0$  ist klar.

Induktionsschritt  $n \rightarrow (n+1)$ .

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( F^{(n)}(y) \right) \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{=} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{(-1)^n n!}{y^{n+1}} \left( 1 - e^{-xy} \sum_{k=0}^n \frac{(xy)^k}{k!} \right) \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{y^{n+2}} \left( 1 - e^{-xy} \sum_{k=0}^n \frac{(xy)^k}{k!} \right) \\ &\quad + \frac{(-1)^n n!}{y^{n+1}} \left( x e^{-xy} \sum_{k=0}^n \frac{(xy)^k}{k!} - e^{-xy} \sum_{k=1}^n \frac{k(xy)^{k-1} x}{k!} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{y^{n+2}} (1 - e^{-xy} \Theta(y)), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \Theta(y) &= \sum_{k=0}^n \frac{(xy)^k}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{(xy)^{k+1}}{k!(n+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{(xy)^k}{(k-1)!(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(xy)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(xy)^k}{(k-1)!(n+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{(xy)^k}{(k-1)!(n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \frac{(xy)^k}{k!} + \frac{(xy)^{n+1}}{n!(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(xy)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Somit gilt insbesondere

$$F^{(n)}(1) = (-1)^n n! \left( 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right)$$

und damit

$$\int_0^x t^n \cdot e^{-t} dt = n! \left( 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right).$$

**Aufgabe 10 B.** a) Als Partialbruch-Zerlegung erhält man

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{1}{1+y^2} \left( \frac{y+x}{1+x^2} - \frac{y}{1+xy} \right).$$

Daraus ergibt sich mit den Integrations-Techniken aus der Analysis 1

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x dx}{(1+x^2)(1+xy)} &= \frac{1}{1+y^2} \left( y \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{y dx}{1+xy} \right) \\
&= \frac{1}{1+y^2} \left[ y \arctan x + \frac{1}{2} \log(1+x^2) - \log(1+xy) \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{1+y^2} \left( y \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2} - \log(1+y) \right).
\end{aligned}$$

b) Nach An. 2, §10, Satz 2, ist

$$F'(y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\log(1+xy)}{1+x^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dx.$$

Nach Teil a) ist deshalb

$$F'(y) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{y}{1+y^2} + \frac{\log 2}{2} \cdot \frac{1}{1+y^2} - \frac{\log(1+y)}{1+y^2}.$$

Wegen  $F(0) = 0$  folgt daraus

$$\begin{aligned} Z = F(1) &= \int_0^1 F'(y) dy \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{y dy}{1+y^2} + \frac{\log 2}{2} \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} - \int_0^1 \frac{\log(1+y)}{1+y^2} dy \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 2}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - Z, \end{aligned}$$

und nach Addition von  $Z$  auf beiden Seiten,  $2Z = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\log 2}{2}$ , d.h.

$$Z = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \log 2, \quad \text{q.e.d.}$$

Wir geben noch einen zweiten Beweis der Formel  $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \log 2$ , den wir einer Mitteilung von Herrn Sven Krempe verdanken. Dieser Beweis verläuft ganz im Rahmen der Analysis einer Veränderlichen.

Mit der Substitution

$$x = \tan t, \quad t = \arctan x, \quad dt = \frac{dx}{1+x^2}$$

wird

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan t) dt.$$

Wir formen nun den Ausdruck  $1 + \tan t$  um.

$$1 + \tan t = 1 + \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t}.$$

Nun ist

$$\sin t + \cos t = \sqrt{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right),$$

denn aus dem Additionstheorem für den Cosinus folgt

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos t \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin t \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t + \sin t).$$

Damit hat man folgende Produktzerlegung von  $1 + \tan t$

$$1 + \tan t = \sqrt{2} \cdot \frac{\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}$$

und man erhält

$$\begin{aligned} Z &= \int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan t) dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \log(\sqrt{2}) dt + \int_0^{\pi/4} \log\left(\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right) dt - \int_0^{\pi/4} \log(\cos t) dt. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Integrale sind aber gleich, wie man durch die Substitution  $t \mapsto \frac{\pi}{4} - t$  erkennt. Daher ist

$$Z = \int_0^{\pi/4} \log(\sqrt{2}) dt = \frac{\pi}{8} \log 2, \quad \text{q.e.d.}$$

**Aufgabe 10 C.** Es sei  $G : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$  mit

$$G(y, z) := \int_a^z f(x, y) dx.$$

Nach An. 2, §10, Satz 2, ist  $G$  nach  $y$  stetig partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial G}{\partial y}(y, z) = \int_a^z \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx = \int_a^z D_2 f(x, y) dx.$$

Nach An. 1, §19, Satz 1, ist  $G$  nach  $z$  stetig partiell differenzierbar (da  $f$  stetig ist), und es gilt:

$$\frac{\partial G}{\partial z}(y, z) = f(z, y).$$

Also ist  $G$  stetig partiell differenzierbar. Definiere nun  $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  durch  $\varphi(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y)) := (y, y)$ . Dann ist  $F = G \circ \varphi$ , und man schließt mit Hilfe der Kettenregel nun folgendermaßen:

$$\begin{aligned} F'(y) &= \frac{d}{dy} G(\varphi_1(y), \varphi_2(y)) \\ &= \frac{\partial G}{\partial y}(\varphi_1(y), \varphi_2(y)) \varphi'_1(y) + \frac{\partial G}{\partial z}(\varphi_1(y), \varphi_2(y)) \varphi'_2(y) \\ &= \int_a^y D_2 f(x, y) dx + f(y, y), \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

**Aufgabe 10 D.** Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  erhalten wir unter Benutzung der Quotientenregel:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{3x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^3},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} g(0, h) = 0.$$

Also gilt für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$D_2 g(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^3}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Für  $y \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_0^1 g(x, y) dx = \int_0^1 \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^2} dx = \left( -\frac{y^3}{2(x^2 + y^2)} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{y^3}{2y^2} - \frac{y^3}{2(1 + y^2)} = \frac{y}{2(1 + y^2)}, \\ f(0) &= \int_0^1 g(x, 0) dx = \int_0^1 0 dx = 0, \end{aligned}$$

also

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{2(y^2 + 1)}, & \text{falls } y \neq 0 \\ 0, & \text{falls } y = 0 \end{cases}.$$

Für  $y \neq 0$  ist  $f$  trivialerweise differenzierbar, für  $y = 0$  erhält man für  $f'$ :

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2(h^2 + 1)} = \frac{1}{2}.$$

Für  $y \neq 0$  ist  $f^*$  differenzierbar, denn

$$f^*(y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) dx = \int_0^1 \frac{3x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^3} dx$$



existiert, da der Integrand stetig ist (rationale Funktion, die in ganz  $[0, 1]$  definiert ist). Damit ist

$$f^*(0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} g(x, 0) dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

und folglich

$$\frac{1}{2} = f'(0) \neq f^*(0) = 0.$$

**Aufgabe 10 E.** Aus Symmetriegründen ist

$$V = 8 \int_0^r \int_0^r \int_0^r f(x) dx_1 dx_2 dx_3.$$

1) Wir berechnen zuerst für festes  $(x_2, x_3) \in [0, r]^2$  das innerste Integral

$$F_1(x_2, x_3) := \int_0^r f(x_1, x_2, x_3) dx_1.$$

Falls  $x_2^2 + x_3^2 > r^2$  ist  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  für alle  $x_1 \in [0, r]$ , also  $F_1(x_2, x_3) = 0$ ; für  $x_2^2 + x_3^2 \leq r^2$  ist

$$F_1(x_2, x_3) = \int_0^{\rho_1} \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} dx_1 \quad \text{mit } \rho_1 := \sqrt{r^2 - x_2^2 - x_3^2}.$$

Damit wird

$$F_1(x_2, x_3) = \int_0^{\rho_1} \sqrt{\rho_1^2 - x_1^2} dx_1 = \rho_1^2 \frac{\pi}{4} = (r^2 - x_2^2 - x_3^2) \frac{\pi}{4},$$

vgl. An. 2, Beispiel (10.2).

2) Bei festgehaltenem  $x_3 \in [0, r]$  wird nun das Integral

$$F_2(x_3) := \int_0^r F_1(x_2, x_3) dx_2$$

berechnet. Wir erhalten mit  $\rho_2 := \sqrt{r^2 - x_3^2}$

$$F_2(x_3) = \frac{\pi}{4} \int_0^{\rho_2} (\rho_2^2 - x_2^2) dx_2 = \frac{\pi}{4} (\rho_2^3 - \frac{1}{3} \rho_2^3) = \frac{\pi}{6} \rho_2^3 = \frac{\pi}{6} (r^2 - x_3^2)^{3/2}.$$

3) Das gesuchte dreifache Integral wird schließlich

$$\begin{aligned}
 V &= 8 \int_0^r F_2(x_3) dx_3 = \frac{4\pi}{3} \int_0^r (r^2 - x_3^2)^{3/2} dx_3 = \quad [\text{Subst. } x_3 = r\xi] \\
 &= \frac{4\pi}{3} r^4 \int_0^1 (1 - \xi^2)^{3/2} d\xi = \quad [\text{Subst. } \xi = \sin t] \\
 &= \frac{4\pi}{3} r^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt
 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
 \cos^4 t &= \frac{1}{16} (e^{it} + e^{-it})^4 \\
 &= \frac{1}{16} (e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{-4it}) \\
 &= \frac{1}{16} (2\cos 4t + 8\cos 2t + 6) \\
 &= \frac{1}{8} \cos 4t + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{3}{8}.
 \end{aligned}$$

Wegen

$$\int_0^{\pi/2} \cos 4t dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos u du = 0$$

und

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos u du = 0$$

wird

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{3}{8} \int_0^{\pi/2} dt = \frac{3\pi}{16},$$

also

$$V = \frac{\pi^2}{4} r^4.$$

Somit ist das Volumen der 4-dimensionalen Kugel

$$K_4(r) = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| \leq r\}$$

vom Radius  $r$  gleich

$$\text{Vol}(K_4(r)) = \frac{\pi^2 r^4}{2}.$$

## §11. Elementare Lösungsmethoden

### Aufgabe 11 A.

a) Zu einem vorgegebenen Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  sei

$$c := \frac{y}{x^2}.$$

Die Parabel

$$P_c : y = cx^2$$

geht dann durch den Punkt  $(x, y)$  und hat dort die Steigung

$$y' = 2cx = \frac{2y}{x}.$$

Deshalb ist die gesuchte Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) = \frac{2y}{x}.$$

Man überzeugt sich durch Einsetzen, dass die Parabeln  $P_c$  die Differentialgleichung lösen.

b) Die zu  $f(x, y)$  orthogonale Steigung ist

$$g(x, y) = -\frac{1}{f(x, y)} = -\frac{x}{2y}.$$

Die Differentialgleichung der Orthogonal-Trajektorien lautet daher

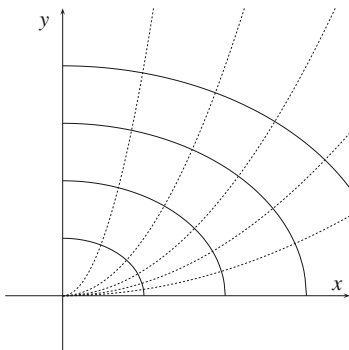
$$y' = -\frac{x}{2y}.$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Eine Lösung durch den Punkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} 2y dy &= -x dx, \\ \int_{y_0}^y 2\eta d\eta &= - \int_{x_0}^x \xi d\xi, \\ y^2 - y_0^2 &= \frac{1}{2}(-x^2 + x_0^2), \end{aligned}$$

also

$$y = \sqrt{c - \frac{1}{2}x^2} \quad \text{mit } c = y_0^2 + \frac{1}{2}x_0^2$$

**Bild 6**

Diese Lösungen sind definiert für  $0 < x < \sqrt{2c}$  und stellen Ellipsenviertelbögen dar, die die Parabeln  $P_c$  senkrecht schneiden, siehe Bild 6.

**Aufgabe 11 B.**

a) Wir definieren  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x) := \cos x, \quad g(y) := e^y,$$

dann sind  $f$  und  $g$  stetig, und es gilt  $g(y) \neq 0$  für alle  $y \in \mathbb{R}$ . Die Differentialgleichung  $y' = e^y \cos x$  lässt sich unter Verwendung der Bezeichnungen von An. 2, §11, Satz 1, wie folgt lösen. Es gilt für  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x \cos t dt = \sin x - \sin x_0,$$

$$G(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt = \int_{y_0}^y e^{-t} dt = e^{-y_0} - e^{-y}.$$

Da  $G(\mathbb{R}) = ]-\infty, e^{-y_0}[$ , sei  $I' \subset \mathbb{R}$  ein Intervall mit  $x_0 \in I'$  und  $F(I') \subset ]-\infty, e^{-y_0}[$ , d.h.

$$I' \subset \{x \in \mathbb{R} : \sin x < e^{-y_0} + \sin x_0\},$$

dann gilt für die Lösung  $\varphi : I' \longrightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi(x_0) = y_0$ :

$$\begin{aligned} G(\varphi(x)) &= F(x) \\ \iff e^{-y_0} - e^{-\varphi(x)} &= \sin x - \sin x_0 \\ \iff e^{-\varphi(x)} &= e^{-y_0} + \sin x_0 - \sin x \\ \iff \varphi(x) &= -\log(e^{-y_0} + \sin x_0 - \sin x) \end{aligned}$$

für alle  $x \in I'$ .

b) Löst man analog wie a). Man erhält für die Lösung  $\varphi : I' \longrightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung mit  $\varphi(x_0) = y_0$

$$\varphi(x) = \sin(x - x_0 + \arcsin y_0),$$

wobei  $I'$  ein Intervall mit  $x_0 \in I$  und

$$I' \subset \left] -\frac{\pi}{2} - \arcsin y_0 + x_0, \frac{\pi}{2} - \arcsin y_0 + x_0 \right[.$$

c) Löst man analog wie a). Man erhält für die Lösung  $\varphi : I' \longrightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung mit  $\varphi(x_0) = y_0$

$$\varphi(x) = \sqrt{y_0^2 - 2(x_0 - x)\sqrt{1 - y_0^2} - (x_0 - x)^2},$$

wobei  $I'$  ein Intervall mit  $x_0 \in I$  und

$$I' \subset \left] \sqrt{1 - y_0^2} - 1 + x_0, \sqrt{1 - y_0^2} + x_0 \right[.$$

d) Die Gleichung

$$y' = (a^2 + x^2) \cdot (b^2 + y^2)$$

ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Die Lösung lässt sich mittels An. 2, §11, Satz 1, leicht bestimmen. Dazu definieren wir

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f(x) := a^2 + x^2 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ g(y) := b^2 + y^2. \end{cases}$$

Dann ist  $g(y) \neq 0$  für alle  $y \in \mathbb{R}$  und für  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erhält man

$$\begin{aligned} F(x) &:= \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x (a^2 + t^2) dt \\ &= a^2 x + \frac{x^3}{3} - a^2 x_0 - \frac{x_0^3}{3}, \\ G(y) &:= \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt = \int_{y_0}^y \frac{1}{b^2 + t^2} dt = \left( \frac{1}{b} \arctan \frac{t}{b} \right) \Big|_{y_0}^y \\ &= \frac{1}{b} \left( \arctan \frac{y}{b} - \arctan \frac{y_0}{b} \right). \end{aligned}$$

Für die Lösung  $\varphi$  der obigen Differentialgleichung gilt dann

$$\begin{aligned} G(\varphi(x)) &= F(x) \\ \iff \frac{1}{b} \left( \arctan \frac{\varphi(x)}{b} - \arctan \frac{y_0}{b} \right) &= a^2 x + \frac{x^3}{3} - a^2 x_0 - \frac{x_0^3}{3} \\ \iff \arctan \frac{\varphi(x)}{b} &= a^2 b x + \frac{bx^3}{3} - a^2 b x_0 - \frac{bx_0^3}{3} + \arctan \frac{y_0}{b} \\ \iff \varphi(x) &= b \tan \left( a^2 b x + \frac{bx^3}{3} - a^2 b x_0 - \frac{bx_0^3}{3} + \arctan \frac{y_0}{b} \right) \end{aligned}$$

für alle  $x$  aus einer kleinen Umgebung um  $x_0$ .

e) Die Differentialgleichung lässt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$y' = \frac{xy - 1}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2} y + \frac{-1}{1 - x^2},$$

da  $x \in ]-1, 1[$  ist. Wir definieren nun

$$\begin{cases} a : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, \\ a(x) := \frac{x}{1 - x^2} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} b : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, \\ b(x) := \frac{-1}{1 - x^2}, \end{cases}$$

dann sind  $a$  und  $b$  stetig und die obige Differentialgleichung lässt sich dann unter Verwendung der Bezeichnungen von An. 2, §11, Satz 3, wie

folgt lösen. Man erhält für  $\varphi : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \exp \left( \int_{x_0}^x a(t) dt \right) \\
 &= \exp \left( \int_{x_0}^x \frac{t}{1-t^2} dt \right) \\
 &= \exp \left( -\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{-2t}{1-t^2} dt \right) \\
 &= \exp \left( -\frac{1}{2} (\log(1-t^2)) \Big|_{x_0}^x \right) \\
 &= \exp \left( \log \sqrt{1-x_0^2} - \log \sqrt{1-x^2} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{\sqrt{1-x^2}}.
 \end{aligned}$$

Somit gilt für die Lösung  $\psi : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  der obigen Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung  $\psi(x_0) = y_0$

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= \varphi(x) \left( y_0 + \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt \right) \\
 &= \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{\sqrt{1-x^2}} \left( y_0 + \int_{x_0}^x \frac{-\sqrt{1-t^2}}{(1-t^2)\sqrt{1-x_0^2}} dt \right) \\
 &= \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{\sqrt{1-x^2}} \left( y_0 - \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} \int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) \\
 &= \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{\sqrt{1-x^2}} \left( y_0 - \frac{\arcsin x - \arcsin x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} \right).
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 11 C.**

a) Durch die Substitution  $z := x + y$  geht die Differentialgleichung

$$y' = (x + y)^2$$

über in

$$z' = 1 + y' = 1 + z^2.$$

Diese Differentialgleichung lässt sich nun mit An. 2, §11, Satz 1, lösen. Dazu definieren wir  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x) := 1, \quad g(z) := 1 + z^2,$$

dann sind  $f$  und  $g$  stetig und es gilt  $g(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{R}$ . Die Differentialgleichung  $z' = 1 + z^2$  lässt sich dann unter Verwendung der Bezeichnungen von An. 2, §11, Satz 1, wie folgt lösen. Es gilt für  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x 1 dt = x - x_0,$$

$$G(y) := \int_{z_0}^y \frac{1}{g(t)} dt = \int_{z_0}^y \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan z - \arctan z_0.$$

Dann gilt für die Lösung  $\phi$  der Differentialgleichung  $z' = 1 + z^2$  mit  $\phi(x_0) = z_0$

$$\begin{aligned} G(\phi(x)) &= F(x) \\ \iff \arctan \phi(x) - \arctan z_0 &= x - x_0 \\ \iff \phi(x) &= \tan(x - x_0 + \arctan z_0) \end{aligned}$$

für alle  $x$  in einer kleinen Umgebung von  $x_0$ . Daher erhält man für die Lösung  $\psi$  der Differentialgleichung  $y' = (x + y)^2$  mit  $\psi(x_0) = y_0$

$$\psi(x) = \tan(x - x_0 + \arctan(x_0 + y_0)) - x,$$

wobei  $\psi$  in einer kleinen Umgebung von  $x_0$  definiert ist.



## b) Die Differentialgleichung

$$(1+x^2)y' + xy - xy^2 = 0 \iff y' = \frac{xy^2 - xy}{1+x^2}$$

geht mit der Substitution  $z = \frac{1}{y}$  über in

$$z' = \frac{-y'}{y^2} = \frac{xz - x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}z + \frac{-x}{1+x^2}.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung. Sie lässt sich nun mittels An. 2, §11, Satz 3, lösen. Dazu definieren wir

$$\left\{ \begin{array}{l} a: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ a(x) := \frac{x}{1+x^2} \end{array} \right. \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} b: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ b(x) := \frac{-x}{1+x^2}, \end{array} \right.$$

Dann sind  $a$  und  $b$  stetige Funktionen und man erhält für  $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  und  $\psi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  aus An. 2, §11, Satz 3:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \exp \left( \int_{x_0}^x a(t) dt \right) = \exp \left( \int_{x_0}^x \frac{t}{1+t^2} dt \right) \\ &= \exp \left( \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{2t}{1+t^2} dt \right) = \exp \left( \frac{1}{2} (\log(1+t^2)) \Big|_{x_0}^x \right) \\ &= \exp \left( \log \sqrt{1+x^2} - \log \sqrt{1+x_0^2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \varphi(x) \left( z_0 + \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt \right) \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}} \left( z_0 + \int_{x_0}^x \frac{-t \sqrt{1+x_0^2}}{(1+t^2) \sqrt{1+t^2}} dt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}} \left( z_0 - \sqrt{1+x_0^2} \int_{x_0}^x \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}} dt \right) \\
&\quad (\text{Substitution: } s := t^2) \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}} \left( z_0 - \frac{\sqrt{1+x_0^2}}{2} \int_{x_0^2}^{x^2} (1+s)^{-\frac{3}{2}} ds \right) \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}} \left( z_0 - \frac{\sqrt{1+x_0^2}}{2} \left[ \frac{(1+s)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right] \Big|_{x_0^2}^{x^2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}} \left( z_0 + \sqrt{1+x_0^2} \left( (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - (1+x_0^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}} \left( z_0 + \frac{\sqrt{1+x_0^2}}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) \\
&= \frac{(z_0 - 1)\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}} + 1.
\end{aligned}$$

Für  $\chi$  erhält man dann, unter Berücksichtigung, dass  $z_0 = \frac{1}{y_0}$  und  $\chi(x) = \frac{1}{\psi(x)}$ ,

$$\chi(x) = \frac{1}{\frac{(\frac{1}{y_0} - 1)\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}} + 1} = \frac{\sqrt{1+x_0^2}}{(\frac{1}{y_0} - 1)\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x_0^2}}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

c) Mit der Substitution  $z = \frac{1}{y^2}$  geht die Differentialgleichung

$$y' + y + (\sin x + e^x)y^3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y' = -y - (\sin x + e^x)y^3$$

über in

$$z' = \frac{-2y'}{y^3} = 2z + 2(\sin x + e^x).$$

Dies ist wieder eine inhomogene lineare Differentialgleichung. Sie lässt sich mittels An. 2, §11, Satz 3, lösen, dazu definieren wir

$$\begin{cases} a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ a(x) := 2 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ b(x) := 2(\sin x + e^x), \end{cases}$$

dann sind  $a$  und  $b$  stetige Funktionen und man erhält für  $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  und  $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  aus An. 2, §11, Satz 3:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right) \\ &= \exp\left(\int_{x_0}^x 2 dt\right) \\ &= e^{2x-2x_0}, \\ \psi(x) &= \varphi(x) \left( z_0 + \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt \right) \\ &= e^{2x-2x_0} \left( z_0 + \int_{x_0}^x \frac{2(\sin t + e^t) e^{2x_0}}{e^{2t}} dt \right) \\ &= z_0 e^{2x-2x_0} + 2e^{2x} \int_{x_0}^x \left( \frac{\sin t}{e^{2t}} + e^{-t} \right) dt \\ &= z_0 e^{2x-2x_0} + 2e^{2x} \left( \int_{x_0}^x \frac{\sin t}{e^{2t}} dt + \int_{x_0}^x e^{-t} dt \right) \\ &= z_0 e^{2x-2x_0} + 2e^{2x} \left( \left[ -\frac{\cos t + 2 \sin t}{5e^{2t}} \right] \Big|_{x_0}^x + \left[ -e^{-t} \right] \Big|_{x_0}^x \right) \\ &= z_0 e^{2x-2x_0} - \frac{2}{5} (\cos x + 2 \sin x) \\ &\quad + \frac{2}{5} e^{2x-2x_0} (\cos x_0 + 2 \sin x_0) - 2e^x + 2e^{2x-x_0}, \end{aligned}$$

unter Verwendung von

$$\int \frac{\sin t}{e^{2t}} dt = \int \underbrace{\sin t}_{=: f'} \underbrace{\frac{1}{e^{2t}}}_{=: g} dt$$

$$\begin{aligned}
& \text{(partielle Integration)} \\
&= \frac{-\cos t}{e^{2t}} - \int \frac{2\cos t}{e^{2t}} dt \\
&= \frac{-\cos t}{e^{2t}} - 2 \int \underbrace{\cos t}_{=:f'} \underbrace{\frac{1}{e^{2t}}}_{=:g} dt \\
& \text{(partielle Integration)} \\
&= \frac{-\cos t}{e^{2t}} - 2 \left( \frac{\sin t}{e^{2t}} + 2 \int \frac{\sin t}{e^{2t}} dt \right) \\
&= \frac{-\cos t - 2\sin t}{e^{2t}} - 4 \int \frac{\sin t}{e^{2t}} dt \\
&\Rightarrow \int \frac{\sin t}{e^{2t}} dt = \frac{-\cos t - 2\sin t}{5e^{2t}}.
\end{aligned}$$

Ist  $\chi$  die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung, so erhält man dann also wegen  $z = \frac{1}{y^2}$  mit  $z_0 := \frac{1}{y_0^2}$ :

$$\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{\Psi(x)}}.$$

### Aufgabe 11 D.

c) Da

$$y' = \frac{x+y}{x+2y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1+2\frac{y}{x}} =: f\left(\frac{y}{x}\right), \quad f(z) = \frac{1+z}{1+2z} \quad (1)$$

und  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, genügt es nach An. 2, §11, Satz 4, die Lösung(en) der folgenden Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z) = \frac{1}{x} \left( \frac{1+z}{1+2z} - z \right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1-2z^2}{1+2z}, \quad (2)$$

zu bestimmen, wobei  $x, z \in \mathbb{R}_+^*$ . Um die Lösung  $\psi$  von (2) unter der Anfangsbedingung  $\psi(x_0) = \frac{y_0}{x_0} =: z_0; x_0, y_0 \in \mathbb{R}_+^*$  zu bestimmen, nehmen wir folgende Fallunterscheidung vor:

- I)  $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ : Dann ist die konstante Funktion  $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  für alle  $x \in \mathbb{R}_+^*$  trivialerweise eine Lösung von (2). Zur Eindeutigkeit vgl. Aufgabe 12A.

II)  $\psi(x_0) = z_0 \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ : Wegen der Stetigkeit von  $\psi$  ist dann  $\psi(x) \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$  für alle  $x$  aus einer Umgebung von  $x_0$  und wir können nach An. 2, §11, Satz 1, die Lösung von (2) berechnen. Dazu definieren wir

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f(x) := \frac{1}{x} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} g: J \longrightarrow \mathbb{R}, \\ g(z) := \frac{1-2z^2}{1+2z}, \end{cases}$$

wobei  $J = ]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$  oder  $J = ]\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty[$ , je nachdem ob  $z_0 \in ]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$  oder  $z_0 \in ]\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty[$ . Dann sind  $f$  und  $g$  stetig, und es gilt  $g(z) \neq 0$  für alle  $z \in J$ . Weiter erhalten wir für  $F: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$  und  $G: J \longrightarrow \mathbb{R}$  aus An. 2, §11, Satz 1, Folgendes:

$$\begin{aligned} F(x) &:= \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{1}{t} dt = \log x - \log x_0, \\ G(z) &:= \int_{z_0}^z \frac{1}{g(t)} dt \\ &= \int_{z_0}^z \frac{1+2t}{1-2t^2} dt \\ &= \int_{z_0}^z \frac{1}{1-2t^2} dt + \int_{z_0}^z \frac{2t}{1-2t^2} dt \\ &= \int_{z_0}^z \left( \frac{\frac{1}{2}}{1-\sqrt{2}t} + \frac{\frac{1}{2}}{1+\sqrt{2}t} \right) dt - \frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{-4t}{1-2t^2} dt \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{z_0}^z \left( \frac{-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}t} - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}t} \right) dt \\ &\quad - \frac{1}{2} (\log |1-2t^2|) \Big|_{z_0}^z \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \log |1-\sqrt{2}t| - \log(1+\sqrt{2}t) \right) \Big|_{z_0}^z \\ &\quad - \frac{1}{2} (\log |1-2t^2|) \Big|_{z_0}^z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \log \frac{|1 - \sqrt{2}z|}{1 + \sqrt{2}z} - \log \frac{|1 - \sqrt{2}z_0|}{1 + \sqrt{2}z_0} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \log |1 - 2z^2| + \frac{1}{2} \log |1 - 2z_0^2| \\
&= \log \frac{(1 + \sqrt{2}z)^{\frac{\sqrt{2}}{4}}}{|1 - \sqrt{2}z|^{\frac{\sqrt{2}}{4}}} + \log \frac{|1 - \sqrt{2}z_0|^{\frac{\sqrt{2}}{4}}}{(1 + \sqrt{2}z_0)^{\frac{\sqrt{2}}{4}}} \\
&\quad - \frac{1}{2} \log |1 - 2z^2| + \frac{1}{2} \log |1 - 2z_0^2| \\
&= \log \frac{(1 + \sqrt{2}z)^{\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}}}{|1 - \sqrt{2}z|^{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}} + \log \frac{|1 - \sqrt{2}z_0|^{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}}{(1 + \sqrt{2}z_0)^{\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
G(\psi(x)) &= F(x) \\
\iff \log \frac{(1 + \sqrt{2}\psi(x))^{\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}}}{|1 - \sqrt{2}\psi(x)|^{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}} + \log \frac{|1 - \sqrt{2}z_0|^{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}}{(1 + \sqrt{2}z_0)^{\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}}} &= \log \frac{x}{x_0} \\
\iff \frac{(1 + \sqrt{2}\psi(x))^{\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}}}{|1 - \sqrt{2}\psi(x)|^{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}} &= \frac{x}{x_0} \cdot \frac{(1 + \sqrt{2}z_0)^{\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}}}{|1 - \sqrt{2}z_0|^{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Für die Lösung  $\phi$  von (1) unter der Anfangsbedingung  $\phi(x_0) = y_0$  gilt somit

- I)  $\frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  : Dann ist  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x$  für alle  $x \in \mathbb{R}_+^*$  die Lösung von (1).  
 II)  $\frac{y_0}{x_0} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$  : Mit §11, Satz 4, und den obigen Vorbetrachtungen ist dann die Lösung  $\phi$  von (2) implizit gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\frac{(1 + \sqrt{2}\frac{\phi(x)}{x})^{\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}}}{|1 - \sqrt{2}\frac{\phi(x)}{x}|^{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}} = \frac{x}{x_0} \cdot \frac{(1 + \sqrt{2}\frac{y_0}{x_0})^{\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}}}{|1 - \sqrt{2}\frac{y_0}{x_0}|^{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}} \\
\iff \frac{(x + \sqrt{2}\phi(x))^{\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}}}{|x - \sqrt{2}\phi(x)|^{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}} &= \frac{1}{x_0} \cdot \frac{(1 + \sqrt{2}\frac{y_0}{x_0})^{\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}}}{|1 - \sqrt{2}\frac{y_0}{x_0}|^{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

wobei  $\phi$  in einer kleinen Umgebung um  $x_0$  definiert ist.

## §12. Existenz- und Eindeutigkeitssatz

### Aufgabe 12 A. Die Funktion

$$I \times J \ni (x, y) \mapsto f(x)g(y) \in \mathbb{R}$$

ist nach  $y$  stetig partiell differenzierbar, erfüllt also lokal eine Lipschitz-Bedingung. Daher gilt der Eindeutigkeitssatz (An. 2, §12, Satz 3).

a) Falls  $g(y_0) = 0$ , ist offensichtlich die konstante Funktion  $\varphi(x) = y_0$  eine Lösung der Differentialgleichung  $y' = f(x)g(y)$ , und daher die einzige mit der Anfangsbedingung  $\varphi(x_0) = y_0$ .

b) Ist andererseits  $\psi: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung mit  $\psi(x_1) = y_1$  und  $g(y_1) \neq 0$ , so kann es kein  $x \in I_1$  geben mit  $g(\psi(x)) = 0$ , denn sonst wäre nach a) auch  $g(\psi(\xi)) = 0$  für alle  $\xi \in I_1$ .

### Aufgabe 12 C. Setze

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) := Jy \quad \text{mit } J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit  $y := (y_1, y_2)$  gilt dann

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

$f$  ist stetig und genügt global einer Lipschitz-Bedingung, denn es gilt für alle  $(x, y), (x, \tilde{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  mit  $y := (y_1, y_2)$  und  $\tilde{y} := (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| &= \|(y_2, y_1) - (\tilde{y}_2, \tilde{y}_1)\| \\ &= \sqrt{(\tilde{y}_2 - y_2)^2 + (\tilde{y}_1 - y_1)^2} \\ &= 1 \cdot \|y - \tilde{y}\|. \end{aligned}$$

Also lässt sich das Verfahren von Picard–Lindelöf auf  $y' = f(x, y)$  anwenden. Wir kommen nun zur Berechnung der Lösung  $\varphi$ . Es gilt  $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$  mit

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\ \varphi_{n+1}(x) &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \int_0^x f(t, \varphi_n(t)) dt = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \int_0^x J \varphi_n(t) dt \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Man berechnet

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \int_0^x J \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} dt = (E + Jx) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

wobei  $E$  die zweireihige Einheitsmatrix bezeichnet. Wir zeigen nun durch Induktion nach  $n$ , dass

$$\varphi_n(x) = \left( \sum_{k=0}^n \frac{J^k x^k}{k!} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Die Fälle  $n = 0, 1$  wurden schon gezeigt.

Induktionsschritt  $n \rightarrow n+1$ .

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(x) &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \int_0^x J \left( \sum_{k=0}^n \frac{J^k t^k}{k!} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \left( \sum_{k=0}^n \frac{J^{k+1} x^{k+1}}{(k+1)!} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{n+1} \frac{J^k x^k}{k!} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Nun ist  $J^2 = E$ , also ergibt sich

$$\varphi_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{x^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + J \sum_{k=0}^m \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh x \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh x,$$

erhält man schließlich

$$\varphi(x) = (E \cosh x + J \sinh x) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cosh x + b \sinh x \\ a \sinh x + b \cosh x \end{pmatrix}.$$

Man überzeugt sich durch Einsetzen, dass  $\varphi$  das vorgegebene Differentialgleichungs-System tatsächlich löst und die Anfangsbedingung  $\varphi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  erfüllt.

**Aufgabe 12 D.** Es sei  $\varphi : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , eine Lösung der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  und  $\psi : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\psi(x) := \varphi(-x) \quad \text{für alle } x \in [-r, r].$$



Dann ist auch  $\psi$  eine Lösung der Differentialgleichung, denn

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= (\varphi(-x))' = -\varphi'(-x) = -f(-x, \varphi(-x)) \\ &\stackrel{(\text{Vor.})}{=} f(x, \varphi(-x)) = f(x, \psi(x)).\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist  $f$  stetig und genügt lokal einer Lipschitz-Bedingung. Da  $\psi(0) = \varphi(0)$ , folgt aus dem Eindeigkeitssatz (An. 2, §12, Satz 3), dass  $\psi(x) = \varphi(x)$  für alle  $x \in [-r, r]$ .

**Aufgabe 12 E.** Da  $f$  stetig ist und global einer Lipschitz-Bedingung genügt, genügt  $f$  erst recht lokal einer Lipschitz-Bedingung. Daher gelten die Voraussetzungen von An. 2, §12, Satz 3 (Eindeigkeitssatz) und Satz 4 (Existenzsatz von Picard–Lindelöf). Insbesondere gilt:

$$\begin{cases} \varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n, \text{ wobei } \varphi_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit} \\ \varphi_0(x) := \varphi(a), \\ \varphi_{n+1}(x) := \varphi(a) + \int_a^x f(t, \varphi_n(t)) dt \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n, \text{ wobei } \psi_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit} \\ \psi_0(x) := \psi(a), \\ \psi_{n+1}(x) := \psi(a) + \int_a^x f(t, \psi_n(t)) dt \quad (n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

*Bemerkung.* Falls  $\varphi(a) = \psi(a)$ , ist nach dem Eindeigkeitssatz  $\varphi = \psi$ , und die Behauptung ist trivialerweise erfüllt.

Zunächst beweisen wir durch Induktion, dass

$$\|\varphi_n(x) - \psi_n(x)\| \leq \delta \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(L \cdot |x-a|)^k}{k!}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt ist.

i) Induktionsanfang:  $n = 0$ .

$$\|\varphi_0(x) - \psi_0(x)\| = \|\varphi(a) - \psi(a)\| = \delta \leq \underbrace{\delta \cdot \sum_{k=0}^0 \frac{(L \cdot |x-a|)^k}{k!}}_{=1}.$$

ii) Induktionsschritt :  $n \longrightarrow (n+1)$ .

Es gelte die Behauptung für ein  $n \in \mathbb{N}$ , dann ist zu zeigen, dass sie auch für  $n+1$  gilt, wie man mit Hilfe von An. 2, §6, Hilfssatz, folgendermaßen bestätigt:

$$\begin{aligned}
 & \| \varphi_{n+1}(x) - \psi_{n+1}(x) \| \\
 &= \left\| \varphi(a) + \int_a^x f(t, \varphi_n(t)) dt - \psi(a) - \int_a^x f(t, \psi_n(t)) dt \right\| \\
 &\leq \| \varphi(a) - \psi(a) \| + \left\| \int_a^x (f(t, \varphi_n(t)) - f(t, \psi_n(t))) dt \right\| \\
 &\leq \delta + \int_a^x \| f(t, \varphi_n(t)) - f(t, \psi_n(t)) \| dt \\
 &\leq \delta + \int_a^x L \cdot \| \varphi_n(t) - \psi_n(t) \| dt \\
 &\quad \text{(globale Lipschitz-Bedingung)} \\
 &\leq \delta + \int_a^x L \cdot \delta \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(L \cdot |t-a|)^k}{k!} dt \\
 &\quad \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\
 &= \delta + \sum_{k=0}^n \frac{L^{k+1}}{k!} \cdot \delta \cdot \int_a^x |t-a|^k dt \\
 &= \delta + \sum_{k=0}^n \frac{L^{k+1}}{k!} \cdot \delta \cdot \left( \frac{|t-a|^{k+1}}{(k+1)!} \right) \Big|_a^x \\
 &= \delta + \sum_{k=0}^n \frac{L^{k+1}}{k!} \cdot \delta \cdot \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!} \\
 &= \delta + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{L^k}{k!} \cdot \delta \cdot |x-a|^k \\
 &= \delta \cdot \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(L \cdot |x-a|)^k}{k!}.
 \end{aligned}$$

Nun gilt unter Berücksichtigung der Stetigkeit der Normfunktion:

$$\begin{aligned}
 \|\varphi(x) - \psi(x)\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) \right\| \\
 &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) \right\| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n(x) - \psi_n(x)\| \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \delta \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(L \cdot |x-a|)^k}{k!} \right) \\
 &\leq \delta \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L \cdot |x-a|)^k}{k!} \\
 &= \delta \cdot e^{L \cdot |x-a|},
 \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

### §13. Lineare Differentialgleichungen

**Aufgabe 13 A.** Zunächst zeigen wir, dass

$$\psi = u \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

eine Lösung der Differentialgleichung  $y' = Ay$  ist. Man erhält für  $\psi'$  unter Benutzung der Produktregel

$$\psi' = \begin{pmatrix} u'\varphi_1 + u\varphi_1' \\ u'\varphi_2 + u\varphi_2' + g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}g + u\varphi_1' \\ u\varphi_2' + a_{22}g \end{pmatrix}.$$

Da  $\varphi$  eine Lösung von  $y' = Ay$  ist, gilt

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \varphi' = A\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\varphi_1 + a_{12}\varphi_2 \\ a_{21}\varphi_1 + a_{22}\varphi_2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned}
 A\psi &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u\varphi_1 \\ u\varphi_2 + g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(a_{11}\varphi_1 + a_{12}\varphi_2) + a_{12}g \\ u(a_{21}\varphi_1 + a_{22}\varphi_2) + a_{22}g \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} u\varphi_1' + a_{12}g \\ u\varphi_2' + a_{22}g \end{pmatrix} = \psi'.
 \end{aligned}$$

Also erfüllt auch  $\psi$  die Differentialgleichung  $y' = Ay$ . Da

$$g' = \left( a_{22} - a_{12} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right) g$$

nach An. 2, §11, Satz 2, auf  $J$  eine von der Nullfunktion verschiedene Lösung besitzt, gelte o.B.d.A.  $g(x_0) \neq 0$  in einer Stelle  $x_0 \in J$ . Um die lineare Unabhängigkeit von  $\varphi$  und  $\psi$  zu bestätigen, brauchen wir nach An. 2, §13, Satz 2, nur die lineare Unabhängigkeit an der Stelle  $x_0$  zu beweisen.

*Annahme:*  $\varphi(x_0)$  und  $\psi(x_0)$  sind linear abhängig. Dann gibt es ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) = \lambda \cdot \psi(x_0) &\iff \begin{pmatrix} \varphi_1(x_0) \\ \varphi_2(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u(x_0) \varphi_1(x_0) \\ \lambda u(x_0) \varphi_2(x_0) + \lambda g(x_0) \end{pmatrix} \\ &\iff (\lambda \cdot u(x_0) = 1) \\ &\quad \wedge ((1 - \lambda \cdot u(x_0)) \varphi_2(x_0) = \lambda \cdot g(x_0)) \\ &\implies \lambda \cdot g(x_0) = 0 \\ &\implies \lambda = 0. \end{aligned}$$

Widerspruch, da  $\varphi_1(x_0) \neq 0$  nach Voraussetzung (da  $x_0 \in J$ )!

**Aufgabe 13 B.** Das Differentialgleichungssystem lautet in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{x} \\ 1-x & 1 \end{pmatrix}}_{=: A(x)} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \log x + \frac{1}{x} \\ (x-1) \log x \end{pmatrix}.$$

Zunächst verifizieren wir, dass  $\varphi_1 : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\varphi_1(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$  tatsächlich eine Lösung des homogenen Systems ist:

$$A(x) \cdot \varphi_1(x) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{x} \\ 1-x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}' = \varphi_1(x)'$$

Um eine zweite, von  $\varphi_1$  linear unabhängige Lösung  $\varphi_2 : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  des homogenen Systems zu berechnen, verwenden wir Aufgabe 13 A. Mit den dort verwendeten Bezeichnungen müssen wir differenzierbare Funktionen  $u, g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  finden, die

$$\begin{cases} g' = 0 \cdot g, \\ u' = \frac{1}{x} \cdot g \end{cases}$$

genügen. Offensichtlich sind  $g(x) = 1$  und  $u(x) = \log x$  geeignete Funktionen hierfür. Damit erhält man für  $\varphi_2$ :

$$\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} \log x \\ x \log x + 1 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Also ist  $\Phi := (\varphi_1, \varphi_2)$  ein Fundamentalsystem des homogenen Systems. Im folgenden brauchen wir nur noch eine Lösung des inhomogenen Systems zu finden. Dazu benutzen wir An. 2, §13, Satz 4. Es ergibt sich für  $u: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_1^x \Phi(t)^{-1} b(t) dt \\ &= \int_1^x \begin{pmatrix} 1 & \log t \\ t & t \log t + 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \log t + \frac{1}{t} \\ (t-1) \log t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_1^x \frac{1}{t \log t + 1 - t \log t} \begin{pmatrix} t \log t + 1 & -\log t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log t + \frac{1}{t} \\ (t-1) \log t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_1^x \begin{pmatrix} 2 \log t + (\log t)^2 + \frac{1}{t} \\ -1 - \log t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_1^x \begin{pmatrix} (\log t + t(\log t)^2)' \\ (-t \log t)' \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} \log x + x(\log x)^2 \\ -x \log x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eine Lösung  $\psi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  des inhomogenen Systems ist damit

$$\psi(x) = \Phi(x) \cdot u(x) = \begin{pmatrix} 1 & \log x \\ x & x \log x + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \log x + x(\log x)^2 \\ -x \log x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Menge  $\mathcal{M}$  aller Lösungen des inhomogenen Systems lautet daher

$$\mathcal{M} = \{\psi + \lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

**Aufgabe 13 C.** Für eine Lösung  $\varphi: ]-r, r[ \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

werde definiert

$$\tilde{\varphi}: ]-r, r[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x).$$

Da  $\tilde{\varphi}'(x) = -\varphi(-x)$  und  $\tilde{\varphi}''(x) = \varphi(-x)$ , ist wegen  $a(-x) = -a(x)$  und  $b(-x) = b(x)$  auch  $\tilde{\varphi}$  eine Lösung der Differentialgleichung.

Es gibt eine Lösung  $\varphi$  mit der Anfangsbedingung

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 1.$$

Die Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2$  seien definiert durch

$$\varphi_1 := \frac{1}{2}(\varphi + \tilde{\varphi}), \quad \varphi_2 := \frac{1}{2}(\varphi - \tilde{\varphi}).$$

Dann ist  $\varphi_1$  eine gerade und  $\varphi_2$  eine ungerade Lösung der Differentialgleichung. Da

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= 1, & \varphi_1'(0) &= 0, \\ \varphi_2(0) &= 0, & \varphi_2'(0) &= 1, \end{aligned}$$

sind  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  linear unabhängig, bilden also ein Lösungs-Fundamentalsystem.

### Aufgabe 13 D.

1) Wir beweisen zuerst die Aussage über die Differentiation der Determinante. Sei also  $\Phi(x) = (\varphi_{ij}(x))$  eine  $n \times n$ -Matrix mit differenzierbaren Koeffizienten  $\varphi_{ij}(x)$ . Es gilt

$$\det \Phi(x) = \sum_{\sigma} \varphi_{1,\sigma(1)}(x) \varphi_{2,\sigma(2)}(x) \cdots \varphi_{n,\sigma(n)}(x),$$

wobei über alle Permutationen  $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  summiert wird. Die Differentiation eines einzelnen Summanden ergibt nach der Produktregel

$$\frac{d}{dx} \varphi_{1,\sigma(1)}(x) \cdots \varphi_{n,\sigma(n)}(x) = \sum_{k=1}^n \varphi_{1,\sigma(1)}(x) \cdots \varphi'_{k,\sigma(k)}(x) \cdots \varphi_{n,\sigma(n)}(x),$$

also nach Summation über alle Permutationen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \det \Phi(x) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\sigma} \varphi_{1,\sigma(1)}(x) \cdots \varphi'_{k,\sigma(k)}(x) \cdots \varphi_{n,\sigma(n)}(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \det \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) & \cdots & \varphi_{1n}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi'_{k1}(x) & \cdots & \varphi'_{kn}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \cdots & \varphi_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

2) Wir differenzieren jetzt die Wronski-Determinante  $W$  eines Lösungs-Fundamentalsystems  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  der Differentialgleichung

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_0(x)y = 0.$$

Mit der Bezeichnung  $w(x) := (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$  ist

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} w(x) \\ w'(x) \\ \vdots \\ w^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Nach der gerade bewiesenen Differentiationsregel ist

$$\begin{aligned} W'(x) &= \det \begin{pmatrix} w'(x) \\ w'(x) \\ \vdots \\ w^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} w(x) \\ w''(x) \\ w''(x) \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots \\ &\quad \dots + \det \begin{pmatrix} w(x) \\ \vdots \\ w^{(n-1)}(x) \\ w^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} w(x) \\ \vdots \\ w^{(n-2)}(x) \\ w^{(n)}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alle Summanden der rechten Seite bis auf den letzten bestehen aus einer Determinante mit zwei gleichen Zeilen, sind also gleich null. In der letzten Determinante ersetzen wir die letzte Zeile durch

$$w^{(n)}(x) = -a_{n-1}(x)w^{(n-1)}(x) - a_{n-2}(x)w^{(n-2)}(x) - \dots - a_0(x)w(x)$$

und erhalten

$$W'(x) = \det \begin{pmatrix} w(x) \\ \vdots \\ w^{(n-2)}(x) \\ -a_{n-1}(x)w^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = -a_{n-1}(x)W(x),$$

d.h.  $W'(x) + a_{n-1}(x)W(x) = 0$ , q.e.d..

**Aufgabe 13 E.** Es sei

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine beliebige Lösung der Differentialgleichung  $y' = A(x)y$ . Setze außerdem  $A = (a_{ij})$ , dann ist  $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$  eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Nun beweisen wir induktiv, dass auch  $\varphi$  beliebig oft differenzierbar ist.

i) Induktionsanfang:  $m = 1$ .

Die Existenz von  $\varphi'$  folgt unmittelbar daraus, dass  $\varphi$  eine Lösung der Differentialgleichung  $y' = A(x)y$  ist.

ii) Induktionsschritt:  $(m+1) \rightarrow (m+2)$ .

Es existiere  $\varphi^{(m+1)}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , und damit existieren auch  $\varphi^{(k)}$ , ( $k = 1, \dots, m$ ). Zu zeigen ist nun, dass auch  $\varphi^{(m+2)}$  existiert. Da

$$\varphi' = A\varphi = (a_{ij}) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \varphi_j \right)_{i=1, \dots, n},$$

ist unter Benutzung von An. 1, Aufgabe 15.6 i) (Leibnizsche Formel)

$$\varphi^{(m+1)} = \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a_{ij}^{(m-k)} \varphi_j^{(k)} \right)_{i=1, \dots, n}.$$

Da  $\varphi^{(m+1)}$  existiert, d.h. es existieren  $\varphi_l^{(m+1)}$  für alle  $l \in \{1, \dots, n\}$ , gilt

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a_{ij}^{(m-k)} \varphi_j^{(k)} \right)'_{i=1, \dots, n} \\ &= \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left( a_{ij}^{(m+1-k)} \varphi_j^{(k)} + a_{ij}^{(m-k)} \varphi_j^{(k+1)} \right) \right)_{i=1, \dots, n} \\ &= \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a_{ij}^{(m+1-k)} \varphi_j^{(k)} \right)_{i=1, \dots, n}, \end{aligned}$$

und damit existiert also auch  $\varphi^{(m+2)}$ .



## §14. Differentialgleichungen 2. Ordnung

**Aufgabe 14 A.** Zunächst beweisen wir zwei Lemmata.

**Lemma 1.** Sei  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige, in  $]0, \infty[$  differenzierbare Funktion mit  $f'(x) \geq C$  für alle  $x \in ]0, \infty[$ , wobei  $C > 0$  eine Konstante ist. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$$

*Beweis.* Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es zu jedem  $x \in ]0, \infty[$  ein  $\xi_x \in ]0, x[$  mit

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi_x) \implies f(x) = f(0) + f'(\xi_x) \cdot x \geq f(0) + C \cdot x.$$

Da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(0) + C \cdot x) = +\infty$$

ist Lemma 1 bewiesen. □

**Lemma 2.** Es seien  $r_0 > 0$ ,  $C > 0$  mit  $\frac{1}{C} > r_0$  gegeben. Dann existiert das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_{r_0}^{1/C} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - C}} = \lim_{x \nearrow \frac{1}{C}} \int_{r_0}^x \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - C}}.$$

*Beweis.* Wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $C = 1$  (sonst Subst.  $\tilde{r} = Cr$ ).

Für  $r_0 < x < 1$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^x \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - 1}} &= \int_{r_0}^x \sqrt{\frac{r}{1-r}} dr \\ &= - \left[ \sqrt{r(1-r)} + \arctan \sqrt{\frac{1-r}{r}} \right]_{r_0}^x, \end{aligned}$$

wie man leicht durch Differenzieren bestätigt (vgl. auch [7], Abschnitt 1.1.3.3, Formel 151). Da

$$\lim_{x \nearrow 1} \left( \sqrt{x(1-x)} + \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) = 0,$$

folgt Lemma 2 unmittelbar.  $\square$

Zur Lösung der Differentialgleichung gehen wir nun wie in An. 2, §14, Abschnitt 'Eindimensionale Bewegung' vor:

Setze  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(r) = -\frac{\gamma}{r^2}$ , dann ist  $f$  stetig. Weiter erhalten wir für  $U: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$U(r) = - \int_{r_0}^r f(\xi) d\xi = \gamma \int_{r_0}^r \frac{1}{\xi^2} d\xi = \gamma \left[ -\frac{1}{\xi} \right]_{r_0}^r = \frac{\gamma}{r_0} - \frac{\gamma}{r}.$$

Für die Gesamtenergie  $E$  ergibt sich dann

$$E = \frac{1}{2} \dot{r}(0)^2 + U(r(0)) = \frac{1}{2} v_0^2.$$

Die Bewegung verläuft daher in

$$\begin{aligned} \{r \in \mathbb{R}_+^* \mid U(r) \leq E\} &= \left\{ r \in \mathbb{R}_+^* \mid \frac{\gamma}{r_0} - \frac{\gamma}{r} \leq \frac{1}{2} v_0^2 \right\} \\ &= \left\{ r \in \mathbb{R}_+^* \mid r \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{2\gamma} v_0^2 \right) \leq 1 \right\} \\ &= \begin{cases} \mathbb{R}_+^*, & \text{falls } \theta \leq 0 \\ ]0, \frac{1}{\theta}] , & \text{falls } \theta > 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

wobei  $\theta := \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{2\gamma} v_0^2 \right)$ , vgl. Bild 7

Die zu lösende Differentialgleichung wird

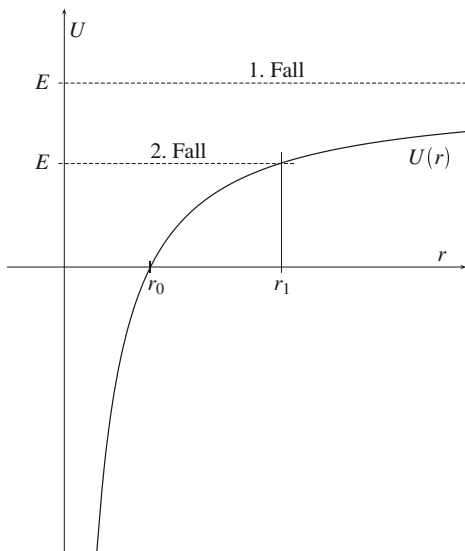
$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = 2(E - U(r)) = \frac{2\gamma}{r} + C$$

mit  $C := v_0^2 - \frac{2\gamma}{r_0}$ . Nun führen wir folgende Fallunterscheidung durch:

1. Fall.  $C > 0$ :

Dann folgt aus Stetigkeitsgründen entweder  $\dot{r}(t) \geq \sqrt{C}$  für alle  $t \in [0, \infty[$  oder  $\dot{r}(t) \leq -\sqrt{C}$  für alle  $t \in [0, \infty[$ . Da aber  $\dot{r}(0) = v_0 > 0$ , gilt  $\dot{r}(t) \geq \sqrt{C}$  für alle  $t \in [0, \infty[$  und somit nach Lemma 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = +\infty.$$

**Bild 7**

2. Fall.  $C < 0$ :

Dann gibt es genau ein  $r_1 > r_0$  mit  $\frac{2\gamma}{r_1} + C = 0$ . Nach Lemma 2 existiert das uneigentliche Riemann-Integral

$$G(r_1) := \int_{r_0}^{r_1} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\gamma}{r} + C}}.$$

Wir setzen  $t_1 := G(r_1)$ . Für  $t \in [0, t_1]$  ist dann  $r$  monoton wachsend und in  $[t_1, \infty[$  monoton fallend, denn

$$\begin{aligned} \ddot{r}(t) &< 0 \text{ für alle } t \in [t_1, \infty[ \\ \implies \dot{r}(t) &< 0 \text{ für alle } t \in ]t_1, \infty[, \text{ da } \dot{r}(t_1) = 0 \\ \implies r &\text{ ist in } [t_1, \infty[ \text{ (streng) monoton fallend.} \end{aligned}$$

Für das gesuchte  $v^* > 0$  erhalten wir also ( $v^*$  ist das  $v_0$ , falls  $C = 0$  ist)

$$(v^*)^2 - \frac{2\gamma}{r_0} = 0 \implies v^* = \sqrt{\frac{2\gamma}{r_0}}.$$

Für die Erdanziehung erhält man wegen  $\gamma = gr_0^2$

$$v^* = \sqrt{2gr_0} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 6370 \cdot 10^3} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \approx 11179 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \approx 11.18 \frac{\text{km}}{\text{sec}}.$$

Zur Lösung der Differentialgleichung lässt sich abschließend Folgendes sagen:  
Mit

$$G(x) := \int_{r_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}}$$

ist die Lösung  $r(t)$  implizit wie folgt gegeben:

Im 1. Fall ist  $G(r(t)) = t$  für alle  $t \in [0, \infty[$ .

Im 2. Fall ist  $G(r(t)) = t$  für alle  $t \in [0, t_1]$  und

$$\int_{r_1}^{r(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} = t_1 - t$$

für alle  $t \in [t_1, \infty[$ .

#### Aufgabe 14 B.

a) Zunächst suchen wir eine Konstante  $\alpha$ , so dass

$$\varphi_1 : ] -\frac{1}{2}, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi_1(x) = e^{\alpha x},$$

eine Lösung der homogenen Gleichung

$$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$$

ist. Setzt man  $y = e^{\alpha x}$  in diese Gleichung ein, erhält man

$$\begin{aligned} & ((2x+1)\alpha^2 + (4x-2)\alpha - 8)e^{\alpha x} = 0 \\ \iff & (2x+1)\alpha^2 + (4x-2)\alpha - 8 = 0 \\ \iff & 2x(\alpha^2 + 2\alpha) + (\alpha^2 - 2\alpha - 8) = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wird erfüllt durch  $\alpha = -2$ . Damit haben wir also mit  $\varphi_1 : ] -\frac{1}{2}, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}, \varphi_1(x) = e^{-2x}$ , eine Lösung der homogenen Gleichung gefunden. Um eine zweite Lösung  $\varphi_2 : ] -\frac{1}{2}, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$  der homogenen Gleichung

zu bestimmen, wenden wir An. 2, §14, Satz 2, an:

$$\begin{aligned}
 u'(x) &= \frac{1}{\varphi_1(x)^2} \exp \left( - \int_0^x \frac{4t-2}{2t+1} dt \right) \\
 &= e^{4x} \exp \left( \int_0^x \left( -2 + \frac{4}{2t+1} \right) dt \right) \\
 &= e^{4x} \exp(-2x + \log(2x+1)^2) \\
 &= (2x+1)^2 e^{2x}.
 \end{aligned}$$

Mittels zweimaliger partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
 \int \underbrace{(2x+1)^2}_{=f} \underbrace{e^{2x}}_{=g'} dx &= \frac{(2x+1)^2}{2} e^{2x} - 2 \int \underbrace{(2x+1)}_{=f} \underbrace{e^{2x}}_{=g'} dx \\
 &= \frac{(2x+1)^2}{2} e^{2x} - 2 \left( \frac{(2x+1)}{2} e^{2x} - \int e^{2x} dx \right) \\
 &= \frac{(2x+1)^2}{2} e^{2x} - (2x+1) e^{2x} + e^{2x} \\
 &= \left( 2x^2 + \frac{1}{2} \right) e^{2x},
 \end{aligned}$$

also

$$u(x) = \left( 2x^2 + \frac{1}{2} \right) e^{2x}$$

und damit ist

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x) \cdot u(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}$$

eine zweite Lösung der homogenen Gleichung. Wir brauchen im Folgenden also nur noch eine Lösung  $\psi: ]-\frac{1}{2}, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  der inhomogenen Gleichung zu bestimmen, dazu führen wir die inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung auf ein System 1. Ordnung zurück (vgl. An. 2, Beweis zu §13, Satz 5). Für dieses System 1. Ordnung erhält man dann

$$\begin{cases} y'_0 = y_1, \\ y'_1 = \frac{8}{2x+1} y_0 - \frac{4x-2}{2x+1} y_1 + \frac{6x^2+x-3}{2x+1} e^x \end{cases}$$

bzw. in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{8}{2x+1} & \frac{2-4x}{2x+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6x^2+x-3}{2x+1} e^x \end{pmatrix}.$$

Ein Lösungs-Fundamentalsystem dafür bildet dann  $\Phi = (\tau_1, \tau_2)$ , wobei die Funktionen  $\tau_1, \tau_2 : ]-\frac{1}{2}, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben sind durch

$$\tau_1(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_1'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -2e^{-2x} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\tau_2(x) = \begin{pmatrix} \varphi_2(x) \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 + \frac{1}{2} \\ 4x \end{pmatrix}.$$

Mit "Variation der Konstanten" lässt sich nun eine Lösung des inhomogenen Systems 1.Ordnung und damit eine Lösung der inhomogenen Gleichung 2.Ordnung berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} \Phi(t)^{-1} &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2t^2 + \frac{1}{2} \\ -2e^{-2t} & 4t \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(4t^2 + 4t + 1)e^{-2t}} \begin{pmatrix} 4t & -2t^2 - \frac{1}{2} \\ 2e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(2t+1)^2} \begin{pmatrix} 4te^{2t} & (-2t^2 - \frac{1}{2})e^{2t} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x \Phi(t)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6t^2+t-3}{2t+1} e^t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^x \begin{pmatrix} \frac{(6t^2+t-3)(-2t^2-\frac{1}{2})e^{3t}}{(2t+1)^3} \\ \frac{6t^2+t-3}{(2t+1)^3} e^t \end{pmatrix} dt \\ &= \left[ \begin{pmatrix} \frac{-12t^3+8t^2+5t-4}{6(2t+1)^2} e^{3t} \\ \frac{3t+2}{(2t+1)^2} e^t \end{pmatrix} \right]_0^x \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{-12x^3 + 8x^2 + 5x - 4}{6(2x+1)^2} e^{3x} + \frac{2}{3} \right) \cdot \left( \frac{3x+2}{(2x+1)^2} e^x - 2 \right).$$

Da nun

$$\Phi(x) \cdot u(x) = \left( \frac{\Psi(x)}{\Psi'(x)} \right),$$

erhält man

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= e^{-2x} \cdot \left( \frac{-12x^3 + 8x^2 + 5x - 4}{6(2x+1)^2} e^{3x} + \frac{2}{3} \right) \\ &\quad + \left( 2x^2 + \frac{1}{2} \right) \cdot \left( \frac{3x+2}{(2x+1)^2} e^x - 2 \right) \\ &= \frac{-12x^3 + 8x^2 + 5x - 4}{6(2x+1)^2} e^x + \frac{2}{3} e^{-2x} \\ &\quad + \frac{(3x+2) \cdot (2x^2 + \frac{1}{2})}{(2x+1)^2} e^x - 4x^2 - 1 \\ &= \frac{3x+1}{3} e^x + \frac{2}{3} e^{-2x} - 4x^2 - 1. \end{aligned}$$

Die Menge  $\mathcal{M}$  aller Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung hat dann nach An. 2, §13, Satz 5, folgende Gestalt:

$$\mathcal{M} = \{ \psi + \lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}.$$

### Aufgabe 14 C.

a) i) Wir zeigen zunächst durch Induktion nach  $n \geq 0$ , dass

$$\left( \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2} = F_n(x) e^{-x^2} \quad (1)$$

mit einem Polynom  $F_n$  vom Grad  $n$ . Der Induktionsanfang  $n = 0$  ist trivial.

Induktionsschritt  $n \rightarrow n+1$ . Wir setzen zur Abkürzung  $D = \frac{d}{dx}$ .

$$\begin{aligned} D^{n+1} e^{-x^2} &= D(D^n e^{-x^2}) = D(F_n(x) e^{-x^2}) \\ &= F_n'(x) e^{-x^2} - F_n(x) \cdot 2x e^{-x^2} \\ &= (-2x F_n(x) + F_n'(x)) e^{-x^2} =: F_{n+1}(x) e^{-x^2}, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Aus (1) folgt nun, dass

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2} = (-1)^n F_n(x)$$

ein Polynom  $n$ -ten Grades ist.

ii) Wir zeigen jetzt, dass  $H_n$  die Hermite'sche Differentialgleichung löst. Es genügt offenbar, die Gleichung

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

für die Funktion  $y = e^{x^2} D^n e^{-x^2}$  nachzuweisen. Es gilt  $e^{-x^2} y = D^n e^{-x^2}$ . Nun ist

$$\begin{aligned} D^2(e^{-x^2} y) &= D^{n+2} e^{-x^2} = D^{n+1}(D e^{-x^2}) \\ &= D^{n+1}(-2x e^{-x^2}) \\ &\stackrel{(*)}{=} -2x D^{n+1} e^{-x^2} - 2(n+1) D^n e^{-x^2} \\ &= -2x D(e^{-x^2} y) - 2(n+1) e^{-x^2} y \\ &= e^{-x^2} (4x^2 y - 2xy' - 2(n+1)y), \end{aligned}$$

wobei an der Stelle  $\stackrel{(*)}{=}$  die Rechenregel

$$D^{n+1}(xf) = x D^{n+1} f + (n+1) D^n f$$

benutzt wurde, die aus der Leibnizschen Formel für die Differentiation eines Produkts folgt. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} D^2(e^{-x^2} y) &= e^{-x^2} y'' + 2(D e^{-x^2}) y' + (D^2 e^{-x^2}) y \\ &= e^{-x^2} (y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y). \end{aligned}$$

Durch Vergleich erhält man

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad \text{q.e.d.}$$

b) Es genügt, Folgendes zu beweisen:

Seien  $n > m \geq 0$  natürliche Zahlen und  $P_m$  ein Polynom vom Grad  $m$ , dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{x^2} D^n e^{-x^2}) P_m(x) e^{-x^2} dx = 0.$$



Dies ist gleichbedeutend mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} (D^n e^{-x^2}) P_m(x) dx = 0.$$

Man beachte, dass der Integrand von der Form  $P_{n+m}(x)e^{-x^2}$  ist, was für  $|x| \rightarrow \infty$  schneller als  $1/|x|^2$  gegen null strebt, das uneigentliche Integral also existiert.

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach  $m$ .

*Induktionsanfang*  $m = 0$ . Dann ist  $P_m(x)$  eine Konstante, die wir o.B.d.A. gleich 1 annehmen dürfen. Wir müssen also zeigen

$$\int_{-\infty}^{\infty} D^n e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R D^n e^{-x^2} dx = 0.$$

Dies sieht man so: Mit partieller Integration erhalten wir

$$\int_{-R}^R D^n e^{-x^2} dx = (D^{n-1} e^{-x^2}) \Big|_{-R}^R \longrightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty.$$

*Induktionsschritt*  $m \rightarrow m+1$ . Sei  $n > m+1$ . Wir wenden wieder partielle Integration an:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R (D^n e^{-x^2}) P_{m+1}(x) dx &= (D^{n-1} e^{-x^2}) P_{m+1}(x) \Big|_{-R}^R \\ &\quad - \int_{-R}^R (D^{n-1} e^{-x^2}) P'_{m+1}(x) dx \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} (D^n e^{-x^2}) P_{m+1}(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} (D^{n-1} e^{-x^2}) P'_{m+1}(x) dx$$

Da  $P'_{m+1}$  ein Polynom vom Grad  $m$  ist, ist das letzte Integral nach Induktionsvoraussetzung gleich 0, q.e.d.

**Aufgabe 14 E.** Setzt man  $z = \sqrt{x}y$ , so gilt

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{2\sqrt{x}}y + \sqrt{x}y', \\ z'' &= \frac{2\sqrt{x}y' - y\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} + \sqrt{x}y'' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{x}}y' - \frac{1}{4x\sqrt{x}}y + \sqrt{xy}'' \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}y' - \frac{1}{4x\sqrt{x}}y + \sqrt{x} \left( -\frac{1}{x}y' - \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y \right) \\
&= -\sqrt{xy} \\
&= -z.
\end{aligned}$$

Für die Differentialgleichung  $z'' + z = 0$  sind

$$\begin{cases} \tau_1 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \tau_1(x) = \cos x \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \tau_2 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \tau_2(x) = \sin x \end{cases}$$

Lösungen, die man direkt ablesen kann. Damit lösen

$$\begin{cases} \varphi_1 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi_1(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \varphi_2 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi_2(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

die Besselsche Differentialgleichung für  $p = \frac{1}{2}$ .

Da die Funktionen  $\sin x$  und  $\cos x$  linear unabhängig sind, sind auch  $\varphi_1(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$  und  $\varphi_2(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$  linear unabhängig, bilden also ein Lösungs-Fundamentalsystem.

#### Aufgabe 14 F.

a) Sei  $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$  beliebig.

i) Es gilt für alle  $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
&(T_{p+1}S_p f)(x) \\
&= \left( -f'(x) + \frac{p}{x}f(x) \right)' + \frac{p+1}{x} \left( -f'(x) + \frac{p}{x}f(x) \right) \\
&= -f''(x) + \frac{p}{x}f'(x) - \frac{p}{x^2}f(x) - \frac{p+1}{x}f'(x) + \frac{p(p+1)}{x^2}f(x) \\
&= - \left( f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) - \frac{p^2}{x^2}f(x) \right) \\
&= f(x) - \left( f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)f(x) \right) \\
&= f(x) - (B_p f)(x)
\end{aligned}$$

und damit  $T_{p+1}S_p f = f - B_p f$ .

ii) Es gilt für alle  $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
 & (S_{p-1}T_p f)(x) \\
 &= - \left( f'(x) + \frac{p}{x} f(x) \right)' + \frac{p-1}{x} \left( f'(x) + \frac{p}{x} f(x) \right) \\
 &= -f''(x) - \frac{p}{x} f'(x) + \frac{p}{x^2} f(x) + \frac{p-1}{x} f'(x) + \frac{p(p-1)}{x^2} f(x) \\
 &= - \left( f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) - \frac{p^2}{x^2} f(x) \right) \\
 &= f(x) - \left( f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + \left( 1 - \frac{p^2}{x^2} \right) f(x) \right) \\
 &= f(x) - (B_p f)(x)
 \end{aligned}$$

und damit  $S_{p-1}T_p f = f - B_p f$ .

iii) Nach i) gilt  $T_p S_{p-1} f = f - B_{p-1} f$  und damit

$$T_p S_{p-1} T_p f = T_p f - B_{p-1} T_p f.$$

Nach ii) gilt dann  $T_p(f - B_p f) = T_p f - B_{p-1} T_p f$  und unter Berücksichtigung der Linearität von  $T_p$  folgt somit

$$T_p f - T_p B_p f = T_p f - B_{p-1} T_p f \iff T_p B_p f = B_{p-1} T_p f.$$

iv) Nach ii) gilt  $S_p T_{p+1} f = f - B_{p+1} f$  und damit

$$S_p T_{p+1}(S_p f) = S_p f - B_{p+1} S_p f.$$

Nach i) gilt dann  $S_p(f - B_p f) = S_p f - B_{p+1} S_p f$  und unter Berücksichtigung der Linearität von  $S_p$  folgt somit

$$S_p f - S_p B_p f = S_p f - B_{p+1} S_p f \iff S_p B_p f = B_{p+1} S_p f.$$

b) i) Es sei  $f \in V_p$  beliebig, dann ist  $T_p f \in V_{p-1}$  und  $S_p f \in V_{p+1}$  zu zeigen. Nach iii) aus Aufgabenteil a) gilt dann unter Berücksichtigung der Linearität von  $T_p$  ( $\implies T_p 0 = 0$ ):

$$\underbrace{T_p B_p f}_{=0} = B_{p-1} T_p f \iff 0 = B_{p-1} T_p f \iff T_p f \in V_{p-1}.$$

Analog zeigt man mit iv) aus Aufgabenteil a) unter Berücksichtigung der Linearität von  $S_p$  ( $\implies S_p 0 = 0$ ):

$$\underbrace{S_p B_p f}_{=0} = B_{p+1} S_p f \iff 0 = B_{p+1} S_p f \iff S_p f \in V_{p+1}.$$

ii) Nach Aufgabenteil i) sind  $S_p : V_p \longrightarrow V_{p+1}$  und  $T_{p+1} : V_{p+1} \longrightarrow V_p$  wohldefiniert und die Linearität folgt unmittelbar aus der Linearität von  $S_p : C^\infty(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$  und  $V_{p+1} : C^\infty(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ . Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass  $S_p : V_p \longrightarrow V_{p+1}$  und  $T_{p+1} : V_{p+1} \longrightarrow V_p$  bijektiv und Umkehrungen voneinander sind. Nach Ergebnissen aus der linearen Algebra (vgl. z.B. [5], Lemma 1.1.7) genügt es,

$$(*) \quad \begin{cases} S_p T_{p+1} f = f \text{ für alle } f \in V_{p+1}, \\ T_{p+1} S_p f = f \text{ für alle } f \in V_p \end{cases}$$

zu verifizieren. Mit i) und ii) aus a) gilt aber

$$S_p T_{p+1} f = f - B_{p+1} f = f \quad \text{für alle } f \in V_{p+1}$$

und

$$T_{p+1} S_p f = f - B_p f = f \quad \text{für alle } f \in V_p,$$

womit  $(*)$  gezeigt ist.

c) Da

$$\begin{cases} \varphi_1 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi_1(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \varphi_2 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi_2(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

nach Aufgabe 14 E Zylinderfunktionen der Ordnung  $p = \frac{1}{2}$  sind, sind nach b)

$$\varphi_3 := S_{\frac{1}{2}} \varphi_1 \quad \text{und} \quad \varphi_4 := S_{\frac{1}{2}} \varphi_2$$

Zylinderfunktionen der Ordnung  $p = \frac{3}{2}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= - \left( \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right)' + \frac{1}{2x} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{2 \sin x - 2x \cos x}{2x\sqrt{x}}, \\ \varphi_4(x) &= - \left( \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \right)' + \frac{1}{2x} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \frac{2x \sin x + 2 \cos x}{2x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Da außerdem, wie man durch Nachrechnen bestätigt,

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_3'(x) & \varphi_4'(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{x} \neq 0$$

gilt, ist

$$\mathcal{M} = \{\lambda \varphi_3 + \mu \varphi_4 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller Zylinderfunktionen der Ordnung  $p = \frac{3}{2}$ .

Die Menge aller Zylinderfunktionen der Ordnung  $p = \frac{5}{2}$  lassen sich analog berechnen. Nach b) sind

$$\varphi_5 := S_{\frac{3}{2}}\varphi_3 \quad \text{und} \quad \varphi_6 := S_{\frac{5}{2}}\varphi_4$$

Zylinderfunktionen der Ordnung  $p = \frac{5}{2}$ .

Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi_5(x) &= -\left(\frac{2\sin x - 2x\cos x}{2x\sqrt{x}}\right)' + \frac{3}{2x} \cdot \frac{2\sin x - 2x\cos x}{2x\sqrt{x}} \\ &= \frac{(3-x^2)\sin x - 3x\cos x}{x^2\sqrt{x}}, \\ \varphi_6(x) &= -\left(\frac{2x\sin x + 2\cos x}{2x\sqrt{x}}\right)' + \frac{3}{2x} \cdot \frac{2x\sin x + 2\cos x}{2x\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x\sin x + (3-x^2)\cos x}{x^2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Da außerdem

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_5(x) & \varphi_6(x) \\ \varphi_5'(x) & \varphi_6'(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{x} \neq 0,$$

ist

$$\mathcal{M} = \{\lambda\varphi_5 + \mu\varphi_6 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller Zylinderfunktionen der Ordnung  $p = \frac{5}{2}$ .

#### Aufgabe 14 G.

a) Wir gehen in mehreren Schritten vor.

Ausgehend von einer Lösung  $u : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  der Besselschen Differentialgleichung

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) + \left(1 + \frac{p^2}{x^2}\right)u(x) = 0$$

definieren wir Funktionen

$$\begin{aligned}w(x) &:= u(\beta x), \\ z(x) &:= w(x^\gamma) = w(\beta x^\gamma), \\ y(x) &:= x^\alpha z(x) = x^\alpha u(\beta x^\gamma).\end{aligned}$$

Ersetzt man in der Besselschen Differentialgleichung  $x$  durch  $\beta x$  und multipliziert die Gleichung mit  $\beta^2$ , erhält man

$$\beta^2 u''(\beta x) + \frac{\beta}{x} u'(\beta x) + \left( \beta^2 + \frac{p^2}{x^2} \right) u(\beta x) = 0$$

Da  $w'(x) = \beta u(\beta x)$  und  $w''(x) = \beta^2 u(\beta x)$ , genügt  $w$  der Differentialgleichung

$$w''(x) + \frac{1}{x} w'(x) + \left( \beta^2 + \frac{p^2}{x^2} \right) w(x) = 0 \quad (1)$$

Ersetzen wir darin  $x$  durch  $x^\gamma$ , so kommt

$$w''(x^\gamma) + \frac{1}{x^\gamma} w'(x^\gamma) + \left( \beta^2 + \frac{p^2}{x^{2\gamma}} \right) w(x^\gamma) = 0 \quad (2)$$

Nun ist  $z'(x) = \gamma x^{\gamma-1} w'(x^\gamma)$  und

$$z''(x) = \gamma x^{\gamma-1} w''(x^\gamma) + \gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} w'(x^\gamma).$$

Darmit ergibt sich aus (2) folgende Differentialgleichung für  $z$

$$z''(x) + \frac{1}{x} z'(x) + \left( (\beta \gamma x^{\gamma-1})^2 - \frac{p^2 \gamma^2}{x^2} \right) z(x) = 0. \quad (3)$$

Schließlich ist  $y(x) = x^\alpha z(x)$ , also

$$\begin{aligned} y'(x) &= x^\alpha \left( z'(x) + \frac{\alpha}{x} z(x) \right), \\ y''(x) &= x^\alpha \left( z''(x) + \frac{2\alpha}{x} z'(x) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2} z(x) \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt als Differentialgleichung für die Funktion  $y$

$$y''(x) + \frac{1-2\alpha}{x} y'(x) + \left( (\beta \gamma x^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - p^2 \gamma^2}{x^2} \right) y(x). \quad (4)$$

Um nun zu zeigen, dass sich jede Lösung  $y$  der Differentialgleichung (4) in der Form  $y(x) = x^\alpha u(\beta x^\gamma)$  darstellen lässt, wobei  $u$  eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung zum Parameter  $p$  ist, genügt es Folgendes zu bestätigen (vgl. An. 2, §13, Satz 5):

Für je zwei linear unabhängige Lösungen  $u_1, u_2$  der Besselschen Differentialgleichung zum Parameter  $p$  sind auch die beiden Funktionen  $y_1, y_2$ , definiert durch  $y_i(x) = x^\alpha u_i(\beta x^\gamma)$ ,  $i = 1, 2$ , linear unabhängig.

Angenommen,  $y_1$  und  $y_2$  wären linear abhängig. Dann gibt es Konstanten  $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ , so dass

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0 \quad \text{für alle } x > 0.$$

Daraus würde folgen

$$\lambda_1 u_1(\beta x^\gamma) + \lambda_2 u_2(\beta x^\gamma) = 0 \quad \text{für alle } x > 0,$$

also auch

$$\lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) = 0 \quad \text{für alle } x > 0,$$

im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von  $u_1$  und  $u_2$ . Also sind  $y_1$  und  $y_2$  linear unabhängig.

b) Man braucht nur die Konstanten aus Teil a) zu berechnen. (Es sei  $x > 0$  für die Differentialgleichungen vorausgesetzt.)

i) Es muss

$$\begin{cases} 1 - 2\alpha = 0 \iff \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}, \\ \alpha^2 - p^2 \gamma^2 = 0, \\ (\beta \gamma x^{\gamma-1})^2 = a^2 x^m \implies \boxed{\gamma = \frac{m+2}{2} \neq 0} \quad \wedge \quad \beta^2 \gamma^2 = a^2 \end{cases}$$

gelten und daher  $\boxed{\beta = \frac{2|a|}{|m+2|} > 0}$  und  $\boxed{p = \frac{1}{m+2}}$  oder

$$p = -\frac{1}{m+2}.$$

Jede Lösung  $y$  der Differentialgleichung lässt sich also als

$$y(x) = \sqrt{x} u \left( \frac{2|a|}{|m+2|} x^{(m+2)/2} \right)$$

schreiben, wobei  $u$  eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung zum Parameter  $\frac{1}{m+2}$  ist.

ii) Es muss

$$\begin{cases} 1 - 2\alpha = 0 \iff \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}, \\ \alpha^2 - p^2 \gamma^2 = -a(a+1), \\ (\beta \gamma x^{\gamma-1})^2 = 1 \implies \boxed{\gamma = 1 \neq 0} \quad \wedge \quad \boxed{\beta = 1 > 0} \end{cases}$$

gelten und daher  $\boxed{p = a + \frac{1}{2}}$  oder  $p = -a - \frac{1}{2}$ .

Jede Lösung  $y$  der Differentialgleichung lässt sich also als

$$y(x) = \sqrt{x}u(x)$$

schreiben, wobei  $u$  eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung zum Parameter  $a + \frac{1}{2}$  ist.

iii) Es muss

$$\begin{cases} 1 - 2\alpha = a \iff \boxed{\alpha = \frac{1-a}{2}}, \\ \alpha^2 - p^2\gamma^2 = 0, \\ (\beta\gamma x^{\gamma-1})^2 = \frac{b^2}{4}x^{-1} \implies \boxed{\gamma = \frac{1}{2} \neq 0} \quad \wedge \quad \boxed{\beta = |b| > 0} \end{cases}$$

gelten und daher  $\boxed{p = 1 - a}$  oder  $p = a - 1$ .

Jede Lösung  $y$  der Differentialgleichung lässt sich also als

$$y(x) = x^{(1-a)/2}u(|b|\sqrt{x})$$

schreiben, wobei  $u$  eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung zum Parameter  $1 - a$  ist.

c) Die Differentialgleichung i) im Ausnahmefall  $m = -2$  lautet:

$$y'' + \frac{a^2}{x^2}y = 0, \quad (a \neq 0, x > 0).$$

Um eine Lösung  $\tau: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$  zu finden setzen wir

$$\tau(x) = x^c, \quad c \in \mathbb{C},$$

an. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tau''(x) + \frac{a^2}{x^2}\tau &= 0 \\ \iff c(c-1)x^{c-2} + \frac{a^2}{x^2}x^c &= 0 \\ \iff (c(c-1) + a^2)x^{c-2} &= 0 \\ \iff c^2 - c + a^2 &= 0 \\ \iff c = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}{2} \quad \vee \quad c = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2}. \end{aligned}$$



Setze

$$\lambda_1 := \frac{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}{2}, \quad \lambda_2 := \frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2}.$$

Nun nehmen wir folgende Fallunterscheidung vor:

I)  $1 - 4a^2 \neq 0$ , d.h.  $a \neq \frac{1}{2}$  und  $a \neq -\frac{1}{2}$ .

Dann bilden  $\varphi_k : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C} \quad (k = 1, 2)$  mit

$$\varphi_1(x) = x^{\lambda_1}, \quad \varphi_2(x) = x^{\lambda_2}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der obigen Differentialgleichung, denn

$$\begin{vmatrix} x^{\lambda_1} & x^{\lambda_2} \\ \lambda_1 x^{\lambda_1-1} & \lambda_2 x^{\lambda_2-1} \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

II)  $1 - 4a^2 = 0$ , d.h.  $a = \frac{1}{2}$  oder  $a = -\frac{1}{2}$ .

Dann ist  $\varphi_1 : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi_1(x) = \sqrt{x}$  eine Lösung der Differentialgleichung. Eine weitere, von  $\varphi_1$  unabhängige, Lösung  $\varphi_2 : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  bestimmt man dann mittels An. 2, §14, Satz 2. Mit den dortigen Bezeichnungen gilt

$$u'(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)^2} \exp \left( - \int_1^x 0 dt \right) = \frac{1}{x},$$

$$u(x) = \int u'(x) dx = \log x,$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x) \cdot u(x) = \sqrt{x} \log x.$$

Damit bildet  $(\varphi_1, \varphi_2)$  ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung.

Die Differentialgleichung iii) im Ausnahmefall  $b = 0$  lautet:

$$y'' + \frac{a}{x} y' = 0, \quad (a \in \mathbb{R}, x > 0)$$

$$\Leftrightarrow y'' = -\frac{a}{x} y'.$$

Trivialerweise ist  $\varphi_1 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\varphi_1(x) = 1 \quad \text{für alle } x > 0$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung.

Eine weitere, von  $\varphi_1$  linear unabhängige Lösung  $\varphi_2 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$  lässt sich leicht mittels An. 2, §11, Satz 2, bestimmen. Es gilt

$$\varphi_2'(x) = \exp\left(\int_1^x -\frac{a}{t} dt\right) = \exp(-\log x^a) = x^{-a}$$

und damit

$$\varphi_2(x) = \int \varphi_2'(x) dx = \begin{cases} \log x, & \text{falls } a = 1, \\ \frac{x^{1-a}}{1-a}, & \text{falls } a \neq 1. \end{cases}$$

*Bemerkung.* Die beiden in c) behandelten Differentialgleichungen sind Spezialfälle der in Aufgabe 15 E gegebenen Differentialgleichung, lassen sich daher auch mit der dort angegebenen Methode lösen.

## §15. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

### Aufgabe 15 A.

a) Die Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

lässt sich schreiben als  $P(D)y = 0$  mit  $P(D) = D^2 - 4D + 4$ . Das Polynom

$$P(T) = T^2 - 4T + 4 = (T - 2)^2$$

hat  $\lambda = 2$  als einzige Nullstelle mit der Vielfachheit 2. Daher bilden die Funktionen  $\varphi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (k = 1, 2)$ ,

$$\varphi_1(x) := e^{2x}, \quad \varphi_2(x) := xe^{2x}$$

nach An. 2, §15, Satz 2, ein Fundamentalsystem von Lösungen der obigen Differentialgleichung.

## c) Die Differentialgleichung

$$y''' - 2y'' + 2y' - y = 0$$

lässt sich schreiben als  $P(D)y = 0$  mit  $P(D) = D^3 - 2D^2 + 2D - 1$ . Das Polynom

$$P(T) = T^3 - 2T^2 + 2T - 1 = (T - 1)(T^2 - T + 1)$$

hat folgende (einfache) Nullstellen:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Deshalb bilden die Funktionen  $\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ( $k = 1, 2, 3$ ),

$$\varphi_1(x) := e^x, \quad \varphi_2(x) := e^{\lambda_2 x}, \quad \varphi_3(x) := e^{\lambda_3 x},$$

nach An. 2, §15, Satz 1, ein Fundamentalsystem von Lösungen der obigen Differentialgleichung. Um ein reelles Fundamentalsystem zu erhalten, setzen wir

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &:= \varphi_1(x) = e^x, \\ \psi_2(x) &:= \frac{1}{2}(\varphi_2(x) + \varphi_3(x)) = e^{x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x, \\ \psi_3(x) &:= \frac{1}{2i}(\varphi_2(x) - \varphi_3(x)) = e^{x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x, \end{aligned}$$

dann bilden  $\psi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen (vgl. An. 2, §15, Beispiel (15.1)).

## e) Die Differentialgleichung

$$y^{(4)} + y = 0$$

lässt sich schreiben als  $P(D)y = 0$  mit  $P(D) = D^4 + 1$ . Für die Nullstellen des Polynoms

$$P(T) = T^4 + 1$$

erhält man unter Benutzung, dass u.a.  $\frac{1}{2}(1+i)^2 = i$  gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}(-1+i)}{2}, \\ \lambda_4 &= \frac{\sqrt{2}(-1-i)}{2}. \end{aligned}$$

Deshalb bilden die Funktionen  $\varphi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$ ,

$$\varphi_1(x) := e^{\lambda_1 x}, \quad \varphi_2(x) := e^{\lambda_2 x}, \quad \varphi_3(x) := e^{\lambda_3 x},$$

$$\varphi_4(x) := e^{\lambda_4 x},$$

nach An. 2, §15, Satz 1, ein Fundamentalsystem von Lösungen der obigen Differentialgleichung. Um ein reelles Fundamentalsystem zu erhalten, setzen wir

$$\psi_1(x) := \frac{1}{2}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = e^{\sqrt{2}/2x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\psi_2(x) := \frac{1}{2i}(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) = e^{\sqrt{2}/2x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\psi_3(x) := \frac{1}{2}(\varphi_3(x) + \varphi_4(x)) = e^{-\sqrt{2}/2x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\psi_4(x) := \frac{1}{2i}(\varphi_3(x) - \varphi_4(x)) = e^{-\sqrt{2}/2x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

dann bilden  $\psi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$  ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen.

### Aufgabe 15 C.

- a) Zunächst bestimmen wir ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Sie lässt sich schreiben als  $P(D)y = 0$  mit  $P(D) = D^2 + 3D + 2$ . Das Polynom

$$P(T) = T^2 + 3T + 2$$

hat die Nullstellen  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = -2$ .

Daher bilden die Funktionen  $\varphi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (k = 1, 2)$ ,

$$\varphi_1(x) := e^{-x}, \quad \varphi_2(x) := e^{-2x},$$

nach An. 2, §15, Satz 1, ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung. Um eine spezielle Lösung von

$$y'' + 3y' + 2y = 2 = 2e^{0x}$$

zu bestimmen, benutzen wir An. 2, §15, Satz 3. Da  $P(0) = 2 \neq 0$ , ist  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\psi(x) = \frac{2}{P(0)} e^{0x} = 1$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Damit erhält man für die Menge  $\mathcal{M}$  aller Lösungen der Differentialgleichung

$$\mathcal{M} = \{\psi + \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

- c) Zunächst bestimmen wir ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Sie lässt sich schreiben als  $P(D)y = 0$  mit  $P(D) = D^2 - 5D + 6$ . Das Polynom

$$P(T) = T^2 - 5T + 6$$

hat die Nullstellen  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_2 = 3$ .

Daher bilden die Funktionen  $\varphi_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (k = 1, 2)$ ,

$$\varphi_1(x) := e^{2x}, \quad \varphi_2(x) := e^{3x},$$

nach An. 2, §15, Satz 1, ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung. Um eine spezielle Lösung von

$$y'' - 5y' + 6y = 4xe^x - \sin x$$

zu bestimmen, suchen wir zunächst je eine Lösung der beiden folgenden Gleichungen

$$(1) \quad P(D)y = 4xe^x$$

$$(2) \quad P(D)y = -\sin x.$$

Da 1 eine Nullstelle 0.Ordnung des Polynoms  $P$  ist, besitzt (1) eine spezielle Lösung der Form

$$\psi_1(x) = f(x)e^x,$$

wobei  $f$  ein Polynom 1. Grades ist. Wir setzen also

$$f(x) = c_1x + c_2$$

an. Nun ist

$$\begin{aligned} & P(D)((c_1x + c_2)e^x) \\ &= (c_1x + c_2 + 2c_1)e^x - 5(c_1x + c_2 + c_1)e^x + 6(c_1x + c_2)e^x \\ &= (2c_1x + 2c_2 - 3c_1)e^x, \end{aligned}$$

woraus wir  $c_1 = 2$  und  $c_2 = 3$  schließen. Damit ist

$$\psi_1(x) = (2x + 3)e^x$$

eine spezielle Lösung von (1). Um eine Lösung von (2) zu bestimmen, lösen wir zunächst

$$P(D)y = ie^{ix},$$

da  $-\sin x = \operatorname{Re}(ie^{ix})$  ist. Da außerdem

$$P(i) = -1 - 5i + 6 = 5 - 5i \neq 0$$

ist nach An. 2, §15, Satz 3,

$$\tau(x) = \frac{i}{P(i)}e^{ix} = \frac{i}{5-5i}e^{ix} = \frac{i(5+5i)}{25+25}e^{ix} = \frac{i-1}{10}e^{ix}$$

eine spezielle Lösung von  $P(D)y = ie^{ix}$ , und da alle Koeffizienten von  $P(D)$  reell sind, gilt

$$\operatorname{Re}(P(D)\tau(x)) = P(D)(\operatorname{Re}\tau(x)),$$

und somit hat (2) die spezielle Lösung

$$\psi_2(x) := \operatorname{Re}\tau(x) = -\frac{1}{10}\cos x - \frac{1}{10}\sin x = -\frac{1}{10}(\sin x + \cos x).$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit die Funktion  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) = (2x + 3)e^x - \frac{1}{10}(\sin x + \cos x).$$

Damit erhält man für die Menge  $\mathcal{M}$  aller Lösungen der Differentialgleichung

$$\mathcal{M} = \{\psi + \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

- d) Man geht analog wie in c) vor und erhält für die Menge  $\mathcal{M}$  aller Lösungen der Differentialgleichung

$$\mathcal{M} = \{\psi + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\},$$

wobei  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben sind durch

$$\varphi_1(x) := 1, \quad \varphi_2(x) := e^x, \quad \varphi_3(x) := xe^x,$$

$$\psi(x) := x + \left( -\frac{1}{20} \cos 2x - \frac{1}{10} \sin 2x \right) e^x.$$

- e) Zunächst bestimmen wir ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

Sie lässt sich schreiben als  $P(D)y = 0$  mit  $P(D) = D^4 + 2D^2 + 1$ . Das Polynom

$$P(T) = T^4 + 2T^2 + 1 = (T - i)^2(T + i)^2$$

hat die Nullstellen  $\lambda_1 = i$  und  $\lambda_2 = -i$  mit jeweils der Vielfachheit 2.

Daher bilden die Funktionen  $\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ),

$$\varphi_1(x) := e^{ix}, \quad \varphi_2(x) := e^{-ix}, \quad \varphi_3(x) := xe^{ix}, \quad \varphi_4(x) := xe^{-ix}$$

nach An. 2, §15, Satz 2, ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung. Um ein reelles Fundamentalsystem zu erhalten, setzen wir

$$\psi_1(x) := \frac{1}{2}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = \cos x,$$

$$\psi_2(x) := \frac{1}{2i}(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) = \sin x,$$

$$\psi_3(x) := \frac{1}{2}(\varphi_3(x) + \varphi_4(x)) = x \cos x,$$

$$\psi_4(x) := \frac{1}{2i}(\varphi_3(x) - \varphi_4(x)) = x \sin x,$$

dann bilden  $\psi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen. Um eine spezielle Lösung von

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 25e^{2x}$$

zu bestimmen, benutzen wir An. 2, §15, Satz 3. Da  $P(2) = 2^4 + 2^3 + 1 = 25$  ist  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\psi(x) = \frac{25}{P(0)} e^{2x} = e^{2x}$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Damit erhält man für die Menge  $\mathcal{M}$  aller Lösungen der Differentialgleichung

$$\mathcal{M} = \left\{ \psi + \sum_{k=1}^4 \lambda_k \psi_k : \lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Aufgabe 15 D.** Die Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

wurden schon in An. 2, §14, im Abschnitt “Gedämpfte Schwingung” berechnet. Es sind dies:

1) Falls  $0 < \mu < \omega_0$ :

$$\varphi(t) = e^{-\mu t} (c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t), \quad \text{mit } \omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2};$$

2) falls  $\mu = \omega_0$ :

$$\varphi(t) = e^{-\mu t} (c_1 + c_2 t);$$

3) falls  $\mu > \omega_0$ :

$$\varphi(t) = c_1 e^{-(\mu-\kappa)t} + c_2 e^{-(\mu+\kappa)t} \quad \text{mit } \kappa := \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}.$$

Dabei sind  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  beliebige Konstanten.

Es ist also nur noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu bestimmen. Dazu benutzen wir An. 2, §15, Satz 3. Da

$$a \cos \omega t = \operatorname{Re} (a e^{i\omega t}),$$

bestimmen wir zunächst eine Lösung  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  von

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = a e^{i\omega t}.$$



Nun ist

$$P(i\omega) = -\omega^2 + 2\mu i\omega + \omega_0^2 = (\omega_0^2 - \omega^2) + 2\mu\omega i \neq 0,$$

und damit

$$\psi(t) = \frac{a}{P(i\omega)} e^{i\omega t} = \frac{a}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\mu\omega i} e^{i\omega t}$$

Der Nenner lässt sich schreiben als

$$(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\mu\omega i = r e^{i\delta}$$

mit

$$r = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}$$

und

$$\delta = \begin{cases} \arctan \frac{2\mu\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, & \text{falls } \omega \neq \omega_0 \\ \pi/2, & \text{falls } \omega = \omega_0. \end{cases}$$

Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich

$$\psi(t) = \frac{a}{r} e^{i(\omega t - \delta)}$$

Da alle Koeffizienten von  $P(D)$  reell sind, hat die inhomogene Gleichung

$$P(D)y = \operatorname{Re}(ae^{i\omega t})$$

die spezielle Lösung

$$\psi_0(t) = \operatorname{Re} \psi(t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - \delta).$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist dann

$$\varphi(t) = \varphi_H(t) + \psi_0(t),$$

wobei  $\varphi_H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung ist. Da für jede Lösung der homogenen Gleichung gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_H(t) = 0$ , verhalten sich alle Lösungen der inhomogenen Gleichung asymptotisch wie  $\psi_0(t)$ . Die Funktion  $\psi_0(t)$  stellt eine Schwingung mit derselben Frequenz wie die äußere Kraft  $a \cos(\omega t)$  dar mit der Amplitude

$$A = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}},$$

die im Vergleich zur äußeren Kraft mit dem Faktor

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}}$$

multipliziert wurde. Etwa für  $\omega = \omega_0$  ist  $\frac{1}{r} = \frac{1}{2\mu\omega}$ . Man sieht, dass dieser Faktor umso größer wird, je kleiner die Reibung ist. Man vergleiche dies mit An. 2, Beispiel (15.5).

**Aufgabe 15 E.** Es sei  $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$  Lösung von (1), dann gilt  $e^\xi \in \mathbb{R}_+^*$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}$  und somit

$$\varphi''(e^\xi) + \frac{a}{e^\xi} \varphi'(e^\xi) + \frac{b}{e^{2\xi}} \varphi(e^\xi) = 0.$$

Da

$$\begin{aligned} & \psi''(\xi) + (a-1)\psi'(\xi) + b\psi(\xi) \\ &= (\varphi(e^\xi))'' + (a-1)(\varphi(e^\xi))' + b\varphi(e^\xi) \\ &= (e^\xi \varphi'(e^\xi))' + (a-1)(e^\xi \varphi'(e^\xi)) + b\varphi(e^\xi) \\ &= e^{2\xi} \varphi''(e^\xi) + a e^\xi \varphi'(e^\xi) + b \varphi(e^\xi) \\ &= e^{2\xi} \left( \varphi''(e^\xi) + \frac{a}{e^\xi} \varphi'(e^\xi) + \frac{b}{e^{2\xi}} \varphi(e^\xi) \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ist  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Lösung von (2). Ist umgekehrt  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Lösung von (2), dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\psi''(\log x) + (a-1)\psi'(\log x) + b\psi(\log x).$$

Da

$$\begin{aligned} & \varphi''(x) + \frac{a}{x} \varphi'(x) + \frac{b}{x^2} \varphi(x) \\ &= (\psi(\log x))'' + \frac{a}{x} (\psi(\log x))' + \frac{b}{x^2} \psi(\log x) \\ &= \frac{1}{x^2} \psi''(\log x) - \frac{1}{x^2} \psi'(\log x) + \frac{a}{x^2} \psi'(\log x) + \frac{b}{x^2} \psi(\log x) \\ &= \frac{1}{x^2} (\psi''(\log x) + (a-1)\psi'(\log x) + b\psi(\log x)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ist  $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$  somit eine Lösung von (1).

Nun zur Bestimmung eines Fundamentalsystems von Lösungen der Differentialgleichung (1). Dazu bestimmen wir erst einmal ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (2). Die Differentialgleichung (2) lässt sich schreiben als  $P(D)y = 0$  mit

$$P(D) = D^2 + (a-1)D + b.$$

Für die Nullstellen des Polynoms

$$P(T) = T^2 + (a-1)T + b$$

erhält man dann

$$\lambda_{1/2} = \frac{1-a \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2}.$$

Nun müssen wir folgende Fallunterscheidung vornehmen:

I)  $(a-1)^2 - 4b \neq 0.$

Dann bilden die Funktionen  $\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad (k = 1, 2),$

$$\varphi_1(x) := e^{\lambda_1 x}, \quad \varphi_2(x) := e^{\lambda_2 x}$$

nach An. 2, §15, Satz 1, ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (2). Nach dem oben Gezeigten wissen wir ferner, dass  $\psi_k : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C} \quad (k = 1, 2),$

$$\psi_1(x) := e^{\lambda_1 \log x} = x^{\lambda_1}, \quad \psi_2(x) := e^{\lambda_2 \log x} = x^{\lambda_2}$$

Lösungen der Differentialgleichung (1) sind. Da außerdem für alle  $x \in \mathbb{R}_+^*$  gilt

$$\begin{vmatrix} x^{\lambda_1} & x^{\lambda_2} \\ \lambda_1 x^{\lambda_1-1} & \lambda_2 x^{\lambda_2-1} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) x^{\lambda_1 + \lambda_2 - 1} \neq 0,$$

bildet  $(\psi_1, \psi_2)$  ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (1).

II)  $(a-1)^2 - 4b = 0.$

Dann gilt  $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$  und es bilden die Funktionen  $\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad (k = 1, 2),$

$$\varphi_1(x) := e^{\lambda x}, \quad \varphi_2(x) := x e^{\lambda x}$$

nach An. 2, §15, Satz 2, ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (2). Nach dem oben Gezeigten wissen wir ferner, dass  $\psi_k : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C} \quad (k = 1, 2)$ ,

$$\psi_1(x) := e^{\lambda \log x} = x^\lambda, \quad \psi_2(x) := \log x e^{\lambda \log x} = x^\lambda \log x$$

Lösungen der Differentialgleichung (1) sind. Da außerdem für alle  $x \in \mathbb{R}_+^*$  gilt

$$\begin{vmatrix} x^\lambda & x^\lambda \log x \\ \lambda x^{\lambda-1} & \lambda x^{\lambda-1} \log x + x^{\lambda-1} \end{vmatrix} = x^{2\lambda-1} \neq 0,$$

bildet  $(\psi_1, \psi_2)$  ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (1).

## §16. Systeme von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

**Aufgabe 16 A.** Zur Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=: A} \cdot y$$

gehen wir vor wie in An. 2, §16 bei der Behandlung eines Systems in Jordan-scher Normalform. Wir machen den Ansatz  $y(x) = e^x z(x)$ . Es ist

$$y'(x) = e^x z(x) + e^x z'(x).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} y'(x) = Ay(x) &\iff e^x z(x) + e^x z'(x) = Ae^x z(x) \\ &\iff z'(x) = (A - E)z(x) \\ &\iff \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \\ z_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} z_1'(x) = 2z_2(x) + 3z_3(x), & (1) \\ z_2'(x) = 2z_3(x), & (2) \\ z_3'(x) = 0. & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

Wir bestimmen eine Lösung mit der Anfangsbedingung

$$z(0) = \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ z_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c \in \mathbb{R}^3$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich

$$z_3(x) = c_3.$$

Dies wird in die zweite Gleichung eingesetzt. Man erhält

$$z_2'(x) = c_2 + 2c_3x.$$

Setzt man dies in die erste Gleichung ein, ergibt sich die Gleichung

$$z_1'(x) = 2(c_2 + 2c_3x) + 3c_3$$

mit der Lösung

$$z_1(x) = c_1 + (2c_2 + 3c_3)x + 2c_3x^2.$$

Ein Lösungs-Fundamentalsystem erhält man, indem man die speziellen Anfangsbedingungen  $c = e_k \in \mathbb{R}^k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , (wobei  $e_k$  der  $k$ -te Einheitsvektor ist) wählt. Dies liefert die Matrix

$$Z(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 3x + 2x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist ein Lösungs-Fundamentalsystem der ursprünglichen Differentialgleichung  $y' = Ay$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 3x + 2x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^x$$

Die Probe ergibt tatsächlich

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y(x).$$

**Aufgabe 16 B.** Um ein Lösungs-Fundamentalsystem von

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=: A} \cdot y$$

zu bestimmen, benutzen wir An. 2, §16, Satz 2, denn da  $A$  symmetrisch ist, ist  $A$  diagonalisierbar. Wie man leicht mit Mitteln der linearen Algebra errechnet (vgl. z.B. [5], Beispiel 5.3.5), gilt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{=: B} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=: S^{-1}} A \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{=: S},$$

somit bestimmen wir zunächst die Lösungen der Differentialgleichung

$$z' = B \cdot z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} z.$$

Trivialerweise sind

$$\psi_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix}, \quad \psi_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix}, \quad \psi_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ e^{3x} \end{pmatrix}$$

Lösungen von  $z' = B \cdot z$  und somit

$$\phi_1(x) = S \cdot \psi_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{e^{3x}}{3} \\ \frac{e^{3x}}{3} \\ \frac{e^{3x}}{3} \end{pmatrix}, \quad \phi_2(x) = S \cdot \psi_2(x) = \begin{pmatrix} \frac{e^{3x} - 1}{3} \\ \frac{e^{3x} + 2}{3} \\ \frac{e^{3x} - 1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3(x) = S \cdot \psi_3(x) = \begin{pmatrix} \frac{e^{3x} - 1}{3} \\ \frac{e^{3x} - 1}{3} \\ \frac{e^{3x} + 2}{3} \end{pmatrix}$$

Lösungen von  $y' = A \cdot y$ . Nun bilden  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  auch ein Fundamentalsystem zu  $y' = A \cdot y$ , denn

$$\begin{vmatrix} \frac{e^{3x}}{3} & \frac{e^{3x} - 1}{3} & \frac{e^{3x} - 1}{3} \\ \frac{e^{3x}}{3} & \frac{e^{3x} + 2}{3} & \frac{e^{3x} - 1}{3} \\ \frac{e^{3x}}{3} & \frac{e^{3x} - 1}{3} & \frac{e^{3x} + 2}{3} \end{vmatrix} = \frac{e^{3x}}{3} \neq 0.$$

**Aufgabe 16 C.** Da

$$\text{grad } U(x_1, x_2) = (5x_1 + 2x_2, 2x_1 + 8x_2)$$

gilt

$$\text{grad } U(x_1, x_2) = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Also lässt sich die Differentialgleichung folgendermaßen schreiben

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -Ax.$$

Außerdem ist  $A$  eine symmetrische Matrix und damit diagonalisierbar, genauer errechnet man

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{=: S^{-1}} A \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}}_{=: S} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}}_{=: B}.$$

Mit der Koordinaten-Transformation  $y = S^{-1}x$  geht die Differentialgleichung über in

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -By,$$

oder anders geschrieben

$$\ddot{y}_1 = -4y_1, \quad \ddot{y}_2 = -9y_2.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung für  $\ddot{y} = -By$  (vgl. An. 2, Beispiel (16.1))

$$y(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos 2t + \beta_1 \sin 2t \\ \alpha_2 \cos 3t + \beta_2 \sin 3t \end{pmatrix},$$

wobei  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  beliebige Konstanten sind. Für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\text{grad } U(x)$$

gilt dann

$$\begin{aligned} x(t) &= S \cdot y(x) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos 2t + \beta_1 \sin 2t \\ \alpha_2 \cos 3t + \beta_2 \sin 3t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}(\alpha_2 \cos 3t + \beta_2 \sin 3t - \alpha_1 \cos 2t - \beta_1 \sin 2t) \\ \frac{1}{5}(\alpha_1 \cos 2t + \beta_1 \sin 2t + 4\alpha_2 \cos 3t + 4\beta_2 \sin 3t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \left[ \alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \cos 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \cos 3t \\ 4 \cos 3t \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \sin 3t \\ 4 \sin 3t \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

wobei  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  beliebige Konstanten sind.

**Aufgabe 16 D.** Zunächst bestimmen wir ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}_{=: A} y.$$



Da

$$\begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & 6-t \end{vmatrix} = t^2 - 7t = t(t-7)$$

hat  $A$  die Eigenwerte  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = 7$ . Ohne Mühe bestimmt man einen Eigenvektor  $a \in \mathbb{R}^2$  zu  $\lambda_1$  und einen Eigenvektor  $b \in \mathbb{R}^2$  zu  $\lambda_2$ :

$$a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nach An. 2, §16, Corollar zu Satz 1, können wir nun sofort ein Lösungs-Fundamentalsystem  $(\varphi_1, \varphi_2)$  für die homogene Gleichung angeben:

$$\begin{cases} \varphi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \varphi_1(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{0x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^{7x} = \begin{pmatrix} e^{7x} \\ 3e^{7x} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Mittels An. 2, §13, Satz 4, lässt sich eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung bestimmen. Mit den dortigen Bezeichnungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi(t)^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & e^{7t} \\ 1 & 3e^{7t} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \Phi} \begin{pmatrix} 3e^{7t} & -e^{7t} \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7}e^{-7t} & \frac{2}{7}e^{-7t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7}e^{-7t} & \frac{2}{7}e^{-7t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^x \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}t + \frac{1}{7}\sin t \\ \frac{1}{7}te^{-7t} + \frac{2}{7}e^{-7t}\sin t \end{pmatrix} dt. \end{aligned}$$

Unter Benutzung der partiellen Integration erhält man weiter

$$\begin{aligned} \int \underbrace{t}_{=f} \cdot \underbrace{e^{-7t}}_{=g'} dt &= -\frac{1}{7}te^{-7t} + \frac{1}{7} \int e^{-7t} dt \\ &= -\frac{1}{7}te^{-7t} - \frac{1}{49}e^{-7t} = -\frac{7t+1}{49}e^{-7t} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \int \underbrace{e^{-7t}}_{=f} \cdot \underbrace{\sin t}_{=g'} dt &= -e^{-7t} \cos t - 7 \int \underbrace{e^{-7t}}_{=f} \cdot \underbrace{\cos t}_{=g'} dt \\
 &= -e^{-7t} \cos t - 7 \left( e^{-7t} \sin t + 7 \int e^{-7t} \sin t dt \right) \\
 &= -e^{-7t} \cos t - 7e^{-7t} \sin t - 49 \int e^{-7t} \sin t dt.
 \end{aligned}$$

Daher ist

$$\int e^{-7t} \sin t dt = \frac{1}{50} (-e^{-7t} \cos t - 7e^{-7t} \sin t).$$

Also

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \left[ \begin{pmatrix} -\frac{3}{14}t^2 - \frac{1}{7} \cos t \\ -\frac{7t+1}{343}e^{-7t} - \frac{1}{175}(e^{-7t} \cos t + 7e^{-7t} \sin t) \end{pmatrix} \right]_0^x \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{14}x^2 - \frac{1}{7} \cos x + \frac{1}{7} \\ \frac{-175x - 25 - 49 \cos x - 343 \sin x}{8575}e^{-7x} + \frac{74}{8575} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

und damit ist eine Lösung  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  der inhomogenen Differentialgleichung gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \Phi(x)u(x) \\
 &= \begin{pmatrix} -2 & e^{7t} \\ 1 & 3e^{7t} \end{pmatrix} \cdot u(x) \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{3}{7}x^2 - \frac{1}{49}x - \frac{99}{343} + \frac{7}{25} \cos x - \frac{1}{25} \sin x + \frac{74}{8575}e^{7x} \\ -\frac{3}{14}x^2 - \frac{3}{49}x + \frac{46}{343} - \frac{4}{25} \cos x - \frac{3}{25} \sin x + \frac{222}{8575}e^{7x} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Da  $\varphi(0) = 0$ , wie man durch Nachrechnen bestätigt, ist  $\varphi$  die gesuchte Lösung.

**Aufgabe 16 E.** Zum Beweis verwenden wir zwei Hilfssätze.

**Hilfssatz 1.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und seien

$$f, g: I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

zwei differenzierbare vektorwertige Funktionen. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \langle f(t), g(t) \rangle = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle.$$

Dabei bezeichnet  $\langle x, y \rangle$  das kanonische Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$ .

*Beweis.* Sind  $f_i$  bzw.  $g_i$  die Komponenten von  $f$  und  $g$ , so gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle f(t), g(t) \rangle &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n f_i(t) g_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n (f'_i(t) g_i(t) + f_i(t) g'_i(t)) \\ &= \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

**Folgerung.** Ist  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar, so gilt

$$\frac{d}{dt} \|\varphi(t)\|^2 = 2 \langle \varphi(t), \varphi'(t) \rangle.$$

**Hilfssatz 2.** Eine Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  ist genau dann schiefsymmetrisch, wenn

$$\langle x, Ax \rangle = 0 \quad \text{für alle Vektoren } x \in \mathbb{R}^n.$$

*Beweis.* a) Sei zunächst  $A$  als schiefsymmetrisch vorausgesetzt. Für einen beliebigen Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\langle x, Ax \rangle = \langle A^\top x, x \rangle = -\langle Ax, x \rangle = -\langle x, Ax \rangle \implies \langle x, Ax \rangle = 0.$$

Dabei wurde die wohlbekannte Regel  $\langle x, Ay \rangle = \langle A^\top x, y \rangle$  für alle Matrizen  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  und alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  benutzt.

b) Sei jetzt umgekehrt vorausgesetzt, dass  $\langle x, Ax \rangle = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und sei  $A = (a_{ij})$  die Komponenten-Darstellung von  $A$ . Speziell für den  $i$ -ten Einheitsvektor  $e_i \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$0 = \langle e_i, Ae_i \rangle = a_{ii}.$$

Somit verschwinden alle Diagonalelemente von  $A$ . Für  $i \neq j$  ist

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (e_i + e_j), A(e_i + e_j) \rangle \\ &= \langle e_i, Ae_i \rangle + \langle e_i, Ae_j \rangle + \langle e_j, Ae_i \rangle + \langle e_j, Ae_j \rangle \\ &= \langle e_i, Ae_j \rangle + \langle e_j, Ae_i \rangle = a_{ij} + a_{ji}, \end{aligned}$$

also  $a_{ij} = -a_{ji}$ , d.h.  $A$  ist schiefsymmetrisch, q.e.d.

Nach diesen Vorbereitungen ist die Behauptung von Aufgabe 16 E leicht zu beweisen.

1) Sei zunächst  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  als schiefsymmetrisch vorausgesetzt und  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung der Differentialgleichung  $\varphi' = A\varphi$ . Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \|\varphi(t)\|^2 = 2\langle \varphi(t), \varphi'(t) \rangle = 2\langle \varphi(t), A\varphi(t) \rangle = 0,$$

wobei für die letzte Gleichung Hilfssatz 2 benutzt wurde. Da die Ableitung von  $\|\varphi(t)\|^2$  verschwindet, muss  $\|\varphi(t)\|$  konstant sein.

2) Sei jetzt vorausgesetzt, dass alle Lösungen  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Differentialgleichung  $\varphi' = A\varphi$  konstanten Betrag haben. Für einen beliebig vorgegebenen Vektor  $u \in \mathbb{R}^n$  gibt es eine Lösung  $\varphi$  mit  $\varphi(0) = u$ . Da

$$0 = \frac{d}{dt} \|\varphi(t)\|^2 = 2\langle \varphi(t), \varphi'(t) \rangle = 2\langle \varphi(t), A\varphi(t) \rangle$$

folgt für  $t = 0$ , dass  $\langle u, Au \rangle = 0$ . Da  $u \in \mathbb{R}^n$  beliebig war, folgt aus Hilfssatz 2, dass  $A$  schiefsymmetrisch ist, q.e.d.

**Aufgabe 16 F.** Setze

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dann lautet das charakteristische Polynom  $P(T)$  von  $A$

$$\begin{aligned} P(T) &= \begin{vmatrix} -T & -3 & 2 \\ 3 & -T & -1 \\ -2 & 1 & -T \end{vmatrix} = -T^3 - 14T = -T(T^2 + 14) \\ &= -T(T + \sqrt{14}i)(T - \sqrt{14}i), \end{aligned}$$

und damit lauten die Eigenwerte von  $A$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \sqrt{14}i, \quad \lambda_3 = -\sqrt{14}i.$$

Mit Hilfe von Methoden aus der linearen Algebra bestimmt man für  $k = 1, 2, 3$  zu jedem Eigenwert  $\lambda_k$  einen zugehörigen Eigenvektor  $x_k$  (vgl. etwa [5], Bemerkung 5.2.6). Man erhält z.B.:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -3 - 2\sqrt{14}i \\ -6 + \sqrt{14}i \\ 5 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} -3 + 2\sqrt{14}i \\ -6 - \sqrt{14}i \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Damit bilden  $\psi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^3, (k = 1, 2, 3)$ ,

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{0x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \psi_2(x) &:= \begin{pmatrix} -3 - 2\sqrt{14}i \\ -6 + \sqrt{14}i \\ 5 \end{pmatrix} e^{\sqrt{14}ix}, \\ \psi_3(x) &:= \begin{pmatrix} -3 + 2\sqrt{14}i \\ -6 - \sqrt{14}i \\ 5 \end{pmatrix} e^{-\sqrt{14}ix},\end{aligned}$$

nach An. 2, §16, Corollar zu Satz 1, ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Um ein reelles Fundamentalsystem  $\varphi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (k = 1, 2, 3)$  zu erhalten, setzen wir analog wie in An. 2, §16, Beispiel (16.2) ii),

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &:= \psi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \varphi_2(x) &:= \frac{1}{2}(\psi_2(x) + \psi_3(x)) \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \cos \sqrt{14}x - \begin{pmatrix} -2\sqrt{14} \\ \sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix} \sin \sqrt{14}x, \\ \varphi_3(x) &:= \frac{1}{2i}(\psi_2(x) - \psi_3(x)) \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \sin \sqrt{14}x + \begin{pmatrix} -2\sqrt{14} \\ \sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix} \cos \sqrt{14}x.\end{aligned}$$

Übungsbuch zur Analysis 2

Aufgaben und Lösungen

Forster, O.; Szymczak, Th.

2013, VII, 151 S. 7 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-00512-2