

2 Das Grundbildungskonzept von PISA

„Our mathematical concepts, structures and ideas have been invented as tools to organize the phenomena of the physical, social and mental world.“ (Freudenthal 1983, IX)

Im ersten Teil dieses Kapitels wird auf das Grundbildungskonzept als Orientierungsrahmen der PISA-Studie eingegangen (Abschnitt 2.1). Die Operationalisierung des Grundbildungskonzepts in den Geometrieaufgaben der PISA-Studie wird im zweiten Teil dargestellt (Abschnitt 2.2).

2.1 Das Grundbildungskonzept als Orientierungsrahmen der PISA-Studie

Im folgenden Abschnitt werden zunächst die Begriffe „Mathematical Literacy“ und „Mathematische Grundbildung“ vor ihrem mathematikdidaktischen Hintergrund erörtert. Daran schließt sich eine Darstellung der übergreifenden Ideen und Kompetenzklassen als wesentliche Merkmale zur Einordnung der Aufgaben des internationalen PISA-Tests an. Für den nationalen Ergänzungstest zu PISA, der zusätzliche Untersuchungen beinhaltet, wurde der Begriff der mathematischen Grundbildung unter Berücksichtigung der vorherrschenden unterrichtlichen Schwerpunkte in Deutschland ausdifferenziert und erweitert. Deshalb wird in einem nächsten Abschnitt auf die aus der Differenzierung in der deutschen Rahmenkonzeption resultierenden „Typen mathematischen Arbeitens“ und auf die Struktur des Aufgabenmodells beim nationalen Test eingegangen. Abschließend werden einige relevante Informationen zur Anlage und Umsetzung der PISA-Studie 2003 gegeben.

2.1.1 Mathematical Literacy“ und „Mathematische Grundbildung“ – mathematikdidaktische Hintergründe

Intention von PISA ist es, Indikatoren zu gewinnen, die konstruktiv nutzbare Hinweise auf den Stand der Bildung in den teilnehmenden Ländern ermöglichen. Auf diese Weise will PISA die Leistungsfähigkeit der Bildungssysteme messen. Die Studie ist so angelegt, dass grundlegende Stärken und Probleme identifiziert und empirisch belegt werden können (Neubrand 2004, 15).

Die Leistungstests in PISA orientieren sich dabei nicht nur an den curricularen Vorgaben in den einzelnen Ländern, sondern an einem Anspruch grundlegender Bildung für eine moderne, entwickelte Gesellschaft. Der Schlüsselbegriff hierfür ist „Mathematical Literacy“. In der internationalen Rahmenkonzeption

von PISA heißt es dazu: "Der Begriff Grundbildung (literacy) wurde gewählt, um zu betonen, dass mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten, wie sie im traditionellen Curriculum der Schulmathematik definiert werden, im Rahmen von OECD/PISA nicht im Vordergrund stehen. Stattdessen liegt der Schwerpunkt auf der funktionalen Anwendung mathematischer Kenntnisse in ganz unterschiedlichen Kontexten und auf ganz unterschiedliche, Reflexion und Einsicht erfordernde Weise" (OECD 1999, 47). „Mathematical Literacy“ wird so definiert: „Mathematical literacy is an individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded mathematical judgement and to engage in mathematics, in ways that meet the needs of that individual's current and future life as a constructive, concerned and reflective citizen.“ (OECD 1999, 41). Diese Formulierung geht zurück auf internationale und nationale mathematikdidaktische Diskussionen, über die an dieser Stelle ein Überblick gegeben werden soll, mit dem Ziel, die inhaltliche Bedeutung von „Mathematical Literacy“ und „Mathematischer Grundbildung“ im mathematikdidaktischen und pädagogischen Feld zu verorten.

Bereits der im Jahr 1994 durchgeführte TIMSS-Leistungstest orientierte sich an einem Bild der Bedeutung von „Mathematik als Werkzeug“, welches sich im Literacy-Gedanken von PISA fortsetzt (Baumert u.a. 1997, 58). Dennoch richtete man sich in erster Linie nach curricularen Vorgaben: „Bei aller Variabilität innerhalb und zwischen den Ländern gibt es so etwas wie ein internationales Kerncurriculum des Mathematikunterrichts in der Mittelstufe, das in sehr unterschiedlicher Form im Lehrplan, im Lehrbuch oder im professionellen Selbstverständnis von Mathematiklehrern verankert sein kann.“ (Baumert u.a. 1997, 58). Bei TIMSS/III wurde schließlich zum ersten Mal das Konstrukt „Mathematical Literacy“ verwendet. In dieser Untersuchung am Ende der Sekundarstufe II wurde neben einem Test mit curricularen Elementen auch ein Literacy-Test durchgeführt. In der entsprechenden Rahmenkonzeption heißt es: "Unlike both other components of TIMSS and other IEA-Studies, the mathematics and science literacy study is not curriculum based (...) Instead, it is a study of the mathematics and science learning that final year students have retained regardless of their current areas of study" (Orpwood und Garden 1998, 10-11). Ein Literacy-Test greift also nicht auf einzelne stoffliche Elemente zurück, sondern auf das jeweilige Umfeld, in das diese Elemente eingebettet sind. Dabei stehen allgemeine mathematische Fähigkeiten im Vordergrund, wie zum Beispiel Mathematisieren, Vernetzen und Reflektieren. Diese findet man in den Lehrplänen oft am Anfang bei den allgemeinen Zielen, Schlüsselqualifikationen oder fachspezifischen beziehungsweise fachübergreifenden Kompetenzen. Vor allem, wenn man, wie in PISA, die Qualität mathematischer Fähigkeiten

ten beschreiben will, um daraus letztendlich Hinweise zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts abzuleiten, ist dieser Literacy-Ansatz angemessen.

Die mathematikdidaktische Diskussion um allgemeine Ziele des Faches Mathematik ist breit gefächert, da die Aspekte, auf die sich mathematische Bildung bezieht, sehr vielfältig sind. Im folgenden Abschnitt werden einige Positionen dargestellt, die in engem Zusammenhang mit dem Literacy-Ansatz stehen.

Die internationale Rahmenkonzeption von PISA folgt im Wesentlichen den Vorstellungen des niederländisch-deutschen Mathematikers Hans Freudenthal (1973, 1983). Seine Ideen über Lehren und Lernen von Mathematik zielen vor allem auf Beziehungen zwischen Erfahrungen und Mathematik, einem zentralen Bestandteil von Literacy. Freudenthal argumentiert, dass alles Lernen und Lehren von Mathematik von der „Phänomenologie mathematischer Begriffe“ ausgehen müsse. Seine Sichtweise zielt darauf ab, dass nicht eine vorweggenommene Abstraktion und die anschließende Anwendung fertiger Konzepte, sondern der verständige, reflektierte Gebrauch in geeigneten Situationen das Lernen mathematischer Begriffe bestimme. Mathematische Begriffe werden demnach aus vielfältigen außer- und innermathematischen Situationen heraus gebildet und tragen umgekehrt „als Werkzeuge“ zur Erschließung „der Welt“ bei. Der Grundgedanke dahinter wird in der internationalen Rahmenkonzeption von PISA (OECD 1999, 41) wie folgt zitiert: „Our mathematical concepts, structures and ideas have been invented as tools to organise the phenomena of the physical, social and mental world.“ (Freudenthal 1983, IX). Freudenthals Sichtweise beinhaltet eine „Orientierung an der Welt“, erschöpft sich aber nicht darin, sondern sieht dies als Bedingung, mathematische Begriffe als „mental objects“ auszubilden. Die Umsetzung dieser Ideen wurde im niederländischen Konzept der „Realistic Mathematics Education“ realisiert. Hierfür wurden Aufgaben entwickelt, in denen es nicht allein um den Einbezug von Anwendungen ging, sondern die von einer „realistischen“ Problemstellung ausgehen, an der mathematische Begriffe entwickelt werden. Die Aneignung der Begriffe steht hierbei im Vordergrund: „The real world problem will be used to develop mathematical concepts. (...) The problem is not in the first meant to be solved for problem solving purposes, but the real meaning lies in the underlying exploration of new mathematical concepts.“ (de Lange 1996, 90)

Diese begriffsbildende Seite der Mathematik kommt auch in den PISA-Aufgaben zum Ausdruck. Der überwiegende Teil der Aufgaben wurde so konzipiert, dass der Übergang von den Phänomenen zum mathematischen Begriff deutlich wird. Faktenwissen und prozedurale Fertigkeiten und Fähigkeiten

werden nicht isoliert erfasst, sondern stets eingebunden in kontextbezogene, problemorientierte Aufgaben. Diese Art von Aufgaben wird dem Literacy-Ansatz der internationalen Rahmenkonzeption gerecht.

Neubrand (2004) geht in seinen vertiefenden Analysen im Rahmen von PISA 2000 ausführlich auf die mathematikdidaktischen Hintergründe von „Mathematical Literacy“ und „Mathematischer Grundbildung“ ein. Neben Freudenthals Modell des Lehrens und Lernens von Mathematik, das Realitätsbezüge als Bedingung für die Ausbildung mathematischer Begriffe betont, nennt Neubrand zwei Sichtweisen aus der amerikanischen Mathematikdidaktik. Diese befassen sich im Rahmen der „Principles and Standards for School Mathematics“ (NCTM, 2000) mit der Bestimmung dessen, was mit Mathematik in der Ausbildung erreicht werden soll. Schlüsselbegriffe hierfür sind „literate citizenship“ und „mathematical proficiency“. Diese beiden Sichtweisen, die umfassende Ansprüche an „mathematische Fähigkeiten für alle“ darstellen, sollen hier aufgegriffen werden.

Schoenfeld (2001) geht davon aus, dass man als „literate citizen“ vor Problemen steht, die sich nicht mithilfe vorgefertigter Lösungen und standardisierten Verfahren bearbeiten lassen. Für jeden Beruf sei es wichtig, Entscheidungen zu treffen und Daten zu analysieren vor allem aber Daten und Fakten überzeugend darzustellen: „In short, the mathematical skills that will enhance the preparation of those who aspire to careers mathematics are the very same skills that will help people become informed and flexible citizens, workers, and consumers.“ (Schoenfeld 2001, 53) Es sei vor allem die Fähigkeit, „to make use of various modes of mathematical thought and knowledge to make sense of situations we encounter as we make our way through world“, die man tatsächlich benötige, betont Schoenfeld. Er fordert, im Unterricht vor allem kontextbezogene, problemhaltige Aufgaben zu stellen, die diese Fähigkeit ansprechen und die wesentlich sind für „literate citizenship“.

Klipatrick (2002) verwendet den Begriff „mathematical proficiency“, um „mathematische Bildung für alle“ zu erfassen. Für einen Bericht, der so genannten Mathematics Learning Study (Klipatrick, Swafford, Findell, 2001) an den National Research Council, formuliert er „five stands of mathematical proficiency“: (a) conceptual understanding, which refers to the student's comprehension of mathematical concepts, operations and relations; (b) procedural fluency, or the student's skill in carrying out mathematical procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately; (c) strategic competence, the student's ability to formulate, represent, and solve mathematical problems; (d) adaptive reasoning, the capacity for logical thought and for reflection on, explanation of, and

justification of mathematical arguments; and (e) productive disposition, which includes the student's habitual inclination to see mathematics as a sensible, useful, and worthwhile subject to be learned, coupled with a belief in the value of diligent work and in one's own efficacy as a doer of mathematics." (Klipatrick 2002, 66)

Im Gegensatz zu Freudenthals und Schoenfelds Vorgehen, argumentiert Klipatrick sozusagen spiegelbildlich aus einer inneren Sicht der Mathematik heraus. Er geht aus von den Strukturen und dem Potenzial des Faches und kommt dennoch zu demselben Ergebnis, nämlich, dass der verständige Gebrauch mathematischer Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten in Problem- und Anwendungskontexten wesentlicher Teil mathematischer Grundbildung ist.

Klipatricks breit gefächert angelegte Sichtweise prägte auch die in Deutschland geführten Diskussionen zur mathematischen Allgemeinbildung. Neubrand (2004, 15-23) schildert in diesem Zusammenhang unter anderem Positionen von Tenorth (Tenorth 1994) und Winter (1995) sowie Inhalte des Gutachtens zum BLK-Modellversuch „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“ (BLK 1997). Im Abschnitt „Mathematik im Rahmen einer modernen Allgemeinbildung“ dieses Gutachtens, wird beschrieben, dass sich die Mathematik im Spannungsfeld von „Abbildfunktion und systemischen Charakter“ bewegt. Einerseits orientiert sich die Mathematik an der Welt, andererseits hat die Mathematik einen abstrakten und formalen Charakter und eine gewisse innere „Ordnung“. Die Herausforderung an den Mathematikunterricht sei es, beide Aspekte miteinander zu verbinden.

Tenorth beschreibt die Spannung spezifisch-gegenstandsgebundener Kenntnisse und formaler Denkweisen aus einem anderen Theoriezusammenhang heraus, nämlich an den zwei Polen, „der Sicherung eines Minimalbestands an Kenntnissen“ auf der einen Seite und der „Kultivierung der Lernfähigkeit“ auf der anderen Seite (Tenorth 1994, 101). Mit der Kultivierung der Lernfähigkeit meint er, eine Sicherung von Lernfähigkeit, die über den kognitiv lernenden Umgang hinaus geht, indem der Lernprozess im Unterricht selbst zur Sprache gebracht wird. Im Bezug auf die Mathematik geht es vor allem um die begriffliche Vernetzung durch das Mathematisieren von Situationen. Notwendig dafür ist ein breites Bild von Mathematik, das Verfahren, mathematische Modelle und innermathematische Strukturen umfasst.

Winter bündelt in seinem Aufsatz „Mathematik und Allgemeinbildung“ (Winter 1995) die Breite des Anspruchs an mathematische Allgemeinbildung in drei Grunderfahrungen: „(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen

oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen; (2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen; (3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben.“ (Winter 1995, 37).

In Aspekt (1) ist die Anwendbarkeit der Mathematik angesprochen. Dies bedeutet vor allem zu erfahren, wie mathematische Modellbildung funktioniert. Voraussetzung dafür ist das Verfügen über Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten zu den verschiedenen Inhaltsbereichen der Mathematik, beispielsweise über Geometrie. Mit Aspekt (2) meint Winter die innere Struktur der Mathematik. Hier geht es darum zu erfahren, dass Menschen Begriffe bilden und dass man mit Begriffen ein ganzes Netz aufbauen kann. Mit ihrem hohen Grad an Vernetzung stellt die Mathematik als „Schule des Denkens“ ein reichhaltiges Potenzial für das Reflektieren über Wege des Denkens bereit. Hierdurch werden, wie in Aspekt (3) angesprochen, heuristische Strategien entwickelt, die sich auf andere Fächer und darüber hinaus auf unterschiedliche Bereiche des täglichen Lebens übertragen lassen.

Die geschilderten Sichtweisen zu „Mathematical Literacy“ und „Mathematischer Grundbildung“ bilden mathematikdidaktische Hinergründe zur Strukturierung der PISA-Aufgaben. In der internationalen Konzeption von PISA werden zwei wesentliche Merkmale zur Einordnung der Aufgaben beschrieben: die verschiedenen mathematischen Inhaltsbereiche (übergreifende Ideen) und die internationalen Kompetenzklassen (Abschnitt 2.1.2). Hinsichtlich der nationalen Erweiterung ist dies die Differenzierung der Aufgaben in Stoffgebiete und Typen mathematischen Arbeitens (Abschnitt 2.1.3). Darstellungen hierzu erfolgen in den nächsten beiden Abschnitten.

2.1.2 Die übergreifenden Ideen und Kompetenzklassen als Konstruktionsmerkmale des internationalen PISA-Tests

Die Klassifikation in die mathematischen Inhaltsbereiche folgt dem internationalen „Literacy“-Ansatz. Mathematische Begriffe, Methoden und Ideen werden danach im Sinne von Freudenthal (Abschnitt 2.1.1) als Werkzeuge betrachtet, mit denen die Phänomene der natürlichen, sozialen, kulturellen und mentalen „Welt“ beschrieben und strukturiert werden können. Mit der PISA-Studie soll überprüft werden, inwiefern Schülerinnen und Schüler diese Werkzeuge vollständig anwenden können. Deshalb ist es naheliegend, die mathematischen

Inhalte bei PISA so zu gliedern, dass diese phänomenologischen Wurzeln sichtbar werden (Blum u.a. 2004, 49). Es werden vier „Übergreifende Ideen“ unterschieden:

- „quantity“ bezieht sich auf die Verwendung von Zahlen zur Beschreibung und Strukturierung von Situationen,
- „change and relationship“ bezieht sich auf relationale und funktionale Beziehungen zwischen mathematischen Objekten,
- „shape and space“ bezieht sich auf ebene und räumliche Konfigurationen, Formen und Muster,
- „uncertainty“ bezieht sich auf Phänomene und Situationen, die statistische Daten beinhalten oder bei denen der Zufall eine Rolle spielt („Daten und Zufall“).

Auch wenn die „Übergreifenden Ideen“ nicht mit den herkömmlichen Stoffgebieten der Schulmathematik (Arithmetik, Algebra, Geometrie und Stochastik) identisch sind, gibt es naheliegende Beziehungen. Dennoch wurde die enge Anbindung an curriculare Strukturen im Sinne des internationalen „Literacy“-Ansatzes nicht vollzogen. Dazu schreibt Neubrand: „die Items sind bewusst quer zu diesen Strukturen konstruiert, indem etwa funktionale Zusammenhänge auch in geometrischen Kontexten vorkommen oder arithmetische Aufgaben in den Kontext von Dateninterpretation gestellt sind“ (Neubrand 2004, 42).

Neben den verschiedenen mathematischen Inhaltsbereichen sind die Kompetenzklassen ein zweites Merkmal zur Einordnung der PISA-Aufgaben. Als „Mathematische Kompetenzen“ werden in der internationalen Konzeption von PISA Fähigkeiten verstanden, die zum Lösen von Mathematikaufgaben nötig sind (OECD 2003). Nach Niss (2003) werden sie in acht Kategorien eingeteilt: mathematisches Denken, mathematisches Problemlösen, mathematisches Modellieren, mathematisches Argumentieren, Darstellungen verwenden, mit Symbolen und Formalismen umgehen, Kommunizieren, Hilfsmittel verwenden. Dabei beziehen sich die ersten vier auf die mathematischen Inhalte selbst, während die anderen vier Kompetenzen eher den Umgang mit den Inhalten betreffen. In den PISA-Aufgaben werden immer mehrere dieser Kompetenzen auf ganz unterschiedlichen Anspruchsniveaus gefordert. Die Kompetenzen werden in drei Kompetenzklassen unterteilt. Zum Bereich „reproduction“ gehören technisches Faktenwissen, Definitionen und Berechnungen. Aufgaben in denen es darum geht, Querverbindungen und Zusammenhänge herzustellen werden dem Bereich „connection“ zugeordnet. Der Kompetenzklasse „generalization“ werden Aufgaben zugeordnet, die von komplexer Struktur sind

und einsichtsvolles mathematisches Denken und Verallgemeinern erfordern (OECD 2003, 49). Im Verlauf der Analysen der PISA-Ergebnisse, ergab sich, dass mit den drei internationalen Kompetenzklassen auch ein schwierigkeits-erklärendes Merkmal angegeben ist (Neubrand 2004, 26). Dies hängt mit dem Anspruch an den in einer Aufgabe vorzunehmenden Modellierungsprozess zusammen, der in der Regel bei Aufgaben der Kompetenzklasse „reproduction“ niedriger ist als bei „connection“ und bei Aufgaben der Kompetenzklasse „connection“ wiederum niedriger als bei „generalization“.

2.1.3 Realisierung „mathematischer Grundbildung“ in den drei „Typen mathematischen Arbeitens“ beim nationalen PISA-Test

In der nationalen Konzeption wurde die Einteilung der internationalen Konzeption in Kompetenzklassen zunächst aufgenommen. Allerdings wurde der Begriff der mathematischen Grundbildung unter Berücksichtigung der vorherrschenden unterrichtlichen Schwerpunkte in Deutschland ausdifferenziert und erweitert (Neubrand u.a. 2001, 45-59).

Die Ausrichtung auf begriffliches Verstehen als Grundlage für das funktionale Verwenden von Mathematik findet sich zwar auch in den Positionen der deutschen Mathematikdidaktik (vgl. Tenorth 1994, Winter 1995, Heymann 1996), dass zur „Mathematischen Grundbildung“ auch gehört, „Mathematik als deduktiv geordnete Welt eigener Art“ (Winter, 1995) zu sehen, hebt Winter allerdings stärker hervor. Diese Sichtweise entspricht der Unterrichtskultur im traditionellen deutschen Mathematikunterricht, in dem das Bearbeiten von Aufgaben, die rein formales Wissen erfordern, einen höheren Stellenwert hat als in manch anderem Land. Deshalb bezieht die nationale Expertengruppe, anders als im internationalen Test, auch Aufgaben mit ein, in denen nur technische Fähigkeiten abverlangt werden. Solche Fähigkeiten werden in der nationalen Konzeption als notwendige Voraussetzungen mathematischer Grundbildung gesehen. Im internationalen Test hingegen wurden keine solchen Aufgaben verwendet, weil sie nicht den Focus von Literacy im Sinne der engen Verbindung von Phänomen und Begriff abbilden, wie er in der Sichtweise von Freudenthal zum Ausdruck kommt, die grundlegend für das internationale Konzept ist.

Ein weiterer Grund für eine Erweiterung und Differenzierung des internationalen Ansatzes ist durch die unterschiedlichen Denkweisen begründet, die mathematisches Arbeiten ausmachen. Dies drückt Klipatrick (2002) aus in der Gegenüberstellung von „procedural fluency“ und „conceptual understanding“ und Winter (1995), indem er auf strukturierende (konzeptuelle) Fähigkeiten einerseits und auf die Notwendigkeit von technischen (prozeduralen) Fertigkeiten

ten andererseits hinweist. Mathematisches Arbeiten erfordert sowohl prozedurales Wissen als auch konzeptuelles Wissen. Die Klasseneinteilung in der nationalen Rahmenkonzeption geht auf dieses unterschiedliche Wissen ein.

Somit wurden die drei internationalen Kompetenzklassen entsprechend dem in einer Aufgabe vorwiegend zu aktivierendem Wissen (prozedural oder konzeptuell) in fünf Kompetenzklassen zerlegt. Später wurden diese fünf Kompetenzklassen nochmals gebündelt, diesmal aber quer zu den internationalen Kompetenzklassen zu den so genannten „drei Typen mathematischen Arbeitens“. Diese drei Typen mathematischen Arbeitens beschreiben die Bearbeitung der „technischen Aufgaben“, der „rechnerischen Problemlöse- und Modellierungsaufgaben“ und der „begrifflichen Problemlöse- und Modellierungsaufgaben“.

Kontextfreie Aufgaben, in denen nur technische Fähigkeiten abverlangt werden, werden zu den „technischen Aufgaben“ zusammengefasst. Diese Aufgaben lassen sich unmittelbar durch die Anwendung bekannter mathematischer Prozeduren lösen. Zu den rechnerischen Modellierungs- und Problemlöseaufgaben werden alle die Aufgaben gezählt, bei denen die Mathematisierung auf einen Ansatz führt, der prozedural zu bearbeiten ist. Es sind Anwendungsaufgaben oder innermathematisch problemhaltige Aufgaben. Hierzu gehören die „üblichen“ Textaufgaben, in denen es meist darum geht, eine gesuchte Größe zu berechnen.

Ist es zur Lösung einer Aufgabe erforderlich, einen begrifflichen Zusammenhang herzustellen bis hin zu dem Entwerfen von umfassenden Lösungsstrategien und Verallgemeinerungen und Reflexionen, wird von begrifflichen Modellierungs- und Problemlöseaufgaben gesprochen. Diese Bezeichnung schließt sich an Hieberts Definition von „conceptual knowledge“ an (Hiebert 1986). Charakteristisch für diese Aufgaben ist, dass aufgrund einer erkannten oder erst konstruierten Beziehung ein Zusammenhang hergestellt werden muss. Die Lösung erfolgt also erst aus dem Beobachten und Ausnutzen des begrifflichen Zusammenhangs.

2.1.4 Die Struktur des Aufgabenmodells beim nationalen PISA-Test

In der Konzeption von PISA wird das Aufgabenlösen als Kreislauf von Finden des Ansatzes, Verarbeiten, Interpretieren und sich Vergewissern der Stimmigkeiten des Ansatzes beschrieben. Diese Sichtweise findet man in der mathematikdidaktischen Literatur als Prozess des Modellierens (Blum 1996). Diesen Prozess beschrieben Kintsch und Greeno (1985) sowie Reusser (1992, 1996) bereits am Beispiel sogenannter Sachaufgaben. Auch Blum bezieht sich zunächst ausschließlich auf anwendungsbezogene Aufgaben. Die Teilprozesse

werden – terminologischen Vorschlägen von Schupp (1988) folgend – mit *mathematisieren*, *verarbeiten*, *interpretieren* und *validieren* beschrieben:

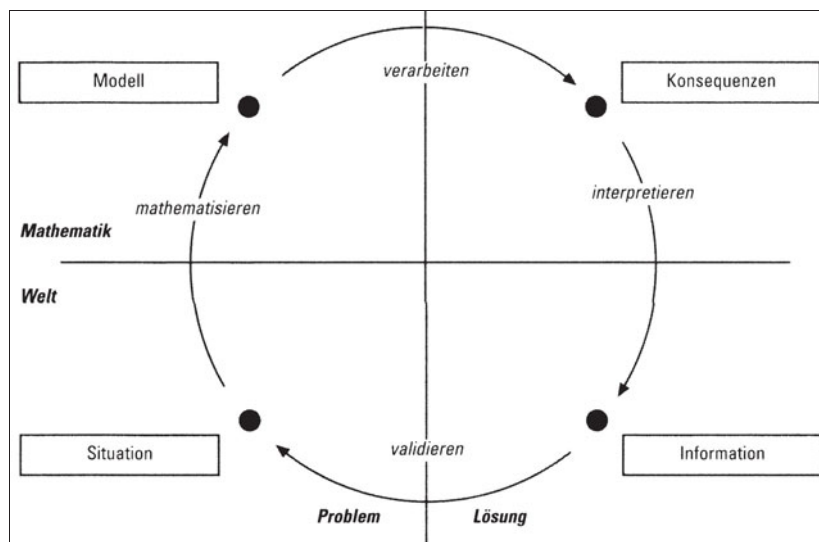


Abbildung 1: Ein Schema für den Modellierungsprozess bei mathematischen Aufgaben (Neubrand 2004, 36, vgl. de Lange, 1987 sowie Blum, 2002)

Ausgangspunkt ist eine Realsituation. Diese Situation muss *verstanden*, *präzisiert*, *strukturiert* und meist auch *vereinfacht* werden zu einem „Realmodell“. Dieses wird dann *mathematisiert*, also in die Mathematik übersetzt. Es resultiert ein *mathematisches Modell* der Ausgangssituation. Nun werden *mathematische Hilfsmittel* herangezogen, mit denen das Modell bearbeitet wird. Es entstehen gewisse mathematische Ergebnisse, die in der Realität *interpretiert* werden müssen. Schließlich müssen diese Ergebnisse *validiert* werden, es muss also überprüft werden, ob die gefundene Lösung der realen Problemsituation auch angemessen und vernünftig ist. Sollte dies nicht der Fall sein, muss der ganze Zyklus nochmals durchlaufen werden. Komplexe Aufgaben erfordern häufig ein wiederholtes Durchlaufen der Teilprozesse. Es entsteht ein zirkulärer Prozess. Diesen Prozess nennt man *mathematisches Modellieren* (vgl. auch Klieme u.a. 2001).

In der nationalen Rahmenkonzeption von PISA wird dieses Schema erweitert auch für innermathematische Aufgaben verwendet und zwar für solche „Probleme“, die das Finden eines Lösungsansatzes beinhalten. Denn auch

Geometrische Denkweisen beim Lösen von
PISA-Aufgaben

Triangulation quantitativer und qualitativer Zugänge
Ulfig, F.

2013, XXI, 281 S. 92 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-00587-0