

## 2 Einführende motivierende Beispiele

In diesem Kapitel werden einige einführende Beispiele zur Modellbildung linearer, linearer gemischt-ganzzahliger und nichtlinearer kontinuierlicher Optimierungsprobleme gegeben, die den Leser mit den Bausteinen eines Optimierungsmodells, d. h. Daten, Variablen, Nebenbedingungen und Zielfunktion, vertraut werden lassen sollen und ihn in die Lage versetzen sollen, erste Modellformulierung selbständig vorzunehmen. Dabei wird auf die schon in Kapitel 1 gelegten allgemeinen Grundlagen zur Modellbildung Bezug genommen. Bei den noch recht übersichtlichen Problemen, die sich aus echten Problemen ableiten, hier aber dazu dienen, bestimmte Strukturen herauszuarbeiten, ist es noch möglich, die Probleme exakt in einem mathematischen Modell abzubilden. In den später behandelten größeren Problemen wird man bemüht sein, soviel Realität wie nötig und sinnvoll abzubilden, aber doch auch Vereinfachungen vorzunehmen.

### 2.1 Beispiel: Lineare Optimierung - Verleihung von Booten

In diesem Beispiel werden die grundlegenden Elemente eines Optimierungsmodells illustriert. Die Firma *Sunshine Cruises Ltd.* mit Sitz in England ist darauf spezialisiert, Flussboote an Urlauber zu verleihen. In einer typischen Urlaubswoche erzielt sie für Standard- und Premierboote einen Nettoerlös (Einnahmen minus variable Kosten) von £600/Woche bzw. £800/Woche. Die Firma möchte den alten gepachteten Bootsbestand durch neue Boote ersetzen und möchte den Entscheidungsprozess durch einige quantitative Überlegungen aus dem Bereich der mathematischen Optimierung absichern.

Insgesamt besitzt die Firma eine Anlegekapazität von 350 Booten; allerdings dürfen es nicht mehr als 200 Premierboote sein. Es sollen aber auch nicht weniger Premierboote als Standardboote sein. Jedes Premierboot erfordert etwa 4 Stunden Wartungsaufwand pro Woche; für Standardboote sind es nur 3 Stunden. Die verfügbaren Arbeitskräfte erlauben einen Gesamtwartungsaufwand von höchstens 1400 Stunden pro Woche.

Das Problem erscheint recht einfach und wohl strukturiert; einige kompliziertere Aspekte sind vernachlässigt und lassen es hier einfacher verdaulich erscheinen. Um zu einer Modellformulierung zu gelangen, fragen wir: Welche Freiheitsgrade stehen zur Verfügung und welche Entscheidungen müssen getroffen werden? Anlegekapazitäten und Wartung sind abgeleitete Informationen, nicht aber fundamentale Entscheidungen. Fundamentale Entscheidungen sind: *Wieviele Premier- und Standardboote sollen angemietet werden?* Sobald diese Fragen beantwortet sind, können alle übrigen interessierenden Größen berechnet werden. Wir werden nun das Problem mit Hilfe von Entscheidungsvariablen oder kurz *Variablen* formulieren, die bestimmten Nebenbedingungen unterliegen.

Zudem wird der Formulierung eine Zielfunktion hinzugefügt, die in unserem Falle zu maximieren ist.

Bezeichne  $p$  die Anzahl der Premierboote,  $s$  die der Standardboote. Sinnvollerweise erwarten wir, dass die Variablen  $p$  und  $s$  keine negativen Werte annehmen können und stets ganzzahlig sind. Den Aspekt der Ganzzahligkeit wollen wir hier zunächst vernachlässigen, d. h. wir würden auch eine Lösung mit Wert  $p = 18.3$  akzeptieren.

Mit Hilfe der eingeführten Variablen können wir nun die Modellbedingungen formulieren und somit  $p$  und  $s$  verknüpfen. Die Anlegebeschränkung führt auf die Ungleichung

$$p + s \leq 350 \quad . \quad (2.1.1)$$

Die Bedingung, dass höchstens 200 Premierboote angemietet werden können, wird durch

$$p \leq 200$$

berücksichtigt. Derartige Ungleichungen, die nur eine Variable enthalten, die mit Koeffizient 1 auftritt, werden Schranken genannt und können numerisch effizienter als allgemeine Ungleichungen behandelt werden.

Die Wartungsbedingung erfordert, dass die gesamt erforderliche Wartungszeit  $4p$  und  $3s$  für die Premier- und Standardboote die verfügbare Stundenzahl von 1400 nicht überschreitet, also

$$4p + 3s \leq 1400 \quad .$$

Weiter muss noch sichergestellt werden, dass nicht weniger Premierboote als Standardboote angemietet werden, d. h.

$$p \geq s \quad \text{bzw.} \quad p - s \geq 0 \quad .$$

Schließlich wird noch gefordert, dass die Variablen keine negativen Werte annehmen, d. h.

$$p \geq 0 \quad , \quad s \geq 0 \quad .$$

Sämtliche Ungleichungen, Schranken und Gleichungen im Modell, die den zulässigen Bereich implizit beschreiben, werden Nebenbedingungen genannt.

Hinsichtlich der Aufstellung der Nebenbedingungen ist zu beachten, dass jede für sich verschiedene Einheiten haben mag, z. B. Stunden oder Anzahl von Booten, die linke und rechte Seite aber stets die gleichen Einheiten haben müssen. Insbesondere ist darauf zu achten, dass nicht versehentlich  $kg$  und  $cm$  addiert werden. Vorsicht ist auch gefordert bei der Addition von Größen gleichen Types aber verschiedener Einheit, z. B.  $cm$  und  $km$ , oder  $Liter$  und  $m^3$ ; in solchen Fällen ist eine Konvertierung der Einheiten erforderlich.

Nachdem nun alle Bedingungen des Problems modelliert wurden, können wir uns der Zielfunktion zuwenden. Hier ist es sinnvoll, den Nettoerlös pro Woche zu maximieren. Jedes Premierboot ergibt £800 pro Woche; bei Anmietung von  $p$  Premierbooten ergibt sich also  $800p$ . Entsprechend folgt für die Standardboote  $600s$ , und somit die in £ gemessene und zu maximierende Zielfunktion

$$z = z(p, s) = 800p + 600s \quad .$$

Das gesamte Modell kann also wie folgt zusammengefasst werden:

$$\max \quad 800p + 600s \quad (2.1.2)$$

unter den Bedingungen

$$\begin{array}{rclcl} p & + & s & \leq & 350 \\ p & & & \leq & 200 \\ 4p & + & 3s & \leq & 1400 \\ p & - & s & \geq & 0 \end{array} \quad , \quad p \geq 0 \quad , \quad s \geq 0 \quad . \quad (2.1.3)$$

In der Praxis werden solche Probleme mit Hilfe der in Abschnitt 4.1 beschriebenen Verfahren gelöst. Im vorliegenden Modell mit nur 2 Variablen, ist es jedoch auch möglich, das Problem graphisch zu lösen und damit ein Gefühl für die Lösung zu entwickeln.

Natürlich könnte man sich der Lösung auch mit einem Versuch-und-Irrtum-Verfahren [engl.: *trial and error*] nähern. Versucht man die Werte 50, 100, 150, 200, 250, 300 und 350 für die Variablen, so findet man z. B. das Wertepaar  $p = 150$  und  $s = 150$  mit dem Nettoerlös £210,000 oder  $p = 200$ ,  $s = 100$  und  $z = £220,000$ . Dieses Verfahren ist jedoch recht aufwendig und bei Auswertung weniger Kombinationen zu ungenau.

Der zulässige Lösungsraum lässt sich graphisch wie in Abbildung 2.1 darstellen:  $s$  ist auf der horizontalen,  $p$  auf der vertikalen Achse aufgetragen. Da  $s$  und  $p$  nichtnegative Variablen sind, brauchen wir uns nur um den Teil des Graphen im nichtnegativen Quadranten zu kümmern. In der Abbildung entsprechen die Grenzen des zulässigen Bereichs den aus der Ungleichung

$$p + s \leq 350$$

abgeleiteten Geraden

$$p = -s + 350 \quad .$$

Zulässige Kombinationen der Variablen  $p$  und  $s$  ergeben sich aus der Geraden  $p = -s + 350$  und dem Halbraum

$$p < -s + 350$$

bzw. genauer dem Bereich zwischen der Gerade und den Koordinatenachsen; hinsichtlich der anderen Ungleichungen verfährt man entsprechend. Der schattierte Bereich umfasst alle zulässigen Wertepaare der Variablen  $p$  und  $s$ . Die Zielfunktion bzw. ihre Konturlinien, d. h. die Menge aller Punkte gleichen konstanten Wertes  $k$ , sind Geraden der Form

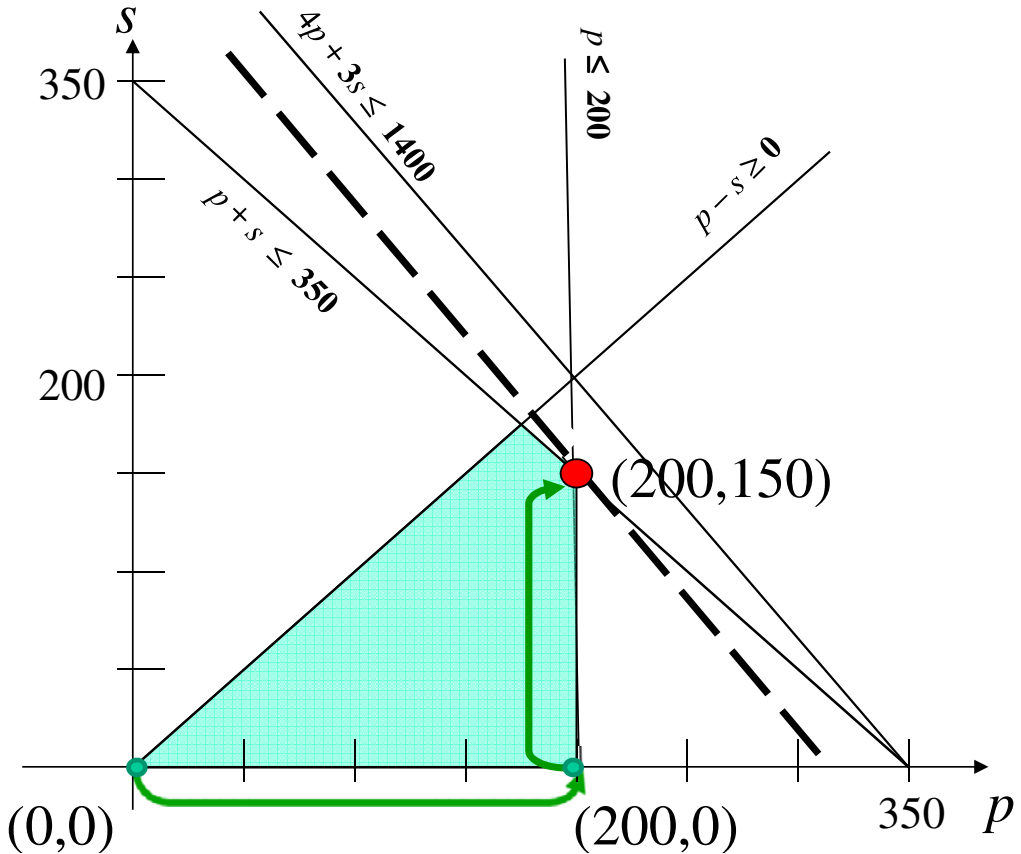
$$800p + 600s = k \quad .$$

Ein passender Wert für  $k$  lässt sich ableiten, in dem man typische Werte  $s$  und  $p$  annimmt, z. B.  $s = p = 200$ ; weiter lässt sich die Steigung  $m = -0.75$  der Geraden berechnen.

Da die Zielfunktion maximiert werden soll, liegt es nahe, die Niveaulinien der Zielfunktion so parallel zu verschieben, dass die Konstante  $k$  wächst und die Konturlinie noch eine Schnittmenge mit dem zulässigen Bereich hat; die gedachte Parallelverschiebung erfolgt in Richtung des Gradienten  $\nabla z = \partial z / \partial(p, s) = (800, 600)^T$  bis die Konturlinie den Punkt  $(p, s) = (200, 150)$  erreicht – jede weitere Verschiebung führt aus dem zuverlässigen Bereich hinaus. Die Feststellung, dass die optimale Lösung auf einer Ecke liegt, lässt sich unter bestimmten Voraussetzungen auf jedes LP-Problem übertragen.

In diesem kurzen Beispiel lautet die optimale Lösung also  $(p, s) = (200, 150)$  mit Zielfunktionswert  $z = £250,000$ . In die Sprache der Firma zurückübersetzt bedeutet dies, 200 Premierboote und 150 Standardboote anzumieten; daraus resultiert ein wöchentlicher Nettoerlös von £250,000. Wie erwartet, werden mehr lukrative Premierboote angeboten. Die Beschränkung, höchstens 200 Premierboote anmieten zu können, limitiert die Zahl der anzumietenden Premierboote; die Entscheidungsvariable  $p$  liegt gerade an ihrer oberen Schranke. Im optimalen Lösungspunkt  $(p_*, s_*) = (200, 150)$  ist wegen  $4p_* + 3s_* = 1250$

**Abbildung 2.1** Graphische Lösung eines LP-Problems mit zwei Variablen. Entlang der horizontalen Achse ist die Anzahl  $p$  der Premierboote, entlang der vertikalen Achse die Anzahl  $s$  der Standardboote aufgetragen. Die gestrichelte Linie ist die Konturlinie der Zielfunktion, die durch den Lösungspunkt  $(p, s) = (200, 150)$  verläuft. Weiter sind hervorgehoben die Initialisierung  $(0,0)$  und der nächste Vertex  $(200,0)$ , der im Simplexverfahren untersucht wird.



die Stundenbeschränkung dagegen nicht limitierend, d. h. im Fachjargon *nicht aktiv*. Zu bemerken ist noch, dass die Lösung ohne besonderes Zutun bereits ganzzahlig ist; dies ist im allgemeinen jedoch nicht so.

## 2.2 Beispiele: Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung

Im folgenden wird anhand einiger Beispiele verdeutlicht, wie sich *praktische Probleme* mit Hilfe gemischt-ganzzahliger Modelle formulieren lassen. Dabei zeigt sich, dass ganzzahlige Variablen im wesentlichen zur Beschreibung der folgenden Strukturen verwendet werden: Nichtteilbare und zählbare Größen [siehe z. B. die Abschnitte 2.2.1 und 7.4.2],

Minimalgrößen [siehe z. B. Abschnitt 7.4.1], Zustände und *ja/nein*-Entscheidungen und logische Bedingungen [Kapitel 5.1 und Abschnitt 5.2], und schließlich einfache nichtlineare Funktionen [Abschnitte 5.5, 5.6.4 und 5.7].

### 2.2.1 Beispiel 1: Von Kühen und Schweinen

Ein Landwirt mit Schwerpunkt Viehhaltung (Kühe, Schweine) möchte seinen Tierbestand erweitern. Er hat die Möglichkeit, Kälber und Jungschweine für den Preis von 1 kEuro=1000 Euro zu erwerben; ihm stehen jedoch augenblicklich nur 3.5 kEuro zur Verfügung. Später kann er einen Erlös von 3 kEuro je Kuh bzw. 2 kEuro je Schwein erzielen. Da seine Stallungen begrenzt sind und er diese nicht baulich erweitern will, muss er die Randbedingungen berücksichtigen, dass er höchstens 2 Jungschweine und 2 Kälber kaufen kann. Natürlich möchte der Landwirt seinen zukünftigen Erlös maximieren. Ihm stellt sich nun die Frage, wieviele Kälber und Jungschweine er erwerben soll. Die offensichtliche Lösung zu diesem Problem besteht darin, 2 Kälber und ein Jungschwein zu kaufen. Dieses überschaubare Problem soll nun in eine mathematische Form übersetzt und als ganzzahliges Optimierungsproblem gelöst werden.

Die Aufgabe des Modellierers besteht zunächst darin, das gegebene Problem in eine mathematische Form zu transformieren. Dabei sind zuerst *Variablen* zu identifizieren, mit deren Hilfe sich *Zielfunktion* und *Nebenbedingungen* beschreiben lassen. Die Variablen werden meist so gewählt, dass sich damit gleich die wesentlichen Fragen der Aufgabenstellung beantworten lassen. Im vorliegenden Fall bietet es sich also an, **Variablen**  $\kappa$  und  $\sigma$  mit den Eigenschaften

$$\kappa, \sigma \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

für die Zahl der zu kaufenden Kälber und Jungschweine einzuführen. Die Wahl der Grundmenge  $\mathbb{N}_0$  berücksichtigt, dass lebende Kälber und Schweine nur in ganzen Einheiten gekauft werden können. Mit Hilfe von  $\kappa$  und  $\sigma$  lässt sich nun die **Zielfunktion** einfach schreiben als

$$\max Z \quad , \quad Z = 3\kappa + 2\sigma \quad . \quad (2.2.1)$$

Die **Nebenbedingungen** nehmen die Form

$$0 \leq \kappa, \sigma \leq 2$$

und

$$\kappa + \sigma \leq 3.5 \quad (2.2.2)$$

an. Steht kein Optimierungsverfahren zur Verfügung, so bietet es sich bei diesem überschaulichen Problem noch an, sämtliche Werte, die  $\kappa$  und  $\sigma$  annehmen können, in die Zielfunktion (2.2.1) einzusetzen und das Wertepaar  $(\kappa, \sigma)$  zu bestimmen, das den maximalen Erlös liefert. Wegen  $\kappa, \sigma \leq 2$  brauchen dabei nur sämtliche 2-Tupel aus  $\{0, 1, 2\}$ , d. h. insgesamt  $3^2 = 9$ , ausprobiert werden. Die Ergebnisse dieser Vorgehensweise sind in der nachstehend dargestellten Tabelle zusammengefasst:

$\kappa$	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$\sigma$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$Z$	0	3	6	2	5	8	4	7	-

In der Tat liest man aus dieser Tabelle das erwartete Ergebnis ( $\kappa = 2, \sigma = 1$ ) und  $Z = 8$  ab. Das Wertepaar  $(2, 2)$  ist unzulässig, da es die Bedingung (2.2.2) verletzt. Bei Problemen niedriger Dimension kann die vorgestellte Methode zum Erfolg führen. In dem Fall, dass der Landwirt jedoch statt nur 2 Kälber bzw. Kühe etwa jeweils 9 Tiere kaufen könnte und statt 3.5 kEuro nun 20 kEuro zur Verfügung hätte, müssten bereits  $10^2 = 100$  2-Tupel aus  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  getestet werden. Noch unübersichtlicher würden die Verhältnisse, wenn nicht nur Kälber und Schweine, sondern vielleicht auch noch Hühner, Puten und anderes Getier beim möglichen Kauf berücksichtigt werden müssten. Aus diesem Grunde ist es das Ziel, ein Optimierungsverfahren einzusetzen, das auch in allgemeinen Fällen die Komplexität beherrschen kann.

### 2.2.2 Beispiel 2 : Ein Projektplanungssystem

Für die nächsten  $T$  Zeitperioden, z. B.  $T$  Monate, sollen in einer Firma aus einer möglichen Auswahl von  $P$  Projekten solche ausgewählt werden, die einen maximalen Gewinn ermöglichen. In jeder Zeitperiode  $t$  steht ein Kapital von  $B_t$  Euro zur Verfügung. Wird in der Zeitperiode  $t$  das Projekt  $p$  bearbeitet, so entstehen durch die Beanspruchung von Personal, Maschinen oder Räumen, Kosten in Höhe von  $K_{pt}$  Euro im Laufe der Periode  $t$  und ein Erlös in Höhe von  $E_p$  Euro am Ende des Planungszeitraumes.

Wir können nun mit Hilfe der binären **Variablen**  $\delta_p$

$$\delta_p = \begin{cases} 1, & \text{das Projekt } p \text{ wird bearbeitet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \delta_p \in \{0, 1\}, \quad p = 1, \dots, P$$

die **Zielfunktion**

$$\max Z = \sum_{p=1}^P E_p \delta_p$$

formulieren; die **Nebenbedingung** hat mit diesen Variablen die Gestalt

$$\sum_{p=1}^P K_{pt} \delta_p \leq B_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

Probleme mit dieser Struktur nennt man auch binäre Rucksackprobleme [engl.: *binary knapsack problem*].

### 2.2.3 Beispiel 3 : Ein Produktionsplanungssystem

Betrachtet werden soll ein Produktionsplanungssystem mit  $N$  Produkten. Die mit der Produktion eines Produktes  $p$  anfallenden Kosten setzen sich aus Rüst- und Proportionalkosten  $K_p$  bzw.  $C_p$  zusammen. Zur Herstellung von Produkt  $p$  werden  $A_{rp}$  kg eines Rohstoffes  $r$  benötigt; insgesamt stehen  $M$  verschiedene Rohstoffe in beschränkter Menge  $B_r$  zur Verfügung. Erwartet wird, dass maximal  $D_p$  kg von Produkt  $p$  zu einem Erlös von  $E_p$  Euro/kg nachgefragt werden.

Nachstehend werden die Produktions- und Identifikations-**Variablen**

$$\delta_p = \begin{cases} 1, & \text{Produkt } p \text{ wird hergestellt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad p = 1, \dots, P$$

$0 \leq x_p =$  Menge, die von Produkt  $p$  produziert wird

eingeführt, mit deren Hilfe die **Zielfunktion**

$$\max Z = \sum_{p=1}^P E_p x_p - \sum_{p=1}^P (K_p \delta_p + C_p x_p)$$

und die **Nebenbedingungen**

$$\sum_{p=1}^P A_{rp} x_p \leq B_i \quad , \quad i = 1, \dots, I$$

sowie

$$0 \leq x_p \leq D_p \delta_p \quad , \quad \forall p$$

formuliert werden. Zu bemerken ist, dass  $x_p > 0$  nur möglich ist, wenn  $\delta_p = 1$  gilt;  $\delta_p = 0$  impliziert nämlich  $x_p = 0$ .

## 2.2.4 Beispiel 4 : Optimale Depotwahl - Ein Standortplanungsmodell

Eine Mineralölgesellschaft möchte in der Zentralschweiz 2 durch Pipelines versorgte Depots eröffnen, die 4 umliegende Tankstellen mit bekannten Nachfragemengen  $D_1, D_2, D_3$  und  $D_4$  versorgen sollen. Infolge der schwierigen Verhältnisse im Gebirge sind die Verbindungen zwischen Depots und Tankstellen eingeschränkt;  $L_{ij} \in \{0, 1\}$  beschreibt, ob zwischen Depot  $i$  und Tankstelle  $j$  eine Verkehrsverbindung besteht, z. B. sollen als mögliche Verbindungen nur

$L_{11}, L_{12}, L_{14}$	es gibt keine Verbindung von Depot 1 zu Tankstelle 3
$L_{21}, L_{22}, L_{23}, L_{24}$	Depot 2 beliefert alle Tankstellen
$L_{32}, L_{33}, L_{34}$	es gibt keine Verbindung von Depot 3 zu Tankstelle 1

in Betracht gezogen werden. Reparatur- oder Veränderungsaspekte in den Depots im Laufe der Zeit sollen nicht betrachtet werden. Von den möglichen Positionen  $O_1, O_2$  und  $O_3$  der Depots mit Kapazitäten  $A_1, A_2$  und  $A_3$  sollen 2 so gewählt werden, dass die Summe aus Investitions-  $K_i$ , Operations-  $P_i$  und Transportkosten  $C_{ij}$  für diesen Zeitraum minimal wird.

Zur Beschreibung dieses Problems führen wir die **binären Variablen**

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{Ort } i \text{ wird gewählt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad \delta_i \in \{0, 1\} \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

und für die Indexkombinationen  $(i, j)$ , für die  $L_{ij} = 1$ , die kontinuierlichen Variablen

$$0 \leq x_{ij} = \text{Menge, die vom Ort } i \text{ zur Tankstelle } j \text{ transportiert wird}$$

ein. Mit diesen Variablen ist die **Zielfunktion**

$$\min Z = \sum_{i=1}^3 K_i \delta_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1|L_{ij}=1}^4 (P_i + C_{ij}) L_{ij} x_{ij}$$

unter den **Nebenbedingungen**

$$\sum_{j=1|L_{ij}=1}^4 L_{ij}x_{ij} \leq A_i\delta_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad (2.2.3)$$

$$\sum_{i=1|L_{ij}=1}^3 L_{ij}x_{ij} = D_j \quad , \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (2.2.4)$$

und

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 2 \quad (2.2.5)$$

zu minimieren. Eine genauere Betrachtung der Kapazitätsbeschränkungen (2.2.3) zeigt, dass diese die Implikation  $\delta_i = 0 \rightarrow x_{ij} = 0$  beinhalten, während (2.2.4) die Forderung nach Erfüllung der Nachfrage beschreibt. Schließlich erzwingt (2.2.5), dass genau 2 Depots gebaut werden.

Die vorliegende Fragestellung stellt ein typisches Standortplanungsproblem [engl.: *facility location problem*] dar. Die Standortplanung legt die Anzahl und Standorte der Knoten – hier die der Depots – und die gesamte Struktur eines Distributionsnetzwerkes fest. Je nach Detaillierungs- und Aggregierungsgrad fließen Transport-, Bestands- und Produktionsplanung mit ein. Spezialfälle der Standortplanung lassen sich als Weber-Probleme behandeln; dem Leser sei hierzu Wesolowsky (1993,[289]) empfohlen.

### 2.2.5 Beispiel 5 : Optimale Produktverteilung

Angenommen, eine Horde von Studierenden stürmt ein Eiscafé. Nun ist aber nicht soviel Eis da, dass der Eisverkäufer jedem seinen ersten Eis-Wunsch erfüllen kann. Wie kann er eine optimale Zufriedenheit seiner Kunden erreichen, wenn diese jeweils drei Präferenzen angeben können?

Betrachten wir  $n$  Produkte  $p \in \mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$  für  $m$  Kunden  $k \in \mathcal{K} = \{k_1, \dots, k_m\}$ . Mit Hilfe der Indextabellen  $W_{kp}^w \in \{0, 1\}$  indizieren wir, dass Produkt  $p$  auf der Wunschliste von  $k$  Position  $\in \{1, 2, 3\}$  einnimmt. Als Variablen führen wir

$$\delta_{kp} = \begin{cases} 1, & \text{der Kunde } k \text{ erhält das Produkt } p \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad \delta_{kp} \in \{0, 1\} \quad , \quad \forall \{kp\}$$

und

$$\tilde{\alpha}_k = \begin{cases} 1, & \text{der erste Wunsch des Kunden wird verletzt} \\ 0, & \text{der erste Wunsch des Kunden wird erfüllt} \end{cases} \quad , \quad \forall k \in \mathcal{K}$$

ein. Die Variable  $\tilde{\alpha}_k$  wird nur dann erzeugt, wenn der Kunde  $k$  das Produkt  $p$  als ersten Wunsch angegeben hat, d. h.  $W_{kp}^1$  existiert und hat z. B. den Wert 1 – die Tabelle indiziert also, ob das Produkt  $p$  für Kunden  $k$  der erste Wunsch des Kunden ist; ist  $\tilde{\alpha}_k = 1$ , so bedeutet dies, dass der erste Wunsch des Kunden nicht erfüllt wird. In ähnlicher Weise sind die Variablen

$$\tilde{\beta}_k = \begin{cases} 1, & \text{der erste und zweite Wunsch des Kunden wird verletzt} \\ 0, & \text{der zweite Wunsch des Kunden wird erfüllt} \end{cases} \quad \forall k \in \mathcal{K}$$

und



$$\tilde{\gamma}_k = \begin{cases} 1, & \text{der erste, zweite und dritte Wunsch des Kunden wird verletzt} \\ 0, & \text{der dritte Wunsch des Kunden wird erfüllt} \end{cases} \quad \forall k$$

definiert. Schließlich muss die Nebenbedingung

$$\sum_p \delta_{kp} = 1$$

erfüllt werden, d. h. jeder Kunde erhält genau ein Produkt.

Um die Zufriedenheit zu beurteilen, werden Straffaktoren  $S_k^\alpha$ ,  $S_k^\beta$  und  $S_k^\gamma$  eingeführt, die nach dem ersten, zweiten und dritten Wunsch, aber gegebenenfalls auch nach Kundenbedeutung differenziert werden. Je größer die potentielle Zufriedenheit, desto niedriger wird der Straffaktor gewählt. Die Zielfunktion lautet dann:

$$\min \sum_{k \in \mathcal{K}} \left[ S_k^\alpha \tilde{\alpha}_k + S_k^\beta \tilde{\beta}_k + S_k^\gamma \tilde{\gamma}_k \right] .$$

Für existierende Verbote, z. B. wegen Allergie oder Diabetes,

$$V_{kp} = \begin{cases} 1, & p \text{ ist für } k \text{ verboten,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

werden die Binärvariablen fixiert, d. h.

$$\delta_{kp} = 0 \quad , \quad \forall \{k, p | \exists V_{kp}\} .$$

Die Variablen  $\tilde{\alpha}_k$ ,  $\tilde{\beta}_k$  und  $\tilde{\gamma}_k$  sind mit den  $\delta_{kp}$ -Variablen in der folgenden Weise verknüpft:

$$\tilde{\alpha}_k = 1 - \delta_{kp} \quad , \quad \tilde{\beta}_k = \tilde{\alpha}_k - \delta_{kp} \quad , \quad \tilde{\gamma}_k = \tilde{\beta}_k - \delta_{kp} \quad , \quad \forall \{kp\} .$$

## 2.2.6 Beispiel 6 : Modellierung logischer Bedingungen

Mit Hilfe binärer Variablen lassen sich, wie in Kapitel 5.1 ausführlicher dargelegt, logische Bedingungen algebraisch formulieren. Beispielsweise lassen sich die Bedingungen „wenn Entscheidung 1 getroffen wird, dann muss die Variable  $x$  größer sein als irgendeine positive Konstante  $C$ “ und „wenn Entscheidung 1 nicht getroffen wird, dann ist die Variable  $x$  gleich 0“ durch die Ungleichungen

$$C\delta \leq x \leq X\delta$$

beschreiben. Hierbei stellt  $X$  eine obere Schranke von  $x$  dar und  $\delta = 1$  beschreibt den Fall, dass z. B. die Entscheidung, ob Produkt P gestartet werden soll, positiv ausfällt; fällt die Entscheidung negativ aus, so ist  $\delta = 0$ .

## 2.2.7 Beispiel 7 : Optimale Einbruchstrategie - Ein Rucksackproblem

Das *Rucksackproblem* [engl.: *knapsack problem*] ist, wie in Salkin & de Kluyver (1975,[252]) gezeigt, sehr anwendungsrelevant und innerhalb der gemischt-ganzzahligen Optimierung von besonderer Bedeutung, da es als Unterproblem in vielen größeren Problemen enthalten ist und viele Techniken, die zu verbesserten MIP-Formulierungen führen, auf der Analyse von Rucksack-Strukturen beruhen. Das Rucksackproblems lässt sich am einfachsten

mit Hilfe eines Einbrechers veranschaulichen, der in das Haus einer wohlhabenden Familie einbrechen will. Er hat das Haus seit langem beobachtet und weiß, dass es zahlreiche Objekte enthält, die er sehr begehrt. Da er die Beute mit niemanden teilen möchte, wird er den Einbruch alleine durchführen; daher ist das Gewicht der einzelnen Objekte für ihn sehr relevant - ein schwerer Fernsehapparat scheidet als Beute aus, da ihm vor einiger Zeit sein Auto abhanden gekommen ist. Er ist allerdings ein sehr ordentlicher und wohl organisierter Dieb und deshalb hat er alle Informationen während der vergangenen 17 Wochen detailliert dokumentiert. Aus der Liste aller möglichen Objekte interessieren ihn besonders 8 Einzelobjekte. Die nachstehende Tabelle enthält die Daten dieser Objekte: Ihren geschätzten Wert  $V_i$  in Einheiten von 1000 Euro und ihr Gewicht  $W_i$  in Kilogramm

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$V_i$	15	100	90	60	40	15	10	1
$W_i$	2	20	20	30	40	30	60	10

Zur Vorbereitung hat der potentielle Dieb während der vergangenen 3 Monate einen enormen Aufwand betrieben und viel Zeit in einem Body-Building-Zentrum verbracht, um seinen Körper zu stählen und für diese Aktion fit zu machen. Er glaubt so, zumindest für eine kurze Weile einen Sack mit einem Gesamtgewicht von 102 kg tragen zu können. Realistischerweise schätzt er die Situation so ein, dass er nur einmal einbrechen kann. Da alle Objekte zusammen 212 kg wiegen, kann er, er bedauert dies sehr, nicht alle Objekte mitnehmen. Lange hat er gegrübelt, welche Objekte er mitgehen lassen soll, wenn er den Gesamtwert maximieren möchte. Glücklicherweise hat unser notorischer Dieb bei einem seiner letzten Einbrüche eine Vielzahl von Büchern erbeutet und in einem von diesen Büchern fand er einige Erklärungen über das Rucksackproblem. Nachfolgend das, was er daraus gelernt hat:

Das allgemeine *Rucksackproblem* besteht darin, aus einer Menge von Objekten, deren Gewichte und Werte bekannt sind, eine Untermenge auszuwählen, die das zulässige Gewicht eines Rucksacks [engl.: *knapsack*] nicht überschreitet und den Gesamtwert der ausgewählten Objekte maximiert; die Objekte dürfen wie bei einem Einkauf mit beliebigen Vorrat mehrfach gewählt werden. Bereits bei Dantzig (1957,[62]) findet sich eine Modellformulierung und ein Lösung des Problems, bei dem die wesentliche Entscheidung darin liegt, zu bestimmen, wieviel Objekte von jedem Typ gewählt werden. Damit kann das Problem, das sehr umfassend und didaktisch hervorragend in Martello & Toth (1990,[203]) beschrieben ist, wie folgt formuliert werden.

Sei  $\sigma_i$  die ganzzahlige Variable, die beschreibt, wie viele Objekte vom Typ  $i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) gewählt werden,  $W_i$  das Gewicht vom Typ  $i$ ,  $V_i$  der Wert vom Typ  $i$  und  $C$  die Kapazität des Rucksacks. Die zu maximierende Zielfunktion lautet somit

$$\max z \quad , \quad z := \sum_{i=1}^n V_i \sigma_i$$

und unterliegt der Nebenbedingung, dass die zulässige Kapazität des Rucksacks nicht überschritten werden darf

$$\sum_{i=1}^n W_i \sigma_i \leq C \quad , \quad \sigma_i \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

Dieses Problem erscheint eigentlich recht einfach und ist wohl auch eines der am einfachsten zu formulierenden MIP-Probleme, da es nur eine Ungleichungsnebenbedingung

besitzt. Dennoch ist es sehr schwierig zu lösen. Die benötigte Rechenzeit zur Lösung des Problems wächst exponentiell in der Zahl  $n$  der Objekte. Für große  $n$  ist es nicht sinnvoll, das Problem mit einem MILP-Algorithmus zu lösen, sondern es ist besser, dies mit speziellen Verfahren zu tun.

Eine häufig verwendete Variante des Problems besteht wie im Beispiel in der Limitierung, dass jeder Objekttyp nur einmal gewählt werden darf; in diesem binären Rucksackproblem, das unser Dieb zu lösen hat, ist also  $\sigma_i \in \{0, 1\}$ . Hat er auf einem seiner früheren Beutezüge auch das Buch von Kallrath & Wilson (1997,[167]) erbeutet, so findet er darin auf der beigelegten CD unter dem Namen *burglar* eine Modelldatei seines Problems und z. B. mit **Xpress-MP**<sup>1</sup> die Lösung  $\sigma := \{1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0\}$  und  $z = 280$ . Sein Rucksack wiegt mit diesen Objekten gerade 102 kg.

## 2.3 Beispiel: Nichtlineare Optimierung - Ein Mischungsproblem

Dieses übersichtliche Beispiel ist eine vereinfachte Version eines realen Problems, bei der es um die Entsorgung giftiger Schlacke ging, die einige schädliche Komponenten, z. B. Kadmium, enthält. Lieferungen giftiger Schlacke aus verschiedenen Quellen werden in einem Zwischenprozess gemischt (deswegen lassen sich die Komponenten nicht getrennt aufbewahren) und schließlich in Endlagerstellen deponiert. Formal kann das Problem wie folgt beschrieben werden: Schlacke, die Komponenten  $c$  aus Quellen  $i$  enthält, wird in Kläranlage  $j$  gemischt und verarbeitet und schließlich dem Endlager  $k$  zugeführt. Die maximale Menge der Komponente  $c$ , die im Endlager  $k$  aufgenommen werden kann, beträgt  $M_{ck}$ . Somit ergeben sich die Indizes des Problems

$$\begin{array}{ll} c \in \{1, 2, \dots, C\} & : \text{Komponenten} \\ i \in \{1, 2, \dots, I\} & : \text{Quellen} \\ j \in \{1, 2, \dots, J\} & : \text{Kläranlagen} \\ k \in \{1, 2, \dots, K\} & : \text{Endlager} \end{array} \quad .$$

Die Daten sind

$$\begin{array}{ll} A_i & : \text{die aus } i \text{ zugeführte Menge} \\ C_{jk} & : \text{die Entsorgungskosten (Euro/Tonne), wenn Kläranlage } j \text{ nach } k \text{ entsorgt} \\ F_{ci} & : \text{der relative Anteil der Komponente } c \text{ im Material aus Quelle } i \\ M_{ck} & : \text{die maximale Menge von Komponente } c, \text{ die } k \text{ zugeführt werden darf} \end{array} \quad .$$

Es bieten sich die folgenden Variablen an:

$$\begin{array}{lll} q_{cj} & \geq & 0 : \text{Durchsatz an Komponente } c \text{ in } j \text{ in Tonnen} \\ t_j & \geq & 0 : \text{Gesamtmenge, die durch } j \text{ fließt} \\ x_{ij} & \geq & 0 : \text{Menge, die von } i \text{ nach } j \text{ gesendet wird} \\ y_{jk} & \geq & 0 : \text{Menge, die von } j \text{ nach } k \text{ entsorgt wird} \\ \lambda_{jc} & \geq & 0 : \text{relativer Anteil der Komponente } c \text{ in Kläranlage } j \end{array} \quad .$$

Im vorliegenden Problem sollen die Entsorgungskosten

<sup>1</sup> **Xpress-MP** ist ein eingetragenes Markenzeichen der Firma Dash Optimization (<http://www.dashoptimization.com>).

$$\min \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K C_{jk} y_{jk}$$

minimiert werden, wobei alle anfallende Schlacke entsorgt werden muss, d. h.

$$\sum_{j=1}^J x_{ij} = A_i \quad , \quad \forall i \quad .$$

Für jede Kläranlage  $j$  gelten somit die folgenden Massenbilanzen

$$\sum_{i=1}^I x_{ij} = t_j = \sum_{k=1}^K y_{jk} \quad , \quad \forall j$$

der ein- und abfließenden Mengen. Als nächstes wird die Menge  $q_{cj}$  [in Tonnen]

$$q_{cj} = \sum_{i=1}^I F_{ci} x_{ij}$$

der in  $j$  einfließenden Komponente  $c$  berechnet. Um die maximale Aufnahmekapazität für Komponente  $c$  in  $k$  beachten zu können, müssen wir die absolute Menge [in Tonnen] an Komponente  $c$  im Ausgang von  $j$  berechnen. Mit Hilfe der Konzentration  $\lambda_{cj}$ , [Anteil von Komponente  $c$  im Ausgangsstrom von Kläranlage  $j$  nach  $k$ ] erhalten wir die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^J \lambda_{cj} y_{jk} \leq M_{ck} \quad , \quad \forall \{ck\} \quad . \quad (2.3.6)$$

Schließlich muss die Variable  $\lambda_{cj}$  noch mit den übrigen Variablen verknüpft werden. Eine solche Relation folgt aus dem folgenden Erhaltungssatz: Der Anteil der Komponente  $c$  an der gemischten Schlacke in der Kläranlage  $j$  entspricht der Menge aller einfließenden Tonnen an giftigem  $c$ , dividiert durch die Menge aller Schlacken, die in  $j$  ankommen, d. h.

$$\lambda_{cj} := \phi_*(D) = \frac{\sum_{i=1}^I F_{ci} x_{ij}}{t_j} = \frac{q_{cj}}{t_j} \quad (2.3.7)$$

oder, äquivalent hierzu

$$t_j \lambda_{cj} = q_{cj} \quad . \quad (2.3.8)$$

In beiden Fällen erhalten wir nichtlineare Terme, wobei (2.3.8) aus numerischen Gründen vorzuziehen ist, da hier eine Division durch Null nicht auftreten kann.

Das vorliegende Mischungsproblem wird in Abschnitt 9.1.1 mit Hilfe eines speziellen Verfahrens zur Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme, der *Rekursion*, gelöst.

## 2.4 Es muss nicht immer Optimierung sein

Die folgende Fallstudie und Analyse einer Kundenanfrage zeigt, dass manchmal bereits eine genaue Situationsanalyse zur Problemlösung führen kann. Es muss dabei nicht in jedem Fall auf ein mathematisches Optimierungsmodell hinauslaufen.

Ein Werksleiter einer Automobilfirma ist für die Produktion der Motoren, Getriebe und Achsen verantwortlich. Es werden 4-, 5-, 6- und 8-Zylindermotoren gefertigt; die 5- und 8-Zylindermotoren sind eher Sondertypen mit geringer Nachfrage und brauchen nicht weiter betrachtet zu werden. Für die 6-Zylindermotoren gibt es eine besonders hohe Nachfrage von 900 Motoren/Tag, die derzeitige Kapazität liegt aber nur bei 600 Motoren/Tag. Bei den 4-Zylindermotoren liegt sie bei 1200 Motoren/Tag, es werden aber nur 900 Motoren/Tag gebraucht. Der Werksleiter wendet sich an die OR-Gruppe des Werkes; sein Ziel ist die Deckung des Bedarfs der 6-Zylindermotoren.

Er gibt auf Anfrage der OR-Gruppe noch die weiteren Informationen. Die Herstellung eines Motors erfordert drei Arbeitsvorgänge:

1	Gießerei	Gießen / Schmieden
2	Transferstraße	Drehen / Frisieren
3	Montage	Motorenmontage

Die Arbeitsvorgänge 1 und 3 unterscheiden sich nicht für 4- und 6-Zylindermotoren. Allerdings benötigen 4- und 8-Zylindermotoren verschiedene Transferstraßen, an denen verteilt auf 25 hintereinander angeordneten Arbeitsplätzen, aber parallel ablaufenden Arbeitsschritten Tätigkeiten wie Bohrungen, Fräsungen etc. durchgeführt werden. Diese Transferstraße wurde vor 8 Jahren entwickelt, in 3 Jahren steht – aus technologischen Gründen und unabhängig von der jetzigen Kapazitätssituation – der Kauf eines völlig neuen Systems an. Momentan kostet der Kauf einer neuen Transferstraße der alten Technologie 100 MEuro bei einer Herstellzeit von 1.5 Jahren; wegen der geplanten Einführung der neuen Technologie und Verschrottung der existierenden Anlagen bleibt also nur noch eine Nutzungsdauer von 1.5 Jahren. Bei einem Erlös von 7000 Euro/6ZM wird ein Deckungsbeitrag von 2000 Euro/6ZM erzielt, bei jedem 4-Zylindermotor sind es 5000 Euro Erlös und 1000 Euro Deckungsbeitrag. Naheliegend sind die folgenden Maßnahmen zur Deckung der Nachfrage, die mit dem Werksleiter diskutiert wurden:

- A Neukauf einer zusätzlichen Transferstraße,
- B Preiserhöhung der 6-Zylinder Motoren,
- C Werbung für die 4-Zylinder Motoren, und
- D Modifikation des bestehenden Fertigungsprozesses.

Die obigen Daten legen es nahe, zu untersuchen, ob sich der Neukauf einer Straße lohnt. Bei den gegebenen Deckungsbeiträgen und der verbleibenden Nutzzeit von 1.5 Jahren = 480 Tagen ist ein zusätzlicher Gesamtdeckungsbeitrag von  $480 \cdot 300 \cdot 2000 \text{ Euro} = 288 \text{ MEuro}$  zu erwarten. Unter rein finanziellen Gesichtspunkten scheint diese Maßnahme also rentabel. Der Werksleiter lehnt diese Maßnahme A aber mit dem Hinweis ab, es würde seiner Reputation schaden, für diese kurze Zeit noch eine Investition in eine alte Technologie zu tätigen. Der Vorschlag B, vermöge einer Preiserhöhung der 6- Zylinder-motoren finanziell immer noch recht positioniert zu sein bzw. den Verkaufschwerpunkt in Richtung 4-Zylindermotoren zu verschieben, missfällt, da er das Preisgefüge auch im Hinblick auf die Marktkonkurrenz zerstört. Die dritte Möglichkeit C missfällt aus ähnlichen Überlegungen, da auf dem Markt nun einmal die 6-Zylindermotoren gefragt sind und 4-Zylindermotoren nur schwer vermittelt werden können.

Bleibt zu hoffen, dass die Analyse des Fertigungsprozesses Lösungsmöglichkeiten aufzeigt. Die Arbeitsschritte 1 und 3 scheinen unkritisch. Der zweite Arbeitsschritt findet am Fließband statt. Es arbeiten etwa 10 Leute an der Transferstraße. Diese beladen die Transferstraße (20 Motoren im Eingangslager) und entladen sie am Ende der Straße (20 Motoren im Ausgangslager). Zwischendurch läuft bis auf kleine Pannen alles automatisch. Allerdings muss in bestimmten Zeitabständen das Werkzeug an der Taktstraße ausgetauscht werden. Diese Zeitabstände hängen insbesondere auch davon ab, mit welcher Taktfrequenz die Fertigung läuft; höhere Taktgeschwindigkeit hat eine stärkere Maschinenabnutzung zur Folge und erfordert eine frühere Ersetzung der Werkzeuge.

Der Engpass liegt in der Tat beim zweiten Arbeitsschritt; der Takt bzw. Durchsatz liegt dort bei  $v = 1$  Motor/Minute, d. h. der langsamste der 25 Arbeitsschritte benötigt 60 Sekunden, die anderen Schritte benötigen weniger Zeit. Weitere Befragungen, ob denn dieser langsamste Schritt änderbar sei, werden negativ beantwortet, da dies Modifikationen der Straße erfordere, die jedoch beim Hersteller der Transferstraßen vorgenommen werden müssten - und dies käme etwa dem Kauf einer neuen Transferstraße alter Technologie gleich. Es fällt jedoch folgendes auf: Bei der aktuellen Frequenz  $v$  müsste man 1440 Motoren/Tag herstellen können.

Zu fragen ist: Wieviel Stunden wird denn täglich gearbeitet? Es stellt sich heraus: Es werden täglich zwei 8-Stunden-Schichten gefahren – die erste von 6-14 und die andere von 14-22 Uhr und dies 5 Tage/Woche. Leider lassen sich Samstags oder Sonntagsschichten nicht mit dem Betriebsrat vereinbaren. Damit kommt man jedoch immer noch auf  $(2/3) \cdot 1440$ , d. h. 960 Motoren/Tag, d. h. es fehlen noch 360 Motoren/Tag bzw. bezogen auf die Nachfrage von 960 M/Tag genau 37.5%. Auf die Frage an den Werksleiter, ob es Stillstand und Ausfallzeiten gibt, wird folgende Liste gegeben, wobei sich die Prozentzahlen bzw. Arbeitsstunden auf eine Woche mit 80 Arbeitsstunden beziehen:

Reinigung durch externe Putzfirma (Freitagnachmittags)	$\approx$	5.00%	=	4.0h
Störfälle:	$\approx$	13.25%	=	16.0h
		6.25%	=	
Mitarbeiter kommen zu spät wegen Stau	$\approx$	3.00%	=	2.4h
Wartung der Straße zu Beginn jeder Schicht	$\approx$	10.00%	=	8.0h

Maßnahmen: Die Reinigung durch die externe Firma kann man auf Samstags verlegen; Ersparnis bereits 5% bzw. 4 Stunden. Die Wartung der Straße – hierfür steht anderes Personal zur Verfügung – nach jeder Schicht kann man in einer Pause durchführen lassen, indem man die zweite Schicht nicht um 14<sup>00</sup>, sondern um 15<sup>00</sup> beginnen lässt; gewonnen werden nochmals 10% bzw. 8 Stunden. In dieser Pause kann man bei Bedarf auch schon den Werkzeugwechsel vorgezogen durchführen lassen oder, wenn sich gerade eine stochastische Panne ereignet hat, eine Reparatur ausführen; hiermit ergeben sich im Mittel weitere 13.25% bzw. 10.6 Stunden. Zwar kann die Anzahl der stochastischen Ausfälle durch bessere Wartung gesenkt werden, der quantitative Zusammenhang ist aber nicht direkt ersichtlich; man kann zumindest aber dafür sorgen, dass wichtige Ersatzteile schneller verfügbar sind, oder ein Expertensystem frühzeitig warnt oder schnell diagnostiziert. Mitarbeiter, die zu spät kommen, kann man durch Mitarbeiter aus der 4-Zylinderproduktion ersetzen lassen. Dann wird zwar dort etwas weniger produziert, was aber infolge der geringen Nachfrage keine weiteren Konsequenzen hat. Es lassen sich also auf diese Weise allein aus der Flexibilisierung 31.25% zusätzliche Kapazität gewinnen, ohne das dabei weitere Ressourcen eingebracht werden müssen.

Das Problem besitzt darüber hinaus noch eine nichtlineare Komponente. Mit den 31.25% eingesparten Stillstandzeiten, dies entspricht weiteren 300 Motoren/Tag, erzielt

man eine Produktionsrate von 900 Motoren/Tag. Gleichzeitig erhält man durch die Flexibilisierung eine regelmäßigere und höhere Wartungsbereitschaft, so dass man die Taktstraße vielleicht noch ein wenig schneller laufen lassen kann; eine Reduzierung des Taktzyklus um nur 3 Sekunden bewirkt eine Kapazitätserhöhung von 960 Motoren/Tag auf 1010 Motoren/Tag. Andererseits führt die bessere Wartung auch zu einer Reduzierung der stochastischen Störfälle. Damit ist das vorgelegte Ziel erreicht.

Gemischt-ganzzahlige Optimierung: Modellierung in der  
Praxis

Mit Fallstudien aus Chemie, Energiewirtschaft,  
Papierindustrie, Metallgewerbe, Produktion und Logistik  
Kallrath, J.

2013, XXII, 381 S. 38 Abb.,

ISBN: 978-3-658-00690-7