

2 Mathematische Modellierung von Risiken

„Die Mathematiker sind eine Art Franzosen; redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anders.“ (Goethe)

2.1 Grundsätzliches zur mathematischen Beschreibung von Risiken

Ein Modell für ein einzelnes Risiko oder auch für ein aus mehreren Einzelrisiken resultierendes Gesamtrisiko besteht im Kern aus Annahmen zur Wahrscheinlichkeitsverteilung; vgl. Kapitel 1. Für ein ausgefeiltes privates oder unternehmerisches Risikomanagement ist zwar eine Gesamtbetrachtung aller wichtigen Risiken erstrebenswert. Allerdings sind dafür geeignete Modelle oft sehr komplex, auch wenn viele Vereinfachungen vorgenommen werden. Es empfiehlt sich also, zunächst mit der Analyse bzw. Modellierung von Einzelrisiken zu beginnen und ggf. in einem weiteren Schritt gleichartige Risiken zusammenzufassen. Was als ein einzelnes Risiko angesehen wird, hängt vom Kontext bzw. dem Detaillierungsgrad der Modellierung ab. Beispielsweise kann das, wenn es um Feuerschäden geht, ein einzelnes Gebäude sein oder der gesamte Gebäudebestand eines Unternehmens, oder aber das einzelne Risiko bezieht sich auf alle Arten möglicher Schäden (durch Feuer, Wasser, Sturm usw.), die an einem Gebäude entstehen können. Auch der betrachtete Zeithorizont spielt eine Rolle.

In Bezug auf den zeitlichen Aspekt ist bei der Modellierung von Risiken jeweils zwischen der Betrachtung zu einem festen Zeitpunkt t und der Betrachtung der Verläufe – sogenannter *stochastischer Prozesse* – zu unterscheiden. Grob gesprochen handelt es sich dabei um eine Menge von Zufallsvariablen $\{X_t \mid t \in T\}$, wobei T in diesem Kontext eine Menge von Zeitpunkten bezeichnet. Wenn $T = \mathbb{N}_0$ ist, heißt der Prozess *zeitdiskret*, wenn $T = \mathbb{R}_0^+$ oder ein Intervall ist, heißt der Prozess *zeitstetig*. Bei zeitdiskreten Prozessen wird die interessierende Zufallsgröße also nur zu bestimmten Zeitpunkten erfasst, wobei die zugrunde gelegte Zeiteinheit je nach Kontext prinzipiell beliebig klein oder groß gewählt werden kann. Bei zeitstetigen Prozessen wird dagegen die Zufallsgröße zu jedem Zeitpunkt eines Zeitintervalls dargestellt. Zudem ist auch hinsichtlich des Wertebereichs der Zufallsgröße X_t zwischen diskreten und stetigen Modellen (oder evtl. Mischformen) zu unterscheiden. Schadenanzahlverteilungen sind z. B. diskret, Schadenhöhenverteilungen meist stetig; mathematische Details finden sich z. B. in [RSST99].

Stochastische Prozesse spielen in der Praxis der Risikomodellierung eine große Rolle. Neben Schadenanzahlentwicklungen werden etwa Finanzmarktpphänomene wie die zufallsbehaftete Wertentwicklung $\{V_t \mid t \geq 0\}$ eines Vermögenswerts, beispielsweise einer Aktie, oder die zufallsbehaftete Entwicklung von Marktzinsen im Zeitverlauf häufig durch stochastische Prozesse beschrieben. Ausgehend vom bekannten Wert $V_0 = v_0$ stellt das zu modellierende Risiko V_t (also

die Wertentwicklung, oder auch eine andere zu modellierende Größe wie etwa die Schadenanzahl) zu jedem Zeitpunkt t eine Zufallsvariable dar, deren Wertverteilung von der vorangegangenen Wertentwicklung abhängen kann. Eine konkrete Realisation der Wertentwicklung V_t (oder einer anderen modellierten Zufallsgröße wie etwa einer Schadenanzahl) wird auch *Pfad* des stochastischen Prozesses genannt. Im zeitdiskreten Fall ist dies also eine Folge von Zahlenwerten v_0, v_1, v_2, \dots . Bei Simulationen spricht man auch von einem stochastischen Szenario für eine bestimmte Schadenanzahl-, Kurs- oder Zinsentwicklung o. Ä.

Im Folgenden wird zunächst eine Reihe wichtiger Grundtypen von Risiken bzw. zugehöriger Verteilungsmodelle überblicksartig vorgestellt. Einzelheiten werden in den nachfolgenden Abschnitten behandelt.

Schadenhöhenverteilungen für Einzelschäden

Die Schadenhöhe x pro eingetretenem Schadenfall für ein Einzelrisiko wird durch eine positive (oder evtl.: nichtnegative) Zufallsvariable X bzw. die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben. Meist wird sie zeitunabhängig modelliert. Die Dimension der Zufallsvariablen ist in der Regel eine Geldeinheit, etwa Euro. Das zu modellierende Einzelrisiko kann beispielsweise eine in der Produktion eingesetzte Maschine, ein versichertes Kraftfahrzeug oder etwas allgemeiner aufgefasst auch ein Kredit sein (wobei bei einem Kredit der „Schadenfall“ durch eine nicht ordnungsgemäße Bedienung der Zahlungsverpflichtungen durch den Kreditnehmer eintritt). Verteilungsmodelle für Einzelschäden werden in Unterkapitel 2.2 vorgestellt.

Extremwertverteilungen

Eine besondere Bedeutung kommt der Modellierung besonders hoher finanzieller Verluste oder (Versicherungs-)Schäden zu. Man sucht beispielsweise ein Verteilungsmodell für die monatlichen maximalen prozentualen DAX-Tagesverluste über einen längeren Zeitraum oder für Katastrophenschäden, deren finanzielles Ausmaß einen gewissen Schwellenwert überschreitet. Ein Einblick in derartige Modelle wird im Unterkapitel 2.5 gegeben.

Schadenanzahlverteilungen

Die Anzahl n von Schäden gleichartiger Risiken (z. B. von gleichartigen Maschinen in einer Fabrik, Kfz in einem homogenen Versichertenkollektiv) innerhalb eines vorgegebenen Zeitraums (z. B. ein Jahr) wird durch eine nichtnegative ganzzahlige Zufallsvariable $N \in \mathbb{N}_0$ bzw. die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben. Allgemeiner beschreibt $N(t)$ die Anzahl der Schäden im Zeitraum $[0; t]$ bzw. $N[t_1; t_2]$ die Anzahl der Schäden im Zeitintervall $[t_1; t_2]$. Etwas weiter gefasst tauchen Schadenanzahlverteilungen auch bei der Modellierung von Kreditausfällen in einem homogenen Bestand von Krediten auf. Gängige Modelle für die Schadenanzahl werden im Unterkapitel 2.3 beschrieben.

Schadenanzahlprozesse

Wird die (kumulierte) Schadenanzahl $N(t) = N[0; t]$ bis zum Zeitpunkt t als stochastischer Prozess aufgefasst, spricht man von einem Schadenanzahlprozess. Das bedeutet, dass gewisse Re-

geln für die mögliche Abfolge von Schadenfällen im Zeitverlauf aufgestellt werden; d. h., die Schadenanzahl für zukünftige Zeiträume wird etwa in Abhängigkeit von den zuvor eingetretenen Schadenfällen modelliert (im Sinne bedingter Wahrscheinlichkeiten). Mit solchen Regeln könnte man z. B. Ansteckungsprozesse bei Epidemien abbilden. Aus einem Schadenanzahlprozess $N(t)$ resultieren zugehörige Verteilungen für die Anzahl der Schäden bis zum Zeitpunkt t bzw. allgemeiner bedingte Verteilungen für $N[t_1; t_2]$, die Anzahl der Schäden im Zeitintervall $[t_1; t_2]$. („Bedingte Verteilung“ bedeutet, dass – je nach stochastischem Prozess – Informationen über den vorherigen Schadenverlauf eine Rolle spielen.) Einige wichtige Schadenanzahlprozesse werden im Unterkapitel 2.3 eingeführt. Statt $N(t)$ verwenden wir auch die Schreibweise N_t .

Die Schadenanzahl $N(t)$ gibt die kumulierten Schäden bis zum Zeitpunkt t an. Alternativ könnte man sich auch für die nicht-kumulierte Schadenanzahl zu einem festen Zeitpunkt t interessieren, was allerdings nur bei zeitdiskreten Modellen Sinn ergibt (da bei zeitstetigen Modellen zu jedem konkreten Zeitpunkt „fast sicher“ kein Schaden vorliegt). Daher werden zur Modellierung der Schadenanzahl überwiegend zeitstetige Prozesse herangezogen. Neben der kumulierten Schadenanzahl $N(t)$ ist dann vor allem die Zeitdauer D zwischen zwei Schäden noch eine für die Risikomodellierung relevante Zufallsgröße.

Gesamtschadenverteilungen

Eine Gesamtschadenverteilung gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der gesamten Schadenhöhe S bzw. $S(t)$ einer bestimmten Gesamtheit (eines sogenannten Kollektivs) von Risiken im Zeitraum $[0; t]$ an, beispielsweise die Kfz-Schäden in einem Fuhrpark mit mehreren Fahrzeugen. Sie ergibt sich grob gesprochen aus der Schadenanzahlverteilung und der Schadenhöhenverteilung pro Einzelschaden. Eine explizite Bestimmung der Gesamtschadenverteilung aus diesen beiden Grundbausteinen ist allerdings nur in einfachen Spezialfällen möglich, vor allem wenn allgemein auch Zusammenhänge (z. B. Korrelationskoeffizienten) der Einzelrisiken u. Ä. zu berücksichtigen sind. In Unterkapitel 2.6 wird hierauf näher eingegangen.

Gesamtschadenprozesse

Wird der Gesamtschaden $S(t)$ bis zum Zeitpunkt t als stochastischer Prozess aufgefasst, spricht man vom *Gesamtschadenprozess*; vgl. dazu auch die Ausführungen zum Schadenanzahlprozess und zur Gesamtschadenverteilung. Statt $S(t)$ verwenden wir auch die Schreibweise S_t . In Abschnitt 2.6.3 wird näher auf Gesamtschadenprozesse eingegangen.

Einzelwertverteilungen

Ausgehend vom Zeitpunkt 0 kann der zufallsabhängig angenommene Wert $K(t)$ eines Rohstoffs, eines Wertpapiers oder eines anderen Wertobjekts (je nach Zusammenhang auch als Preis, Kurs o. Ä. bezeichnet) zu einem festen zukünftigen Zeitpunkt t als nichtnegative Zufallsvariable bzw. über die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben werden. Das grundsätzliche Verteilungsmodell entspricht also mathematisch dem einer Schadenverteilung. Ein hoher Wert wird zwar im Gegensatz zu einem hohen Schaden in der Regel als „angenehm“ empfunden; stellt man sich aber $K(t)$ als betrieblich notwendige Investitionssumme für einen Rohstoffkauf oder

z. B. auch als einen laut Versicherungsvertrag bei Diebstahl zu ersetzenden Wert vor, ist auch anschaulich die Analogie ganz offensichtlich. Einzelwertverteilungen werden in Unterkapitel 2.4 angesprochen.

Gewinn-/Verlustverteilungen für einen Einzelwert

In vielen Situationen ist es sinnvoll, als Zufallsgröße anstelle des Einzelwerts $K(t)$ selbst den finanziellen Erfolg (Gewinn bzw. Verlust) $E(t) = K(t) - K(0)$ zum Zeitpunkt t (bezogen auf den Anfangszeitpunkt 0) bzw. die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung zu betrachten. Diese Zufallsvariable kann dann prinzipiell auch negative Werte ($K(t) < K(0)$) annehmen. Auch solche Verteilungen werden in Unterkapitel 2.4 angesprochen.

Renditeverteilungen

Anstelle der absoluten Erfolgsgröße $E(t) = K(t) - K(0)$ wird oft der relative (prozentuale) Erfolg $\Gamma(t) = \frac{K(t) - K(0)}{K(0)}$ betrachtet. Den relativen Erfolg bezeichnet man bekanntlich auch als *Rendite*; sie kann in der oben definierten Form prinzipiell Werte aus dem Intervall $[-1; \infty)$ annehmen. Im Rahmen der Risikomodellierung ist es oft sinnvoll, zusätzlich die sogenannte *stetige Rendite* (andere Bezeichnungen: *kontinuierliche Rendite* bzw. *Log-Rendite*)

$$G(t) := \ln(1 + \Gamma(t)) \Leftrightarrow 1 + \Gamma(t) = \exp(G(t))$$

einzuführen. Diese kann dann beliebige reelle Zahlenwerte annehmen. Der Wert $Q(t) := 1 + \Gamma(t)$ kann als Wachstumsfaktor interpretiert werden, der das prozentuale Wachstum (oder ggf. auch Schrumpfen) des Anfangsguthabens $K(0)$ bis zum Zeitpunkt t angibt.¹

Der Begriff der Rendite ist in einem allgemeinen Sinne zu verstehen: Es geht nicht notwendigerweise um den relativen Erfolg eines Kapitalanlegers, sondern es sind analog auch andere prozentuale Wertveränderungen gemeint, z. B. im unternehmerischen Bereich (Veränderung von Rohstoffpreisen, Wechselkursen usw.).

Preisprozesse

Bei Rohstoffen, Wertpapieren o. Ä. interessiert oft nicht lediglich deren Wert $K(t)$ zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt, sondern der gesamte Wertverlauf (bzw. Preisverlauf, Kursverlauf, ...) innerhalb eines Zeitintervalls $[0; t]$ oder zumindest der Wert zu verschiedenen Zeitpunkten innerhalb dieses Zeitraums. Dann reicht als Risikomodell also keine „einfache“ Verteilungsannahme mehr, sondern der Wertverlauf muss als stochastischer Prozess modelliert werden. Daraus ergeben sich jeweils zugehörige Wertverteilungen für die Zufallsgröße $K(t)$ bzw. allgemeiner – ähnlich wie bei Schadenanzahlprozessen – bedingte Verteilungen für Zeitintervalle $[t_1; t_2]$. („Bedingte Verteilung“ bedeutet in diesem Zusammenhang also, dass – je nach stochastischem Prozess – Informationen über den vorherigen Kursverlauf eine Rolle spielen.) Ähnliches

¹Die Bezeichnung Γ für die (Gesamt-)Rendite einer Periode ist in Analogie zur stetigen (Gesamt-)Rendite G gewählt und hat nichts mit der in Abschnitt eingeführten Gamma-Funktion zu tun. Näheres zu Renditeverteilungen enthält das Unterkapitel 2.4.

gilt z. B. für die Modellierung von Zinssätzen oder Wechselkursen. Derartige stochastische Prozesse zur Finanzmarktmodellierung werden in Unterkapitel 2.4 angesprochen.

Gesamtwertverteilungen / Gesamtwertprozesse

Ähnlich wie Gesamtschadenverteilungen mehrerer Einzelrisiken kann man auch die Gesamtwertverteilung verschiedener unter Risiko stehender Wertobjekte berechnen, z. B. bezüglich des Gesamtwerts eines Wertpapierportfolios. Noch allgemeiner könnte man beispielsweise auch den zukünftigen Gesamtwert eines Unternehmens modellieren, indem alle relevanten Schadenprozesse, Preisprozesse u. Ä. in einer Gesamtbetrachtung zusammengeführt werden. Dies kann allerdings wegen der Vielzahl zu berücksichtigender Faktoren beliebig kompliziert werden und ist in der Regel nur unter starken Modellvereinfachungen durchführbar.

2.2 Verteilungsmodelle für Einzelschäden

Einzelschäden im unternehmerischen oder privaten Bereich (Haftpflichtschäden, Unwetterschäden usw.) können je nach konkreter Entwicklung sehr unterschiedliche, oft hohe Ausmaße annehmen. Zur Bildung entsprechender Risikoreserven reicht es daher oft nicht, nur den Erwartungswert („Mittelwert“) eines Schadens zurückzustellen. Zum einen ist bei seltenen Schadenergebnissen das „Gesetz der großen Zahlen“, das eine Orientierung am Erwartungswert begründen könnte, ohnehin nicht anwendbar. Aber auch darüber hinaus ist eine reine Orientierung am Erwartungswert problematisch. Beispielsweise können Versicherungsunternehmen Versicherungsbeiträge nicht lediglich auf Erwartungswertbasis kalkulieren, da damit keine ausreichenden Risikoreserven gespeist werden können (zum mathematischen Hintergrund s. 3.1.7). Also interessiert man sich für die gesamte Schadenhöhenverteilung bzw. zumindest für verschiedene charakteristische Verteilungsparameter als Risikokennzahlen.

Im Folgenden werden verschiedene konkrete Verteilungsmodelle zur Modellierung der Schadenhöhe (synonym: *Schadensumme*) einzelner Schäden betrachtet und ihr grundsätzliches Einsatzfeld erläutert. Für Schadenhöhenverteilungen kommen in erster Linie stetige Modelle infrage, bei denen die Verteilung also durch eine sogenannte Dichtefunktion $f(x)$ beschrieben wird, welche in dem vorliegenden Kontext zudem nur für $x \geq 0$ von null verschiedene Werte besitzt. Bei der Modellierung von Kreditausfällen oder im Bereich der Lebensversicherung trifft die Annahme einer stetigen Schaden- bzw. Leistungsverteilung zumindest näherungsweise für große Portfolios / Vertragsbestände zu. Auf Einzelvertragsbasis handelt es sich meist um sehr einfache diskrete Verteilungen (nur ein einziger Wert oder wenige verschiedene Schadenssummen sind überhaupt möglich), die im Rahmen von Beispielen und Übungsaufgaben nur exemplarisch angesprochen werden.

Des Weiteren hängt der einzusetzende Verteilungstyp davon ab, ob es sich grundsätzlich um eine Schadenart handelt, bei der nur kleinere oder mittelgroße Schäden möglich sind, wie etwa in der Kfz-Kasko-Versicherung, oder ob Großschäden möglich oder gar „wahrscheinlich“ sind, wie beispielsweise in der Industrie-Haftpflichtversicherung (Haftpflichtversicherung für Unternehmen) oder der Rückversicherung (Versicherung für Versicherungsunternehmen) von Naturkatastrophen. In der (Rück-)Versicherung werden manchmal auch innerhalb einer Schadenart

Kleinschäden (auch *Basisschäden* genannt) und Großschäden durch separate Verteilungsmodelle beschrieben. Eine allgemeingültige exakte Abgrenzung zwischen Kleinschäden und Großschäden gibt es nicht; vielmehr ist die Bestimmung entsprechender Grenzwerte in einem konkret vorgegebenen Kontext selbst eine Modellierungsaufgabe. Für weiterführende Hinweise dazu vgl. etwa [Die07], [Hip06b].

Kleinschadenverteilungen kommen z. B. auch bei Versicherungen mit Selbstbeteiligung vor, s. Kapitel 4. In diesem Fall ist besonders offensichtlich, dass Kleinschäden in der Regel durch eine feste Schadenobergrenze charakterisiert sind. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung hat also einen beschränkten Träger (Bereich mit Dichtefunktion $f(x) \neq 0$). Ferner bieten sich Verteilungen mit beschränktem Träger an, wenn *Schadenquoten* modelliert werden, d. h. wenn Schäden prozentual zu einer Bezugsgröße angegeben werden (üblich z. B.: Versicherungsleistungen bezogen auf Beitragseinnahmen).

Risiken, die typischerweise mit Schäden im kleinen und mittleren Bereich verbunden sind, zeichnen sich dadurch aus, dass die zugehörigen Schadenverteilungen einen schmalen *Tail* besitzen (falls nicht ohnehin eine feste Obergrenze vorliegt). Das heißt, im auslaufenden Ende der Wahrscheinlichkeitsverteilung befindet sich relativ wenig „Wahrscheinlichkeitsmasse“. Demgegenüber haben Großschadenverteilungen einen breiten Tail, sie besitzen also relativ viel Wahrscheinlichkeitsmasse im auslaufenden Ende der Verteilung; man spricht auch von *Fat-Tail-* oder *Heavy-Tail-Verteilungen*. Der Begriff der Heavy-Tail-Verteilung wird nicht einheitlich verwendet. In den meisten Fällen (auch hier) versteht man darunter eine Verteilung, deren *Tail-Wahrscheinlichkeiten* $P(X > x) = 1 - F(x)$ für $x \rightarrow \infty$ langsamer als jede exponentiell fallende Funktion gegen null konvergieren (vgl. [Mik04], [Res07]). Maßgeblich für die Risikomodellierung ist außer einer Annahme zur grundsätzlichen Form des Tails die Auswahl diverser charakteristischer Verteilungsparameter (Lage-, Form- und Skalenparameter), wie im Folgenden bei den einzelnen Verteilungsmodellen näher erläutert wird.

Die folgenden Modelle sind als Verteilungsmodelle unter der Voraussetzung zu verstehen, dass überhaupt ein Schaden eingetreten ist. Modelle, die eine Schadenhöhe von null mit gewisser positiver Wahrscheinlichkeit einbeziehen, sind daraus leicht abzuleiten. Ähnliches gilt für Modelle mit Schadenobergrenzen, wie sie etwa bei bestimmten Versicherungsformen vorliegen.; vgl. dazu auch Unterkapitel 4.1). Als Quellenangabe für einige der folgenden Aussagen zur Schadenmodellierung sowie für ergänzende Einzelheiten und weitere Literaturangaben sei bzgl. der Modellierung von Versicherungsschäden auf [Hip06a], [KPW08], [Die07] und bzgl. der Schadensummen in einem Kreditportfolio auf [HBF06] verwiesen.

2.2.1 Gleichverteilung

Ein sehr einfaches Verteilungsmodell ist die *Gleichverteilung* (*uniforme Verteilung*). Die Dichtefunktion einer auf dem Intervall $[a; b]$ gleichverteilten Zufallsvariable $X \sim U(a; b)$ hat die Gestalt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zum Zwecke der Schadenmodellierung ist dabei $a \geq 0$ (oft $a = 0$). Für Erwartungswert bzw. Varianz gilt:

$$\mathbf{E}(X) = \frac{b+a}{2},$$

$$\mathbf{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Die Gleichverteilung ist ein einfaches Modell für Kleinschäden mit vorgegebener Obergrenze b , wie sie z. B. in der Kfz-Kasko-Versicherung vorkommen, oder für die Modellierung von Schadenquoten. Außerdem ist die Gleichverteilung auch bei anderen Verteilungsmodellen Ausgangspunkt für die Generierung von Pseudozufallszahlen (s. Kapitel 7).

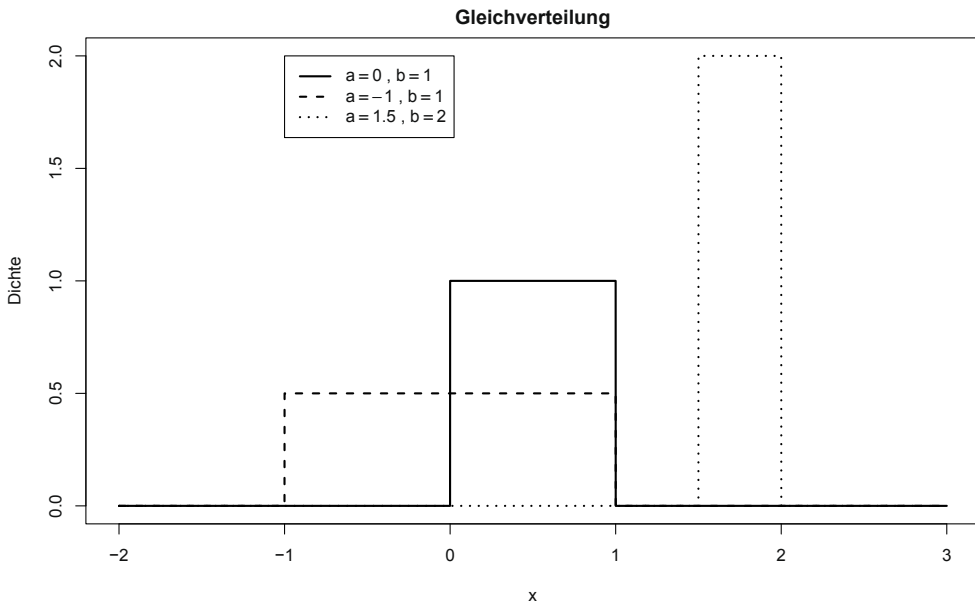


Abbildung 2.1: Dichten der Gleichverteilung für ausgewählte Verteilungsparameter

2.2.2 Exponentialverteilung, Erlang- und Gamma-Verteilung

Die *Exponentialverteilung* und die *Erlang-Verteilung* sind Spezialfälle der *Gamma-Verteilung* (kurz: *Γ -Verteilung*). Die Dichtefunktion einer Gamma-verteilten Zufallsvariablen $X \sim \Gamma(k; \lambda)$ mit den reellwertigen Parametern $k > 0$ und $\lambda > 0$ hat für $x > 0$ die Gestalt

$$f(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda x}.$$

Dabei ist

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

die sogenannte *Gamma-Funktion*. Der etwas kompliziert erscheinende Ausdruck $\lambda^k / \Gamma(k)$ ist lediglich ein Normierungsfaktor, der gewährleistet, dass der Flächeninhalt unter der Dichtefunktion tatsächlich 1 ist. Wie in Abbildung 2.2 zu erkennen ist, hängt die Form der Dichtefunktion vom Parameter k ab, weshalb dieser auch als *Formparameter* bezeichnet wird. Der Parameter λ hingegen bestimmt, wie stark die Dichte bzgl. der x -Achse gestaucht oder gestreckt wird, man bezeichnet ihn deshalb als *Skalenparameter*. Erwartungswert, Varianz und Schiefe (s. Definition

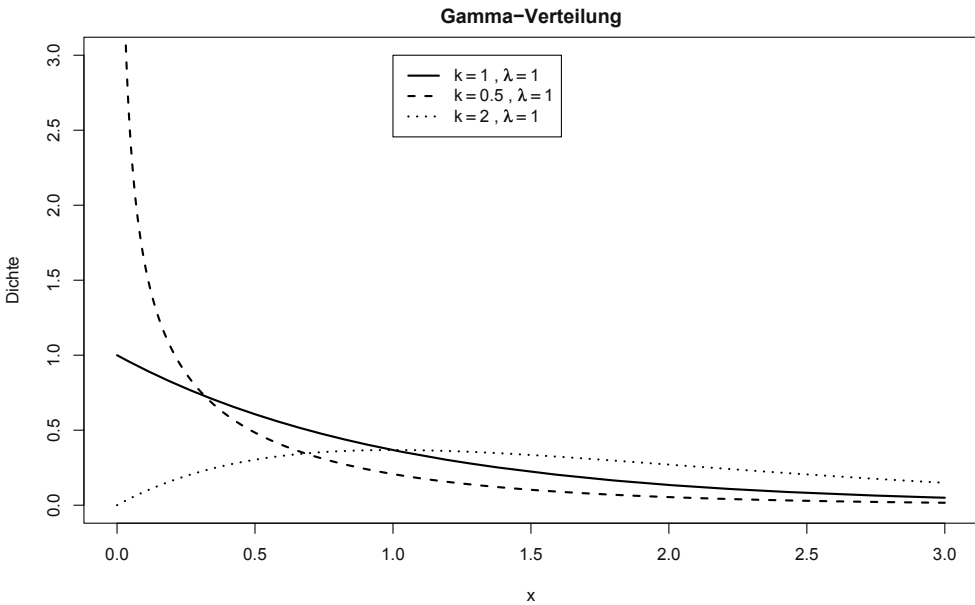


Abbildung 2.2: Dichten der Gamma-Verteilung für ausgewählte Verteilungsparameter

B.20) von X ergeben sich als

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \frac{k}{\lambda}, \\ \mathbf{Var}(X) &= \frac{k}{\lambda^2}, \\ \gamma(X) &= \frac{2}{\sqrt{k}}. \end{aligned}$$

Für ganzzahliges k wird die Γ -Verteilung auch als *Erlang-Verteilung* bezeichnet. Im Spezialfall $k = 1$ ergibt sich die *Exponentialverteilung* (Bezeichnung $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$) mit der Dichte- bzw.

Verteilungsfunktion

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x},$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

für $x \geq 0$. Die Gamma-Verteilung wird recht häufig zur Modellierung kleiner bis mittlerer Schäden verwendet, z. B. in der Hausrat-, Gewerbe-, Kfz-Kasko- und Kfz-Haftpflichtversicherung. Sie ist wegen ihrer zwei Parameter recht flexibel. Speziell die Exponentialverteilung wird in der Risikotheorie auch oft im Rahmen von Beispielen benutzt, weil sie und ihre für den Gesamtschadenprozess bedeutsamen Faltungen (Verteilung der Summen der Zufallsvariablen, s. Anhang B.3) einfach zu berechnen sind.

Die Summe zweier unabhängiger Γ -verteilter Zufallsvariablen $X_1 \sim \Gamma(k_1; \lambda)$, $X_2 \sim \Gamma(k_2; \lambda)$ ($k_1, k_2 > 0$) mit demselben Verteilungsparameter $\lambda > 0$ ist selbst auch Γ -verteilt mit Parameter λ , d. h. es gilt $X_1 + X_2 \sim \Gamma(k_1 + k_2; \lambda)$. Insbesondere lässt sich für ganzzahliges k eine Γ -verteilte Zufallsvariable also als Summe exponentialverteilter Zufallsvariablen interpretieren, d. h. wenn $X_1 \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$ und $X_2 \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$ unabhängig sind, dann ist $X_1 + X_2 \sim \Gamma(2; \lambda)$ bzw. allgemein $\sum_{i=1}^k X_i \sim \Gamma(k; \lambda)$.

2.2.3 Weibull-Verteilung

Die *Weibull-Verteilung* hat ebenfalls zwei freie Parameter. Die Dichtefunktion einer *Weibull-verteilten* Zufallsvariablen $X \sim \mathbf{W}(k; \lambda)$ mit den reellwertigen Parametern $k > 0$ und $\lambda > 0$ hat für $x > 0$ die Gestalt

$$f(x) = k \cdot \lambda \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda x^k}.$$

Für den Spezialfall $k = 1$ ergibt sich die Exponentialverteilung. Erwartungswert und Varianz der Weibull-Verteilung ergeben sich zu

$$\mathbf{E}(X) = \lambda^{\frac{1}{k}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

$$\mathbf{Var}(X) = \lambda^{\frac{2}{k}} \cdot \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 \right).$$

In der Schadenmodellierung wird die Weibull-Verteilung in der Regel nur für $k < 1$ verwendet, und zwar zur Abbildung von Großschäden, z. B. im Industriebereich, in der Kfz-Haftpflicht und der Rückversicherung; für $k > 1$ eignet sie sich nur für die Modellierung von Kleinschäden.

Weibull-verteilte Zufallszahlen ergeben sich aus exponentialverteilten Zufallszahlen über die Transformation

$$Y \sim \mathbf{Exp}(\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad X = Y^{\frac{1}{k}} \sim \mathbf{W}(k; \lambda).$$

Wie in Abbildung 2.3 ersichtlich ist, bestimmt k die Form der Verteilung; λ entspricht einem Skalenparameter.

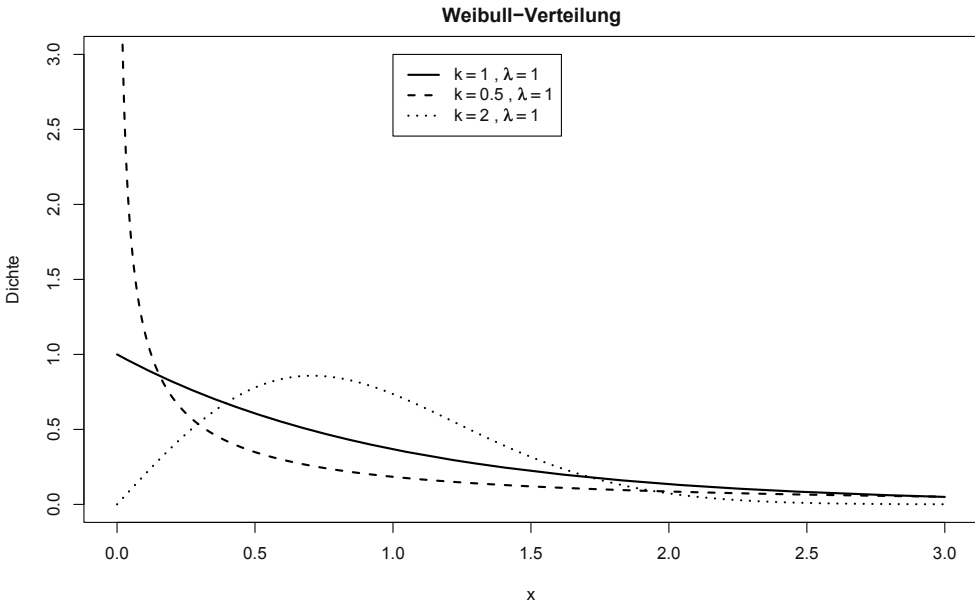


Abbildung 2.3: Dichten der Weibull-Verteilung für ausgewählte Verteilungsparameter

2.2.4 Normalverteilung

Die *Normalverteilung* spielt in der Stochastik eine herausragende Rolle und hat auch viele risikotheorietische Anwendungen. Eine normalverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathbf{N}(\mu; \sigma^2)$ mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung $\sigma > 0$, also Varianz σ^2 , wird beschrieben durch die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Da die Dichtefunktion für jedes (insbes. auch negatives) $x \in \mathbb{R}$ positiv ist, ist die Normalverteilung offenbar nicht unmittelbar zur Modellierung von Schadenhöhen geeignet. Nach dem zentralen Grenzwertsatz (s. Satz B.27) ist jedoch die Schadensummenverteilung vieler unabhängiger identischer Risiken annähernd normalverteilt. Somit eignet sich die Normalverteilung u. U. zur Approximation der Schadenhöhenverteilung eines größeren Bestands von Risiken. In der Statistik spielt die Normalverteilung eine zentrale Rolle, da viele Schätzer von Verteilungsparametern für große Stichproben annähernd normalverteilt sind. Dies ist insbesondere auch beim Schätzen von Risikomaßen relevant, vgl. Kapitel 6. Außerdem ist die Normalverteilung Ausgangsbasis für die logarithmische Normalverteilung, s. Abschnitt 2.2.7. Die Summe S von n unabhängigen

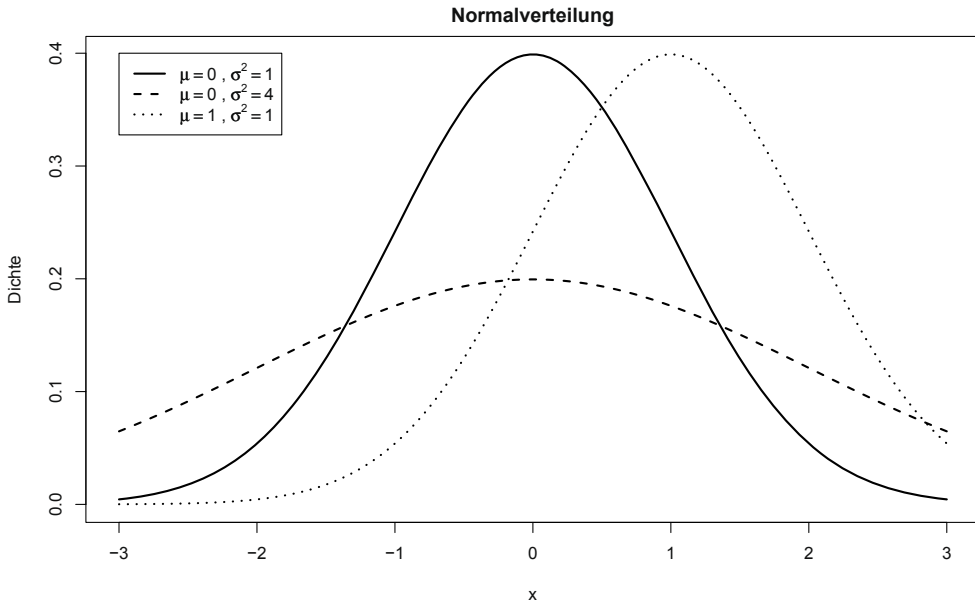


Abbildung 2.4: Dichten der Normalverteilung für ausgewählte Verteilungsparameter

Zufallsvariablen $X_i \sim \mathbf{N}(\mu_i; \sigma_i^2)$ ist ebenfalls normalverteilt mit

$$\mathbf{E}(S) = \sum_{i=1}^n \mu_i,$$

$$\mathbf{Var}(S) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2.$$

Zu beachten ist hier, dass in vielen Statistik- und Tabellenkalkulationsprogrammen (R, Excel, ...) als zweiter Parameter einer Normalverteilung die Standardabweichung σ und nicht die Varianz σ^2 eingegeben werden muss. Die Schreibweise mit der Varianz als zweitem Parameter ist jedoch in der mathematischen Literatur am weitesten verbreitet, wenngleich sich teilweise auch dort die Notation mit σ statt σ^2 – also $\mathbf{N}(\mu; \sigma)$ statt $\mathbf{N}(\mu; \sigma^2)$ als Notation für die gleiche Verteilung – findet. Die *Standardnormalverteilung* ist definiert als Normalverteilung mit Erwartungswert null und Varianz eins. Ihre Dichte- bzw. Verteilungsfunktion werden mit ϕ bzw. Φ bezeichnet.

2.2.5 Multivariate Normalverteilung

Als Verallgemeinerung von (eindimensional) normalverteilten Zufallsvariablen kann man normalverteilte Zufallsvektoren betrachten. Die Verteilung wird dann als *multivariate Normalverteilung* bezeichnet. Sie bietet eine einfache Möglichkeit, abhängige Risiken darzustellen (s. Kapitel 5). Ein zweidimensionaler Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ heißt *bivariat* oder *zweidimensional*

normalverteilt, $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_2(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\Sigma})$, wenn die gemeinsame Dichtefunktion gegeben ist durch

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} \right]\right)$$

mit Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ und Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \cdot \sigma_1\sigma_2 \\ \rho \cdot \sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, wobei

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1) \cdot \text{Var}(X_2)}}$$

den (*Pearsonschen*) *Korrelationskoeffizienten* bezeichnet. Die Höhenlinien der Dichte sind die Punkte, auf denen die Funktion f konstant ist, d. h. für die

$$\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x_1 - \mu_1) \cdot (x_2 - \mu_2)}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \text{konstant}$$

ist. Die Lösung dieser Gleichung ist eine Ellipse mit Mittelpunkt (μ_1, μ_2) . Die Achsen der Ellipse sind parallel zu den Koordinatenachsen, wenn die Korrelation $\rho = 0$ beträgt; für $\rho \neq 0$ sind sie gedreht. In Abbildung 2.5 sind dreidimensionale Darstellungen und Höhenliniendiagramme der Dichtefunktion von $\mathbf{N}_2(\mathbf{0}; \boldsymbol{\Sigma})$ mit $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ für verschiedene Werte von ρ dargestellt.

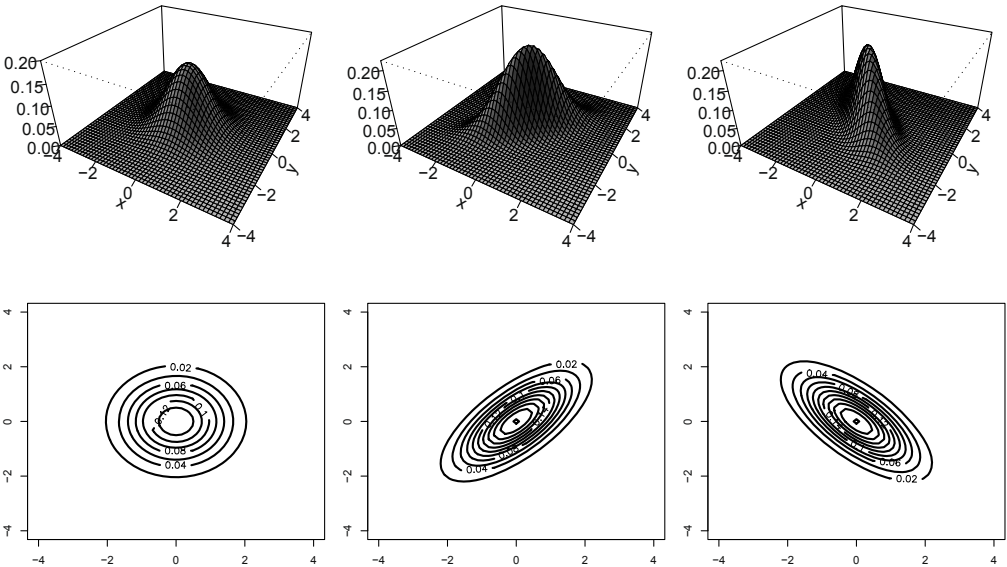


Abbildung 2.5: Dreidimensionale Darstellung (oben) und Höhenliniendiagramme (unten) der Dichtefunktion von $\mathbf{N}_2(\mathbf{0}; \boldsymbol{\Sigma})$ für die Werte $\rho = 0$, $\rho = 0,7$ und $\rho = -0,7$ (von links).

Als Verallgemeinerung wird nun ein d -dimensionaler Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ betrachtet. Dieser ist *multivariat normalverteilt*, $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_d(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\Sigma})$, mit Erwartungswertvektor

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d,$$

und Kovarianzmatrix

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{Var}(X_1) & \mathbf{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathbf{Cov}(X_1, X_d) \\ \mathbf{Cov}(X_2, X_1) & \mathbf{Var}(X_2) & \cdots & \mathbf{Cov}(X_2, X_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Cov}(X_d, X_1) & \mathbf{Cov}(X_d, X_2) & \cdots & \mathbf{Var}(X_d) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d},$$

wenn die gemeinsame Dichtefunktion für $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ gegeben ist durch

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right).$$

Die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ ist wegen der Symmetrie der Kovarianz stets symmetrisch. Es wird davon ausgegangen, dass die Kovarianzmatrix zusätzlich positiv definit ist, d. h. für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ gilt $\mathbf{x}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{x} > 0$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass dann gilt:

- Die Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ ist invertierbar, d. h. die oben gegebene Dichtefunktion ist sinnvoll definiert.
- Die Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ kann als ein Produkt $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ dargestellt werden. Dies ist die sog. *Cholesky-Zerlegung*.

Multivariate Normalverteilungen besitzen außerdem die folgenden wichtigen Eigenschaften:

1. Die Komponenten eines multivariat normalverteilten Vektors $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_d(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\Sigma})$ sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn die Kovarianzmatrix diagonal ist, d. h. wenn alle paarweisen Kovarianzen $\mathbf{Cov}(X_i, X_j) = 0$ sind.
2. Wenn $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ die Cholesky-Zerlegung einer Kovarianzmatrix ist, $\boldsymbol{\mu}$ ein Vektor und $Z_1, \dots, Z_k \sim N(0; 1)$ unabhängige, in einem Vektor $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_k)^T$ zusammengefasste (eindimensionale) Zufallsvariablen sind, dann gilt für den Vektor

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z},$$

dass

$$\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_d(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\Sigma}).$$

Diese Tatsache wird in Kapitel 7 zur Simulation der multivariaten Normalverteilung verwendet.

2.2.6 t -Verteilung

Die t -Verteilung spielt in der Statistik normalverteilter Zufallsvariablen eine wichtige Rolle und wird auch in der Modellierung von Risiken eingesetzt. Eine Zufallsvariable X ist t -verteilt mit $v > 0$ Freiheitsgraden (wir schreiben $X \sim t_v$), wenn ihre Dichtefunktion für $x \in \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi \cdot v} \cdot \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}.$$

Dabei bezeichnet Γ die Gamma-Funktion, s. Abschnitt 2.2.2.

Wenn die Zufallsvariablen $Y \sim N(0; 1)$ und $Z \sim \chi_v^2$ (s. Definition B.12) unabhängig sind, kann man zeigen, dass der Quotient

$$T = \frac{Y}{\sqrt{Z/v}}$$

die Verteilung t_v besitzt. Die t -Verteilung ergibt sich also als Quotient aus einer normalverteilten und der Wurzel einer (normierten) χ^2 -verteilten Größe. In Abbildung 2.6 sind die Dichtefunktionen der t -Verteilung für verschiedene Freiheitsgrade sowie der Standardnormalverteilung dargestellt. Offensichtlich fallen die Dichtefunktionen der t -Verteilungen langsamer ge-

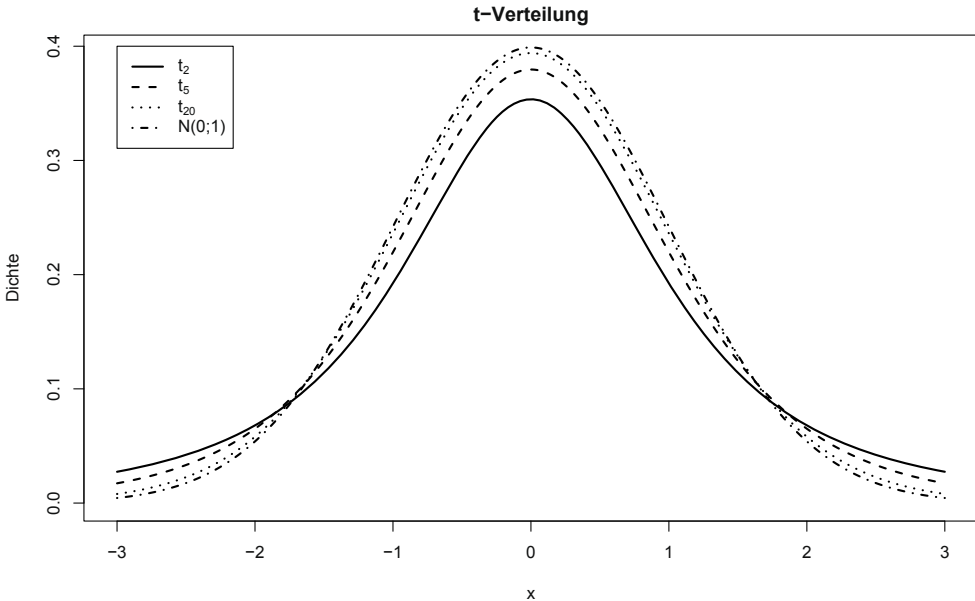


Abbildung 2.6: Dichten der t -Verteilung und der Standardnormalverteilung

gen null ab, als die der Standardnormalverteilungen. Die t -Verteilung besitzt also größere Tail-Wahrscheinlichkeiten als die Normalverteilung, somit lassen sich dadurch Risiken modellieren,

bei denen sehr große Gewinne / Verluste häufiger auftreten als unter Normalverteilungsannahmen. Dieser Effekt ist umso stärker, je kleiner die Anzahl der Freiheitsgrade ν ist. Wie in der Abbildung ersichtlich (und auch mathematisch beweisbar) nähert sich die t_ν -Verteilung für wachsendes ν immer mehr der Standardnormalverteilung an.

2.2.7 Logarithmische Normalverteilung

Im Gegensatz zur Normalverteilung eignet sich die *logarithmische Normalverteilung* (kurz: *Lognormalverteilung*) unmittelbar als Schadenhöhenverteilung, da ihre Dichtefunktion nur für $x > 0$ positiv ist. Die Dichtefunktion einer logarithmisch normalverteilten Zufallsvariablen $X \sim \text{LN}(\mu; \sigma^2)$ hat für $x > 0$ die Gestalt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Die durch Logarithmieren entstehende Zufallsvariable $Y = \ln(X)$ ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Umgekehrt gilt:

$$Y \sim \text{N}(\mu; \sigma^2) \Leftrightarrow \exp(Y) = X \sim \text{LN}(\mu; \sigma^2).$$

Für die Notation des zweiten Parameters der logarithmischen Normalverteilung gilt eine ähnliche Anmerkung wie bzgl. der Normalverteilung, d. h. oft wird auch $\text{LN}(\mu; \sigma)$ statt $\text{LN}(\mu; \sigma^2)$

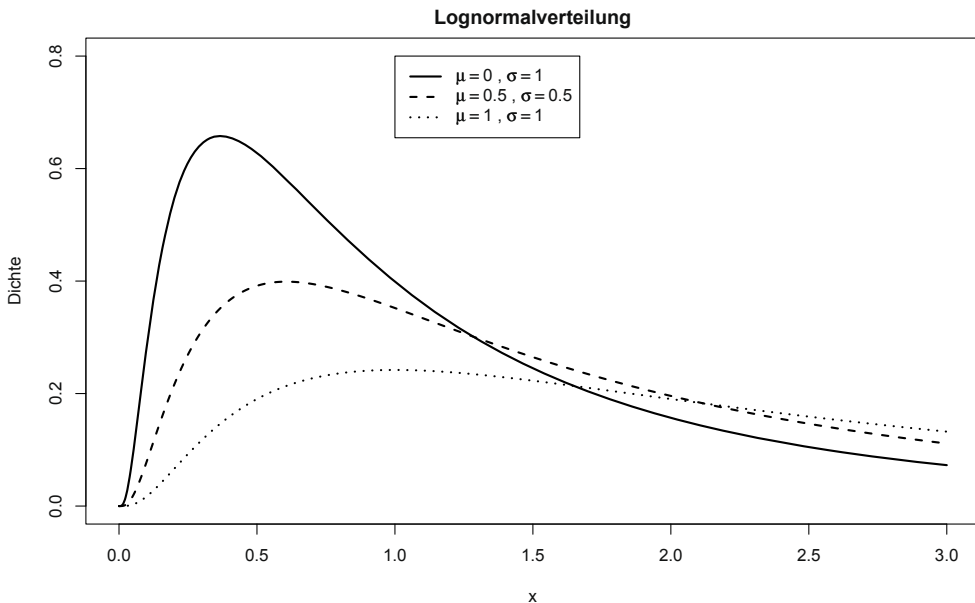


Abbildung 2.7: Dichten der Lognormalverteilung

für den gleichen Verteilungstyp geschrieben. Man beachte, dass μ und σ^2 Erwartungswert und Varianz von Y , nicht jedoch von X sind; vielmehr gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}; \\ \mathbf{Var}(X) &= e^{2\mu + \sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1).\end{aligned}$$

Ferner berechnet sich die für die Modellbildung oft ebenfalls relevante Schiefe als

$$\gamma(X) = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1} \cdot (e^{\sigma^2} + 2).$$

Die Lognormalverteilung wird zur Modellierung von Großschäden verwendet. Auch in der Finanzmarktmodellierung ist sie wichtig; vgl. Kapitel 2.4.

2.2.8 Log-Gamma-Verteilung

Ähnlich wie die Lognormalverteilung aus der Normalverteilung ergibt sich die *Log-Gamma-Verteilung* aus der Γ -Verteilung. Sie wird erzeugt durch $X = \exp(Y)$ mit $Y \sim \Gamma(k; \lambda)$.

Die Dichtefunktion einer log-Gamma-verteilten Zufallsvariablen $X \sim \text{LNG}(k; \lambda)$ mit den reellwertigen Parametern $k > 0$ und $\lambda > 0$ hat für $x > 1$ die Gestalt

$$f(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \cdot (\ln(x))^{k-1} \cdot x^{-\lambda-1}$$

und ist ansonsten null. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-k}, \\ \mathbf{Var}(X) &= \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right)^{-k} - \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-2k}.\end{aligned}$$

Die Log-Gamma-Verteilung wird zur Modellierung von Großschäden benutzt. Mit $Y = X - 1$ erhält man eine Verteilung auf $(0; \infty)$; mit $Y = M \cdot X$ erhält man eine Verteilung auf $(M; \infty)$, d. h. mit der Log-Gamma-Verteilung lassen sich Schäden oberhalb eines vorgegebenen Schwellenwerts modellieren.

2.2.9 Pareto-Verteilung

Die *Pareto-Verteilung* liefert nur oberhalb eines Schwellenwerts x_0 positive Wahrscheinlichkeiten. Dichtefunktion bzw. Verteilungsfunktion einer Pareto-verteilten Zufallsvariablen $X \sim \text{Pareto}(x_0; a)$ mit den reellwertigen Parametern $x_0 > 0$ und $a > 0$ lauten

$$\begin{aligned}f(x) &= a \cdot x_0^a \cdot x^{-a-1}, \\ F(x) &= 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-a}.\end{aligned}$$

Für Erwartungswert, Varianz und Schiefe von X ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= x_0 \cdot \frac{a}{a-1} && (\text{falls } a > 1), \\ \mathbf{Var}(X) &= x_0^2 \cdot \frac{a}{(a-1)^2(a-2)} && (\text{falls } a > 2), \\ \gamma(X) &= \frac{2\sqrt{a-2}(a+1)}{\sqrt{a}(a-3)} && (\text{falls } a > 3).\end{aligned}$$

Für $x_0 = 1$ ergibt sich ein Spezialfall der Log-Gamma-Verteilung, genauer: $X \sim \mathbf{Pareto}(1; a) \Leftrightarrow X \sim \mathbf{LN}\Gamma(1; a)$. Aus der oben definierten (gewöhnlichen) Pareto-Verteilung, die nur für $x \geq x_0$

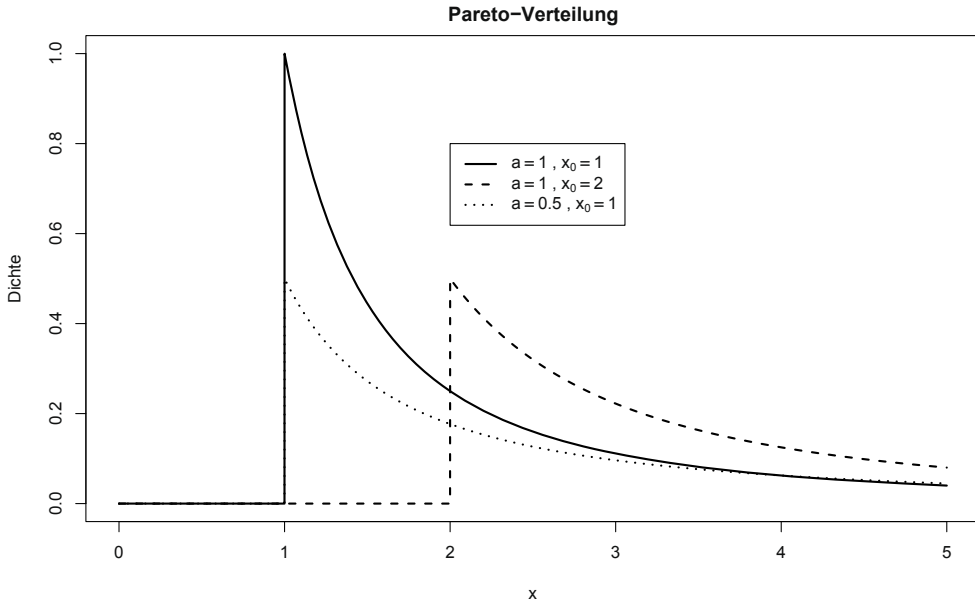


Abbildung 2.8: Dichten der Pareto-Verteilung

positive Werte annimmt, erhält man durch Verschiebung um x_0 die sogenannte *Nullpunkt-Pareto-Verteilung* (Bezeichnung: $X \sim \mathbf{Null-Pareto}(x_0; a)$), die für $x \geq 0$ folgendermaßen definiert ist:

$$\begin{aligned}F(x) &= 1 - \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{-a}, \\ f(x) &= \frac{a}{x_0} \cdot \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{-a-1}.\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert von X ergibt sich

$$\mathbf{E}(X) = \frac{x_0}{a-1} \quad (\text{falls } a > 1);$$

Varianz und Schiefe stimmen mit den entsprechenden Größen der Pareto-Verteilung überein. Für ein Pareto-verteiltes Risiko konvergiert die „Überschadenwahrscheinlichkeit“ $P(X > x) = 1 - F(x)$ für hohe Schadenssummen $x \rightarrow \infty$ relativ langsam gegen null (viel langsamer als die Exponentialverteilung); es handelt sich also um eine Heavy-Tail-Verteilung. Die Pareto-Verteilung wird zur Modellierung von Großschäden eingesetzt, insbesondere für Industrie-Feuerschäden und in der Rückversicherung.

2.2.10 Verallgemeinerte Pareto-Verteilung

Von zentraler Bedeutung für die Modellierung extremer Ereignisse (s. Kapitel 2.5) ist die *verallgemeinerte Pareto-Verteilung*, kurz *GPD-Verteilung*, wobei GPD für „Generalized Pareto Distribution“ steht. Die Verteilungsfunktion einer verallgemeinert Pareto-verteilten Zufallsvariablen $X \sim \mathbf{GPD}(\xi; \beta)$ ist für $\xi \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$ gegeben durch

$$G_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{wenn } \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), & \text{wenn } \xi = 0. \end{cases}$$

Für $x \leq 0$ gilt in beiden Fällen definitionsgemäß $G_{\xi, \beta}(x) = 0$. Wenn $\xi < 0$, dann setzt man außerdem $G_{\xi, \beta}(x) = 1$ für $x \geq -\frac{\beta}{\xi}$. Der Parameter β kann als Skalenparameter und der Parameter ξ als Formparameter aufgefasst werden; vgl. auch Aufgabe 2.2. Der Zusammenhang der GPD zur Nullpunkt-Pareto-Verteilung ergibt sich für positives ξ mit $a = \frac{1}{\xi}$, $x_0 = \frac{\beta}{\xi}$; es gilt

$$X \sim \mathbf{Null-Pareto}(x_0; a) \Leftrightarrow X \sim \mathbf{GPD}(\xi; \beta).$$

Der Erwartungswert existiert nur für $\xi < 1$; es gilt dann $\mathbf{E}(X) = \frac{\beta}{1-\xi}$. Die verallgemeinerte Pareto-Verteilung ergibt sich als ein „natürliches Modell“ (s. Kapitel 2.5) zur Beschreibung von z. B. Versicherungsschäden oder Kursverlusten, die einen sehr hohen vorgegebenen Schwellenwert überschreiten.

2.2.11 Verallgemeinerte Extremwertverteilung

Eine weitere Verteilung, die eine herausragende Rolle in der Extremwerttheorie spielt, ist die *verallgemeinerte Extremwertverteilung*, kurz *GEV-Verteilung*, wobei GEV für „Generalized Extreme Value“ steht. Die Verteilungsfunktion einer verallgemeinert extremwertverteilten Zufallsvariablen $X \sim \mathbf{GEV}(\xi; \mu; \sigma)$ mit Parameter $\xi \in \mathbb{R}$ lautet in ihrer mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ standardisierten Form

$$H_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)^{-1/\xi}) & \text{für } 1 + \xi x > 0, \text{ wenn } \xi \neq 0, \\ \exp(-e^{-x}) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \text{ wenn } \xi = 0. \end{cases}$$

Wenn $\xi > 0$, dann ist definitionsgemäß $H_{\xi}(x) = 0$ für $x \leq -\frac{1}{\xi}$; wenn $\xi < 0$, dann setzt man $H_{\xi}(x) = 1$ für $x \geq -\frac{1}{\xi}$. Bei beliebigem Lageparameter $\mu \in \mathbb{R}$ und Skalenparameter $\sigma > 0$ lautet

die Verteilungsfunktion $H_{\xi,\mu,\sigma} = H_{\xi}((x-\mu)/\sigma)$, d. h. ist $Y \sim \mathbf{GEV}(\xi; 0; 1)$, so ist $X = \sigma Y + \mu \sim \mathbf{GEV}(\xi; \mu; \sigma)$.

Die drei Fälle $\xi > 0$, $\xi = 0$ bzw. $\xi < 0$ entsprechen der sogenannten *Fréchet*-, *Gumbel*- bzw. *negativen Weibull-Verteilung*, wobei letztere im Wesentlichen einer verschobenen und gespiegelten Weibull-Verteilung gemäß Abschnitt 2.2.3 entspricht. Die Dichten der standardisierten GEV-Verteilung sind in Abbildung 2.9 dargestellt. Man erkennt, dass die negative Weibull-Verteilung

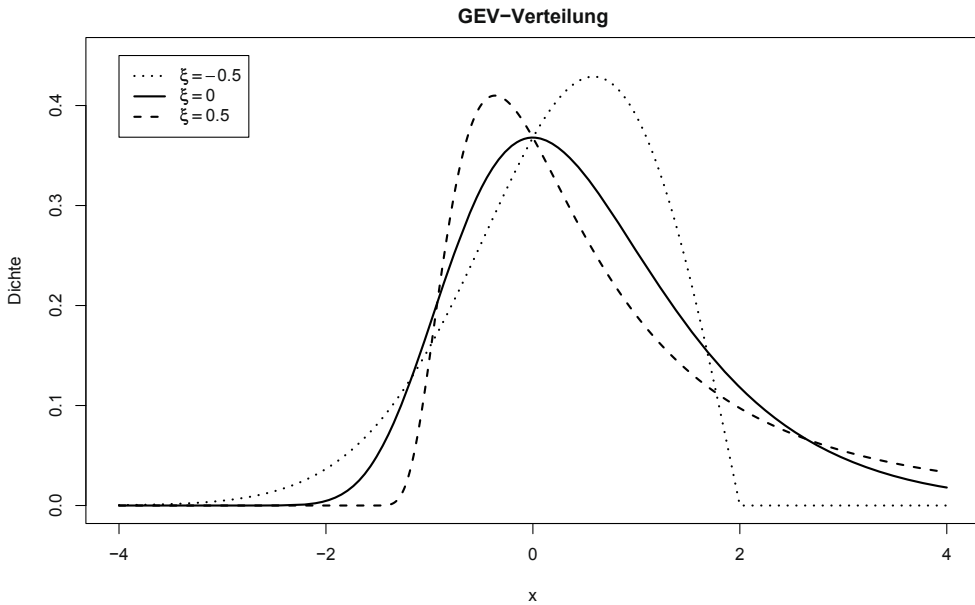


Abbildung 2.9: Dichtefunktion der standardisierten GEV-Verteilung für verschiedene ξ -Werte

nach oben beschränkt ist; insbesondere lassen sich durch sie keine extremen (positiven) Verluste bzw. Schäden beschreiben. Deshalb sind von den drei möglichen GEV-Verteilungen im Kontext der Extremwertmodellierung hauptsächlich die Fréchet- und Gumbel-Verteilungen relevant.

Die verallgemeinerte Extremwertverteilung ergibt sich als „natürliches Modell“ (s. Kapitel 2.5) für Maxima aus einer großen Anzahl von Werten, wie z. B. Versicherungsschäden oder Kursverlusten.

2.2.12 Inverse Gauß-Verteilung

Die *inverse Gauß-Verteilung* ist wiederum ein Modell mit zwei freien Parametern. Die Dichtefunktion einer invers Gauß-verteilten Zufallsvariablen $X \sim \mathbf{IG}(\lambda; \mu)$ mit den reellwertigen Parametern λ , $\mu > 0$ hat für $x > 0$ die Gestalt

$$f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi \cdot x^3}} \cdot \exp\left(-\frac{\lambda}{2\mu^2 x}(x-\mu)^2\right).$$

Es gilt:

$$\mathbf{E}(X) = \mu,$$

$$\mathbf{Var}(X) = \frac{\mu^3}{\lambda}.$$

Die inverse Gauß-Verteilung wird vor allem in Verbindung mit sogenannten generalisierten linearen Modellen (vgl. 5.2.2) als Alternative zur Exponential- bzw. Gamma-Verteilung eingesetzt. Vorteile ergeben sich vor allem durch eine Reihe nützlicher mathematischer Eigenschaften. Beispielsweise lassen sich bestimmte Schätzfunktionen für die Parameter, z. B. die sogenannten Maximum-Likelihood-Schätzer, explizit darstellen. Ferner ist die n -fache Summe S stochastisch unabhängiger $X_i \sim \mathbf{IG}(\lambda; \mu)$ wieder \mathbf{IG} -verteilt; genauer $S \sim \mathbf{IG}(n^2\lambda; n\mu)$.

2.2.13 Beta-Verteilung

Die Standardvariante der *Beta-Verteilung* ist auf dem Intervall $(0;1)$ definiert. Die Dichtefunktion einer Beta-verteilten Zufallsvariablen $X \sim \mathbf{Beta}(p; q)$ mit den reellwertigen Parametern $p, q > 0$ ist für $x \in (0; 1)$ definiert als

$$f(x) = \frac{x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}}{B(p, q)}.$$

Dabei ist

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} \cdot (1-t)^{q-1} dt$$

die sogenannte *Beta-Funktion*, und für $p, q > 0$ gilt mit der in 2.2.2 eingeführten Gamma-Funktion $B(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$. Der Term $B(p, q)$ ist ein Normierungsfaktor, der gewährleistet, dass es sich bei f tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt. Für Erwartungswert und Varianz einer $\mathbf{Beta}(p; q)$ -verteilten Zufallsvariablen X gilt:

$$\mathbf{E}(X) = \frac{p}{p+q};$$

$$\mathbf{Var}(X) = \frac{pq}{(p+q)^2 \cdot (p+q+1)}.$$

Die Beta-Verteilung ist für $p < q$ rechtsschief, für $p = q$ symmetrisch und für $p > q$ linksschief. Für $p, q < 1$ ist die Beta-Verteilung U-förmig; für $p = 2$ und $q = 1$ bzw. $p = 1$ und $q = 2$ liegt eine Dreiecksverteilung vor (vgl. auch 2.2.14), für $p = q = 1$ eine Gleichverteilung. Die *allgemeine Beta-Verteilung* auf einem beliebigen Intervall $(a; b)$ entsteht durch Verschiebung und Reskalierung einer Betaverteilung auf $(0; 1)$: Wenn $X \sim \mathbf{Beta}(p; q)$ auf $(0; 1)$, dann ist $Y := a + (b-a) \cdot X$ allgemein Beta-verteilt auf dem Intervall $(a; b)$; man schreibt auch $Y \sim \mathbf{Beta}(a; b; p; q)$. Für $x \in (a; b)$ lautet die Dichtefunktion einer allgemein Beta-verteilten Zufallsvariablen

$$f(x) = \frac{(x-a)^{p-1} \cdot (b-x)^{q-1}}{B(a, b, p, q)} \quad \text{mit} \quad B(a, b, p, q) = B(p, q) \cdot (b-a)^{p+q-1}$$

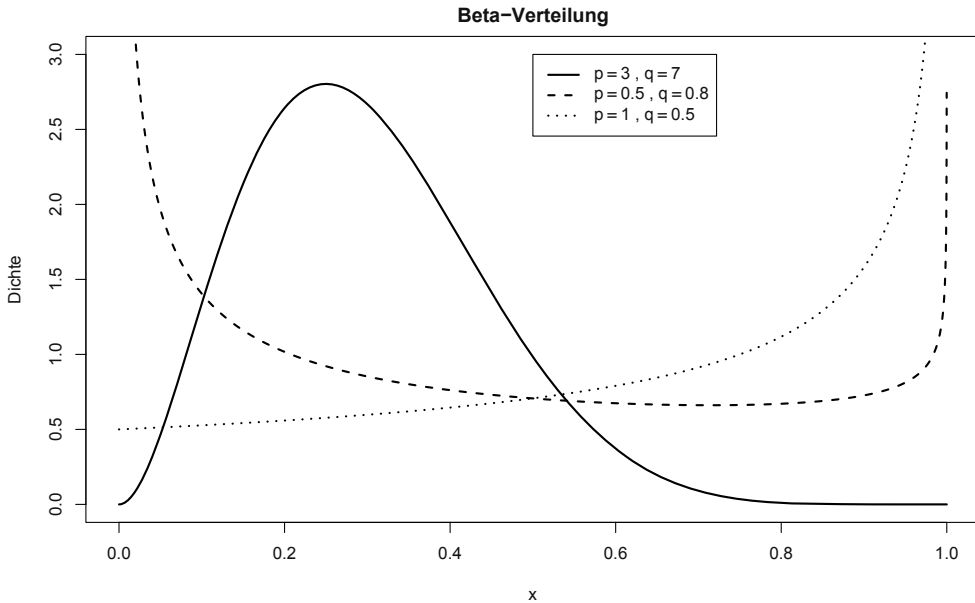


Abbildung 2.10: Dichten der Beta-Verteilung für verschiedene Parameterwerte

und für den Erwartungswert bzw. die Varianz gilt

$$\mathbf{E}(Y) = a + (b - a) \cdot \frac{p}{p + q};$$

$$\mathbf{Var}(Y) = \frac{(b - a)^2 \cdot pq}{(p + q)^2 \cdot (p + q + 1)}.$$

Die Beta-Verteilung wird wegen ihres beschränkten Trägers (Bereich mit $f(x) \neq 0$) hauptsächlich zur Modellierung von Kleinschäden eingesetzt. Sie wird z. B. bei Simulationsstudien zur Approximation der Schadenhöhenverteilung neuer Risiken, für die bisher noch kaum Schadenerfahrungen vorliegen, eingesetzt. Des Weiteren wird sie genutzt, um die Wirkung von Selbstbeteiligungen darzustellen (vgl. Kap. 4.1). Auch als Verlustverteilung bei umfangreicheren ausfallrisikobehafteten Kreditportfolios findet sie Einsatz.

2.2.14 Dreiecksverteilung

Die *Dreiecksverteilung* hat wie die allgemeine Beta-Verteilung nur im offenen Intervall $(a; b)$ von null verschiedene Werte und besitzt im Rahmen der Schadenmodellierung daher ähnliche Einsatzbereiche. Die Dichtefunktion einer dreiecksverteilten Zufallsvariablen $X \sim \Delta(a; b; c)$ mit

$a < b$ und dem Spitzenwert $c > 0$ besitzt die Gestalt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \cdot (x-a)}{(c-a) \cdot (b-a)} & \text{für } a \leq x \leq c, \\ \frac{2 \cdot (x-b)}{(c-b) \cdot (b-a)} & \text{für } c < x \leq b, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der nicht glatte Verlauf der Dichtefunktion im Bereich des Spitzenwerts c wird zwar im Rahmen der Schadenmodellierung in den meisten Fällen heuristisch nicht plausibel sein. Er kann aber als einfache Approximation für eine Beta-Verteilung interpretiert werden, bei der neben dem Träger $(a; b)$ nur der Spitzenwert c (als im diskretisierten Sinne „häufigster“ Wert der Zufallsvariablen) zu schätzen ist. Daher erfreut sich die Dreiecksverteilung bei Praktikern großer Beliebtheit, gerade wenn einfache Modellierungsansätze gefragt sind. Über die Schadenmodellierung im engeren Sinne hinaus ist sie beispielsweise auch beliebt zur Simulation zufallsbehafteter Einnahme- und Ausgaben-Positionen in Wirtschaftsunternehmen.

2.2.15 Verschobene Verteilungen

Eine ganze Reihe der bisher vorgestellten Verteilungstypen hat für alle positiven x -Werte eine positive Wahrscheinlichkeitsdichte f . Dies ist in der Schadenmodellierung nicht immer angemessen. Wenn beispielsweise in einem Versicherungsunternehmen nur Großschäden ab einer bestimmten Obergrenze oder oberhalb einer vereinbarten Selbstbeteiligung anfallen, gibt es für die abzubildenden Schäden eine Untergrenze $s_{\min} > 0$, sodass für die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte f gelten sollte, dass $f(x) = 0$ für $x < s_{\min}$. In solchen Fällen kann man beispielsweise mit verschobenen Verteilungen arbeiten, indem man also eine verschobene Dichtefunktion gemäß $f_{\text{verschoben}}(x) = f(x - s_{\min})$ definiert.

2.2.16 Gestutzte Verteilungen

Einige stetige Verteilungen, wie etwa die logarithmische Normalverteilung, die Gamma-Verteilung sowie die Pareto-Verteilung werden in der Schadenmodellierung manchmal auch in gestutzter Form verwendet, wenn ein bestimmter Höchstschaden s_{\max} nicht überschritten werden kann. Dabei wird der Tail der Verteilungsfunktion an der Stelle dieses Höchstschadens abgeschnitten und die darin befindliche Wahrscheinlichkeitsmasse auf die gestutzte Dichtefunktion verteilt, d. h. es wird die ursprüngliche Dichtefunktion mit einer geeigneten Konstanten multipliziert, sodass das Integral über die resultierende gestutzte Dichtefunktion wieder eins ergibt. Alternativ kann man dem Höchstschaden s_{\max} auch die gesamte verbleibende Restwahrscheinlichkeit der Tail-Werte zuordnen, was z. B. bei versicherten Schäden mit Selbstbeteiligung (aus Sicht des Versicherungsnehmers) bzw. vereinbarter maximaler Deckungssumme (aus Sicht des Versicherungsunternehmens) ein sinnvolles Modell wäre, s. Kapitel 4.1. Es handelt sich dann allerdings nicht mehr um ein stetiges, sondern ein gemischtes Verteilungsmodell.

Außer an einer Obergrenze s_{\max} könnte man eine Verteilung analog auch bzgl. einer Untergrenze s_{\min} stutzen, etwa als Alternative zur Verschiebung der Verteilung; vgl. 2.2.15.

2.2.17 Zeitabhängige Verteilungen

Die Schadenhöhenverteilungen werden meist als zeitunabhängig angenommen. Es gibt aber auch Modellierungsansätze, die einen Zeitparameter enthalten, z. B. zur Berücksichtigung von Inflation, technischem Fortschritt o. Ä. bei möglichen Schadensummen. Die Zeitabhängigkeit von Schadensummen ist beispielsweise für Versicherungsunternehmen bei der Reservebildung für sogenannte Spätschäden relevant. Dabei handelt es sich um Schäden, deren Regulierung sich – teilweise weit – über das Geschäftsjahr hinauszieht, in dem sie eingetreten sind; man denke etwa an Personenschäden mit ungewissem Heilungsverlauf in der Haftpflichtversicherung. Allerdings werden für derartige Einsatzbereiche zeitabhängige Schadenhöhenverteilungen meist nicht direkt modelliert, sondern es werden auf der Basis sogenannter Abwicklungsdreiecke nur Schätzungen auf Erwartungswertbasis vorgenommen. Weiterführende Literaturquellen zu diesem Thema sind etwa [Mac02], [Sch09].

2.2.18 Aufgaben

Aufgabe 2.1

Skizzieren Sie mit Software-Unterstützung selbst einige der in Kapitel 2.2 angegebenen Schadenhöhenverteilungen. Analysieren Sie die Auswirkungen von Änderungen der Parameterwerte bei festem Verteilungstyp und vergleichen Sie auch den grundsätzlichen Verlauf verschiedener Verteilungen (z. B. bei identischem Erwartungswert oder einer anderen normierenden Bedingung) miteinander. Überlegen Sie insbesondere, was die Auswahl verschiedener Verteilungstypen sowie die Parameterwahl bei vorgegebenem Verteilungstyp konkret für die Schadenmodellierung bedeutet.

Aufgabe 2.2

Wie zu Anfang von Unterkapitel 2.2 erläutert, klassifiziert man bei Modellierungsaufgaben die Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung manchmal in die Kategorien Formparameter, Lageparameter und Skalierungsparameter. Erstellen Sie für die in 2.2 diskutierten Verteilungsmodelle eine Übersicht, in der die Parameter den unterschiedlichen Kategorien zugeordnet werden. Eine eindeutige Zuordnung ist allerdings nicht in jedem Fall möglich.

Aufgabe 2.3

Überlegen Sie, welche verschiedenen Typen von (Einzel-)Schäden in einem Privathaushalt, einem Versicherungsunternehmen, einem Rückversicherungsunternehmen, einer Bank, einem Wirtschaftsunternehmen aus einer anderen Branche auftreten können und mit welcher Art von Schadenhöhenverteilung Sie diese evtl. modellieren könnten. Als beispielhafte Anregungen für mögliche Risiken seien genannt: Haftpflichtrisiken im privaten und im industriellen Bereich (z. B. bei einer Pharmafirma), Auswirkungen von Naturkatastrophen, Krankenversicherung, Schäden an bestimmten (versicherten) Gegenständen, ...

Aufgabe 2.4

Überlegen Sie, wie Sie prinzipiell vorgehen würden, wenn Sie aus empirischen Daten zu ausgewählten Beispielen wie unter 2.3 eine theoretische Schadensummenverteilung ableiten wollen. Einzelheiten dazu erfährt man später im Abschnitt 6.1.3.

Aufgabe 2.5

Zeigen Sie, dass die Pareto-Verteilung tatsächlich die Heavy-Tail-Eigenschaft besitzt. Genauer: Sei F die Verteilungsfunktion von $X \sim \text{Pareto}(x_0; a)$ und $\lambda > 0$ beliebig. Zeigen Sie, dass in dieser Situation

$$\frac{1 - F(x)}{e^{-\lambda x}} \rightarrow \infty$$

für $x \rightarrow \infty$ gilt.

2.3 Modellierung der Schadenanzahl

Betrachtet werden soll im Folgenden eine Gesamtheit gleichartiger Risiken (oder äquivalent eine Risikoquelle mit der Möglichkeit mehrerer Schadenfälle) im Zeitverlauf. Neben der Schadenhöhe X eines Einzelschadens sind in der Risikomodellierung Informationen über die Anzahl $N(t)$ der Schäden in einem Zeitraum der Länge t wichtig. Ähnlich wie bei der Schadenhöhenverteilung reicht es auch bei der Schadenanzahl in vielen Fällen nicht, Rückstellungen, Versicherungsbeiträge o. Ä. nur auf der Basis der erwarteten Schadenanzahl zu kalkulieren, sondern es sind differenziertere Überlegungen erforderlich.

In einem ersten Schritt wird man versuchen, die Zufallsvariable „Schadenanzahl“ durch eine typische *Schadenanzahlverteilung* für einen Zeitraum vorgegebener Länge (z. B. ein Jahr) zu beschreiben. Anschließend wird man in der Regel auch nach dem passenden Verteilungsmodell für Zeiträume beliebiger Länge suchen.

Noch allgemeiner ist die Modellierung durch einen stochastischen *Schadenanzahlprozess*, bei dem zusätzlich noch gewisse Regeln für die mögliche Abfolge von Schadenfällen im Zeitverlauf aufgestellt werden; d. h. die Schadenanzahlverteilung für zukünftige Zeiträume wird in Abhängigkeit von den zuvor eingetretenen Schadenfällen modelliert (im Sinne bedingter Wahrscheinlichkeiten).

Im Folgenden werden einige Beispiele für Schadenanzahlverteilungen und -prozesse ausführlicher dargestellt. Am wichtigsten sind verschiedene Varianten von Poisson-Prozessen und die daraus resultierenden Verteilungen. Viele der nachfolgenden Ausführungen orientieren sich an [Hel02, Kapitel 1], wo man auch weitere Einzelheiten nachlesen kann und weiterführende Literaturhinweise findet. Weitere Quellen und Referenzen zu Schadenanzahlverteilungen und anwendungsorientierter Modellierung mit Poisson-Prozessen allgemein sind [WS04], [RSST99], [Mik04], [EKM97], [KGDD08] und [Mac02].

2.3.1 Bernoulli-Prozess und Binomialverteilung

Bei einem *Bernoulli-Prozess* geht man davon aus, dass ein interessierendes Ereignis, im vorliegenden Kontext ein Schadenfall, in einem Zeitraum der Länge 1 (z. B. ein Tag oder eine Woche) höchstens einmal auftreten kann, und zwar mit konstanter Wahrscheinlichkeit p ; d. h. die Eintrittswahrscheinlichkeit hängt nicht von der Vergangenheit ab.

Für die Schadenanzahl $N(t)$ nach t Zeitperioden ergibt sich somit eine *Binomialverteilung* $N(t) \sim \text{Bin}(t; p)$. Für die Wahrscheinlichkeit von n Schäden in einem Zeitintervall der Länge t

gilt also

$$P(N(t) = n) =: p_n(t) = \binom{t}{n} \cdot p^n \cdot (1-p)^{t-n}.$$

Für zwei unabhängige Einzelverteilungen gilt:

$$N_i \sim \mathbf{Bin}(t_i; p) \quad (i = 1, 2) \quad \Rightarrow \quad N_1 + N_2 \sim \mathbf{Bin}(t_1 + t_2; p),$$

d. h. fasst man zwei Zeitperioden t_1 und t_2 mit identischer Schadeneintrittswahrscheinlichkeit p zusammen, so erhält man unter der Annahme der Unabhängigkeit der Zeitperioden für den Gesamtzeitraum $t_1 + t_2$ wieder eine Binomialverteilung mit Parameter p . Es wird also vorausgesetzt, dass die Schäden in t_1 *nicht* die in t_2 beeinflussen, wie es etwa bei Ansteckungsprozessen der Fall wäre.

Betrachtet man also nur Zeiträume der Länge 1, erkennt man, dass die binomialverteilte Zufallsvariable $N(t)$ als Summe von t unabhängigen 0-1-Größen N_i mit $P(N_i = 1) = p$, $P(N_i = 0) = 1 - p$, d. h. $N_i \sim \mathbf{Bin}(1; p)$ (sogenannte *Bernoulli-Verteilung*), erzeugt werden kann.

Für Erwartungswert und Varianz der Schadenanzahl ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N(t)) &= t \cdot p; \\ \mathbf{Var}(N(t)) &= t \cdot p(1-p). \end{aligned}$$

Dieses Verteilungsmodell ist für kleine und homogene Bestände von Risiken geeignet und wird z. B. in der Lebensversicherung verwendet. Bei größeren Beständen arbeitet man in der Regel besser mit einer Poisson-Verteilung, die sich formal aus der Binomialverteilung unter der Voraussetzung $\lambda = t \cdot p = \text{const.}$ für $t \rightarrow \infty$ ergibt (vgl. Satz B.29). Der Einsatz der Poisson-Verteilung in der Schadenmodellierung wird in 2.3.4 und den darauf folgenden Abschnitten noch ausführlicher besprochen. Die Abbildung 2.11 zeigt alle möglichen Pfade eines Bernoulli-Prozesses für zwölf Zeitperioden. Es wird also unter der Modellannahme des Bernoulli-Prozesses, dass in jeder Zeitperiode nur maximal ein Schaden möglich ist, zu den Zeitpunkten $t = 0, 1, \dots, 12$ die jeweils mögliche Schadenanzahl dargestellt. Ein einzelner Pfad gibt eine konkrete der verschiedenen möglichen Schadenzahl-Entwicklungen an. Ein waagerechter Strich ist so zu interpretieren, dass im entsprechenden Zeitintervall kein Schaden auftritt; alternativ kann die Schadenanzahl pro Zeitperiode um genau eins zunehmen. Die Verbindungslinien sind u. a. deshalb gezogen, um die Analogie zu Abbildung 2.17 (S. 75) aufzuzeigen, in der der Bernoulli-Prozess im Zusammenhang mit der Finanzmarktmodellierung dargestellt ist. Ein konkreter Pfad kann dann also beispielsweise so aussehen, wie in Abbildung 2.12 dargestellt. Zu einem konkreten Zeitpunkt erhält man die Binomialverteilung mit den oben angegebenen Wahrscheinlichkeiten $P(N(t) = n) = p_n(t)$ für die möglichen Schadenanzahlen $n = 0, 1, 2, \dots, t$. Die Zähldichte der Binomialverteilung ist in Abbildung 2.13 mit $p = 0,1$ und $t = 6$ sowie $t = 12$ dargestellt.

2.3.1.1 Beispiel Schadenverteilung 1 (ein Risiko, mehrere Zeitperioden)

Ein Betrieb setzt in seiner Produktion eine Maschine ein, die in einem einzelnen Monat mit Wahrscheinlichkeit $p = 10\% = 0,1$ einen Schaden hat und repariert werden muss. Vereinfachend

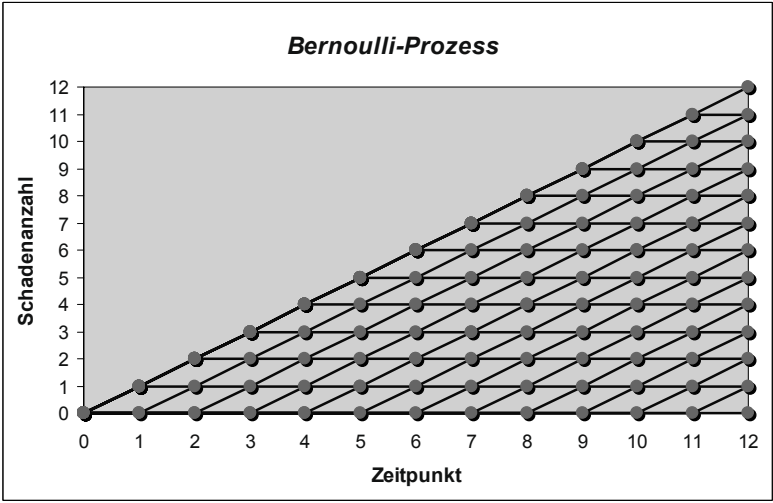


Abbildung 2.11: Mögliche Entwicklung der Schadenanzahl über zwölf Zeitperioden bei einem Bernoulli-Prozess

sei angenommen, dass pro Monat lediglich ein Schaden auftreten kann und dass das Auftreten eines Schadens in den einzelnen Zeitperioden unabhängig voneinander ist. Der konkrete Pfad in Abb. 2.12 kann also in diesem speziellen Zusammenhang so interpretiert werden, dass in den ersten zwei Monaten kein Schaden auftritt, im dritten und im vierten Monat ein Schaden auftritt, dann wieder zwei Monate kein Schaden usw. Ferner ergibt sich also für die mögliche Schadenanzahl (Reparaturfälle an der Maschine) nach sechs Monaten die in Tabelle 2.1 erfasste Wahrscheinlichkeitsverteilung, die in Abbildung 2.13 (oberer Teil) auch grafisch dargestellt

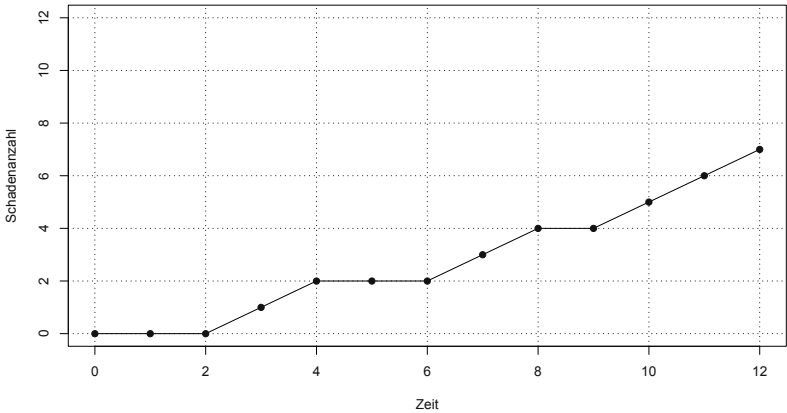


Abbildung 2.12: Eine Realisierung des Bernoulli-Prozesses aus Beispiel 2.3.1.1

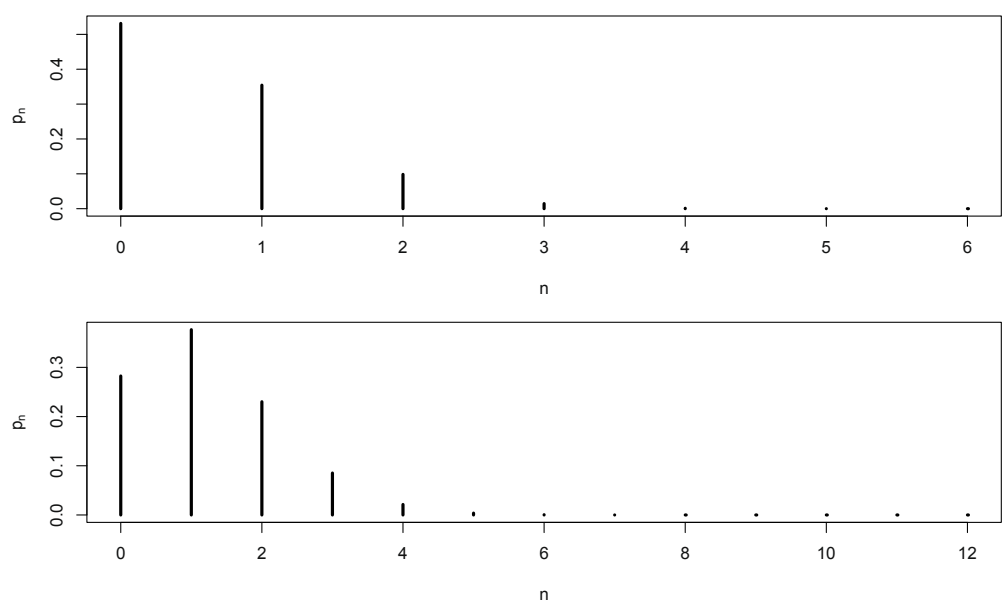


Abbildung 2.13: Zähldichte (Wahrscheinlichkeitsfunktion) von **Bin(6;0,1)** (oben) und **Bin(12;0,1)** (unten)

Schadenanzahl	Wahrscheinlichkeit
0	$\binom{6}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^6 = 0,531441$
1	$\binom{6}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^5 = 0,354294$
2	$\binom{6}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^4 = 0,098415$
3	$\binom{6}{3} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^3 = 0,014580$
4	$\binom{6}{4} \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^2 = 0,001215$
5	$\binom{6}{5} \cdot 0,1^5 \cdot 0,9^1 = 0,000054$
6	$\binom{6}{6} \cdot 0,1^6 \cdot 0,9^0 = 0,000001$

Tabelle 2.1: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Schadenanzahl in Beispiel 2.3.1.1

ist. Es ergibt sich eine erwartete Schadenanzahl von $\mathbf{E}(N) = 6 \cdot 0,1 = 0,6$ bei einer Varianz von $\mathbf{Var}(N) = 6 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,54$ bzw. einer Standardabweichung von $\mathbf{SD}(N) \approx 0,7348$. Um das Modell hinsichtlich der Annahme, dass pro Zeitperiode nur ein Schaden auftreten kann, realistischer zu gestalten, könnte man als Zeitperiode beispielsweise auch nur einen Tag betrachten und die Wahrscheinlichkeit p des Ausfalls entsprechend kleiner wählen; vgl. Aufgabe 2.10. Dies führt

allerdings zu teilweise recht kleinen Zahlenwerten, mit insbesondere unzureichender grafischer Darstellungsmöglichkeit.

2.3.1.2 Beispiel Schadenverteilung 2 (mehrere Risiken, eine Zeitperiode)

Als Variante zum vorangegangenen Beispiel kann man die Situation betrachten, dass der Betrieb nun 6 Maschinen gleichzeitig einsetzt. Dann liegt also *pro einzelner Zeitperiode* (z. B. Monat) die mögliche Schadenanzahl zwischen 0 und 6. Die Tabelle 2.1 mit zugehöriger Grafik aus Abbildung 2.13 (obere Grafik) zeigt dann also die Schadenanzahlverteilung einer einzigen Zeitperiode (Unabhängigkeit der einzelnen Maschinen vorausgesetzt). In dieser Variante wird also im Wesentlichen nur die Binomialverteilung und nicht der Bernoulli-Prozess betrachtet. Der Pfad in Abbildung 2.12 ließe sich zwar immer noch als Darstellung interpretieren, wie sich im Verlauf nun nur einer Zeitperiode (mit Unterperioden) die Schadenanzahl kumuliert. Aber genau genommen hat man in diesem Modell keine Informationen über die Eintrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen Unterperioden, da definitionsgemäß das Zufallsereignis „Maschinenschaden“ nur einmal pro Zeitperiode betrachtet wird und sich darauf die Eintrittswahrscheinlichkeit p bezieht. Auch in diesem Beispiel ergibt sich – nun bezogen auf *eine* Zeitperiode – eine erwartete Schadenanzahl von $E(N) = 6 \cdot 0,1 = 0,6$ bei einer Standardabweichung von $SD(N) \approx 0,7348$.

2.3.1.3 Beispiel Lebensversicherung

Ein Unternehmen hat im Rahmen seiner betrieblichen Sozialleistungen jedem Angestellten eine Hinterbliebenenvorsorge zugesagt. Im Todesfall soll jeweils eine Summe von 30.000 (Angaben in €) an die Angehörigen ausgezahlt werden. Es gibt 400 Angestellte, deren einjährige Sterbewahrscheinlichkeit (d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass die betreffende Person innerhalb des nächsten Jahres stirbt) vereinfachend unabhängig von Alter, Geschlecht und aktuellem Gesundheitszustand mit $q = 0,5\% = 0,005$ angesetzt wird. (Es ist in der Versicherungsmathematik üblich, Sterbewahrscheinlichkeiten mit q , und die Überlebenswahrscheinlichkeiten mit $p = 1 - q$ zu bezeichnen.)

Aus diesen Informationen lassen sich, ähnlich wie in Beispiel 2.3.1.2, in erster Linie Aussagen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung (hier: Binomialverteilung unter der Voraussetzung der Unabhängigkeit der einzelnen Sterbefälle) ableiten; eine Modellierung als stochastischer Prozess ist nicht notwendig. Man berechnet beispielsweise, dass der Erwartungswert der Sterbefälle innerhalb eines Jahres $E(N) = 400 \cdot 0,005 = 2$ beträgt. Pro Jahr ist also unter diesen Annahmen durchschnittlich mit zwei Sterbefällen zu rechnen, d. h. durchschnittlich mit einer Leistung des Unternehmens von 60.000 bzw. von 150 umgerechnet pro Kopf der Belegschaft. Aber es ist klar, dass es auch ganz anders kommen kann, vgl. Aufgabe 2.11. Deshalb wird das Unternehmen sich möglicherweise durch den Abschluss einer Versicherung bei einem Versicherungsunternehmen absichern. Die errechnete durchschnittliche Leistung von 60.000 für die Gesamtbelegschaft bzw. 150 pro Person wäre dann ein Anhaltspunkt für die Prämie, die dem Versicherungsunternehmen für die Übernahme des Versicherungsschutzes für ein Jahr zu zahlen ist, wobei klar ist, dass die Versicherung auch noch Beratungs- und Verwaltungskosten sowie einen Sicherheitszuschlag einkalkulieren muss. Die Notwendigkeit eines Sicherheitszuschlags ergibt sich zum einen aus unvorhergesehenen prinzipiellen Änderungen in der (Bevölkerungs-)Sterblichkeit, d. h. einer

Veränderung des Parameters q (im Rahmen dieses Beispiels nicht thematisiert) und zum anderen aus den modellgemäßen Zufallsschwankungen in der Sterblichkeit. Ein Risikomaß für die Zufallsschwankungen in dem Beispiel wäre etwa die Varianz $\text{Var}(N) = 400 \cdot 0,005 \cdot 0,995 = 1,99$ bzw. die Standardabweichung $\text{SD}(N) \approx 1,41$, was grob gesprochen bedeutet, dass eine Abweichung von 1,41 (bezogen auf die Grundgesamtheit von 400), d.h. von etwas mehr als einem Todesfall mehr oder weniger, „nicht ungewöhnlich ist“. Risikokennzahlen werden in Kapitel 4 noch eingehender behandelt.

Eine andere Möglichkeit des Unternehmens, sich auf seine finanziellen Verpflichtungen vorzubereiten, bestünde in der Bildung von entsprechenden Bilanzrückstellungen. Für deren notwendige Höhe kann der Erwartungswert ebenfalls ein Anhaltspunkt sein, wobei an dieser Stelle besonders deutlich wird, dass das Unternehmen auch mit Abweichungen rechnen (im wahrsten Sinne des Wortes) sollte.

Das gerade erläuterte Beispiel ist insofern realitätsnah, als dass in der Tat in vielen Unternehmen Angestellte neben ihrem Gehalt auch betriebliche Sozialleistungen wie etwa Zusagen für eine spätere Betriebsrente oder für Leistungen an Hinterbliebene erhalten. Und zur Absicherung der damit eingegangenen finanziellen Verpflichtungen können Unternehmen tatsächlich Versicherungen abschließen oder auch selbst Bilanzrückstellungen bilden. Zu Einzelheiten in diesem Zusammenhang gibt es allerdings umfangreiche gesetzliche Regelungen; zudem ist eine konkrete Prämien- bzw. Rückstellungsberechnung in der Realität nicht so einfach durchzuführen wie unter den hier nur zur Illustration der Binomialverteilung herangezogenen stark vereinfachten Annahmen.

2.3.1.4 Beispiel Zahlungsausfälle

Bei der Vergabe von Krediten spielt die Einschätzung der Zahlungsfähigkeit der potenziellen Schuldner eine große Rolle. Sie erfolgt unmittelbar durch den Kreditgeber oder auch durch spezielle Rating-Agenturen. Insbesondere bei der Beurteilung der Kreditwürdigkeit von Unternehmen durch Rating-Agenturen ist die „Benotung“ mit Hilfe von Rating-Klassen (bezeichnet z. B. mit AAA, AA, A, BBB, BB, B usw.) üblich. Einer vorgegebenen Rating-Klasse, beispielsweise B, wird eine bestimmte einjährige Ausfallwahrscheinlichkeit w , beispielsweise $w = 1\% = 0,01$ zugeordnet, die z. B. aus historischen Daten vergleichbarer Unternehmen geschätzt wird. Dieses Zahlenbeispiel ist fiktiv. Über Einzelheiten der Rating-Systeme von bekannten Rating-Agenturen wie Standard & Poor's oder Moody's kann man sich etwa auf deren Internet-Seiten informieren.

Die einjährige Ausfallwahrscheinlichkeit w gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Schuldner aus der fraglichen Rating-Klasse innerhalb eines Jahres „ausfällt“, also seinen Zahlungsverpflichtungen nicht mehr genügen kann. Die Größe w kann als gewisses Analogon zur einjährigen Sterbewahrscheinlichkeit in Beispiel 2.3.1.3 oder auch zur Schadenwahrscheinlichkeit p in 2.3.1.2 interpretiert werden. Hat also beispielsweise eine Bank t Kreditnehmer mit identischer Ausfallwahrscheinlichkeit w , so könnte sie in einem einfachen Modell die Anzahl N der Zahlungsausfälle innerhalb des nächsten Jahres in diesem Kreditportfolio als binomialverteilt, $N \sim \text{Bin}(t; w)$ annehmen. Es ist allerdings zu beachten, dass in diesem Beispiel die notwendige Annahme der Unabhängigkeit der Risiken oft unrealistisch sein dürfte. Für eine Modellierung der Zahlungsausfälle im Zeitverlauf, ähnlich wie bezüglich Schadenfällen in 2.3.1.1 angesprochen, kommt der Bernoulli-Prozess in aller Regel erst recht nicht in Betracht.

2.3.2 Negative Binomialverteilung

Häufig wird als Verteilungsmodell für die Schadenanzahl bis zu einem festen Zeitpunkt t bzw. bezogen auf ein bestimmtes Zeitintervall auch die negative Binomialverteilung $N \sim \mathbf{NB}(r; p)$ verwendet. Für $0 < p < 1$, $r > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$P(N = n) =: p_n = \binom{r+n-1}{n} \cdot p^r \cdot (1-p)^n.$$

Dabei ist der *verallgemeinerte Binomialkoeffizient* definiert als

$$\binom{x}{n} = \frac{x \cdot (x-1) \cdots (x-n+1)}{n!}.$$

Erwartungswert und Varianz sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N) &= \frac{r \cdot (1-p)}{p}, \\ \mathbf{Var}(N) &= \frac{r \cdot (1-p)}{p^2}. \end{aligned}$$

Für zwei unabhängige Einzelverteilungen gilt:

$$N_i \sim \mathbf{NB}(r_i; p) \quad (i = 1, 2) \quad \Rightarrow \quad N_1 + N_2 \sim \mathbf{NB}(r_1 + r_2; p).$$

Für ganzzahliges r kann p_n als die Wahrscheinlichkeit für genau n „Misserfolge“ bis zum r -ten Erfolg in einem Bernoulli-Prozess mit Erfolgswahrscheinlichkeit p interpretiert werden. Für $r = 1$ ergibt sich die sogenannte *geometrische Verteilung*.

Die Bedeutung der negativen Binomialverteilung für die Schadenmodellierung ergibt sich aber vor allem daraus, dass Verteilungen dieses Typs, auch für nichtganzzahliges r , bei bestimmten allgemeinen Poisson-Prozessen die Schadenanzahlverteilung zu einem festen Zeitpunkt beschreiben; vgl. die Abschnitte 2.3.9, 2.3.10 und 2.3.11. Bezogen auf einen festen Zeitpunkt t besitzt die negative Binomialverteilung als Schadenanzahl-Modell also zwei freie Parameter, ohne dass zunächst der stochastische Prozess interessiert, der zu dieser Verteilung geführt hat. Hingegen besitzt die Binomialverteilung nur einen, nämlich die Schadenwahrscheinlichkeit p (ihr weiterer freier Parameter ist gerade der Zeitparameter t , der den stochastischen Prozess im Zeitverlauf beschreibt). Die negative Binomialverteilung ist also in diesem Sinne flexibler als die Binomialverteilung.

2.3.2.1 Beispiel Krankenhausbehandlung

Ein Krankenversicherungsunternehmen möchte in einem stochastischen Kosten-Simulationsmodell abbilden, wie häufig eine Behandlung notwendig ist, bevor sich ein Behandlungserfolg einstellt, beispielsweise wie viele Chemotherapien bei einem Krebspatienten voraussichtlich durchzuführen sind, bis eine Rückbildung von Tumoren beobachtet werden kann. Ein einfaches Modell für die Anzahl N der notwendigen Behandlungen (also der „Schadenanzahl“ in Bezug auf die

Versicherungskosten) könnte die geometrische Verteilung mit vorgegebener Erfolgswahrscheinlichkeit p für eine erfolgreiche Einzelbehandlung sein. Die Angemessenheit dieses Modells würde aber voraussetzen, dass der Erfolg der Einzelbehandlungen voneinander unabhängig ist, was in aller Regel bei ärztlichen Therapien nicht der Fall sein dürfte. Alternativ könnte man daher versuchen, die notwendige Behandlungsanzahl als $N \sim \mathbf{NB}(r; p)$ mit $r \neq 1$ anzusetzen und die Parameter r und p aus statistischen Daten zu schätzen (ohne dass in diesem Zusammenhang das Verteilungsmodell weiter interpretiert wird).

2.3.2.2 Beispiel Kfz-Unfälle

Ein Mietwagenunternehmen mit 100 identischen Fahrzeugen möchte ein theoretisches Verteilungsmodell für die Anzahl von Unfällen pro Jahr in seinem Fuhrpark erstellen. Es liegen entsprechende Statistiken vor mit einem Mittelwert (als Schätzer für den Erwartungswert) von 20 Unfällen pro Jahr und einer Standardabweichung von 6,5, also Varianz von 42,25.

Da die Varianz deutlich höher ist als der Erwartungswert, kommt als Verteilungsmodell keine Binomialverteilung infrage; denn dabei ist die Varianz kleiner als der Erwartungswert. Außerdem ist unter der realitätsnahen Annahme, dass ein Wagen auch mehrere Unfälle pro Jahr haben kann, die mögliche Schadenanzahl prinzipiell unbegrenzt. Zu den angegebenen Daten würde etwa eine negative Binomialverteilung mit $r \approx 18$ und $p \approx 47,36\% = 0,4736$ passen (s. Abbildung 2.14).

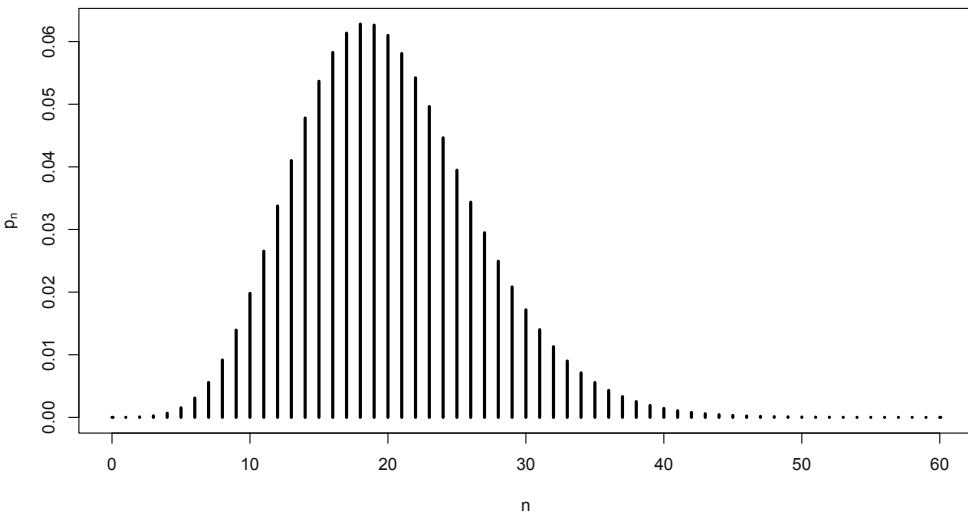


Abbildung 2.14: Zähldichte (Wahrscheinlichkeitsfunktion) von $\mathbf{NB}(18; 0,4736)$

2.3.3 Logarithmische Verteilung

Die logarithmische Verteilung $N \sim L(p)$ kommt als Schadenanzahlverteilung selbst nicht besonders häufig vor, wird aber als Baustein bei der Konstruktion komplexerer Schadenverteilungen verwendet; z. B. als Klumpenverteilung beim *Klumpen-Poisson-Prozess* (vgl. 2.3.10). Für $0 < p < 1$ lautet die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(N = n) =: p_n = \frac{p^n}{n} \cdot \frac{1}{-\ln(1-p)} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N) &= \frac{p}{-(1-p) \cdot \ln(1-p)}, \\ \mathbf{Var}(N) &= \frac{p \cdot (-\ln(1-p) - p)}{(1-p)^2 \cdot \ln^2(1-p)}. \end{aligned}$$

2.3.4 Poisson-Verteilung

Die *Poisson-Verteilung* $N \sim \mathbf{Pois}(\alpha)$ ergibt sich z. B. als Schadenanzahlverteilung bei homogenen Poisson-Prozessen (vgl. Abschnitt 2.3.7). Die Größe α entspricht dem Erwartungswert der Schadenanzahl bis zu einem vorgegebenen festen Zeitpunkt t ; durch die Festsetzung $\alpha = \lambda t$ mit dem *Intensitätsparameter* λ kann man eine einfache, nämlich bzgl. des Erwartungswerts und der Varianz lineare, Abhängigkeit der Schadenanzahl von der Länge des Betrachtungszeitraums darstellen. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion lautet

$$P(N = n) =: p_n = \frac{\alpha^n}{n!} \cdot e^{-\alpha} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Varianz entspricht dem Erwartungswert der Poisson-Verteilung; es gilt also:

$$\mathbf{E}(N) = \mathbf{Var}(N) = \alpha.$$

Eine für die Schadenmodellierung sehr wichtige Eigenschaft der Poisson-Verteilung besteht darin, dass die Summe zweier unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsvariablen wieder Poisson-verteilt ist; genauer:

$$N_i \sim \mathbf{Pois}(\alpha_i) \quad (i = 1, 2) \quad \Rightarrow \quad N_1 + N_2 \sim \mathbf{Pois}(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Entsprechendes gilt somit auch für die Summe von n unabhängigen Poisson-verteilten Zufallsvariablen.

2.3.4.1 Beispiel Schadenverteilung 1 (ein Risiko, mehrere Zeitperioden)

Wie in Beispiel 2.3.1.1 soll die Situation betrachtet werden, dass ein Betrieb eine Maschine t (z. B. $t = 6$) Zeitperioden lang einsetzt und die erwartete Anzahl der Maschinenausfälle pro Zeitperiode (Monat) 0,1 beträgt. Abweichend soll aber nun für die Anzahl der nach t Zeitperioden

beobachteten Maschinenausfälle eine Poisson-Verteilung mit Intensitätsparameter $\lambda = 0,1$, also mit einem periodenbezogenen Intensitätsparameter von $\alpha = 0,1 \cdot t = 0,6$, gelten (s. Abbildung 2.15).

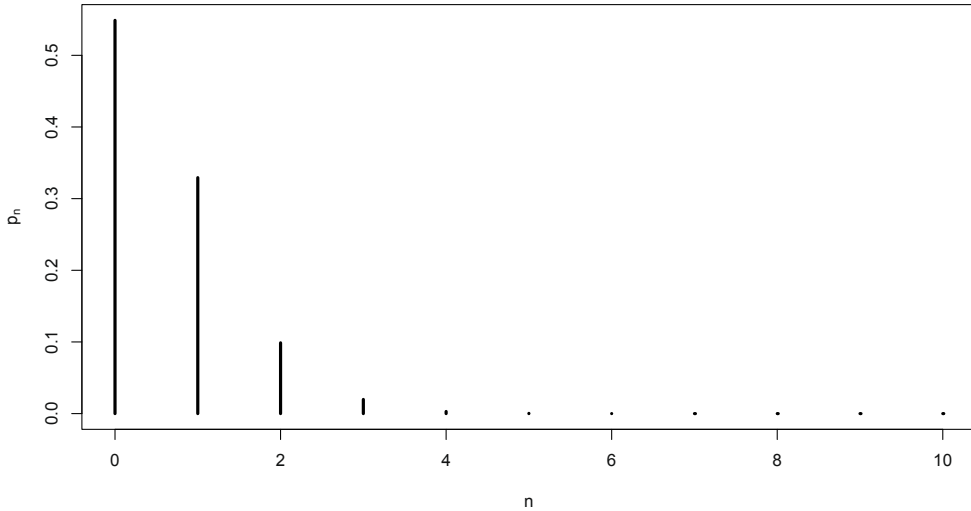


Abbildung 2.15: Zähl-dichte (Wahrscheinlichkeitsfunktion) von **Pois**(0,6)

Die erwartete Anzahl an Maschinenausfällen nach sechs Zeitperioden beträgt $E(N) = 0,6$ wie in 2.3.1.1, allerdings mit einer Varianz von ebenfalls $\text{Var}(N) = 0,6$. Anders als in 2.3.1.1 können in diesem Modell nun auch mehrere (prinzipiell unbegrenzt viele) Maschinenausfälle pro Zeitperiode vorkommen, und somit können über den 6-Monats-Zeitraum betrachtet insgesamt auch mehr als sechs Schäden vorkommen, wenngleich die Wahrscheinlichkeit dafür sehr klein ist, genauer

$$\begin{aligned}
 P(N > 6) &= 1 - P(N \leq 6) \\
 &= 1 - [P(N = 0) + P(N = 1) + \dots + P(N = 6)] \\
 &= 1 - [(\alpha^0 e^{-\alpha})/0! + (\alpha^1 e^{-\alpha})/1! + \dots + (\alpha^6 e^{-\alpha})/6!] \\
 &= 3,29 \cdot 10^{-6}.
 \end{aligned}$$

2.3.4.2 Beispiel Schadenverteilung 2 (mehrere Risiken, eine Zeitperiode)

Auch in der zu Beispiel 2.3.1.2 analogen Situation, dass in dem Betrieb nun sechs gleichartige Maschinen unabhängig über eine Zeitperiode eingesetzt werden, kann das Poisson-Modell verwendet werden. Geht man bezogen auf den gesamten Maschinenbestand von einer Ausfallintensität von $\alpha = 0,6$ aus, ist demnach die voraussichtliche Anzahl der Maschinenausfälle N genauso verteilt wie in 2.3.4.1.

2.3.4.3 Beispiel Mischung von Schadenverteilungen

Ein Betrieb setzt in der Produktion eine alte Maschine mit jahresbezogener Ausfallintensität $\alpha_1 = 2,2$ und eine neue Maschine mit jahresbezogener Ausfallintensität von $\alpha_2 = 0,8$ ein, wobei die Ausfallzahlen Poisson-verteilt angenommen werden. Somit genügt auch die Anzahl N der Ausfälle an beiden Maschinen insgesamt einer Poisson-Verteilung mit Intensitätsparameter $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 3$. Beispielsweise kommt es im Jahresmittel zu $E(N) = 3$ Ausfällen und die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb eines Jahres überhaupt kein Maschinenausfall eintritt, beträgt $P(N = 0) = e^{-3} \approx 0,05$.

2.3.5 Panjer-Verteilung

Eine sehr flexible Verteilung zur Modellierung der Schadenanzahl ist die Panjer-Verteilung $N \sim \mathbf{Panjer}(a, b)$ mit $a + b \geq 0$. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist gegeben durch die Rekursionsgleichung

$$P(N = 0) = p_0,$$

$$P(N = n) = p_n = p_{n-1} \cdot \left(a + \frac{b}{n} \right) \quad \text{für } n \geq 1,$$

wobei bei vorgegebenem a und b der Startwert p_0 durch die zusätzliche Bedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

schon eindeutig festgelegt ist. Für Erwartungswert bzw. Varianz der Panjer-Verteilung gilt

$$\mathbf{E}(N) = \frac{a+b}{1-a},$$

$$\mathbf{Var}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$

Die Panjer-Verteilung umfasst die Binomial-, negative Binomial- und Poisson-Verteilung als Spezialfälle. Genauer ergibt sich die Binomialverteilung $N \sim \mathbf{Bin}(t; p)$ mit

$$a = \frac{-p}{1-p}, \quad b = \frac{(t+1)p}{1-p}, \quad p_0 = (1-p)^t,$$

die negative Binomialverteilung $N \sim \mathbf{NB}(r; p)$ mit

$$a = 1-p, \quad b = (r-1)(1-p), \quad p_0 = p^r$$

und die Poisson-Verteilung $N \sim \mathbf{Pois}(\alpha)$ mit

$$a = 0, \quad b = \alpha, \quad p_0 = e^{-\alpha}.$$

Die Rekursionsgleichung zur Definition der Panjer-Verteilung ist besonders nützlich, wenn aus Schadenanzahl- und Schadenhöhenverteilung die Gesamtschadenverteilung bestimmt werden soll; vgl. Kap. 2.6.3.

2.3.6 Allgemeines zu Schadenanzahlprozessen

In den vorangegangenen Abschnitten wurde in erster Linie die Schadenanzahl innerhalb eines vorgegebenen Zeitraums modelliert. Nun soll zusätzlich der zeitliche Verlauf der Schadenanzahl dargestellt werden. Dies geschieht durch Schadenanzahlprozesse, von denen einige wichtige Beispiele in den folgenden Abschnitten vorgestellt werden.

Allgemein ist ein Schadenanzahlprozess eine Familie von Zufallsvariablen $N(t)$, $0 \leq t < \infty$, mit nichtnegativen ganzzahligen Werten und der Eigenschaft, dass $N(t)$ eine in t monoton steigende und rechtsseitig stetige Funktion ist. Die rechtsseitige Stetigkeit besagt, dass vereinbarungsgemäß Schäden, die genau im Endzeitpunkt t auftreten, mitgezählt werden. Ferner fordert man für Schadenanzahlprozesse die Bedingung $N(0) = 0$. Das heißt, der Prozess $N(t)$ zählt alle Schäden, beginnend bei null, die bis zum Zeitpunkt t aufgetreten sind. Man nennt solche Prozesse auch *Zählprozesse*.

Alternativ lassen sich Zählprozesse auch durch Aussagen über die Verteilung der Zwischeneintrittszeiten $D_i = T_i - T_{i-1}$ beschreiben, wobei $T_i, i \in \mathbb{N}$, die Eintrittszeit des i -ten Ereignisses bezeichnet. Das heißt, D_i gibt die Zeitdauer zwischen dem $(i-1)$ -ten und i -ten Eintreten eines Schadens an. Die Charakterisierung über die Zwischeneintrittszeiten ist z. B. zur Simulation von Schadenanzahlprozessen sehr nützlich.

Im folgenden Abschnitt 2.3.7 wird zunächst der homogene Poisson-Prozess behandelt, der auch in einer Vielzahl von Anwendungsfeldern über die Schadenmodellierung hinaus, etwa in der Kernphysik, der Telekommunikation und der Logistik, eine wichtige Rolle spielt. Wenngleich er in vielen Praxisanwendungen erfolgreich zur Modellierung der Schadenanzahl eingesetzt wird, so sind doch für viele Schadenarten die Voraussetzungen höchstens näherungsweise erfüllt. Abgesehen von heuristischen Überlegungen können Abweichungen des Schadenanzahlprozesses vom homogenen Poisson-Prozess möglicherweise im Rahmen empirischer Untersuchungen festgestellt werden, z. B. durch Aufdeckung von systematischen Abweichungen zwischen Varianz und Erwartungswert der Schadenanzahl pro Zeitintervall; vgl. auch Aufgabe 2.7. In diesem Falle stehen eine ganze Reihe von Modifikationen des homogenen Poisson-Prozesses zur Auswahl. Diese werden in den Abschnitten 2.3.8 – 2.3.12 vorgestellt. Die mathematischen Einzelheiten sind recht anspruchsvoll und können hier nicht im Einzelnen behandelt werden. Vielmehr geht es um einen ersten Einblick und die Vermittlung eines grundsätzlichen Gefühls für die Bedeutung unterschiedlicher Verteilungsannahmen. Für weitere Informationen sei auf Spezialliteratur zu stochastischen Prozessen verwiesen, z. B. [RSST99], [Mik04] und die dort zitierte Literatur. Eine Beschreibung der Simulation verschiedener Poisson-Prozesse findet sich in 7.4.

2.3.7 Homogener Poisson-Prozess

Der *homogene Poisson-Prozess* stellt die mathematisch einfachste Variante von Poisson-Prozessen dar. Er ist durch die folgenden Bedingungen charakterisiert:

Definition (Homogener Poisson-Prozess)

Ein Zählprozess $N(t)$ heißt homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$, falls gilt

(P1) $N(0) = 0$.

(P2) $N(t+u) - N(t) \sim \text{Pois}(\lambda u)$ für beliebige $t \geq 0, u > 0$.

(P3) Die Zufallsvariablen $N(t_{i+1}) - N(t_i)$, $i = 0, \dots, n-1$, sind für beliebige $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ unabhängig voneinander.

Dabei bezeichnet **Pois**(α) die Poisson-Verteilung mit Parameter α ; d. h. mit $\alpha = \lambda u$ gilt

$$P(N(u) = n) =: p_n(u) = \frac{(\lambda u)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda u} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } u \geq 0.$$

Für Erwartungswert und Varianz gilt also: $\mathbf{E}(N(u)) = \mathbf{Var}(N(u)) = \lambda u$.

Der Parameter λ wird im Zusammenhang mit (homogenen) Schadenanzahlverteilungen auch *Schadenintensität* (für den Zeitraum der Länge 1) genannt. Manchmal wird allgemeiner auch α als *Schadenintensität für den Zeitraum der Länge u* bezeichnet. Die Eigenschaft (P2) besagt, dass die zufällige Anzahl der Schäden in einem gegebenen Zeitintervall Poisson-verteilt ist mit einer Intensität, d. h. erwarteter Anzahl von Schäden, die proportional mit dem Faktor λ nur von der Länge des Intervalls abhängt. Speziell hängt also die Verteilung der Schadenanzahl nicht von der Lage des Intervalls ab. Dies wird auch als *Homogenität* oder *Stationarität der Zuwächse* bezeichnet. In Bezug auf die Schadenmodellierung bedeutet dies, dass es keine Saisonabhängigkeit oder systematischen zeitlichen Trends gibt.

Eigenschaft (P1) gilt definitionsgemäß für jeden Schadenanzahlprozess. Die Eigenschaft (P3) besagt, dass die Schadenanzahl eines bestimmten Zeitraums nicht die Schadenanzahl eines davon disjunkten Zeitraums beeinflusst; dies wird auch als *Unabhängigkeit der Zuwächse* bezeichnet. Insbesondere gibt es keine Ansteckungsprozesse oder Kettenreaktionen und auch keine Lerneffekte. Aus Schaden wird man also in diesem Fall nicht klug.

2.3.7.1 Beispiel Schadenverteilung (mehrere Risiken, mehrere Zeitperioden)

In den Beispielen 2.3.1.1 und 2.3.4.1 wurde der Ausfall einer Maschine über mehrere Zeitperioden modelliert, in den Beispielen 2.3.1.2 und 2.3.4.2 der Ausfall mehrerer Maschinen über eine Zeitperiode. Wenn wir die Maschinenausfälle mit einem Poisson-Prozess simulieren, können wir nun auch unmittelbar den Fall betrachten, dass mehrere Maschinen über mehrere Zeitperioden eingesetzt werden. Ähnlich wie vorher sei beispielsweise angenommen, dass in einem größeren Bestand von gleichartigen Maschinen eine Ausfallintensität von $\lambda = 0,6$ pro Monat herrscht. Damit ergibt sich eine jährliche Ausfallintensität von $\alpha = 12 \cdot \lambda = 7,2$. Die erwartete Anzahl an Maschinenausfällen pro Monat beträgt $\mathbf{E}(N(1)) = 0,6$, pro Halbjahr $\mathbf{E}(N(6)) = 3,6$, pro Jahr $\mathbf{E}(N(12)) = 7,2$, pro zwei Jahre $\mathbf{E}(N(24)) = 14,4$. Weitere Einzelheiten zur Verteilung der Maschinenausfälle sollen in Aufgabe 2.13 selbst berechnet werden. In Abbildung 2.16 ist ein Pfad des entsprechenden Poisson-Prozesses über den Verlauf von zwei Jahren dargestellt.

2.3.7.2 Beispiel Zahlungsausfälle

In Anknüpfung an Beispiel 2.3.1.4 sei angenommen, dass einem Schuldner der Rating-Klasse B eine bestimmte einjährige Ausfallwahrscheinlichkeit w , z. B. $w = 0,01$, zugeordnet wird. Wenn angenommen werden kann, dass die Anzahl n der betrachteten Kredite recht hoch ist, z. B. $n = 10000$, und die Kreditnehmer (weitgehend) unabhängig voneinander sind, ist ein einfacher Ansatz für ein zeitabhängiges Modell der Kreditausfälle ein Poisson-Prozess mit Ausfallintensität $\lambda = nw$, also $\lambda = 100$ pro Jahr in dem konkreten Zahlenbeispiel. Damit wäre also

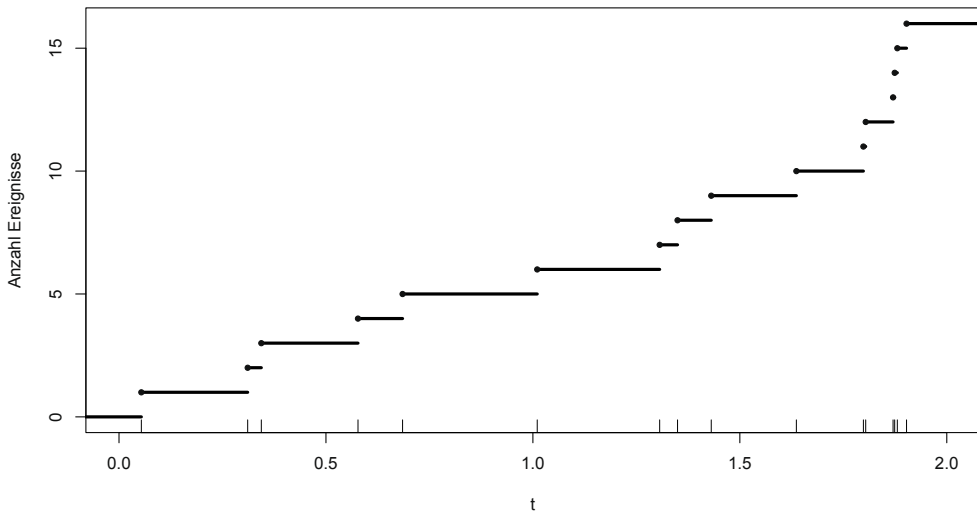


Abbildung 2.16: Realisierung eines homogenen Poisson-Prozesses mit $\lambda = 7,2$. Die Ereigniszeiten sind als vertikale Striche oberhalb der Zeitachse dargestellt.

die zufallsabhängige Anzahl der Kreditausfälle $N(t)$ bis zum Zeitpunkt t (in Jahren) Poissonverteilt, nämlich $N(t) \sim \text{Pois}(100t)$. Die erwartete Anzahl an Ausfällen pro Halbjahr wäre also $E(N(0,5)) = 50$ und für zwei Jahre $E(N(2)) = 200$, wenn angenommen wird, dass sich innerhalb von zwei Jahren tatsächlich die Kreditwürdigkeitseinschätzung nicht ändert. Weitere Zahlenbeispiele zur Verteilung der Kreditausfälle sollen in Aufgabe 2.12 selbst berechnet werden.

2.3.7.3 Beispiel Krankenversicherung

Die erwartete Anzahl von Versicherten, die im Kalenderjahr wegen einer bestimmten Krankheit behandelt werden müssen, sei mit $E(N) = 24$ angenommen. Geht man von einer Poisson-Verteilung mit Intensität $\lambda = 24$ pro Jahr aus, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass genau n Personen wegen der Krankheit behandelt werden müssen zu $P(N(1) = n) = 24^n \cdot e^{-24} / n!$. Des Weiteren ergäbe sich nach dem Poisson-Modell z. B. für die Wahrscheinlichkeit von $N(1/12)$ Krankheitsfällen innerhalb eines Monats (= 1/12 Jahr) $P(N(1/12) = n) = (2^n \cdot e^{-2}) / n!$ mit $E(N(1/12)) = 2$.

2.3.7.4 Charakterisierung über Zwischeneintrittszeiten

Der homogene Poisson-Prozess lässt sich alternativ durch die Verteilung der Zwischeneintrittszeiten $D_i = T_i - T_{i-1}$, d. h. der Zeitdauern zwischen dem $(i-1)$ -ten und i -ten Eintreten eines Schadens, charakterisieren. Gemäß (P3) sind die Zwischeneintrittszeiten beim homogenen Poisson-Prozess unabhängig voneinander und außerdem aufgrund von (P2) exponentialverteilt,

d. h.

$$P(D_i \leq t) = 1 - \exp(-\lambda t). \quad (2.1)$$

Dies ist eine sehr wichtige Eigenschaft, die u. a. bei der Simulation von Poisson-Prozessen ausgenutzt wird. Umgekehrt kann man zeigen, dass jeder Schadenanzahlprozess mit unabhängigen, λ -exponentialverteilten Zwischeneintrittszeiten ein homogener Poisson-Prozess mit Schadenintensität λ ist, vgl. [Mik04, Satz 2.1.6].

2.3.7.5 Charakterisierung der Homogenitätseigenschaft

Eine weitere für die Schadenmodellierung wichtige Eigenschaft des homogenen Poisson-Prozesses lässt sich aus einer alternativen Formulierung von (P2) ableiten. Man kann nämlich zeigen, dass für einen Schadenanzahlprozess Folgendes gilt (vgl. [Nor97]).

Satz (Charakterisierung der Homogenitätseigenschaft des Poisson-Prozesses)

Folgende Eigenschaften sind zu (P2) äquivalent:

(P2a) Die Verteilung von $N(t+u) - N(t)$ hängt nur von u , aber nicht von t ab ($t \geq 0, u > 0$).

(P2b) Es gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(N(t+h) - N(t) = 1)}{h} = \lambda$.

(P2c) Es gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(N(t+h) - N(t) \geq 2)}{h} = 0$.

Die Beziehungen (P2b) und (P2c) ergeben sich aus (P2) durch Taylorreihenentwicklung der betrachteten Wahrscheinlichkeiten; vgl. Aufgabe 2.6.

Anschaulich bedeutet (P2b), dass die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt genau eines Schadens in einem „kleinen“ Zeitintervall der Länge h ungefähr $\lambda \cdot h$ ist, wohingegen gemäß (P2c) in diesem kleinen Zeitintervall das Eintreten von mehr als einem Schaden so gut wie unmöglich ist. Aus (P2b) und (P2c) ergibt sich weiterhin die auch als *Regularität* bezeichnete Eigenschaft

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(N(t+h) - N(t) \geq 2)}{P(N(t+h) - N(t) = 1)} = 0.$$

Man spricht auch von einem *Prozess ohne multiple Ereignisse*.

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem sehr kleinen Zeitintervall mehr als ein Schadenfall eintritt, ist vernachlässigbar klein; es treten also keine Kumulschäden auf. (Von *Kumulschäden* spricht man bei gehäuften gleichzeitigen Schadenfällen, z. B. aufgrund einer Naturkatastrophe.)

Der obige Charakterisierungssatz ist aus praktischer Sicht äußerst relevant, denn er besagt, dass jeder Zählprozess bei dem

- die Anzahl der Ereignisse in disjunkten Zeitintervallen unabhängig sind (Eigenschaft (P3)) und
- die Verteilung der Anzahl der Ereignisse in einem Zeitintervall nur von der *Länge* des Zeitintervalls abhängt (Eigenschaft (P2a)) und

- in sehr kleinen Zeitintervallen praktisch höchstens *ein* Ereignis eintreten kann (Eigenschaften (P2b) und (P2c))

bereits ein Poisson-Prozess ist. Diese Voraussetzungen sind im Kontext der Schadenmodellierung oft zumindest näherungsweise erfüllt. Prozesse mit abgeschwächten bzw. modifizierten Annahmen werden in den nachfolgenden Abschnitten vorgestellt.

2.3.8 Inhomogener Poisson-Prozess

Ersetzt man in der Definition des homogenen Poisson-Prozesses in Eigenschaft (P2) den konstanten Intensitätsparameter λ durch eine zeitabhängige Funktion $\lambda(t) \geq 0$, so spricht man von einem *inhomogenen Poisson-Prozess*. Die Größe λt wird also ersetzt durch die monoton wachsende *kumulative Intensitätsfunktion*

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du.$$

Der inhomogene Poisson-Prozess mit Intensitätsfunktion $\Lambda(t)$ ist charakterisiert durch die folgenden Bedingungen:

Definition (Inhomogener Poisson-Prozess)

Ein Zählprozess $N(t)$ heißt inhomogener Poisson-Prozess mit Intensitätsfunktion $\Lambda(t)$, wenn gilt:

(iP1) $N(0) = 0$.

(iP2) $N(t+u) - N(t) \sim \text{Pois}(\Lambda(t+u) - \Lambda(t))$ für beliebige $t \geq 0, u > 0$.

(iP3) Die Zufallsvariablen $N(t_{i+1}) - N(t_i)$, $i = 0, \dots, n-1$, sind für beliebige $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ unabhängig voneinander.

Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von n Schadenfällen im Zeitraum $[0; u]$ beträgt beim inhomogenen Poisson-Prozess also

$$P(N(u) = n) =: p_n(u) = \frac{[\Lambda(u)]^n}{n!} \cdot e^{-\Lambda(u)}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und $u \geq 0$. Für Erwartungswert und Varianz gilt dann:

$$\mathbf{E}(N(u)) = \mathbf{Var}(N(u)) = \Lambda(u).$$

Anwendungen des inhomogenen Poisson-Prozesses ergeben sich z. B. bei der Modellierung des positiven Einflusses von Risikoprüfungen und besonderer Präventionsmaßnahmen auf die Schadenintensität (Abschwächung dieses Einflusses im Zeitverlauf) oder bei der Modellierung „alternder“ Versicherungskollektive in der Krankenversicherung (zunehmende Schadenintensität).

2.3.8.1 Beispiel Schadenverteilung

In Abwandlung von Beispiel 2.3.7.1 sei angenommen, dass die Ausfallintensität der Maschinen mit der Zeit aufgrund des Verschleißprozesses linear wächst. Genauer soll gelten $\lambda(t) = 0,1 \cdot t$, wobei die Zeiteinheit weiterhin ein Monat sei. Die kumulierte Intensitätsfunktion lautet $\Lambda(t) = \int_0^t 0,1 \cdot u \, du = 0,05 \cdot t^2$. Die erwartete Anzahl an Ausfällen, also die Ausfallintensität bezogen auf den Gesamtzeitraum, entspricht nach zwölf Monaten dem in Beispiel 2.3.7.1 angenommenen Wert von $\alpha = 7,2$; vorher ist sie kleiner und nachher größer. Beispielsweise beträgt die erwartete Anzahl von Ausfällen nach 6 Monaten $E(N(6)) = 0,05 \cdot 36 = 1,8$ und nach 24 Monaten $E(N(24)) = 28,8$.

2.3.8.2 Beispiel Krankenversicherung

In Abwandlung von Beispiel 2.3.7.3 sei angenommen, dass gegen die fragliche Krankheit ein neuer Impfstoff zur Verfügung steht und also die Anzahl der Neuerkrankungen im Zeitverlauf abnimmt. Genauer soll gelten $\lambda(t) = 6 \cdot t^{-1/2}$, wobei die Zeiteinheit weiterhin ein Jahr sei. Die kumulierte Intensitätsfunktion lautet $\Lambda(t) = \int_0^t 6 \cdot u^{-1/2} du = 12 \cdot t^{1/2}$. Nach einem Vierteljahr liegt die erwartete Anzahl von behandlungsbedürftigen Erkrankten also bei $E(N(1/4)) = 6$, d. h. genauso hoch wie in Beispiel 2.3.7.3 bei Annahme einer konstanten Intensität von 24. Nach einem Monat ergäbe sich $E(N(1/12)) \approx 3,5$, also ein höherer Wert als in 2.3.7.3. Demgegenüber ergibt sich nach einem Jahr $E(N(1)) = 12$, also ein deutlich geringerer Wert als in 2.3.7.3.

2.3.9 Poisson-Ansteckungsprozess

Beim Poisson-Ansteckungsprozess geht man davon aus, dass die künftige Schadenanzahl zwar grundsätzlich Poisson-verteilt ist (als bedingte Verteilung), die Schadenintensität aber von der Anzahl der zuvor bereits eingetretenen Schäden abhängt; es ist also die Bedingung der Unabhängigkeit der Zuwächse verletzt. Aussagen über die sich ergebende Wahrscheinlichkeitsfunktion sind nur in Spezialfällen möglich.

Wenn die Schadenintensität λ_n beispielsweise linear von der Anzahl n der bereits eingetretenen Schadenfälle abhängt, d. h. $\lambda_n = a + bn$ mit $a > 0$, so spricht man von *linearer Ansteckung*. Man kann zeigen, dass sich im Falle der *positiven linearen Ansteckung* ($b > 0$) eine negative Binomialverteilung

$$N(t) \sim \mathbf{NB}\left(\frac{a}{b}; e^{-bt}\right)$$

der Gestalt

$$P(N(t) = n) = p_n(t) = \binom{\frac{a}{b} + n - 1}{n} \cdot e^{-at} \cdot (1 - e^{-bt})^n$$

ergibt (vgl. [Hel02, Abschnitt 1.4.1]).

Anwendungen des Poisson-Ansteckungsprozesses ergeben sich z. B. bei der Modellierung von Epidemien („positive Ansteckung“) oder der Modellierung der Wirkung von Präventionsmaßnahmen und Lerneffekten nach Schadenfällen („negative Ansteckung“).

2.3.10 Klumpen-Poisson-Prozess

Der Klumpen-Poisson-Prozess geht davon aus, dass der Eintritt von Schadenereignissen durch einen homogenen Poisson-Prozess modelliert werden kann, pro Schadenereignis jedoch mehrere Schadenfälle auftreten können. Für die Anzahl der Schadenfälle pro Schadenereignis wird eine geeignete diskrete Verteilung, die sogenannte *Klumpenverteilung*, angesetzt.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion lässt sich nicht allgemein angeben. Man weiß jedoch (vgl. [Hel02, Abschnitt 1.4.1]), dass für die einer Klumpen-Poisson-Verteilung unterworfenen Schadenanzahl $N(t)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N(t)) &= \lambda t \cdot \mathbf{E}_K; \\ \mathbf{Var}(N(t)) &= \lambda t \cdot \mathbf{Var}_K + \lambda t \cdot (\mathbf{E}_K)^2, \end{aligned}$$

wobei \mathbf{E}_K und \mathbf{Var}_K Erwartungswert und Varianz der Klumpen-Verteilung bezeichnen und λ der charakteristische Parameter der zugrunde liegenden Poisson-Verteilung ist.

Klumpen-Poisson-Prozesse werden bei der Modellierung von Kumulschäden eingesetzt, z. B. für Hagelschäden in der Kfz-Versicherung oder Erdbeben- oder Hochwasserschäden in der Gebäude-Versicherung. Aus der oben angegebenen Formel für die Varianz wird die „Gefährlichkeit“ von Kumulrisiken deutlich (große erwartete Abweichungen im Zeitverlauf, besonders bei hohem Erwartungswert der Klumpenverteilung).

Einen Klumpen-Poisson-Prozess kann man auch als Spezialfall eines sogenannten zusammengesetzten Poisson-Prozesses auffassen. Zusammengesetzte Poisson-Prozesse stellen i. Allg. keine Zählprozesse mehr dar und kommen bei der Gesamtschadenmodellierung zum Einsatz, vgl. Abschnitt 2.6.3.

2.3.11 Gemischter Poisson-Prozess

Beim gemischten Poisson-Prozess wird der homogene Poisson-Prozess dahin gehend verallgemeinert, dass die Schadenintensität λ nicht als deterministische Größe, sondern selbst wieder als Zufallsvariable Λ aufgefasst wird. Man kann sich diesen Prozess somit als zweistufiges Experiment vorstellen: Im ersten Schritt wird zufällig eine Intensität λ „gezogen“, im zweiten Schritt realisiert sich ein homogener Poisson-Prozess mit der im ersten Schritt gezogenen Intensität. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Λ nennt man auch *mischende Verteilung des Zufallsprozesses*. Dieser grundsätzliche Ansatz führt zu einer recht allgemeinen Klasse von Zählprozessen.

Kann man in einem Gesamtbestand von Risiken z. B. m homogene Klassen mit jeweiliger Schadenintensität λ_i unterscheiden, so kann die Schadenintensität Λ also die Werte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ annehmen. Die mischende Verteilung ist demnach diskret und definiert durch die Festlegung der Wahrscheinlichkeiten

$$p_i = P(\Lambda = \lambda_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, m \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1.$$

Für die Verteilung der Schadenanzahl ergibt sich somit

$$P(N(t) = n) = p_n(t) = \sum_{i=1}^m \frac{(\lambda_i t)^n}{n!} \cdot \exp(-\lambda_i t) \cdot p_i.$$

Oft wird die Schadenintensität Λ auch als stetige Zufallsvariable modelliert. Die mischende Verteilung kann dann also über eine Dichtefunktion $u(\lambda)$ beschrieben werden. Für die Verteilung der Schadenanzahl ergibt sich in diesem Fall

$$P(N(t) = n) = p_n(t) = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t} u(\lambda) d\lambda.$$

Besonders häufig werden in der Praxis die Dichten der inversen Gauß-Verteilung, der logarithmischen Normalverteilung oder der Gamma-Verteilung verwendet; vgl. [Hel02, Abschnitt 1.4.1].

Speziell bei Verwendung der Gamma-Verteilung spricht man auch von einem *Polya-Prozess*. Man kann zeigen (s. [RSST99, S. 370]), dass sich für die Gamma-Verteilung mit Parametern k und c für die Schadenanzahl im Zeitraum $[0; t]$ eine negative Binomialverteilung ergibt; genauer

$$P(N(t) = n) = p_n(t) = \binom{k+n-1}{n} \cdot \left(\frac{c}{c+1}\right)^k \cdot \left(\frac{t}{c+t}\right)^n$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N(t)) &= \frac{kt}{c}, \\ \mathbf{Var}(N(t)) &= \frac{kt}{c} \cdot \left(1 + \frac{t}{c}\right). \end{aligned}$$

Allgemein kann man zeigen (s. [RSST99, S. 370]), dass für Erwartungswert und Varianz des gemischten Poisson-Prozesses

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N(t)) &= t \cdot \mathbf{E}_{\Lambda}, \\ \mathbf{Var}(N(t)) &= t^2 \cdot \mathbf{Var}_{\Lambda} + t \cdot \mathbf{E}_{\Lambda}, \end{aligned}$$

gilt, wobei \mathbf{E}_{Λ} und \mathbf{Var}_{Λ} Erwartungswert und Varianz der mischenden Verteilung bezeichnen.

Gemischte Poisson-Prozesse besitzen in der Schadenmodellierung ein recht breites Anwendungsfeld, z. B. bei heterogenen Versicherungsbeständen. Speziell der Polya-Prozess bzw. die negative Binomialverteilung werden häufig zur Konstruktion von Bonus-Malus-Systemen in der Kfz-Versicherung eingesetzt; vgl. [KGDD08, Abschnitt 7.5].

2.3.11.1 Beispiel Mischung von Schadenverteilungen

Die Mischung von Schadenverteilungen wurde ansatzweise bereits in Beispiel 2.3.4.3 angesprochen. In Abwandlung dieses Beispiels sei nun angenommen, dass der Betrieb 100 unabhängige Maschinen parallel einsetzt, davon einen Prozentsatz p alter Maschinen mit einer Gesamtausfallintensität von $100 \cdot p \cdot 2,2$ pro Jahr und einen Prozentsatz $1 - p$ neuer Maschinen mit einer Gesamtausfallintensität von $100 \cdot (1 - p) \cdot 0,8$ pro Jahr. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallanzahl für alle 100 Maschinen bis zum Zeitpunkt t beträgt

$$P(N(t) = n) = p \cdot \frac{(100 \cdot p \cdot 2,2t)^n \cdot e^{-100 \cdot p \cdot 2,2t}}{n!} + (1 - p) \cdot \frac{(100 \cdot (1 - p) \cdot 0,8t)^n \cdot e^{-100 \cdot (1 - p) \cdot 0,8t}}{n!}.$$

In Aufgabe 2.15 soll die Verteilung für ausgewählte Werte von p konkret berechnet werden.

2.3.11.2 Beispiel gemischte Kreditbestände

Eine Bank hat ein Kreditportfolio von 10.000 ähnlichen als unabhängig voneinander angenommenen Kleinkrediten. Aufgrund ihres Rating-Systems unterscheidet sie drei verschiedene Schuldnerntypen A, B und C, deren prozentualer Anteil am Gesamtportfolio p_1 , p_2 bzw. p_3 beträgt mit $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Es wird ferner angenommen, dass die Zahlungsausfälle der einzelnen Schuldnerntypen näherungsweise durch einen homogenen Poisson-Prozess beschrieben werden können, wobei Schuldnerntyp A mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 % pro Jahr ausfällt, Schuldnerntyp B mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % pro Jahr und Schuldnerntyp C mit einer Wahrscheinlichkeit von 3 % pro Jahr. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Kreditausfälle innerhalb eines Jahres bezogen auf den Gesamtbestand von 10.000 Krediten beträgt in diesem Modell

$$P(N = n) = p_1 \cdot \frac{(20p_1)^n \cdot e^{-20p_1}}{n!} + p_2 \cdot \frac{(100p_2)^n \cdot e^{-100p_2}}{n!} + p_3 \cdot \frac{(300p_3)^n \cdot e^{-300p_3}}{n!}.$$

(Natürlich könnte man die Verteilung auch noch in Abhängigkeit vom Zeitparameter t beschreiben, ähnlich wie in 2.3.11.1). In Aufgabe 2.16 soll die Verteilung für ausgewählte Werte von p_1, p_2 bzw. p_3 konkret berechnet werden.

2.3.12 Cox-Prozess

Der *Cox-Prozess* verallgemeinert die oben dargestellten Ansätze, indem die Intensitätsfunktion $\Lambda(t)$ selbst wiederum als stochastischer Prozess modelliert wird. Daher wird dieser Prozess auch als *doppelt stochastischer Poisson-Prozess* bezeichnet. Auch dieser Prozess lässt sich als zweistufiges Zufallsexperiment beschreiben: Im ersten Schritt wird eine Realisierung des Intensitätsprozesses gezogen. Mit dem Pfad dieser Realisierung als Intensitätsfunktion wird dann im zweiten Schritt ein inhomogener Poisson-Prozess erzeugt. Für eine ausführlichere mathematische Darstellung von Cox-Prozessen im Finanz- und Versicherungskontext verweisen wir auf [RSST99]; in [BD02] wird eine Anwendung zum Pricing von Rückversicherungsverträgen dargestellt.

2.3.13 Aufgaben

Aufgabe 2.6

Leiten Sie die Beziehungen (P2b) und (P2c) aus 2.3.7 durch Taylorreihenentwicklung der betrachteten Wahrscheinlichkeiten aus (P2) her.

Aufgabe 2.7

Berechnen Sie den Variationskoeffizienten $VK(N) = \frac{SD(N)}{E(N)}$ sowie den Quotienten $\frac{Var(N)}{E(N)}$ für eine binomialverteilte, negativ binomialverteilte bzw. Poisson-verteilte Schadenanzahl N und vergleichen Sie die Ergebnisse. Wie könnte man also diese Verhältnissgrößen einer tatsächlich beobachteten Schadenanzahlverteilung als Orientierungsgröße bei der Auswahl eines geeigneten Verteilungsmodells nutzen?

Aufgabe 2.8

Entwickeln Sie ein Tool zur Berechnung von Erwartungswert und Varianz der Klumpen-Poisson-Verteilung mit der negativen Binomialverteilung sowie der logarithmischen Verteilung als Klumpenverteilung. Die Parameter der negativen Binomialverteilung und der logarithmischen Verteilung sollen dabei frei eingegeben werden können. Vergleichen Sie die Ergebnisse, indem Sie die Verteilungsparameter der beiden Klumpenverteilungen so wählen, dass

- deren Erwartungswerte (und damit auch die Erwartungswerte der Klumpen-Poisson-Verteilung)
- die beiden Varianzen der Klumpen-Poisson-Verteilung

nach einer Zeitperiode ($t = 1$) übereinstimmen. Stellen Sie die Entwicklung von Erwartungswert und Varianz des Klumpen-Poisson-Prozesses im Zeitverlauf auch grafisch dar.

Aufgabe 2.9

Erläutern Sie anhand von Wertetabellen und einer grafischen Veranschaulichung die Zeitabhängigkeit von Erwartungswert und Varianz der Schadenanzahlverteilung bei einem

- (a) positiven linearen Ansteckungsprozess;
- (b) Polya-Prozess.

Aufgabe 2.10

In Abwandlung von Beispiel 2.3.1.1 sei angenommen, dass als Einheitszeitperiode ein Tag betrachtet wird und die tägliche Wahrscheinlichkeit eines Schadens $p = 0,1/30 = 1/300$ sei. Berechnen Sie, z. B. mittels R oder Excel, im Binomialmodell die Wahrscheinlichkeit von $k = 0, 1, \dots, 30$ Schäden sowie die erwartete Schadenanzahl und die Standardabweichung der Verteilung.

Aufgabe 2.11

Für das Beispiel 2.3.1.3 berechne man die Wahrscheinlichkeit von $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ Todesfällen innerhalb eines Jahres.

Aufgabe 2.12

- (a) In Anknüpfung an Beispiel 2.3.1.4 sei angenommen, dass eine Bank ein Kreditportfolio von $n = 100$ ($n = 1.000, n = 10.000$) unabhängigen Kreditnehmern mit identisch eingeschätzter einjähriger Ausfallwahrscheinlichkeit $w = 0,01$ hält. Berechnen Sie unter Annahme des Binomialmodells die erwartete Anzahl an Kreditausfällen und die Standardabweichung der Verteilung sowie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ (bzw. $k = 0, 10, 20, 30, \dots, 100$ für $n = 1.000$, $k = 0, 100, 200, 300, \dots, 1.000$ für $n = 10.000$) Kreditausfälle innerhalb eines Jahres eintreten.
- (b) Im letzten Satz von Beispiel 2.3.1.4 wird angemerkt, dass der Bernoulli-Prozess für eine Modellierung von Kreditausfällen im Zeitverlauf in der Regel nicht infrage kommt. Begründen Sie diese Aussage ausführlicher.
- (c) In Anknüpfung an Beispiel 2.3.7.2 sei ein Portfolio unabhängiger Kreditnehmer mit Ausfallintensität von $\lambda = 1$ ($\lambda = 10, \lambda = 100$) pro Jahr gegeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ (bzw. $k = 0, 10, 20, 30, \dots, 100$ für $n =$

1.000, $k = 0, 100, 200, 300, \dots, 1.000$ für $n = 10.000$) Kreditausfälle innerhalb eines Jahres eintreten und vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus Teil a). Führen Sie ähnliche Berechnungen auch für andere Zeitperioden durch z. B. für die Kreditausfälle innerhalb eines Halbjahres und innerhalb von zwei Jahren.

Aufgabe 2.13

In Anknüpfung an die Beispiele 2.3.4.1 und 2.3.7.2 berechne man für eine vorgegebene Ausfallintensität von $\lambda = 0,1$ sowie $\lambda = 0,6$ pro Zeitperiode die Wahrscheinlichkeit von $k = 0, 1, \dots, 10$ Schadenfällen für jeweils $t = 1, t = 6$ und $t = 12$ Zeitperioden. Insbesondere für die Gesamtausfallintensität $\alpha = \lambda \cdot t = 0,6$ vergleiche man mit der Binomialverteilung in Tabelle 2.1 zu Beispiel 2.3.1.1.

Aufgabe 2.14

In Abwandlung von Beispiel 2.3.7.3 sei nun angenommen, dass es sich um eine Krankheit handelt, bei der die Anzahl der Neuerkrankungen im Zeitverlauf zunimmt. Genauer soll gelten $\lambda(t) = 24 \cdot t$, wobei die Zeiteinheit weiterhin ein Jahr sei. Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Behandlungsfällen bis zum Zeitpunkt t (also die kumulative Intensitätsfunktion) und bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die erwartete Anzahl behandlungsbedürftiger Erkrankter genauso groß ist, wie im Modell mit konstanter Intensität von 24.

Aufgabe 2.15

Berechnen Sie in der Situation von Beispiel 2.3.11.1, z. B. mittels Excel oder R, für verschiedene Werte von p (z. B. $p = 0,1$ und $p = 0,4$) die Wahrscheinlichkeit von $n = 0, 1, 2, \dots, 100$ Maschinenausfällen nach einem Monat ($t = 1/12$), einem Halbjahr und einem Jahr.

Aufgabe 2.16

Berechnen Sie (softwaregestützt) in der Situation von Beispiel 2.3.11.2 für verschiedene Werte von p_1, p_2 und p_3 die Wahrscheinlichkeit von $n = 0, 10, 20, \dots, 500$ Kreditausfällen pro Jahr.

2.4 Modellierung einzelner Wertentwicklungsprozesse

In diesem Abschnitt geht es um die allgemeine Beschreibung der Wertentwicklung von Vermögensgegenständen wie z. B. Aktien, Immobilien und Rohstoffen oder etwas allgemeiner auch von Wechselkursen, variablen Zinssätzen usw. Man kann auch von der Modellierung einzelner finanzieller Risiken bzw. Finanzmarktrisiken sprechen. Die Begriffe „finanzielles Risiko“ bzw. „Finanzmarktrisiko“ sollen nicht im Einzelnen definiert werden, da eine genaue Abgrenzung schwierig ist, sowohl in Bezug auf andere mögliche betriebswirtschaftliche Risikokategorien als auch im Hinblick auf die Unterscheidung von „Risikotreibern“ von Wertentwicklungen und „risikanten“ Wertentwicklungen selbst. Beispielsweise kann der Wechselkurs zwischen US-Dollar und Euro Risikotreiber für die Wertentwicklung einer exportorientierten Aktiengesellschaft sein, was bei einem Modell für die Aktienkursentwicklung ggf. durch geeignete Modellparameter zu berücksichtigen wäre. Demgegenüber spiegelt für ein US-Dollar-Tagesgeldkonto eines Investors im Euro-Wirtschaftsraum die Wechselkursentwicklung schon unmittelbar die zugehörige Wertentwicklung wider.

Gedanklich bietet es sich an, Wertentwicklungsprozesse ähnlich wie Schadenanzahlprozesse zu modellieren; und es besteht auch keine klare Abgrenzung, wie etwa das Beispiel ausfallrisikobehafteter festverzinslicher Wertpapiere zeigt. Wie bereits in 2.1 kurz angesprochen, besteht ein gewisser grundsätzlicher Unterschied zwischen reinen Schaden- und finanziellen Risiken darin, dass Schadenereignisse in der Regel immer nur mit finanziellen Verlusten verbunden sind, während bei Finanzrisiken Gewinn- und Verlustmöglichkeiten in einem quasi ausgeglichenen Verhältnis stehen. Auch ist bei zeitstetiger Modellierung, wenn also der Wert des stochastischen Prozesses für jeden Zeitpunkt eines vorgegebenen Zeitintervalls interessiert, die Modellierung von Wertentwicklungsprozessen allgemein noch komplexer als die Modellierung der Schadenanzahl als ein „einfacher“ Zählprozess. Aus Vereinfachungsgründen, aber teilweise auch aus Gründen der Realitätsnähe (Börsenkurse etwa verändern sich nicht zeitstetig), werden allerdings bei der Modellierung von Wertentwicklungen oft auch lediglich zeitdiskrete Prozesse betrachtet, d. h. man interessiert sich nur für den Kurs- oder Renditewert zu festgelegten diskreten Zeitpunkten eines Zeitintervalls. Oder man beschränkt sich statt der Beschreibung des gesamten stochastischen Prozesses auf Aussagen zur Wertverteilung für bestimmte Zeitintervalle, z. B. typische Kurs- und Renditeverteilungen für einen Monat oder ein Jahr. Im Folgenden werden lediglich einige Grundideen zur Modellierung von Finanzmarktrisiken vorgestellt.

2.4.1 Kurs- und Renditewerte als Ausgangsbasis der Modellierung

Die Beschreibung von Wertentwicklungsprozessen im Zeitverlauf oder von zeitpunktbezogenen Wertverteilungen entspricht im Wesentlichen der Modellierung von Kurs- und Renditeverläufen. Zur Beschreibung der zufallsbehafteten Entwicklung $\{K_t | t \geq 0\}$ eines Asset-Kurses (damit ist hier allgemein irgendein klar definierter Preis oder eine sonstige klar definierte Bewertung gemeint) als stochastischer Prozess kommen verschiedene Bezugsgrößen, d. h. z. B. auch Renditewerte, infrage, deren Beziehungen untereinander im Folgenden erläutert werden. Die nachfolgende Darstellung sowie auch die Ausführungen in den folgenden Abschnitten orientieren sich teilweise eng an entsprechenden Ausführungen in [Cot08].

Neben dem Kurs selbst kann die Wertentwicklung eines Assets durch die Gesamtrendite Γ_t bis zum Zeitpunkt t beschrieben werden, wobei

$$K_t = K_0 \cdot (1 + \Gamma_t),$$

oder für ganzzahliges t auch durch die Renditen I_t der jeweils t -ten Einheitszeitperiode mit

$$K_t = K_{t-1} \cdot (1 + I_t).$$

Wählt man etwa das Jahr als Zeiteinheit, so entspricht I_t der Rendite des t -ten Anlagejahrs und Γ_t der Gesamtrendite für einen Anlagezeitraum von t Jahren. Man sollte sich jedoch klar machen, dass man für Modellierungszwecke genauso gut andere, insbesondere kürzere, Einheitszeiträume (Monate, Tage, Stunden) zugrunde legen kann, was in aller Regel deutlich einfacher ist, als das Rechnen mit „gebrochenen“ Zeiteinheiten (wie $t = \frac{1}{12}$ für den Monat, $t = \frac{1}{365}$ für das Jahr usw.).

Zunächst erscheint es nahe liegend, einen stochastischen Prozess zu definieren, der unmittelbar die Größen K_t , Γ_t oder I_t beschreibt. Dabei stößt man aber auf verschiedene Schwierigkeiten. Es

stellt sich heraus, dass es für die stochastische Modellbildung meist einfacher ist, den Umweg über die stetigen Renditen zu gehen. Dazu setzt man

$$\begin{aligned} 1 + \Gamma_t &=: Q_t = \exp(G_t) & \text{bzw.} & & G_t &:= \ln(1 + \Gamma_t) = \ln(Q_t), \\ 1 + I_t &=: W_t = \exp(R_t) & \text{bzw.} & & R_t &:= \ln(1 + I_t) = \ln(W_t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Die Werte Q_t und W_t spielen die Rolle von zufallsbehafteten Aufzinsungsfaktoren. Sie geben das prozentuale Wachstum der Kapitalanlage bezogen auf ein Anfangsvermögen von 1 (= 100%) an, und zwar ist Q_t der Wachstumsfaktor bis zum Zeitpunkt t und W_t der Wachstumsfaktor für die t -te Zeitperiode. Die Größen G_t und R_t werden als *stetige Renditen*, *kontinuierliche Renditen* oder *Log-Renditen* bezeichnet, und zwar ist G_t die stetige Rendite für den Gesamtzeitraum bis t und R_t die stetige Rendite der t -ten Zeitperiode. Zur klareren Unterscheidung kann man die konventionellen Renditen Γ_t bzw. I_t in Abgrenzung zu den stetigen Renditen G_t und R_t auch als Zeitintervall-Renditen oder kurz Intervall-Renditen bezeichnen.

Zur Motivation dieser Bezeichnung sei daran erinnert, dass für die stetige Rendite R gilt

$$e^R = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{R}{m} \right)^m,$$

d. h. die Verzinsung zum stetigen Zinssatz R pro Einheitszeitperiode entspricht im Grenzwert $m \rightarrow \infty$ einem Zinssatz von $\frac{R}{m}$ für immer kleinere Zeitintervalle der Länge $\frac{1}{m}$ bei Verzinsung mit Zinseszins pro Zeitintervall.

Betrachtet man nur ganzzahlige Zeitpunkte, kann man für $t \geq 1$ weiterhin schreiben

$$G_t = G_{t-1} + R_t = R_1 + \cdots + R_t,$$

d. h.

$$K_t = K_{t-1} \cdot \exp(R_t) = K_0 \cdot \exp(G_t) = K_0 \cdot \exp(R_1 + \cdots + R_t). \quad (2.3)$$

In Intervall-Schreibweise gilt demgegenüber

$$1 + \Gamma_t = (1 + \Gamma_{t-1}) \cdot (1 + I_t) = (1 + I_1) \cdots (1 + I_t)$$

und

$$K_t = K_{t-1} \cdot (1 + I_t) = K_0 \cdot (1 + \Gamma_t) = K_0 \cdot (1 + I_1) \cdots (1 + I_t).$$

Die Renditezuwächse verhalten sich also beim stetigen Ansatz für die Renditen additiv, beim Intervall-Ansatz dagegen multiplikativ. Dies spricht insbesondere bei stochastischer Modellierung für die Verwendung des stetigen Modells, da eine Summenverteilung oft relativ einfach zu ermitteln ist (bei Annahme der Unabhängigkeit der Einzelrenditen z. B. gemäß einer Faltungsformel), die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Produkts jedoch meist nicht.

2.4.2 Zeitdiskreter arithmetischer Random Walk

Ein Basismodell zur Beschreibung der zufallsabhängigen Entwicklung stetiger Renditen ist der zeitdiskrete *Random Walk*, auf Deutsch auch *Irrfahrt* genannt. Unter einer zeitdiskreten Zufallsvariablen soll hier allgemein eine Zufallsvariable verstanden werden, die nur zu ganzzahligen Zeitpunkten beobachtet wird. Da die Zeiteinheit, wie bereits erläutert, beliebig klein gewählt werden kann, stellt die Ganzzahligkeit der Beobachtungszeitpunkte keine wesentliche Einschränkung für ein diskretes Modell dar.

Die Zufallsvariable $\{G_t | t \geq 0\}$ folgt definitionsgemäß einem einfachen Random Walk, falls die Zufallsschwankungen $\{\varepsilon_t | t \geq 0\}$ einen *White-Noise-Prozess* (*Weißes Rauschen*) darstellen, d. h.

$$G_t = G_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.4)$$

mit Erwartungswert $\mathbf{E}(\varepsilon_t) = 0$, Varianz $\mathbf{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ und Kovarianz $\mathbf{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 0$ für alle $t \geq 1$. Der Schwankungsparameter σ wird im gegebenen Zusammenhang auch als *Volatilität* bezeichnet. In Verallgemeinerung des einfachen Random Walk spricht man von einem (*arithmetischen*) *Random Walk mit Drift* r (und Volatilität σ), falls über den White-Noise-Prozess hinaus in jeder Zeitperiode ein fester Zuwachs in Höhe von r erfolgt. Ausgehend von $G_0 = 0$ gilt dann also

$$G_t = G_{t-1} + r + \varepsilon_t = r \cdot t + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t$$

mit $\mathbf{E}(\varepsilon_j) = 0$, $\mathbf{Var}(\varepsilon_j) = \sigma^2$ und $\mathbf{Cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_{j-1}) = 0$ für alle $1 \leq j \leq t$. Indem man $R_j = \varepsilon_j + r$ setzt, erhält man die äquivalente Darstellung

$$G_t = G_{t-1} + R_t = R_1 + R_2 + \dots + R_t$$

mit $\mathbf{E}(R_j) = r$, $\mathbf{Var}(R_j) = \sigma^2$ und $\mathbf{Cov}(R_j, R_{j-1}) = 0$ für alle $1 \leq j \leq t$. Interpretiert man die auftauchenden Zufallsvariablen als stetige Renditen, so gibt die Drift r also die pro Zeiteinheit erwartete stetige Rendite an, und die Volatilität σ kann als Risikoparameter des Prozesses angesehen werden. Besonders klar wird die anschauliche Bedeutung von r und σ im Spezialfall des symmetrischen Binomialgitter-Prozesses; vgl. Abschnitt 2.4.4. Als Erwartungswert bzw. Varianz der stetigen Gesamttrendite ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(G_t) &= r \cdot t, \\ \mathbf{Var}(G_t) &= \sigma^2 \cdot t. \end{aligned}$$

Erwartungswert und Varianz der Gesamttrendite verhalten sich also beim Random Walk jeweils zeitproportional. Dieser Zusammenhang erlaubt u. a. eine einfache Anpassung der Parameter Drift und Volatilität, wenn man in einer Simulation von Wertentwicklungsprozessen die zugrunde gelegte Zeiteinheit verkleinern oder vergrößern will.

Das Random-Walk-Modell ist zunächst verteilungsfrei konzipiert, d. h. für die Zufallsvariablen ε_t aus (2.4) wird keine besondere Verteilungsannahme getroffen; sehr oft nimmt man die einzelnen Störterme allerdings als identisch verteilt an. Speziell bei Normalverteilungsannahme $\varepsilon_t \sim \mathbf{N}(0; \sigma^2)$ spricht man auch von einem *normalen Random Walk*.

2.4.3 Zeitdiskreter geometrischer Random Walk

Zur unmittelbaren Modellierung von Wertentwicklungen oder von Intervall-Renditen (d. h. Renditen in der üblichen, nicht stetigen, Schreibweise) ist der arithmetische Random Walk in der Regel nicht geeignet, da sich dabei Intervall-Renditen kleiner als -100% , gleichbedeutend mit negativen Kurswerten, ergeben können. Demgegenüber können stetige Renditen prinzipiell beliebige positive oder negative Werte annehmen und korrespondieren trotzdem immer nur mit positiven Kurswerten. Legt man das arithmetische Random-Walk-Modell für die stetigen Renditen zugrunde, ergibt sich gemäß der Beziehung

$$\begin{aligned} Q_0 &= 1, \\ Q_t &= Q_{t-1} \cdot \exp(R_t) = \exp(G_t), \\ K_t &= Q_t \cdot K_0 \end{aligned}$$

(vgl. (2.2)) ein sogenannter *geometrischer Random Walk* für die Wachstumsfaktoren Q_t . Von einem geometrischen (oder auch *logarithmischen* oder *multiplikativen*) Random Walk spricht man allgemein, falls nicht die betrachtete Zufallsvariable $\{Q_t | t \geq 0\}$ selbst, sondern deren Logarithmus $\{G_t := \ln(Q_t) | t \geq 0\}$ einem Random Walk (mit oder ohne Drift) folgt. Für die Simulation von Kurspfaden erzeugt man also zunächst die logarithmierten Werte

$$\begin{aligned} \ln(Q_t) &= \ln(Q_{t-1}) + R_t \\ &= r_t + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t \end{aligned}$$

als Summe der Zufallsgrößen ε_j (plus Drift) und erhält den Prozess $\{Q_t | t \geq 0\}$ durch anschließende Anwendung der Exponentialfunktion. Zur Erzeugung von Pfaden des Kursprozesses $\{K_t | t \geq 0\}$ sind lediglich alle Werte von Q_t mit K_0 zu multiplizieren, s. auch Kapitel 7.5.

2.4.4 Binomialgitter-Prozesse

Als einfachen Spezialfall des Random Walk betrachten wir ein Kursmodell, bei dem in einem kleinen Zeitraum der Länge 1 (z. B. ein Tag) der Wert K_t der Kapitalanlage lediglich um einen bestimmten prozentualen Betrag x^+ , entsprechend der stetigen Rendite u (für „up“), steigen oder um den Betrag x^- , entsprechend der stetigen Rendite $-d$ (für „down“), fallen kann, und zwar im Zeitverlauf jeweils mit konstanter Wahrscheinlichkeit p bzw. $1 - p$, d. h.

$$K_t = \begin{cases} K_{t-1} \cdot (1 + x^+) = K_{t-1} \cdot e^u & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p, \\ K_{t-1} \cdot (1 + x^-) = K_{t-1} \cdot e^{-d} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p. \end{cases}$$

Der Prozess ist also nicht nur in Bezug auf den Zeitparameter, sondern auch auf die Kurswertverteilung pro Zeitschritt (in diesem Fall nur zwei mögliche Werte) diskret. Dieser Spezialfall ist zur Veranschaulichung von Kursrisiken u. a. deshalb besonders interessant, weil es insgesamt nur eine endliche Anzahl verschiedener Kurspfade gibt, d. h. die Situation besonders übersichtlich ist. Andererseits ist das Modell bei Verwendung kleiner Zeiteinheiten trotzdem realitätsnah.

Für die Simulation von Kurspfaden (s. Kapitel 7.5) startet man wie beim allgemeinen Random Walk mit der Erzeugung unkorrelierter stetiger Periodenrenditen $R_t = \ln(K_t/K_{t-1}) = \varepsilon_t + r'$ (s. (2.3)). Diese besitzen also im Spezialfall des Binomialgitter-Prozesses die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\begin{aligned} P(R_t = u) &= p \quad \text{und} \\ P(R_t = -d) &= 1 - p. \end{aligned}$$

Somit ist $R_t = d - (u + d)\eta_t$ mit $\eta_t \sim \mathbf{Bin}(1; p)$ und es folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(R_t) &= r' = pu - (1 - p)d; \\ \mathbf{Var}(R_t) &= \sigma'^2 = (u + d)^2 p(1 - p). \end{aligned}$$

Die Anzahl der Auf- bzw. Abwärtsbewegungen des Kursprozesses ist binomialverteilt und für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Gesamtrendite $G_t = R_1 + R_2 + \dots + R_t$ bzw. der resultierenden Kurswerte $K_t = K_0 \cdot \exp(G_t)$ ergibt sich also

$$\begin{aligned} P(K_t = e^{ku} \cdot e^{-(t-k)d} \cdot K_0) &= P(G_t = ku - (t - k)d) \\ &= \binom{t}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{t-k}. \end{aligned}$$

Man bezeichnet den stochastischen Verlauf der stetigen Gesamtrendite deshalb auch als *arithmetischen Binomialgitter-Prozess* und den der Kurswerte (bzw. präziser formuliert eigentlich nur den für die Wachstumsfaktoren, also für den Startwert $K_0 = 1$) als *geometrischen Binomialgitter-Prozess*.

Für $p = \frac{1}{2}$ und $u = r + \sigma$, $-d = r - \sigma$, ergibt sich speziell der *symmetrische Binomialgitter-Prozess* mit Drift bzw. Varianz

$$\mathbf{E}(R_t) = r = \frac{1}{2}(u - d); \quad (2.5)$$

$$\mathbf{Var}(R_t) = \sigma^2 = \frac{1}{4}(u + d)^2. \quad (2.6)$$

Für Erwartungswert und Varianz der Gesamtrenditen gilt – wie bei jedem Random Walk – $\mathbf{E}(G_t) = rt$ und $\mathbf{Var}(G_t) = \sigma^2 t$. Die spezielle Voraussetzung liegt beim symmetrischen Binomialgitter-Prozess lediglich in der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit von Auf- und Abwärtsbewegung. Die Umschreibung von u und d in der angegebenen Form stellt lediglich eine lineare Parametersubstitution dar.

Die Drift r lässt sich als ein „risikoloser“ stetiger Zinszufluss interpretieren, in dem Sinne, dass sowohl die Aufwärtsbewegung u als auch die Abwärtsbewegung $-d$ den „sicheren“ positiven Summanden r enthalten. Das stochastische Element kommt also lediglich durch den Risikoparameter σ zum Ausdruck, der aufgesetzt auf den risikolosen Wertzuwachs die Höhe der möglichen Auf- bzw. Abwärtsbewegung angibt. Setzt man $\sigma = 0$, so fallen alle Pfade des stochastischen Prozesses zusammen, und der Kursverlauf $K_t = K_0 \cdot e^{rt}$ entspricht der sicheren Verzinsung mit Zinseszins zum stetigen risikolosen Zinssatz r . Diese Interpretation gilt im Übrigen in ähnlicher Form auch für den allgemeinen Random Walk.

Die möglichen Realisierungen eines typischen Binomialgitter-Prozesses sind in der Abbildung 2.17 veranschaulicht; zur besseren Darstellbarkeit wurden große Zuwächse pro Zeitperiode gewählt. Jeder spezielle Pfad entspricht einer möglichen Kursbewegung. An dieser Stelle

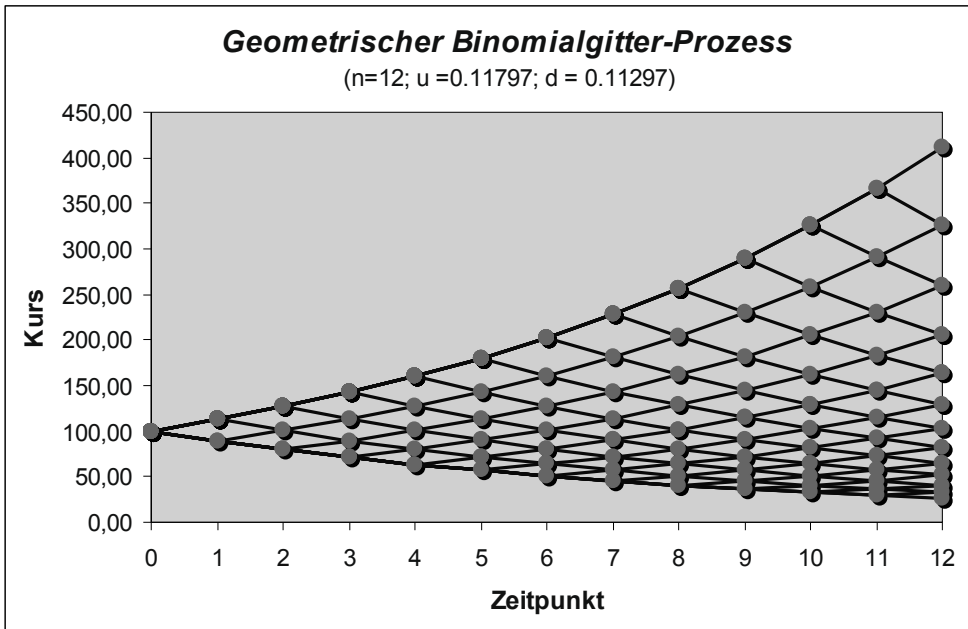


Abbildung 2.17: Mögliche Kursentwicklungen über zwölf Zeitperioden bei einem Binomialgitter-Prozess

sei nochmals auf die Analogie des Binomialgitter-Prozesses zur Modellierung von Wertentwicklungen mit dem Bernoulli-Prozess zur Modellierung der Schadenanzahl (vgl. Abschnitt 2.3.1) hingewiesen, die man im Vergleich der Abbildungen 2.11 und 2.17 besonders deutlich erkennt. Beim Bernoulli-Prozess werden die Alternativen „Schaden“ / „kein Schaden“ und beim Binomialgitter-Prozess die Alternativen „Kursaufwärtsbewegung“ / „Kursabwärtsbewegung“ betrachtet und durchgezählt. Der exponentielle Verlauf der Verbindungslinien in Abbildung 2.17 gegenüber dem linearen Verlauf in 2.11 erklärt sich dadurch, dass in 2.17 eine Kursentwicklung dargestellt ist, also eine geometrische Variante des Binomialgitter-Prozesses. Die Verbindungslinien bei der arithmetischen Variante für die möglichen Ausprägungen der stetigen Gesamttrendite wären ebenfalls linear.

2.4.5 Brownsche Bewegung (Wiener-Prozess)

In 2.4.2 – 2.4.4 wurden nur zeitdiskrete Prozesse beschrieben. Wie erwähnt, ist zwar eine beliebig genaue Modellierung erzielbar, indem man die betrachteten Zeiteinheiten (Stunden, Minuten, ...)

klein genug wählt. Trotzdem ist für manche theoretische Überlegungen ein zeitstetiges Modell hilfreicher.

Ein u. a. für die Finanzmarktmodellierung sehr wichtiges zeitstetiges Modell ist die auch als *Wiener-Prozess* bekannte *Brownsche Bewegung*.

Definition (Brownsche Bewegung)

Ein stochastischer Prozess $\{W(t) | t \in \mathbb{R}_+\}$ ist eine *Standard-Brownsche Bewegung*, wenn gilt (s. etwa [Ros83])

(BB1) $W(0) = 0$.

(BB2) Die Zuwächse $W(t_{i+1}) - W(t_i)$, $i = 0, \dots, n-1$, sind für beliebige $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ unabhängig.

(BB3) $W(t) - W(s) \sim N(0; t-s)$ für beliebige $0 \leq s < t$.

Aus den Eigenschaften (BB1) und (BB3) ergibt sich direkt $W(t) \sim N(0; t)$. Für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ heißt der Prozess $X(t)$ (arithmetische) *Brownsche Bewegung mit Driftparameter μ und Streuparameter σ^2* bzw. *Volatilität σ* , wenn der normierte Prozess

$$\frac{X(t) - \mu \cdot t}{\sigma}$$

eine Standard-Brownsche Bewegung ist, d. h. $X(t)$ ergibt sich durch die Beziehung

$$X(t) = \mu \cdot t + \sigma \cdot W(t)$$

aus der Standard-Brownschen Bewegung. Der durch $Y(t) = \exp(X(t))$ definierte stochastische Prozess heißt *geometrische Brownsche Bewegung* oder *geometrischer Wiener-Prozess*.

Der Wiener-Prozess lässt sich als stetige Variante des symmetrischen Binomialgitter-Prozesses (oder auch des normalen Random Walk) auffassen. Wir erläutern dies nachfolgend speziell für die stetigen Renditen, um damit an die Notation aus Abschnitt 2.4.4 anzuknüpfen.

Für die mathematische Formulierung des Grenzübergangs zum stetigen Modell ist es angebracht, die Periodenlänge nun in Abhängigkeit von n zu wählen, also nicht mehr wie in Abschnitt 2.4.4 gleich eins zu setzen. Man unterteilt etwa den Gesamtbetrachtungszeitraum der Länge T in n Unterperioden und ersetzt in (2.5) und (2.6) die Periodendrift r durch $r \cdot \frac{T}{n}$ und die Periodenvarianz σ^2 durch $\sigma^2 \cdot \frac{T}{n}$. Die Auf- bzw. Abwärtsbewegung der stetigen Rendite im Zeitraum der Länge $\frac{T}{n}$ kann also die möglichen Werte

$$u = u_n = r \frac{T}{n} + \sqrt{\sigma^2 \frac{T}{n}},$$

$$-d = -d_n = r \frac{T}{n} - \sqrt{\sigma^2 \frac{T}{n}}$$

annehmen.

Im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ (auf Einzelheiten des stochastischen Konvergenzbegriffs soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden) ergibt sich für die stetigen Renditen G_T ein arithmetischer Wiener-Prozess mit Drift r und Volatilität σ , für die resultierende Wertentwicklung liegt

entsprechend ein geometrischer Wiener-Prozess vor. Umgekehrt lässt sich der symmetrische Binomialgitter-Prozess oder auch der normale Random Walk als diskretisierte Form des Wiener-Prozesses auffassen. Wie beim Binomialgitter-Prozess lässt sich auch beim Wiener-Prozess r als risikoloser stetiger Periodenzins und σ als Risikoparameter interpretieren.

In dem als Ausgangsbasis für den Wiener-Prozess betrachteten Binomialgitter-Modell ist die stetige Gesamtrendite G_T binomialverteilt mit $p = \frac{1}{2}$; genauer gilt zum Zeitpunkt T :

$$P\left(G_T = r \cdot T + k \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{T}{n}} - (n-k) \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{T}{n}}\right) = \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n}{k}.$$

Die resultierende Grenzverteilung für den Wiener-Prozess ist eine Normalverteilung; genauer

$$G_T \sim \mathbf{N}(rT; \sigma^2 T).$$

Somit ergibt sich für die prozentuale und somit auch für die absolute Kursverteilung eine Lognormalverteilung und entsprechend für die Periodenrendite Γ_T im Zeitraum $[0; T]$ eine um 1 nach links verschobene Lognormalverteilung; genauer

$$\frac{K_T}{K_0} = e^{G_T} = 1 + \Gamma_T \sim \mathbf{LN}(rT; \sigma^2 T).$$

An dieser Stelle sei nochmals daran erinnert, dass sich Erwartungswertbildung und Exponentialfunktion nicht vertauschen lassen; vielmehr gilt mit $Q_T = \exp(G_T)$ bei positiver Varianz immer $\mathbf{E}(Q_T) > \exp(\mathbf{E}(G_T))$, genauer

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Q_T) &= e^{rT + \frac{\sigma^2}{2}T}, \\ \mathbf{Var}(Q_T) &= e^{2rT + \sigma^2 T} \cdot (e^{\sigma^2 T} - 1),\end{aligned}$$

vgl. auch Abschnitt 2.2.7. Bezogen auf die Entwicklung im Zeitverlauf kann also $\mu := r + \frac{1}{2}\sigma^2$ auch als Drift der Kursentwicklung interpretiert werden, d. h. als erwarteter Wachstumsfaktor des Kurses pro Zeiteinheit, d. h. aus der Drift r der stetigen Rendite ergibt sich die Drift μ der Kurse.

2.4.6 Ausblick auf weitere Modellierungsansätze für einzelne Finanzmarktrisiken

Eine wichtige allgemeine Klasse stetiger Wertentwicklungsmodelle, die den Wiener-Prozess beinhalten, sind die sogenannten *Diffusions- oder Itô-Prozesse*, die über stochastische Differentialgleichungen für den Wertverlauf beschrieben werden können. Diffusionsprozesse sind *Markov-Prozesse*; das bedeutet, dass die zukünftige Wertentwicklung lediglich vom aktuellen Wert K_t abhängig ist, nicht aber von irgendwelchen Vergangenheitswerten. Zu den Markov-Prozessen gehören auch die *Lévy-Prozesse*, die ebenfalls den Wiener-Prozess verallgemeinern und zusätzlich zu den Parametern r und σ noch weitere Parameter aufweisen (s. [EKM97]).

Zeitstetige Wertentwicklungsmodelle spielen vor allem für theoretische Überlegungen eine große Rolle. Für Anwendungen in der Praxis genügen in der Regel diskretisierte Varianten.

In Aufgabe 2.19 werden diskretisierte Varianten des Vasicek-Prozesses und des Cox-Ingersoll-Ross-Prozesses, beides Diffusionsprozesse, behandelt. Im Gegensatz zu den in den vorherigen Abschnitten ausführlich behandelten Random Walks tendieren sie dazu, sich immer wieder auf ein bestimmtes Niveau „einzupendeln“ (sogenannte *Mean Reversion*). Dieses Verhalten ist für die Wertentwicklung vieler Assets eher atypisch, aber z. B. eine gängige Annahme bei der Modellierung von Zinssätzen.

Manchmal werden in der Finanzmarktmodellierung auch Modelle benötigt, die die Markov-Eigenschaft nicht aufweisen, bei denen also etwa die Entwicklung der Gesamrendite G_t bzw. des Kurses K_t von den Werten der Vergangenheit abhängt. Eine wichtige Klasse entsprechender Modelle sind die sogenannten *ARMA*(p, q)-Prozesse (*autoregressive Moving-Average-Prozesse der Ordnung* (p, q)). Sie sind definiert durch die Beziehung

$$G_t = c + a_1 G_{t-1} + \dots + a_p G_{t-p} + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q},$$

wobei a_i, b_j ($i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q$) reellwertige Konstanten sind und ε_t „Weißes Rauschen“ ist (s. Abschnitt 2.4.2). ARMA-Prozesse spielen auch über die reine Finanzmarktmodellierung in ökonometrischen Modellen eine große Rolle, z. B. in Prognosemodellen von Wirtschaftsinstituten und Banken.

Für $c = 0$, $p = 0$ resultiert aus dem Ansatz ein *MA*(q)-Prozess, d. h. ein „gleitender Durchschnitt“ q -ter Ordnung des weißen Rauschens. Im Fall $q = 0$ bekommt man einen *AR*(p)-Prozess, bei dem ebenfalls ein Durchschnittswert der Vorgängerwerte berechnet wird. Dieser ergibt sich jedoch im Gegensatz zum *MA*(q)-Prozess bis auf den Zufallsterm ε_t direkt aus den Vorgängerwerten.² Formal handelt es sich um ein multiples lineares Regressionsmodell, in dem der Wert G_t durch die p Vorgängerwerte „erklärt“ wird.

Als weitere Verallgemeinerung können die erzeugten Werte auch von den Varianzen der Vergangenheit abhängen, wie z. B. bei den sogenannten *GARCH-Prozessen* (*GARCH* = *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*). Derartige Modelle benutzt man beispielsweise, wenn man eine zeitabhängige „Schwankungsfreudigkeit“ der Wertentwicklung darstellen will.

Da hier nicht die Modellierung spezieller Prozesse, sondern die allgemeine Interpretation von Wertverteilungen im Mittelpunkt stehen soll, verzichten wir auf die Erörterung weiterer Einzelheiten, die man in vielen Quellen zur Stochastik bzw. stochastischen Finanzmathematik nachlesen kann; z. B. werden in [Deu04] und [PDP08] besonders Aspekte der praktischen Implementierung angesprochen. Einen ausführlicheren gut verständlichen Überblick zu stochastischen Zinsmodellen findet man in [PS08].

Andere etwas einfachere weiterführende Modelle ergeben sich, indem nicht der komplette stochastische Prozess für die Wertentwicklung angegeben wird, sondern lediglich die Verteilungsmodelle für Wertveränderungen bzw. Renditen (bezogen auf einen vorgegebenen Zeitraum) modifiziert werden. Hierbei sind ähnliche Überlegungen wie zu Schadenhöhenverteilungen anzustellen. Beispielsweise weisen empirische Untersuchungen darauf hin, dass in der (Log-) Normalverteilungsannahme, die sich aus dem Wiener-Prozess ergibt, extreme Kursveränderungen möglicherweise zu wenig berücksichtigt sind. Diesbezüglich könnte man modellmäßig auf Kursverteilungen mit „breiteren Rändern“ (*Fat Tails*) ausweichen.

²Man beachte aber, dass man bei deterministischen Zeitreihen vom *AR*(p)-Typ, d. h. für $q = 0$ und $\varepsilon_t = 0$, im Falle von $c = 0$ und $\sum a_i = 1$ ebenfalls oft von „gleitenden Durchschnitten“ spricht.

Ein konkreter Modellansatz zur Modifikation der Normalverteilung (für stetige Renditen) bzw. der Lognormalverteilung (für Periodenrenditen bzw. Kursverläufe) besteht in der Idee der „Kontaminierung“ der Ursprungsverteilung. Dabei wird die ursprüngliche Dichtefunktion f_1 durch eine andere Dichtefunktion f_2 „verunreinigt“. Die Dichtefunktion f der *kontaminierten Verteilung* ist dann definiert als

$$f(x) = (1 - \lambda) \cdot f_1(x) + \lambda \cdot f_2(x),$$

wobei $0 < \lambda < 1$ (in der Regel $\lambda \ll \frac{1}{2}$) der „Verunreinigungsparameter“ ist.

2.4.7 Aufgaben

Zur Bearbeitung dieser Aufgaben kann es nützlich sein, sich vorher bereits mit dem Kapitel 7 zu Simulationsmethoden beschäftigt zu haben.

Aufgabe 2.17

Erzeugen Sie computergestützt selbst das Schaubild 2.17. Simulieren Sie mit den gegebenen Parametern u und d einige Kurspfade, auch für mehr als zwölf Zeitperioden. Variieren Sie die Parameter und führen Sie erneut Simulationen durch.

Aufgabe 2.18

Die kontinuierliche Rendite R einer einjährigen Investition sei normalverteilt mit Erwartungswert $r = 8,1\%$ und Standardabweichung $\sigma = 20,8\%$.

1. Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung der Periodenrendite $I = e^R - 1$ und skizzieren Sie die Verteilungen von R und I .
2. Legen Sie $r/12$ und $\sigma/12$ als Parameter eines zeitdiskreten normalen Random Walk für die kontinuierliche Rendite mit Zeiteinheit 1 Monat zugrunde. Simulieren Sie unter diesen Voraussetzungen den Wertverlauf der Gesamtrendite G_t , $t = 0, 1, \dots, 12$, für ein Jahr, wobei jeder Monat als gleich lang angenommen wird.

Aufgabe 2.19

Die (normalerweise zeitstetigen) Ansätze von Vasicek bzw. Cox-Ingersoll-Ross zur stochastischen Modellierung einer Zinsentwicklung $i(t)$ mit Startwert $i(0) = i_0$ lauten in diskretisierter Form

$$(V) \quad i(t) = i(t-1) + c \cdot (m - i(t-1)) + s \cdot \varepsilon_t,$$

$$(CIR) \quad i(t) = i(t-1) + c \cdot (m - i(t-1)) + s\sqrt{i(t-1)} \cdot \varepsilon_t,$$

wobei c , m und s positive reelle Zahlen und ε_t eine standard-normalverteilte Zufallsvariable mit jeweils voneinander unabhängigen Realisationen ist.

- (a) Überlegen Sie (ohne exakten Beweis), gegen welchen Wert die beiden Prozesse „in der Regel“ konvergieren werden.

- (b) Erzeugen Sie computergestützt für vorgegebene Konstanten c , m und s einige exemplarische Zinspfade gemäß Algorithmus (V) bzw. (CIR). Anhaltspunkte für eine sinnvolle Wahl der Konstanten kann man aus (a) erhalten; als Zeiteinheit $t = 1$ kann z. B. ein Jahr oder auch ein Monat gewählt werden.

Hinweis: Im Vasicek-Modell kann der Zinssatz negativ werden, im CIR-Modell in seiner stetigen Form „fast sicher“ nicht. In der diskretisierten Variante kann beim CIR-Algorithmus ein negativer Zinssatz generiert werden, und der Prozess ist also im Weiteren undefiniert. Um dies zu vermeiden, kann man sich im Rahmen dieser Aufgabe dann mit einem „mechanischen“ Zurücksetzen auf den Startwert oder einer ähnlichen einfachen Modifikation behelfen.

2.5 Modellierung extremer Ereignisse

Dieses Unterkapitel beinhaltet eine kurze Einführung in einige Modelle der Extremwerttheorie. Aus mathematischer Sicht geht es unter anderem darum, Verteilungsmodelle zu finden, mit denen sich *extreme* Ereignisse beschreiben lassen. Historischer Hintergrund für die Entwicklung der Extremwerttheorie war unter anderem die Frage, wie hoch Deiche an der niederländischen Küste gebaut werden sollten, um gegen seltene aber katastrophale Überflutungen gewappnet zu sein; vgl. [dH90]. Die Extremwerttheorie liefert mathematische Methoden, mit denen die Wahrscheinlichkeit von genau solchen Ereignissen, die extremer sind, als alles, was bisher beobachtet wurde, geschätzt werden kann. Sie stellt ein umfangreiches Gebiet innerhalb der Stochastik dar. Eine umfassende Darstellung findet sich in dem „Klassiker“ [EKM97]; eine gut lesbare Einführung ist [FK11]. Im Kapitel 6.3 wird ergänzend noch eine kurze Einführung in die Extremwertstatistik (Anpassung von Extremwertmodellen) gegeben.

Im Kontext dieses Buchs geht es in erster Linie um Modelle für zwei Typen „extremer“ Ausprägungen, nämlich Maxima aus einer großen Anzahl von Werten, wie z. B. Versicherungsschäden (etwa der Jahresmaximalschaden) oder Kursverlusten, sowie Werte, die einen sehr hohen vorgegebenen Schwellenwert überschreiten, wie sie etwa bei bestimmten Rückversicherungsverträgen für Versicherungsschäden relevant sein können.

2.5.1 Verteilungsmodelle für Maxima

Zunächst sollen Verteilungsmodelle für Wert-Maxima, z. B. von Versicherungsschäden, vorgestellt werden. Für eine Folge X_1, X_2, \dots von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen wird das Maximum von n Werten durch $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ definiert. Die GEV-Verteilung (s. Abschnitt 2.2.11) spielt in der Modellierung von M_n eine ähnliche Rolle wie die Normalverteilung bei der statistischen Analyse von Summen $S_n = X_1 + \dots + X_n$ von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen $X_i \sim X$. Damit ist Folgendes gemeint. Der zentrale Grenzwertsatz lässt sich auch dahingehend formulieren, dass es Normierungskonstanten a_n und b_n gibt, sodass die standardisierte Summe $(S_n - a_n)/b_n$ gegen die Standardnormalverteilung konvergiert (mit $a_n = \mathbf{E}(S_n)$ und $b_n = \mathbf{SD}(S_n)$). Es liegt daher nahe zu fragen, ob man auch für die Maxima M_n Normierungskonstanten a_n und b_n finden kann, für die die normalisierten Maxima $(M_n - a_n)/b_n$ konvergieren bzw. welche Grenzverteilungen überhaupt infrage kommen. Die Beantwortung der ersten Frage würde in diesem Rahmen zu weit führen; die daran interessierten Leser werden auf

das Kapitel 3.3 in [EKM97] verwiesen. Der zweite Teil der Frage wird von einem der zentralen Ergebnisse der Extremwerttheorie, dem sogenannten Fisher-Tippett-Theorem, beantwortet.

Satz (Fisher und Tippett)

Wenn es Normierungskonstanten $a_n \in \mathbb{R}$ und $b_n > 0$ gibt, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) = H(x)$$

für eine Verteilung H , die keine Einpunktverteilung ist, gilt, dann muss die Grenzverteilung H bereits eine GEV-Verteilung sein, d. h. es muss gelten $H = H_{\xi, \mu, \sigma}$ für geeignete ξ, μ, σ . Dabei ergibt sich für mögliche unterschiedliche Normierungen im Grenzwert immer der gleiche Formparameter ξ , d. h. die GEV ist in ihrer standardisierten Form eindeutig bestimmt.

Das Fisher-Tippett-Theorem besagt also, dass das normalisierte Maximum einer Folge von Zufallsvariablen (Verluste, Schäden o. Ä.), wenn überhaupt, dann gegen eine der Verteilungen vom Typ Gumbel, Fréchet oder negative Weibull konvergiert (unter Ausschluss der Einpunktverteilung), wobei der Formparameter ξ der Grenzverteilung unabhängig von der gewählten Normierung ist. Dieses Ergebnis ist äußerst wichtig, denn damit ergibt sich (s. Aufgabe 2.23), dass sich das (nicht-normierte) Maximum einer „großen“ Anzahl von unabhängig identisch verteilten Verlusten bzw. Schäden zumindest näherungsweise wie genau eine der drei Verteilungen verhält (vorausgesetzt, der Grenzwert existiert überhaupt).

Für bestimmte Ausgangsverteilungen lassen sich die Normierungskonstanten und Grenzverteilung relativ elementar bestimmen. So gilt für eine Folge von standard-exponentialverteilten Risiken $X_1, X_2, \dots \sim \mathbf{Exp}(1)$ und Normierungskonstanten $a_n = \ln n$, $b_n = 1$, dass (s. Aufgabe 2.24)

$$P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) \rightarrow \exp(-\exp(-x)),$$

d. h. die Verteilung der normierten Maxima von exponentialverteilten Risiken konvergiert gegen die Gumbel-Verteilung. Für eine Folge von Nullpunkt-Pareto-verteilten Risiken $X_1, X_2, \dots \sim \mathbf{Null-Pareto}(x_0; \alpha)$ und Normierungskonstanten $a_n = x_0 \cdot n^{1/\alpha} - x_0$ und $b_n = \frac{x_0 \cdot n^{1/\alpha}}{\alpha}$ gilt (s. Aufgabe 2.25)

$$P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) \rightarrow \exp\left(-\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right),$$

d. h. die Verteilung der normierten Maxima von Nullpunkt-Pareto-verteilten Risiken konvergiert gegen eine Fréchet-Verteilung. Wie am Anfang dieses Abschnitts erwähnt, gibt es weitergehende Aussagen darüber, welche Ausgangsverteilungen zu welchen Grenzverteilungen führen. So ist beispielsweise auch das Maximum von Pareto-verteilten Risiken Fréchet-verteilt. Die hieran interessierten Leser seien auf die Spezialliteratur, etwa [EKM97], verwiesen.

2.5.2 Verteilungsmodelle für Überschreitungen

Im vorangegangenen Abschnitt war das Maximum M_n als größter unter n beobachteten Werten von Interesse. Nun geht es um Schäden, die in dem Sinn extrem sind, dass sie einen gewissen, sehr hohen, Schwellenwert u überschreiten. Die mathematische Theorie, mit der solche

hohen Überschreitungen modelliert und statistisch analysiert werden können, wird auch als *POT*-Theorie bezeichnet, wobei POT für „Peaks Over Threshold“ steht.

Die *Exzess-Verteilungsfunktion*, d. h. die bedingte Verteilung von Überschreitungen $X - u$ über eine Schranke u , ist gegeben durch

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{P(X \leq x + u, X > u)}{P(X > u)} = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

für $x \geq 0$. Oft wird diese Funktion auch einfach *Exzessfunktion* genannt. Falls der Erwartungswert von X existiert, so wird mit

$$e(u) = \mathbf{E}(X - u | X > u)$$

die sogenannte *mittlere Exzessfunktion* (abgekürzt MEF) bezeichnet. Das heißt $e(u)$ ist die mittlere Überschreitung $X - u$ unter der Bedingung, dass der Schwellenwert u überschritten wird.

Für die GPD-Verteilung (s. Abschnitt 2.2.10) lassen sich die Exzess- und mittlere Exzessfunktion relativ unkompliziert ausrechnen. Es gilt (s. Aufgabe 2.21)

$$\begin{aligned} F_u(x) &= G_{\xi, \beta + \xi \cdot u}(x), \quad \text{und} \\ e(u) &= \frac{\beta + \xi \cdot u}{1 - \xi}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Die erste Identität besagt, dass die Exzessfunktion einer GPD wieder eine GPD-Verteilungsfunktion ist. Die zweite Identität zeigt, dass die MEF einer GPD linear im Schwellenwert u ist. Diese Tatsache spielt in Kapitel 6.3 bei der Anpassung von Extremwertverteilungen eine Rolle.

Der folgende Satz ist ein Analogon zum Fisher-Tippett-Theorem für Exzess-Verteilungsfunktionen.

Satz (Pickands, Balkema und de Haan)

Wenn die Voraussetzungen des Fisher-Tippett-Theorems gegeben sind, dann gilt

$$\lim_{u \rightarrow \infty} F_u(x) = G_{\xi, \beta(u)}(x)$$

für alle x und ein geeignetes $\beta(u)$. Der Parameter ξ stimmt dabei mit dem Parameter ξ der GEV-Verteilung aus dem Fisher-Tippett-Theorem überein.

Das obige Ergebnis besagt also, dass die GPD das „natürliche“ Verteilungsmodell für extreme Schäden - im Sinne von (bedingten) Überschreitungen eines sehr hohen Schwellenwerts u - ist. Man beachte, dass der Parameter ξ der approximierenden GPD-Verteilung für Überschreitungen identisch ist mit demjenigen für die approximierende GEV-Verteilung der Maxima. Mithilfe dieses Resultats kann die Gesamtverteilungsfunktion zerlegt werden in einen Tail-Bereich, der sich durch eine GPD-Verteilung approximieren lässt, und einen „Rest“. Auf dieser Basis werden u. a. in Kapitel 6.3 Extremwertschätzer für den Value-at-Risk und den Tail Value-at-Risk hergeleitet. Bei der obigen Darstellung des Satzes von Pickands, Balkema und de Haan wurde Wert auf eine möglichst elementare Formulierung gelegt. So wurde die genaue Art der Konvergenz nicht weiter spezifiziert. Ferner wurde genau genommen nur der Teil des Satzes angegeben, der für die folgenden Kapitel, insbesondere Kapitel 6.3, relevant ist. Die an weiterführenden Informationen interessierten Leser werden auf [EKM97] verwiesen.

Bemerkung

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Gültigkeit von Extremwertmodellen – wie bei allen Modellen – vom Vorliegen der entsprechenden Modellvoraussetzungen abhängt. In der hier vorgestellten „einfachsten“ Version, geht es u. a. um die Annahme, die zugrunde liegenden Schäden bzw. Verluste seien unabhängig und identisch verteilt. Diese Annahme ist in der Praxis oft unrealistisch; Verallgemeinerungen z. B. auf abhängige Verluste sind aktuelle Forschungsthemen.

Abschließend sei noch erwähnt, dass die Extremwerttheorie nicht unumstritten ist, da sie Vorhersagen für Werte, etwa Versicherungsschäden, trifft, die in der Vergangenheit noch nie beobachtet wurden. Dieser grundsätzliche Kritikpunkt lässt sich naturgemäß nicht vollständig widerlegen. Allerdings stellt die Extremwerttheorie Werkzeuge zur Verfügung, die zumindest auf fundierten mathematischen Methoden beruhen. Die beiden [EKM97] entnommenen Zitate fassen die Argumente noch einmal prägnant zusammen.

„There is always going to be an element of doubt, as one is extrapolating into areas one doesn't know about. What extreme value theory is doing is making the best use of whatever data you have about extreme phenomena.“ (R. Smith)

„The key message is that extreme value theory cannot do magic – but it can do a whole lot better than empirical curve-fitting and guesswork. My answer to the sceptics is that if people aren't given well-founded methods like extreme value theory, they'll just use dubious ones instead.“ (J. Tawn)

2.5.3 Aufgaben

Aufgabe 2.20

Es sei $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, d. h. $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, und $u > 0$. Zeigen Sie, dass für die Exzess-Verteilungsfunktion dann $F_u(x) = F(x)$ für alle $x \geq 0$ gilt.

Aufgabe 2.21

Es sei $X \sim \text{GPD}(\xi; \beta)$ mit Verteilungsfunktion $G_{\xi, \beta}(x)$ und $u > 0$.

- (a) Zeigen Sie, dass für die Exzess-Verteilungsfunktion gilt

$$F_u(x) = G_{\xi, \beta + \xi \cdot u}(x),$$

wobei $0 \leq x < \infty$, falls $\xi \geq 0$, und $0 \leq x \leq -\frac{\beta}{\xi} - u$, falls $\xi < 0$.

- (b) Zeigen Sie, dass für die mittlere Exzessfunktion dann gilt

$$e(u) = \frac{\beta + \xi \cdot u}{1 - \xi},$$

wobei $0 \leq x < \infty$, falls $\xi \geq 0$ und $0 \leq x \leq -\frac{\beta}{\xi} - u$, falls $\xi < 0$.

Aufgabe 2.22

Es seien $X_1, \dots, X_n \sim X$ iid. Zeigen Sie, dass dann gilt $P(M_n \leq z) = [P(X \leq z)]^n$.

Aufgabe 2.23

Angenommen, es gibt Normierungskonstanten $a_n \in \mathbb{R}$ und $b_n > 0$, die das Fisher-Tippett-Theorem erfüllen, d. h. es gibt $\xi \in \mathbb{R}$, $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$ und $\tilde{\sigma} > 0$, sodass

$$P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) \approx H_{\xi, \tilde{\mu}, \tilde{\sigma}}(x),$$

wobei H die GEV-Verteilung bezeichnet; vgl. Abschnitt 2.2.11. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$P(M_n \leq x) \approx H_{\xi, \mu, \sigma}(x)$$

mit $\sigma = b_n \cdot \tilde{\sigma}$ und $\mu = \tilde{\mu} \cdot b_n + a_n$.

Aufgabe 2.24

Es sei eine Folge $X_1, X_2, \dots \sim \mathbf{Exp}(1)$ und Normierungskonstanten $a_n = \ln n$, $b_n = 1$ gegeben.

- (a) Zeigen Sie, dass $P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n$ gilt. (Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2.22.)
- (b) Zeigen Sie, dass $P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) \rightarrow \exp(-\exp(-x))$. (Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{n})^n = \exp(a)$ für $a \in \mathbb{R}$.)

Aufgabe 2.25

Es sei eine Folge $X_1, X_2, \dots \sim \mathbf{Null-Pareto}(x_0; \alpha)$ und Normierungskonstanten $a_n = x_0 \cdot n^{1/\alpha} - x_0$, $b_n = \frac{x_0 \cdot n^{1/\alpha}}{\alpha}$.

- (a) Zeigen Sie, dass $P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) = \left(1 - \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right)^n$ gilt. (Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2.22.)
- (b) Zeigen Sie, dass $P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) \rightarrow \exp\left(-\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right)$. (Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{n})^n = \exp(a)$ für $a \in \mathbb{R}$.)

Aufgabe 2.26

Der Monatsmaximalschaden M_{Monat} eines Risikos sei Fréchet-verteilt (vgl. Abschnitt 2.2.11) mit Parametern ξ_M, μ_M und σ_M . Zeigen Sie: Der Jahresmaximalschaden M_{Jahr} ist wieder Fréchet-verteilt mit Parametern $\xi_J = \xi_M$, $\mu_J = \mu_M - \frac{\sigma_M - \sigma_J}{\xi_M}$ und $\sigma_J = 12_M^{\xi_M} \cdot \sigma_M$.

Aufgabe 2.27

Zeigen Sie, dass für die MEF einer **Pareto**(1;2)-Verteilung gilt $e(u) = u$. (Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $e(u) = \frac{\int_u^\infty (x-u)f(x)dx}{1-F(u)}$ gilt.)

2.6 Aggregation von Teilrisiken

Nach der Modellierung von Einzelrisiken und Schadenanzahlprozessen stellt sich nun die Aufgabe, die Gesamtschaden- bzw. Gesamtwertverteilungen für *risiko- oder versicherungstechnische Einheiten* zu ermitteln. Eine solche Einheit kann man als bestimmte Risikoquelle auffassen. Das kann bezogen auf die Schadenmodellierung beispielsweise ein einzelnes Objekt (z. B. Kfz oder Gebäude) mit mehreren möglichen Schadenfällen im Zeitverlauf sein, ein Versicherungsbestand eines Versicherungsunternehmens oder die Gesamtheit ähnlicher Einzelrisiken (z. B. Maschinenschäden) eines Betriebs. Im Hinblick auf Finanzrisiken kann man z. B. an Wertpapierportfolios aus verschiedenen risikobehafteten Wertpapieren denken, an die Gesamtbetrachtung verschiedener paralleler Investitionsprojekte eines Betriebs oder auch an die Berechnung von Gesamtrenditen für einen aus mehreren Zeitperioden bestehenden Gesamtzeitraum.

Bei der Ermittlung einer Gesamtschaden- bzw. Gesamtwertverteilung geht es also entweder um die Zusammenfassung der Risiken einer Risikoquelle im Zeitverlauf, d. h. aus mehreren Zeitperioden, oder die Erfassung zeitparalleler Risiken innerhalb einer Zeitperiode oder evtl. auch um beides zugleich. Sinnvoll ist sie nur, wenn sie sich auf einheitliche Wertmaßstäbe für die zusammenzufassenden Risiken bezieht; s. auch Abschnitt 2.6.1. Die Risikoaggregation im Zeitverlauf wurde im Grunde bereits bei den in 2.3 bzw. 2.4 betrachteten stochastischen Schadenanzahl- bzw. Wertentwicklungsprozessen angesprochen. Man erkennt, dass es mathematisch bei der Risikoaggregation im Zeitverlauf also im Kern um eine Addition von Zufallsvariablen geht; vgl. dazu auch die Ausführungen zum Random Walk in 2.4.2 und 2.4.3 sowie zum $ARMA(p, q)$ -Prozess in 2.4.6. Auch eine zeitparallele Risikoaggregation lässt sich als Addition entsprechender Zufallsvariablen auffassen.

Die zusammenzufassenden Zufallsvariablen sind bei der Ermittlung von Gesamtschadenverteilungen alle nichtnegativ. Je nach Kontext kann es bei der Aggregation von Einzelrisiken modellgemäß sinnvoll sein, die schadenfreien Risiken mitzusummieren oder auch nicht (d. h. im ersten Fall sind Summanden der Höhe null zugelassen, im zweiten nicht). Im Bereich der Finanzrisiken können Einzelrisiken (Wertveränderungen) positive und negative Ausprägungen haben. Je nachdem, ob die Anzahl der Summanden bei der Risikoaggregation als fest oder selbst als zufallsabhängig angenommen wird, spricht man vom individuellen bzw. kollektiven Modell der Risikotheorie; vgl. 2.6.2 und 2.6.3. Diese Unterscheidung bezieht sich in erster Linie auf die Schadenmodellierung. Auf Besonderheiten von Finanzmarktrisiken wird separat in 2.6.4 eingegangen.

Die Ermittlung aggregierter Schaden- bzw. Wertverteilungen ist in der Regel eine sehr schwierige Aufgabe, die oft nur für Teilbereiche durchgeführt werden kann und sollte. Für sehr große Risikoeinheiten wie etwa gesamte Wirtschaftsunternehmen ist z. B. die Ermittlung einer Gesamtschadenverteilung für alle denkbaren Arten von Schadenfällen oft weder möglich noch sinnvoll, da gleichzeitig auch finanzielle Risiken und Chancen betrachtet werden sollten, kurzum: das gesamte unternehmerische Wagnis mit seinen positiven und negativen Aspekten. So bedeutet die Erweiterung einer Produktionsanlage ein höheres Schadenpotenzial in der gesamten Produktion, etwa bei Betriebsunterbrechungen durch Feuer oder Maschinenschäden; die erweiterte Produktion geht aber auch mit höheren Ertragschancen einher.

Bei derartig komplexen Gesamtbetrachtungen kommt man in aller Regel nur mit Simulationen (s. Abschnitt 2.6.6 und Kapitel 7) weiter, da die zusammengefassten Risiken in ihrer

Art meist sehr unterschiedlich sind und oft auch stochastische Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Risiken vorliegen. Oft wird man nicht die gesamte Verteilung ermitteln können (nicht einmal approximativ), sondern wird sich mit der Kenntnis einiger charakterisierender Parameter wie etwa Erwartungswert und Varianz zufrieden geben. Zum Thema Risikokennzahlen vgl. auch das Kap. 3. Wenn man keine aufwendigen Simulationsrechnungen durchführen kann oder sich zunächst nur einen ersten Überblick zur Gesamtrisikosituation verschaffen möchte, ist die Technik der Risikomatrizen in der Praxis sehr beliebt; sie wird in 2.6.5 kurz vorgestellt.

Um das Problem der Risikoaggregation besser zu verstehen, ist es vielleicht hilfreich, zunächst den umgekehrten Weg zu gehen, und sich zu überlegen, wie man mehrere Risiken unmittelbar in einem Modell erfassen würde. Dies geschieht im folgenden Abschnitt.

2.6.1 Allgemeines zu Gesamtrisikomodellen

Ein Gesamtrisikomodell ist ein Modell, das mehrere zeitparallele Einzelrisiken innerhalb einer oder auch mehrerer Zeitperioden in ihrer Gesamtheit erfasst. Anzugeben ist also die ggf. zeitabhängige gemeinsame Verteilung mehrerer Zufallsvariablen (nämlich der Einzelrisiken). An dieser Stelle ist es noch unerheblich, dass die Risiken sich auf einen einheitlichen Wertmaßstab beziehen. Beispielsweise könnte man eine bivariate Risikoverteilung für den Vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2) = (\text{Krankheitstage Fachkräfte}, \text{Anzahl Maschinenausfälle})$ angeben. Eine Aggregation der beiden Einzelrisiken würde nur Sinn ergeben, wenn man einen einheitlichen Wertmaßstab verwendet – beispielsweise die außerordentlichen Kosten, die dem Betrieb pro Krankheitstag einer Fachkraft oder pro Maschinenausfall entstehen.

Die genauere Kenntnis der bivariaten (allgemeiner: multivariaten) Verteilung ist für die Risikoaggregation besonders im Hinblick auf Abhängigkeiten wichtig. Sind beispielsweise in einer bestimmten Zeitperiode die Anzahl der Krankheitstage des Fachpersonals und der Maschinenausfälle unabhängig voneinander, so kann man die entsprechenden mit Kosten bewerteten Zufallsvariablen „einfach“ addieren. (Daran, dass das zumindest nicht ganz so einfach ist wie die Addition von Zahlen, wird in einem Beispiel des nachfolgenden Abschnitts 2.6.2 nochmals erinnert.) Bestehen aber Abhängigkeiten, z. B. weil Maschinen öfter ausfallen, wenn viele Fachkräfte krank sind, geht das nicht.

Abhängigkeiten einzelner Risiken im Zeitverlauf lassen sich über stochastische Prozesse erfassen; vgl. dazu auch 2.3 und 2.4. Abhängigkeiten mehrerer zeitparalleler Risiken lassen sich allgemein nur durch Angabe der gesamten zugehörigen bi- bzw. multivariaten Verteilung beschreiben. Ein wegen seiner verhältnismäßigen Einfachheit häufig verwendeter Ansatz ist die Annahme einer multivariaten Normalverteilung. Die multivariate Normalverteilung wird auf der Basis des entsprechenden grundsätzlichen Verteilungsmodells durch die Erwartungswerte und Standardabweichungen der Einzelrisiken sowie die paarweisen Korrelationskoeffizienten beschrieben (s. Abschnitt 2.2.5).

Daneben besteht die Möglichkeit, Abhängigkeiten ohne Rückgriff auf spezielle Verteilungsannahmen nur teilweise zu beschreiben, etwa in Form charakteristischer Parameter wie Korrelationskoeffizienten. Bei der Risikoaggregation sind dann ebenfalls nur noch Aussagen über charakteristische Parameter, wie die Gesamtvarianz, erzielbar; vgl. dazu auch die entsprechenden Aussagen in 2.6.2 und 2.6.3. Ein Kompromiss zwischen der kompletten Angabe einer bivariaten Risikoverteilung und einer einfachen Abhängigkeitskennzahl wie dem Korrelationskoeffizienten

stellt die Technik der Copulas dar, bei der die Kopplung zweier (Rand-)Verteilungen in funktionaler Form beschrieben wird. Dieser Modellierungsansatz und weitere Modellierungsansätze werden in Kapitel 5 beschrieben.

2.6.2 Das individuelle Modell der Risikoaggregation

Vom individuellen Modell der Risikoaggregation spricht man, wenn „individuelle“ (Verteilungs-) Informationen über jedes einzelne Risiko vorliegen und somit insbesondere die Anzahl n der zusammenzufassenden Einzelrisiken oder eingetretenen Schadenfälle bekannt ist. Die sprachliche Unterscheidung zwischen Einzelrisiken und Schadenfällen ist so zu verstehen, dass Einzelrisiken auch schadenfrei sein können, d. h. mit positiver Wahrscheinlichkeit eine Schadenhöhe von null haben, was für echte Schadenfälle nicht vorgesehen ist. Die Bezeichnung „Einzelrisiken“ ist also insofern etwas allgemeiner.

Gegeben seien n Einzelrisiken X_i (bezogen auf einen festgelegten Zeitpunkt oder Zeitraum) mit jeweiliger Schadenhöhenverteilung

$$F_{X_i}(x) = P(X_i \leq x).$$

Das Gesamtrisiko S ergibt sich als Summe der Einzelrisiken, also

$$S = \sum_{i=1}^n X_i;$$

die Verteilungsfunktion des Gesamtrisikos ist $F_S(s) = P(S \leq s)$. Zur Kalkulation des Gesamtrisikos bzw. der Gesamtschadenverteilung benötigt man somit Vorschriften zur Berechnung der Verteilungsfunktion der Summe zweier Zufallsvariablen X und Y . Einfache Formeln auf der Basis der univariaten Verteilungen gibt es im Allgemeinen nur im Falle der Unabhängigkeit von X und Y . Die Verteilungsfunktion der Summe $X + Y$ wird dann auch als Faltung der beiden Verteilungsfunktionen bezeichnet (vgl. Anhang B.3). Entsprechend wird die zugehörige Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion im Fall von diskreten bzw. stetigen Zufallsvariablen als Faltung der Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktionen von X und Y bezeichnet. Man verwendet für diese Verknüpfung meist das Symbol $*$. Es gilt damit für die Verteilungsfunktionen

$$(F_X * F_Y)(z) := F_{X+Y}(z) := P(X + Y \leq z).$$

Im stetigen Fall ergibt die Faltung der Dichtefunktionen f_X und f_Y die Dichtefunktion der Summe $X + Y$ und berechnet sich gemäß

$$(f_X * f_Y)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x - u) \cdot f_Y(u) du.$$

Man beachte, dass im Falle von Schadenverteilungen das Integral tatsächlich nur von 0 bis x läuft, da für andere Werte von u der Integrand null ist (nichtnegative Schadenhöhe).

Im diskreten Fall berechnet man die Faltung der Wahrscheinlichkeitsfunktionen p_X und p_Y , d. h. die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Summe $X + Y$, gemäß der analogen Formel

$$(p_X * p_Y)(x) = \sum_{u \in \mathbb{R}} p_X(x - u) \cdot p_Y(u).$$

Diese Summenschreibweise ist deshalb sinnvoll, weil die Wahrscheinlichkeitsfunktion diskreter Zufallsvariablen nur in abzählbar vielen Punkten von null verschieden ist und nur die echt positiven Werte aufaddiert werden.

Für die n -fache Summe unabhängiger und identisch verteilter Risiken $X_k \sim X$ führen wir noch $F^{*n}(x)$ als n -fache Faltung der Verteilungsfunktion $F(x)$ von X ein. Im Fall einer stetigen bzw. diskreten Zufallsvariablen X steht analog $f^{*n}(x)$ bzw. $p^{*n}(x)$ für die n -fache Faltung der Dichtefunktion $f(x)$ bzw. die n -fache Faltung der Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(x)$ von X .

Es gelten für $k \in \mathbb{N}$ die Aussagen

$$\begin{aligned} F^{*1}(x) &= F(x), & F^{*k}(x) &= (F^{*(k-1)} * F)(x) \quad \text{für } k > 1, \\ f^{*1}(x) &= f(x), & f^{*k}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^{*(k-1)}(x-s)f(s)ds \quad \text{für } k > 1, \\ p^{*1}(x) &= p(x), & p^{*k}(x) &= \sum_{u \in \mathbb{R}} p^{*(k-1)}(x-u)p(u) \quad \text{für } k > 1. \end{aligned}$$

Falls X eine nichtnegative Zufallsvariable ist, können die Integrations- bzw. Summationsgrenzen auf $[0; x]$ eingeschränkt werden.

Das folgende Beispiel soll zeigen, dass die Berechnung von Gesamtschadenverteilungen schon in recht einfachen Situationen relativ aufwendig wird. Als Schadenhöhenverteilungen werden an dieser Stelle statt stetiger Verteilungen lediglich einfache 0-1-Verteilungen (Bernoulli-Verteilungen) angenommen, wie sie in der Praxis beispielsweise häufig auch in der Lebensversicherung vorkommen.

Beispiel (Berechnung einer Gesamtschadenverteilung)

Ein Betrieb besitzt drei gleichartige Maschinen. Bei beiden können Bauteil A oder Bauteil B ausfallen. Nach einem unplanmäßigen Stromausfall müssen mit jeweils 10% Wahrscheinlichkeit Bauteil A und Bauteil B erneuert werden. Es besteht kein Zusammenhang zwischen den jeweiligen Defekten bzw. den zugehörigen Neubeschaffungskosten.

Der Gesamtschaden im Falle des Stromausfalls ergibt sich als Summe

$$S = \sum_{i=1}^6 X_i$$

der zufallsbedingten Auswechslungskosten der 6 betroffenen Bauteile. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von S soll explizit berechnet werden

- a) für den Fall, dass beide Bauteile 30.000 kosten (alle Angaben in €), d. h. für $i = 1, \dots, 6$ ist

$$X_i = \begin{cases} 30.000 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,1, \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,9, \end{cases}$$

b) für den Fall, dass Bauteil A 20.000 und Bauteil B 40.000 kostet, d. h.

$$X_1, X_2, X_3 = \begin{cases} 20.000 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,1, \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,9, \end{cases}$$

$$X_4, X_5, X_6 = \begin{cases} 40.000 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,1, \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,9. \end{cases}$$

c) Zudem soll jeweils die erwartete Schadensumme und die Varianz des Schadens bestimmt werden.

Im Fall a) liegt eine Binomialverteilung vor; vgl. 2.3.1. Da der Gesamtschaden identisch ist mit $30.000 \times \text{Anzahl der Schäden}$, ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung in Tabelle 2.2 aus Tabelle 2.1 auf S. 51. Der Erwartungswert beträgt $6 \cdot 30.000 \cdot 0,1 = 18.000$, die Varianz $6 \cdot 30.000^2 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 486.000.000$, die Standardabweichung also 22045,41.

Schadensumme S	Wahrscheinlichkeit
0	$\binom{6}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^6 = 0,531441$
30.000	$\binom{6}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^5 = 0,354294$
60.000	$\binom{6}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^4 = 0,098415$
90.000	$\binom{6}{3} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^3 = 0,014580$
120.000	$\binom{6}{4} \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^2 = 0,001215$
150.000	$\binom{6}{5} \cdot 0,1^5 \cdot 0,9^1 = 0,000054$
180.000	$\binom{6}{6} \cdot 0,1^6 \cdot 0,9^0 = 0,000001$

Tabelle 2.2: Schadenverteilung für den Fall a)

Im Fall b) muss man die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten betrachten, wobei der Binomialkoeffizient $\binom{3}{k}$ für die Anzahl der Möglichkeiten steht, dass bei $k = 0, 1, 2$ oder 3 Maschinen Bauteil A bzw. B defekt ist. Der Erwartungswert beträgt $(3 \cdot 20.000 + 3 \cdot 40.000) \cdot 0,1 = 18.000$, die Varianz $(3 \cdot 20.000^2 + 3 \cdot 40.000^2) \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 540.000.000$, die Standardabweichung also 23237,90; vgl. Tabelle 2.3.

Man erkennt an diesem Beispiel u. a., dass der erwartete Schaden nur ein unzureichendes Indiz für das tatsächliche Risiko ist. So ist die Varianz in den beiden Varianten bei gleichem Erwartungswert recht unterschiedlich. Weitere Risikokennzahlen werden in Kapitel 3 behandelt. Ganz ähnliche Beispiele lassen sich auch im Rahmen der Lebensversicherung und im Kontext von Kreditausfällen betrachten; vgl. hierzu die Aufgaben in 2.6.7. Für eine umfassende Einschätzung von Risiken ist also eine möglichst genaue Kenntnis der gesamten Verteilung erforderlich. Das Beispiel zeigt allerdings auch, dass selbst in einfachen Fällen bei zunehmender Anzahl von Risiken die Berechnung der Gesamtschadenverteilung kaum noch „per Hand“ durchzuführen sein

Mögliche Schadenssumme S im Fall b)	Wahrscheinlichkeit
0	$\binom{3}{0} \cdot \binom{3}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^6 = 0,531441$
20.000	$\binom{3}{1} \cdot \binom{3}{0} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^5 = 0,177147$
40.000	$\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{0} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^4 + \binom{3}{0} \cdot \binom{3}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^5 = 0,19683$
60.000	$\binom{3}{3} \cdot \binom{3}{0} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^3 + \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^4 = 0,059778$
80.000	$\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^3 + \binom{3}{0} \cdot \binom{3}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^4 = 0,026244$
100.000	$\binom{3}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^2 + \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{2} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^3 = 0,006804$
120.000	$\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^2 + \binom{3}{0} \cdot \binom{3}{3} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^3 = 0,001458$
140.000	$\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{3} \cdot 0,1^5 \cdot 0,9^1 + \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{3} \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^2 = 0,00027$
160.000	$\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{3} \cdot 0,1^5 \cdot 0,9^1 = 0,000027$
180.000	$\binom{3}{3} \cdot \binom{3}{3} \cdot 0,1^6 \cdot 0,9^0 = 0,000001$

Tabelle 2.3: Schadenverteilung für den Fall b)

wird. Der Berechnungsaufwand steigt, wenn die Risiken nicht identisch verteilt sind. Etwaige Korrelationen (in Variation des o. g. Beispiels etwa eine erhöhte Wahrscheinlichkeit des Defekts von B unter der Bedingung, dass A defekt ist) würden die Komplexität noch deutlich weiter erhöhen; dann gelten auch die zuvor angegebenen allgemeinen Faltungsformeln nicht mehr.

Oft begnügt man sich daher mit der Kenntnis von charakteristischen Parametern der aggregierten Verteilung. Beispielsweise werden zur Berechnung von Erwartungswert und Varianz die bekannten Rechenvorschriften

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y),$$

$$\mathbf{Var}(X + Y) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y) + 2 \cdot \mathbf{Cov}(X, Y)$$

verwendet (s. Lemma B.17).

Sind beispielsweise alle n Risiken $X_i \sim X$ unabhängig und identisch verteilt mit

$$\mathbf{E}(X) = \mu \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}(X) = \sigma^2,$$

so gilt also für das Gesamtrisiko $S = \sum_{i=1}^n X_i$ im individuellen Modell

$$\mathbf{E}(S) = n \cdot \mu \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}(S) = n \cdot \sigma^2.$$

Gilt etwas allgemeiner die Unabhängigkeit und die Beziehung $X_i \sim u_i \cdot X$ mit beliebigen Kon-

stanten u_i für $i = 1, \dots, n$, so folgt

$$\mathbf{E}(S) = \left(\sum_{i=1}^n u_i \right) \cdot \mu,$$

$$\mathbf{Var}(S) = \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right) \cdot \sigma^2.$$

Für die Anwendung des individuellen Modells der Risikotheorie speziell auf Finanzrisiken vgl. auch Abschnitt 2.6.4.

2.6.3 Das kollektive Modell der Risikoaggregation und der Gesamtschadenprozess

Vom kollektiven Modell der Risikoaggregation spricht man, wenn die Anzahl N der zusammenfassenden Einzelrisiken bzw. Schadenfälle nicht genau bekannt ist; N ist also selbst eine Zufallsvariable. Obwohl das Modell auch für Finanzrisiken angewendet wird (s. etwa [GSW10] und [GH09]), beschränken wir uns im Folgenden zur Begrenzung der Komplexität auf die Schadenmodellierung.

In Abschnitt 2.3 wurde bereits angesprochen, dass die Schadenanzahl des Öfteren nicht lediglich über die Angabe einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, sondern als stochastischer Prozess modelliert wird. Analog wird man im allgemeinen Fall ausgehend vom Schadenanzahlprozess $N(t)$ und den Schadenhöhenverteilungen der Einzelschäden X_k den *Gesamtschadenprozess*

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$$

betrachten. Ganz allgemein könnten die Schadenhöhen X_k voneinander und außerdem noch von den Schadeneintrittszeitpunkten T_k abhängig sein; eine derartige Modellierung ist allerdings in der Regel nur mit komplexen Simulationsmodellen in den Griff zu bekommen. Meist setzt man die Unabhängigkeit und eine identische Verteilung der X_k sowie die Unabhängigkeit von den Eintrittszeitpunkten voraus. Einen stochastischen Prozess, der diese Bedingungen erfüllt und dessen Schadenanzahlprozess ein Poisson-Prozess ist, bezeichnet man auch als *zusammengesetzten Poisson-Prozess* (*Compound Poisson Process*). Der Klumpen-Poisson-Prozess aus 2.3.10 ist ebenfalls ein spezieller zusammengesetzter Poisson-Prozess, wobei anstelle der Schadenhöhe die „Klumpengröße“ steht.

Die entsprechende Verteilung des Gesamtschadens $S = \sum_{k=1}^N X_k$ zu einem festen Zeitpunkt bezeichnet man als *zusammengesetzte Poisson-Verteilung* (*Compound Poisson Distribution*). Wenn $N \sim \mathbf{Pois}(\lambda)$ und $X_k \sim F_X$, dann schreiben wir auch $S \sim \mathbf{CPois}(\lambda, F_X)$. Solche Compound-Verteilungen spielen außer in der klassischen Schadenversicherungsmathematik auch bei der Modellierung von operationellen Risiken eine wichtige Rolle. Beispielsweise können Banken beim sogenannten *Advanced Measurement Approach* (AMA) außer Standardmodellen auch interne Modelle zur Ermittlung ihres benötigten regulatorischen Kapitals einsetzen. Die operationellen Verluste können dabei sowohl für verschiedene Geschäftsbereiche als auch verschiedene Verlusttypen modelliert werden. Da die Anzahl der Verluste – also die Schadenanzahl – hier zufällig

ist, bietet sich wieder eine aus Schadenanzahl und Schadenhöhen zusammengesetzte Summe $S = \sum_{k=1}^N X_k$ an. Im Rahmen des AMA wird dieser Ansatz als *Loss Distribution Approach (LDA)* bezeichnet.

Bei bekannter Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_N(t)$ für die Schadenanzahl $N(t)$ und Verteilungsfunktion $F(x)$ für die Schadenhöhe $X_k \sim F$ besitzt mit obigem Absatz die Verteilungsfunktion $G(x, t)$ des Gesamtschadens $S(t)$ die Gestalt

$$G(x, t) = p_0(t) + \sum_{v=1}^{\infty} p_v(t) \cdot F^{*v}(x),$$

wobei F^{*v} die in 2.6.2 eingeführte v -fache Faltung der Verteilungsfunktion F von X ist.

Eine geschlossene Formel für $G(x, t)$ gibt es nur in einigen wenigen Spezialfällen. Wenn die Schadenhöhe X für ein $h > 0$ nur die Werte $0, h, 2h, 3h, \dots$ annehmen kann und die Schadenanzahl Panjer-verteilt ist (vgl. Abschnitt 2.3.5), dann gibt es ein exaktes numerisches Verfahren, die sogenannte *Panjer-Rekursion*, mit dem sich die Gesamtschadenverteilung rekursiv berechnen lässt. Im folgenden Satz ist das Verfahren für den Fall formuliert, dass X seine Werte auf \mathbb{N}_0 , also mit $h = 1$, annimmt.

Satz (Rekursionsformel von Panjer)

Für die Schadenanzahl gelte $N \sim \text{Panjer}(a, b)$ und die Schadenhöhe X kann nur Werte $X \in \mathbb{N}_0$ annehmen. Dann gilt:

$$P(S = k) = \frac{1}{1 - a \cdot P(X = 0)} \cdot \sum_{i=1}^k \left(a + \frac{b}{k} \cdot i \right) \cdot P(X = i) \cdot P(S = k - i).$$

Der Startwert der Rekursion ist gegeben durch

$$P(S = 0) = \begin{cases} P(N = 0) \cdot \exp[P(X = 0) \cdot b], & \text{falls } a = 0, \\ \frac{P(N = 0)}{(1 - P(X = 0) \cdot a)^{1 + \frac{b}{a}}}, & \text{falls } a \neq 0. \end{cases}$$

Da die in der Praxis benutzten Schadenhöhenverteilungen i. Allg. stetig sind, kann der Panjer-Algorithmus erst angewendet werden, nachdem die Schadenhöhenverteilung diskretisiert wurde. Daraus ergibt sich – je nach Wahl der Diskretisierungsschrittweite h und dem verwendeten Diskretisierungsverfahren – ein Approximationsfehler (für Einzelheiten vgl. [Mac02]).

Eine weitere numerische Aggregationsmethode bietet die sog. *Fast-Fourier-Transformation*, die hier jedoch nicht weiter beschrieben werden soll. Einzelheiten hierzu finden sich in [KGDD08, Kap. 3.6] sowie in [KPW08, Kap. 9]. In der letzteren Literaturquelle werden auch die Vor- und Nachteile der verschiedenen Aggregationsverfahren angesprochen.

Ein stochastischer Ansatz zur Approximation der Gesamtschadenverteilung besteht in der folgenden Version des zentralen Grenzwertsatzes. Der zentrale Grenzwertsatz (s. Satz B.27) lässt sich im kollektiven Modell nicht unmittelbar anwenden, da keine deterministische, sondern eine zufällige Anzahl von Summanden vorliegt. Man kann jedoch trotzdem zeigen, dass für hinrei-

chend lange Beobachtungszeiträume gilt

$$P(S(t) \leq y) \approx \Phi \left(\frac{y - \mathbf{E}(S(t))}{\sqrt{\mathbf{Var}(S(t))}} \right).$$

Zu den genauen Voraussetzungen verweisen wir auf [Mik04, S. 131], ähnliche Ergebnisse finden sich in [KGDD08]. Im Risikomanagement, etwa bei der Bestimmung des Value-at-Risk, sind vor allem die Tail-Wahrscheinlichkeiten $P(S(t) > y)$ für großes y von Interesse. Für große y ist die obige Approximation jedoch nicht zufriedenstellend. Eine Diskussion verfeinerter Approximationsergebnisse findet sich in [Mik04]. Eine vierte Möglichkeit zur Approximation der Gesamtschadenverteilung bieten Simulationsmethoden (s. Kapitel 7). Im R-Paket `actuar` (s. [DGP08]) sind alle der oben erwähnten Methoden zur Berechnung der Gesamtschadenverteilung in der Funktion `aggregateDist` enthalten.

In vielen Fällen begnügt man sich lediglich mit der Berechnung von Erwartungswert und Varianz des Gesamtschadens. Man kann zeigen, dass gilt (vgl. z. B. [Sch09] oder [BHN⁺97])

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S(t)) &= \mathbf{E}(N(t)) \cdot \mathbf{E}(X), \\ \mathbf{Var}(S(t)) &= \mathbf{E}(N(t)) \cdot \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(N(t)) \cdot [\mathbf{E}(X)]^2. \end{aligned}$$

Die Beziehung für den Erwartungswert ist plausibel. Die Formel für die Varianz sieht auf den ersten Blick etwas unübersichtlich aus, ist aber heuristisch ebenfalls einleuchtend. Der erste Summand resultiert aus der Varianz der Einzelschadenhöhe und der zweite Summand aus der Varianz der Schadenanzahl. Wählt man die Schadenhöhe als festen Wert x (Einpunktverteilung), so gilt also $\mathbf{Var}(X) = 0$ und $\mathbf{E}(X) = x$, und in diesem Fall reduziert sich die Formel auf die Rechenregel zum „Herausziehen“ eines konstanten Terms aus der Varianz. Wählt man dagegen die Schadenanzahl $N(t)$ als Einpunkt-Verteilung, d. h. als für einen zum festen Zeitpunkt t konstanten Wert $N(t)$, so ergibt sich als Spezialfall des kollektiven Modells das individuelle Modell aus 2.6.2.

2.6.4 Aggregation einzelner Finanzrisiken

Modellierungsansätze für die Risikoaggregation im Zeitverlauf mittels stochastischer Prozesse wurden bereits in Abschnitt 2.4 angesprochen. Darüber hinaus kann sowohl bei der zeitlich parallelen als auch der zeitlich sequenziellen Aggregation von Finanzrisiken das individuelle Modell der Risikotheorie aus 2.6.2 angewendet werden. Bei der zeitlich parallelen Erfassung geht es dabei um den Gesamtwert bzw. das Gesamtrisiko eines Portfolios aus n Wertpapieren (oder anderen Anlageobjekten), bei der zeitlich sequenziellen Erfassung um den Gesamtwert bzw. das Gesamtrisiko eines Finanzwerts in n Anlageperioden, wobei n jeweils eine feste (bekannte) natürliche Zahl ist. Der Einfachheit halber sollen an dieser Stelle nur Renditen, d. h. die relative Wertentwicklung, betrachtet werden; analoge Aussagen für absolute Werte (etwa Euro-Beträge) lassen sich daraus leicht ableiten.

2.6.4.1 Gesamtrisiko von n Finanzwerten in einer Zeitperiode

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird ein Anlagebetrag von K_{Anf} auf n Finanzanlagen verteilt. Das Gewicht der i -ten Anlage sei mit g_i bezeichnet; es gelte

$$0 \leq g_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n g_i = 1.$$

Die Rendite der i -ten Anlage über die betrachtete Zeitperiode sei $X^{(i)}$; d. h. es gilt:

$$K_{Ende}^{(i)} = K_{Anf}^{(i)} \cdot (1 + X^{(i)}).$$

Dabei bezeichnet $K_{Anf}^{(i)}$ den (bekannten) Wert der i -ten Anlage zu Anfang der Anlageperiode und $K_{Ende}^{(i)}$ den (unbekannten, zufallsabhängigen) Wert der i -ten Anlage zu Ende der Anlageperiode.

Die Gesamtrendite X_{ges} des Portfolios berechnet sich dann also gemäß

$$K_{Ende} = K_{Anf} \cdot (1 + X_{ges}) = \sum_{i=1}^n (1 + X^{(i)}) \cdot (g_i \cdot K_{Anf}),$$

also

$$X_{ges} = \sum_{i=1}^n g_i X^{(i)}.$$

Dies entspricht mit $Y^{(i)} := g_i X^{(i)}$ unmittelbar der Risikoaggregation im individuellen Modell der Risikotheorie; insbesondere lassen sich die in 2.6.2 angegebenen Formeln für Erwartungswert und Varianz der risikobehafteten Gesamtrendite verwenden und im Falle der Unabhängigkeit der Wertentwicklung der i Anlagen ebenso die angegebenen Faltungsformeln (sofern entsprechende Verteilungsmodelle für die einzelnen Anlagen vorliegen).

Beispiel (Gesamtrisiko von Finanzwerten)

In einem Portfolio seien drei verschiedene Aktien mit zufallsabhängiger Jahresrendite $X^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, gleich gewichtet. Es gelte jeweils $\mathbf{E}(X^{(i)}) = 0,1$ und $\mathbf{SD}(X^{(i)}) = 0,3$, also $\mathbf{Var}(X^{(i)}) = 0,09$ für $i = 1, 2, 3$. Für die Rendite X des Gesamtportfolios gilt dann $\mathbf{E}(X) = 0,1$ sowie

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}(X) &= \mathbf{Var}\left(\frac{1}{3} \cdot X^{(1)} + \frac{1}{3} \cdot X^{(2)} + \frac{1}{3} \cdot X^{(3)}\right) \\ &= \frac{1}{9} \mathbf{Var}(X^{(1)}) + \frac{1}{9} \mathbf{Var}(X^{(2)}) + \frac{1}{9} \mathbf{Var}(X^{(3)}) \\ &\quad + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \mathbf{Cov}(X^{(1)}, X^{(2)}) + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \mathbf{Cov}(X^{(1)}, X^{(3)}) + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \mathbf{Cov}(X^{(2)}, X^{(3)}). \end{aligned}$$

Unter Voraussetzung der Unkorreliertheit ergibt sich also $\mathbf{Var}(X) = 1/3 \cdot 0,09 = 0,03$ bzw. $\mathbf{SD}(X) \approx 0,1732$, nimmt man beispielsweise $\mathbf{Cov}(X^{(i)}, X^{(j)}) = 0,018$ für $i \neq j$ an, ergibt sich $\mathbf{Var}(X) = 1/3 \cdot 0,09 + 6 \cdot 1/3 \cdot 1/3 \cdot 0,018 = 0,042$ bzw. $\mathbf{SD}(X) \approx 0,2049$. Ob es sich bei den Renditen um stetige Renditen oder Intervall-Renditen handelt und wie die Wahrscheinlichkeitsverteilung genau aussieht, spielt an dieser Stelle für die Berechnung von Erwartungswert und Varianz der Durchschnittsrendite keine Rolle; man vergleiche aber mit dem Beispiel in 2.6.4.2.

2.6.4.2 Gesamtrisiko eines Finanzwerts über n Zeitperioden

Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der bekannte Betrag K_0 über n Zeitperioden investiert; der im Vorhinein unbekannte Wert der Investition zum ganzzahligen Zeitpunkt $t = j$ sei K_j . Wie in 2.4.1 sei die als Zufallsvariable anzusehende Periodenrendite in der Zeitperiode j mit I_j und die zugehörige kontinuierliche Rendite mit R_j bezeichnet; es soll also gelten

$$K_j = K_{j-1} \cdot (1 + I_j) = K_{j-1} \cdot e^{R_j}$$

für $j = 1, \dots, n-1$. In dieser Notation ist K_{j-1} ein fester Wert (vorgegebener Wert der Investition zu Anfang der Zeitperiode) und K_j eine Zufallsvariable (zufallsabhängiger Wert der Investition am Ende der Zeitperiode).

Die (Perioden-)Gesamtrendite Γ_n über alle n Zeitperioden zusammen, d. h. über den Gesamtzeitraum $[0; t]$, bzw. die zugehörige kontinuierliche Gesamtrendite G_n berechnet sich dann gemäß

$$K_n = K_0 \cdot (1 + \Gamma_n) = K_0 \cdot \prod_{j=1}^n (1 + I_j) = K_0 \cdot e^{G_n};$$

es gilt also

$$\Gamma_n = \prod_{j=1}^n (1 + I_j) - 1$$

bzw.

$$G_n = \sum_{j=1}^n R_j.$$

Unter der *Durchschnittsrendite* über n Anlageperioden versteht man diejenige konstante Periodenrendite, die bei n -facher Anwendung zur vorgegebenen Gesamtrendite führt. Somit ergibt sich zur Berechnung der stetigen Durchschnittsrendite \bar{R}_n bzw. der Intervall-Durchschnittsrendite \bar{I}_n der Ansatz

$$G_n = n \cdot \bar{R}_n = R_1 + R_2 + \dots + R_n, \quad 1 + \Gamma_n = (1 + \bar{I}_n)^n = (1 + I_1) \cdot \dots \cdot (1 + I_n)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \bar{R}_n &:= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n R_j; \\ \bar{I}_n &= \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n (1 + I_j)} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(1 + \bar{I}_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln(1 + I_j). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Die stetigen Durchschnittsrenditen werden also als arithmetisches Mittel der einzelnen Periodenrenditen berechnet, die Intervall-Durchschnittsrenditen über das geometrische Mittel der Perioden-Wachstumsfaktoren. Man erkennt, dass man bei der Ermittlung von Durchschnittsrenditen

mit den stetigen Renditen weitgehend einfacher rechnen kann als mit den gewohnten Renditen in Intervallform; dies gilt insbesondere im Rahmen stochastischer Überlegungen. Die zunächst etwas gewöhnungsbedürftige kontinuierliche Schreibweise der Renditen stellt also bei der Risikoanalyse von zeitsequenziellen zufallsbehafteten Prozessen eine erhebliche Vereinfachung dar. Nur für die stetigen Renditen lassen sich etwa die Faltungsformeln aus 2.6.2 unmittelbar anwenden, da sie sich auf Summen von Zufallsvariablen beziehen und nicht auf Produkte, wie sie bei der Aggregation in der nichtkontinuierlichen Schreibweise auftauchen.

Ebenfalls nur unter Verwendung der kontinuierlichen Schreibweise lassen sich auch charakteristische Verteilungsparameter für die Gesamt- bzw. Durchschnittsrendite relativ einfach bestimmen. Es seien beispielsweise Erwartungswert $\mathbf{E}(R_j) = r_j$ und Varianz $\mathbf{Var}(R_j) = \sigma_j^2$ für die stetigen Renditen R_j der Anlageperioden $1 \leq j \leq n$ bekannt bzw. als Schätzwert gegeben. Dann ergibt sich

$$\mathbf{E}(\bar{R}_n) = \frac{r_1 + \dots + r_n}{n},$$

$$\mathbf{Var}(\bar{R}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{Cov}(R_i, R_j),$$

und speziell im Falle der Unabhängigkeit der einzelnen stetigen Periodenrenditen

$$\mathbf{Var}(\bar{R}_n) = \frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}{n^2}.$$

Über Erwartungswert und Varianz der Intervall-Durchschnittsrenditen lassen sich allgemein keine so einfachen Aussagen treffen; man beachte dazu, dass in (2.8) Wurfelfunktion und Erwartungswert- bzw. Varianz-Operator nicht vertauschbar sind. Lediglich unter Zusatzvoraussetzungen, etwa unter Annahme normalverteilter stetiger Periodenrenditen, kann man entsprechende Zusammenhänge herleiten. Mit

$$R_j \sim \mathbf{N}(r_j; \sigma_j^2), \quad W_j = 1 + I_j \sim \mathbf{LN}(r_j; \sigma_j^2) \quad \text{für } 1 \leq j \leq n$$

folgt

$$\mathbf{E}(\bar{R}_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n r_j \quad \text{und} \quad \mathbf{E}(\bar{I}_n) = \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n r_j + \frac{1}{2n^2} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \right) - 1.$$

Unter der zusätzlichen Annahme, dass die einzelnen Periodenrenditen stochastisch unabhängig sind, gilt ferner

$$\mathbf{Var}(\bar{I}_n) = \exp \left(\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n r_j + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \right) \cdot \left[\exp \left(\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \right) - 1 \right].$$

Im Spezialfall identischer Verteilungen mit $r_j = r$ und $\sigma_j^2 = \sigma^2$ ergibt sich

$$\mathbf{E}(\bar{R}_n) = r \quad \text{und} \quad \mathbf{E}(\bar{I}_n) = \exp \left(r + \frac{\sigma^2}{2n} \right) - 1, \quad (2.9)$$

sowie zusätzlich speziell im Falle der Unabhängigkeit der Periodenrenditen

$$\mathbf{Var}(\bar{R}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}(\bar{I}_n) = \exp\left(2r + \frac{\sigma^2}{n}\right) \cdot \left[\exp\left(\frac{\sigma^2}{n}\right) - 1\right]. \quad (2.10)$$

Man beachte, dass also unter den obigen Voraussetzungen sowohl der Erwartungswert als auch die Varianz der Intervall-Durchschnittsrendite immer kleiner als die der Einzelrenditen ist und mit wachsender Periodenanzahl n die Intervall-Durchschnittsrendite im stochastischen Sinne gegen $\exp(r) - 1$, also den Median der Verteilung von \bar{I}_t konvergiert. Eine weitere Analyse der Verteilung von Gesamt- und Durchschnittsrenditen erfolgt in Kapitel 3.

Beispiel (Durchschnittsrenditen)

Es werde die Entwicklung einer Aktie mit zufallsabhängiger stetiger Jahresrendite $R^{(k)}$ über 3 Jahre ($k = 1, 2, 3$) betrachtet. Es gelte jeweils $\mathbf{E}(R^{(k)}) = 0,1$ und $\mathbf{SD}(R^{(k)}) = 0,3$, also $\mathbf{Var}(R^{(k)}) = 0,09$ für $k = 1, 2, 3$. Für die stetige jährliche Durchschnittsrendite R ergibt sich vollkommen analog wie im Beispiel in 2.6.4.1 das Ergebnis $\mathbf{E}(R) = 0,1$ sowie $\mathbf{Var}(R) = 0,03$ im Falle der Unkorreliertheit der Einzelrenditen bzw. $\mathbf{Var}(R) = 0,042$, wenn $\mathbf{Cov}(R^{(k)}, R^{(m)}) = 0,018$ für $k \neq m$ angenommen wird. Ist demgegenüber die Intervall-Rendite $I^{(k)}$ des k -ten Jahrs ($k = 1, 2, 3$) gegeben und sind nur die Werte $\mathbf{E}(I^{(k)})$ und $\mathbf{SD}(I^{(k)})$ für $k = 1, 2, 3$ bekannt, kann man Erwartungswert und Varianz der jährlichen Durchschnittsrendite I aus der Beziehung $1 + I = [(1 + I^{(1)}) \cdot (1 + I^{(2)}) \cdot (1 + I^{(3)})]^{1/3}$ nicht mehr ohne weiteres, sondern nur unter Zusatzannahmen, bestimmen. Wenn man etwa jeweils eine Lognormalverteilung $1 + I^{(k)} \sim \mathbf{LN}(r; \sigma^2)$ voraussetzt, erhält man gemäß (2.9) $\mathbf{E}(I) = \exp(r + \sigma^2/6) - 1$. Ferner ergibt sich unter Voraussetzung der Unkorreliertheit der Renditen gemäß (2.10) die Beziehung $\mathbf{Var}(I) = \exp(2r + \sigma^2/3) \cdot [\exp(\sigma^2/3) - 1]$. Daraus lassen sich also mit den Formeln für Erwartungswert und Varianz der Lognormalverteilung Erwartungswert und Varianz von I berechnen. Gilt beispielsweise ähnlich wie oben $\mathbf{E}(I^{(k)}) = 0,1$ und $\mathbf{SD}(I^{(k)}) = 0,3$, so ergibt sich $\sigma^2 = \ln(1 + (0,3/1,1)^2) \approx 0,0717$ und $r = \ln(1,1) - \sigma^2/2 = 0,0594$ und somit $\mathbf{E}(I) = \exp(r + \sigma^2/6) - 1 \approx 0,0740$ und $\mathbf{Var}(I) \approx 0,0278$. Falls die Intervall-Renditen nicht unkorreliert sind, sind die entsprechenden Zusammenhänge noch komplexer; explizite Berechnungen zu charakteristischen Verteilungsparametern sind i. Allg. nur möglich, wenn die Informationen zur Korrelation sich auf die stetigen Renditen beziehen.

2.6.5 Risikomatrizen

Eine in der Praxis äußerst beliebte Methode zur Visualisierung der Gesamtrisikosituation von Unternehmen, in denen Überlegungen zur Schadenanzahl bzw. -häufigkeit und Einzelschadenhöhe zusammengeführt werden, sind die sogenannten *Risikomatrizen* (andere Bezeichnungen: *Risikographen*, *Risk Maps*). Sie können einen guten ersten Überblick zur Risikosituation verschaffen, weisen aber als Methode zur Risikoerfassung und -quantifizierung im Detail diverse Probleme auf.

Eine Risikomatrix ist ein Koordinatensystem, in dem einerseits die Eintrittswahrscheinlichkeit einer bestimmten Schadenart und andererseits das Schadenausmaß im Falle des Eintritts bezogen auf eine vorgegebene Zeitperiode abgetragen werden. Die (approximativen) Werte für Schadeneintrittswahrscheinlichkeit und -ausmaß ermittelt man z. B. mittels Expertenbefragungen oder aus

Schadenstatistiken. Im Folgenden sollen einige Vor- und Nachteile von Risikomatrizen erörtert werden, die überblicksartig in Abbildung 2.19 zusammengefasst sind.

Von Vorteil ist die relative Einfachheit der Vorgehensweise und die große Anschaulichkeit der Darstellung. Ein wesentlicher Nachteil liegt – abgesehen vom grundsätzlichen Schätzproblem – darin, dass für sehr viele Schadenarten das Schadenausmaß im Falle des Schadeneintritts keine feste Größe ist, sondern einer Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegt. Der Begriff „Schadenausmaß“ wäre dann z. B. als „durchschnittlicher“ Schaden im Falle des Eintritts zu verstehen. Die Betrachtung des durchschnittlichen Schadens ist aber als Kennzahl für Risikobetrachtungen möglicherweise ungeeignet, da sie z. B. keine Information über seltene katastrophale Fälle enthält. So liegt die durchschnittliche Schadenhöhe bei einem Autounfall im Bereich von einigen tausend Euro; doch im Extremfall können durch verletzte Personen, auslaufende Schadstoffe o. Ä. sehr viel höhere Schäden entstehen, weshalb übrigens in Deutschland auch die Kfz-Haftpflicht-Versicherung vorgeschrieben ist. Alternativ könnte statt eines durchschnittlichen Schadens etwa auch ein wahrscheinlicher Höchstschaden (vgl. Kapitel 3, insbesondere das Beispiel 3.1.5.6) betrachtet werden, was allerdings wiederum Interpretationsschwierigkeiten hinsichtlich der angegebenen Eintrittswahrscheinlichkeit des Schadenereignisses zur Folge hätte. Ein grundsätzliches Problem besteht auch darin, dass es für Menschen in der Regel schwierig ist, Eintrittswahrscheinlichkeiten sinnvoll zu interpretieren. Typischerweise wird etwa eine Eintrittswahrscheinlichkeit von 50 % als hoch angesehen, eine von 1 % als niedrig. Im Versicherungskontext liegen niedrige Wahrscheinlichkeiten jedoch eher im Bereich zwischen 0,01 % und 0,1 %. Nur durch die Aggregation solcher Risiken ergeben sich Wahrscheinlichkeiten, die üblicherweise von Menschen eingeschätzt werden können.

Obwohl Risikomatrizen in der Praxis auch für die Bewertung von Finanzrisiken eingesetzt werden, dürften sie eher für operationale Risiken oder „echte“ Schadenereignisse geeignet sein, da riskante Finanzgeschäfte typischerweise auch große Gewinnchancen bieten, die durch die Eingruppierung in einer Risikomatrix unzureichend berücksichtigt werden. Zur Einschätzung von Finanzrisiken dürften eher Rendite-Risiko-Diagramme von Nutzen sein, die in 4.2 näher besprochen werden. Zudem ist anzumerken, dass Risikomatrizen zwar die Gesamtheit aller Risiken eines Unternehmens grundsätzlich einigermaßen erfassen können, nicht aber Zusammenhänge zwischen einzelnen Risiken.

Ferner ist – abgesehen vom Problem der fehlenden Verteilungsinformationen – nicht ohne Weiteres klar, welche Punkte in einer Risikomatrix vergleichbare Risiken darstellen. Mit einer Schadeneintrittswahrscheinlichkeit von w und einem Schadenausmaß von S (z. B. in Euro) ergibt sich der erwartete Gesamtschaden G zu

$$G = w \cdot S \quad \text{bzw.} \quad w = G \cdot 1/S.$$

Nimmt man in dieser Beziehung G als konstanten Wert an, so erkennt man, dass die Iso-Risiko-Kurven, also die Kurven in der Risikomatrix mit konstantem erwartetem Gesamtschaden G , einen hyperbelartigen Verlauf haben. Von Laien wird aber oft intuitiv eher ein linearer Ansatz gewählt, was also ebenfalls eine Quelle von Fehleinschätzungen beim Einsatz von Risikomatrizen sein kann; vgl. etwa [Gle06].

In Abbildung 2.18 ist eine prototypische Risikomatrix abgebildet, wie man sie in ähnlicher Form in der Managementliteratur oder in Software-Tools zum Risikomanagement findet. Die

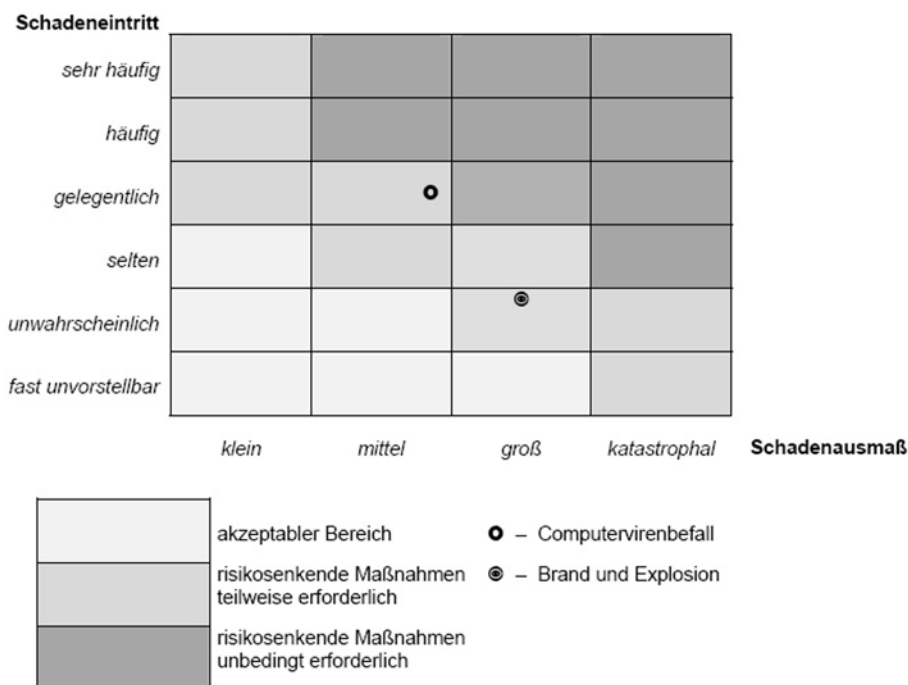


Abbildung 2.18: Beispiel einer Risikomatrix (schematisch)

Darstellung soll nur den grundsätzlichen Aufbau verdeutlichen, ohne damit eine Empfehlung zur tatsächlichen Gestaltung geben zu wollen. Die Matrix kann mehr oder weniger Spalten und Zeilen haben. Die Kategorien für den Schadeneintritt und das Schadenausmaß sind bewusst verbal formuliert, da u. U. eine zahlenmäßige Angabe ein in dieser Darstellungsform nicht erzielbares Ausmaß an Quantifizierbarkeit der Risiken suggerieren könnte. In der Beispielmatrix werden im Hinblick auf konkrete Risiken drei verschiedene Gefährlichkeitsbereiche unterschieden, nämlich ein akzeptabler Bereich, einer, in dem risikosenkende Maßnahmen teilweise, und einer, in dem risikosenkende Maßnahmen unbedingt erforderlich sind. An dieser Stelle könnte auch eine differenziertere Klassifizierung von Risiken erfolgen. Die beiden Kreise stellen exemplarisch zwei verschiedene Risiken dar, wie sie von einem Unternehmen konkret eingeschätzt werden könnten. In Abbildung 2.19 sind nochmals die Vor- und Nachteile von Risikomatrizen zur Visualisierung von Risiken in Kurzform zusammengestellt.

2.6.6 Aggregation von Einzelrisiken mittels Simulationstechniken

Wie in den vorangegangenen Abschnitten bereits erläutert wurde, kann in vielen Situationen die Verteilung des Gesamtschadens, eines Wertpapierportfolios – und erst recht eines zukünftigen Gesamtunternehmenswertes – nicht explizit berechnet werden. Auch Risikomatrizen können

Visualisierung von Risiken mit Risikomatrizen

<i>Vorteile:</i>	<ul style="list-style-type: none"> • einfache Vorgehensweise • anschauliche Darstellung • ohne fortgeschrittene mathematische Kenntnisse interpretierbar (teilweise)
<i>Nachteile:</i>	<ul style="list-style-type: none"> • unzureichende Möglichkeit, zwischen unterschiedlichen Ausprägungen der Schadenhöhe im Falle des Schadeneintritts zu unterscheiden • mögliche Diskrepanz zwischen intuitiv eingeschätzten Eintrittswahrscheinlichkeiten und mathematischen Wahrscheinlichkeiten • Iso-Risiko-Kurven (vergleichbare Risiken) sind nicht offensichtlich (schlüssige Definition fehlt; Möglichkeit von Fehlinterpretationen) • keine Darstellung korrespondierender Chancen; daher z. B. kaum geeignet zur Erfassung von Finanzrisiken • keine Erfassung von Zusammenhängen / Abhängigkeiten zwischen Risiken

Abbildung 2.19: Vor- und Nachteile von Risikomatrizen

die Gesamtrisikosituation eines Unternehmens meist nur sehr unvollständig veranschaulichen. In solchen Situationen können Simulationsrechnungen gewinnbringend eingesetzt werden. Durch fortgeschrittene Möglichkeiten der IT-Unterstützung haben solche Ansätze in den letzten Jahren in Forschung und Praxis erheblich an Bedeutung gewonnen. Um zu erläutern, wie die Aggregation von Einzelrisiken mittels Simulationstechniken grundsätzlich funktioniert, soll im Folgenden beispielhaft der Prototyp eines allgemeinen Unternehmensmodells grob skizziert werden; vgl. Abbildung 2.20. Eine Einführung in verschiedene Techniken zur praktischen Implementierung von Unternehmenssimulationen bietet Kapitel 7.

In einem solchen Unternehmensmodell werden zunächst die Vermögenswerte und die Verbindlichkeiten des Unternehmens erfasst. Dies kann man sich als komprimierte Bilanz des Unternehmens vorstellen. Innerhalb einer Zeitperiode $i \rightarrow i + 1$ verändert sich die Bilanz einerseits durch „deterministische“ Managemententscheidungen (z. B. Kauf / Verkauf von Aktiva, Kreditaufnahme u. Ä.), andererseits auch durch externe Einflussfaktoren, die stochastisch zu modellieren sind (z. B. Rohstoffpreisveränderungen, auftretende Maschinenschäden, Absatzzahlen usw.). Für diese externen Einflussfaktoren können dann entweder bestimmte fest vorgegebene Szenarien durchgespielt werden, oder aber die Szenarien werden – auf der Basis bestimmter Modellannahmen – mit einem Zufallszahlengenerator erzeugt; letzteres bezeichnet man auch als *Monte-Carlo-Simulation*. Derartige Simulationen kann man zunächst für eine Zeitperiode ($i \rightarrow i + 1$), und schließlich auch für mehrere aufeinander folgende Zeitperioden durchführen.

Die Veränderung der Bilanz wird in einer Art Gewinn- und Verlustrechnung bzw. in Form von Bilanzkennzahlen erfasst. Diese Kennzahlen sind wegen der stochastischen Einflussfaktoren selbst Zufallsvariablen und man kann also das Risiko anhand geeigneter Risikokennziffern erfassen; näheres zu solchen Risikokennziffern in Kapitel 3. Aber auch für die (nicht-stochastischen) Managemententscheidungen kann man verschiedene Szenarien durchspielen und dann die bes-

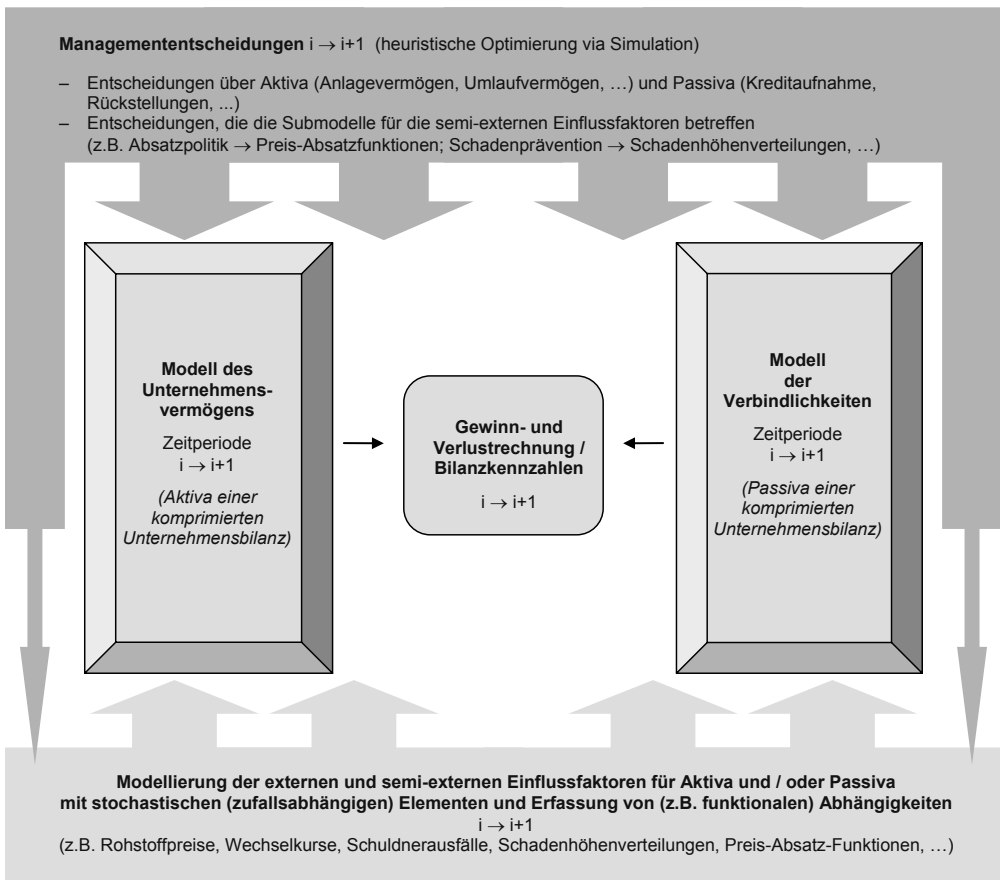


Abbildung 2.20: Prototypisches Unternehmensmodell für die Risikoanalyse

te Alternative auswählen. Dabei muss beachtet werden, dass Managemententscheidungen auch manche „externe“ Zufallsgrößen beeinflussen können; diese sollen hier als semi-extern bezeichnet werden. Beispielsweise beeinflusst eine Managemententscheidung über den Absatzpreis die Absatzmenge, wenn auch in der Praxis sicher nicht in deterministischer Weise. Beispielsweise könnten in einem Unternehmensmodell die Absatzzahlen u. U. als näherungsweise normalverteilt angenommen werden. Eine Managemententscheidung zur Senkung des Absatzpreises würde lediglich den Erwartungswert der Absatzmenge erhöhen (gemäß vorgegebener deterministischer Preis-Absatz-Funktion), während z. B. vorgesehene Kundenbindungsmaßnahmen die Standardabweichung der Normalverteilung in einer geschätzten Größenordnung vermindern würde. Auch in relativ einfachen Modellen werden die Zusammenhänge in der Regel so komplex sein, dass optimale Entscheidungsvarianten nicht explizit ausgerechnet werden können, sondern eine Auswahl möglichst optimaler Managemententscheidungen eher nach dem Trial-and-Error-Prinzip erfolgen muss (heuristische Optimierung auf Basis von Simulationsrechnungen).

Die Modellierung der externen und semi-externen Einflussfaktoren erfolgt im Rahmen von Submodellen in einem Gesamtunternehmensmodell, z. B. Submodellen zur Entwicklung von Rohstoffpreisen, zu Absatzzahlen (etwa: Preis-Absatz-Funktionen mit stochastischer „Störung“) etc. Solche Submodelle werden mathematisch oft als Faktormodelle angesetzt, s. [MFE05] und die dort angegebene Literatur. Der Detaillierungsgrad des Gesamtmodells hängt vom Einsatzzweck ab. Offenbar können solche Modelle beliebig komplex gestaltet werden, sind aber auch bei großer Vereinfachung schon einigermaßen aufwendig, wenn sie auch nur halbwegs realitätsnah sein sollen.

Bei dem Prototyp eines Gesamtunternehmensmodells gemäß Abb. 2.20 wurde bewusst vor allem auch an Unternehmen außerhalb der Finanzdienstleistungsbranche gedacht, da voraussichtlich gerade für solche Unternehmen die professionelle Risikoanalyse in den nächsten Jahren noch stark an Bedeutung zunehmen wird. Für Banken und Versicherungen spielen Gesamtunternehmensmodelle als sogenannte interne Modelle schon jetzt eine wesentliche Rolle im aufsichtsrechtlich verankerten Risikomanagement; vgl. auch Kap. 1. Als weiterführende Literatur zu stochastischen Unternehmensmodellen speziell im Banken- bzw. Versicherungsbereich verweisen wir vor allem auf [Deu04], [Die07], [Jaq05], [Kor08] und [KW12].

Allgemeine Vorgehensweise der Monte-Carlo-Simulation

Im Folgenden soll noch kurz die allgemeine Vorgehensweise der Monte-Carlo-Simulation anhand von Random-Walk-Simulationen erläutert werden. Weitere Ausführungen dazu finden sich in Kapitel 7.

Monte-Carlo-Simulation

1. Erzeuge n Simulationen U_1, \dots, U_n des zugrunde liegenden Zufallsexperiments. Im Fall des normalen Random Walk (vgl. 2.4) könnten dies n Pfade eines Random Walk auf $[0; T]$ sein, wobei jeder Pfad wieder als Summe von normalverteilten Zufallszahlen zu simulieren wäre. Wie solche Zufallszahlen erzeugt werden können, wird in Kapitel 7 beschrieben.
2. Berechne daraus Simulationen der interessierenden Größe $X_1 = g(U_1), \dots, X_n = g(U_n)$. Beispielweise könnte der Wert des Random Walk zum Endzeitpunkt T von Interesse sein. In diesem Fall würden also die Endwerte der n Random Walks weiterverarbeitet werden.
3. Werte die Simulationen X_1, \dots, X_n aus, z. B. durch Berechnung des Mittelwerts oder der Stichprobenquantile.

Zur Verdeutlichung des Prinzips wurde hier der normale Random Walk als Beispiel gewählt. In diesem Fall könnte man die interessierenden Größen aus Schritt 3 jedoch auch ohne Simulationen bestimmen.

2.6.7 Aufgaben

Aufgabe 2.28

- (a) Bei einer Risikolebensversicherung wird die Versicherungssumme nur im Todesfall an die begünstigten Hinterbliebenen ausbezahlt. Ein Lebensversicherungsunternehmen hat in seinem Bestand vier gleichartige Risikolebensversicherungen mit einer Versicherungssumme von 600.000 (Angaben in €). Die versicherungsmathematische Wahrscheinlichkeit, dass die versicherte Person im nächsten Jahr stirbt, ist bei allen vier Versicherungen $q = 0,05$. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der vom Versicherungsunternehmen im nächsten Jahr auszuzahlenden Versicherungssumme für diese vier Versicherungsverträge und bestimmen Sie deren Erwartungswert und Varianz.
- (b) Wie verändert sich die Antwort, wenn zwei der vier Versicherungen eine Versicherungssumme von 400.000 und zwei eine Versicherungssumme von 800.000 haben?

Aufgabe 2.29

- (a) Eine Bank hat sechs Kredite vergeben, bei denen am Ende der Laufzeit jeweils 100.000 € zurückzuzahlen sind. Sie schätzt die Wahrscheinlichkeit, dass der Kredit wegen Insolvenz nicht zurückgezahlt werden kann, auf jeweils $w = 0,075$ bei allen sechs Krediten. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der gesamten Kreditausfallsumme aus Sicht der Bank und bestimmen Sie deren Erwartungswert und Varianz.
- (b) Überlegen Sie sich selbst einige Konstellationen mit ebenfalls sechs Krediten und der gleichen Kreditausfallwahrscheinlichkeit sowie dem gleichen Erwartungswert für die Kreditausfallsumme, aber mit unterschiedlichen Rückzahlungsbeträgen, und bestimmen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Varianzen.

Aufgabe 2.30

Gegeben sei ein Bestand von 10 (bzw. 100, 1.000, 10.000) gleichartigen Maschinen in einem Betrieb. Die Wahrscheinlichkeit für (mindestens) einen Maschinenschaden im Jahr sei 0,2; mehrere Schäden pro Jahr an derselben Maschine sollen zu einem Schaden zusammengefasst werden.

- (a) Die erwartete Anzahl von Maschinenschäden beträgt 2 (bzw. 20, 200, 2000). Wie groß ist jeweils die Varianz der Schadenanzahlverteilung? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 3 (bzw. 30, 300, 3000) Schäden auftreten? Interpretieren Sie das Ergebnis. Führen Sie selbst weitere Risikoanalysen zur Schadenanzahl durch.
- (b) Bestimmen Sie Erwartungswert und Standardabweichung der jährlichen Schadenssummenverteilung (pro Einzelrisiko) und der Gesamtschadenverteilung unter der Voraussetzung, dass
- die jährliche Schadenssumme pro einzelner Maschine höchstens 50.000 € beträgt und ansonsten im Intervall $[0; 50.000]$ gleichverteilt ist.
 - die jährliche Schadenssumme pro einzelner Maschine exponentialverteilt ist mit Erwartungswert des Gesamtschadens wie in (i) (bei gleicher angenommener erwarteter Anzahl von Maschinenschäden; vgl. a). Inwiefern kann die Annahme einer Exponentialverteilung in dem Beispiel sinnvoll sein? Was wären Alternativen?

Aufgabe 2.31

Für zwei unabhängige, **Pareto**(1;1)-verteilte Risiken X und Y soll die Verteilungsfunktion von $X + Y$ ermittelt werden. Dabei können Sie folgendermaßen vorgehen:

(a) Zeigen Sie zunächst

$$F_{X+Y}(x) = \int_1^{x-1} \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2(x-y)} \right) dy.$$

Hinweis: Sie können die Formel $F_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x-y) \cdot f_Y(y) dy$ verwenden.

(b) Zeigen Sie

$$\int_1^{x-1} \frac{1}{y^2(s-y)} dy = -\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x} + 2 \frac{\ln(x-1)}{x^2}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{y^2(x-y)} = \frac{x+y}{x^2 y^2} + \frac{1}{x^2(x-y)}$$

gilt und integrieren Sie anschließend.

(c) Zeigen Sie nun, daß

$$F_{X+Y}(x) = 1 - \frac{2}{x} - 2 \frac{\ln(x-1)}{x^2}.$$

Aufgabe 2.32

Die jährliche Schadenhöhen aus der Produkthaftpflicht in zwei verschiedenen Sparten eines Unternehmens werden als exponentialverteilt mit Parameter λ_1 bzw. λ_2 angenommen. Berechnen Sie die Schadenhöhenverteilung aus beiden Sparten zusammen unter der Voraussetzung, dass die Produkthaftpflichtschäden der beiden Sparten unabhängig voneinander sind.

Aufgabe 2.33

Zeigen Sie, dass die n -fache Faltung einer Bernoulli-Verteilung **Bin**(1; p) die Binomialverteilung **Bin**(n ; p) ergibt.

Aufgabe 2.34

Es sollen zwei Portfolios aus Produkthaftpflichttrisiken untersucht werden, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

- Bei beiden Portfolios wird der Schadenanzahlprozess durch einen homogenen Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda = 5$ modelliert.
- Die Schadenhöhen von Portfolio 1 sind Nullpunkt-Pareto-verteilt:
 $X \sim \text{Null-Pareto}(1/2; 3/2)$.
- Die Schadenhöhen von Portfolio 2 sind exponentialverteilt: $Y \sim \text{Exp}(1)$.

Zeigen Sie, dass die Gesamtschadenprozesse $S_1(t)$ und $S_2(t)$ der beiden Portfolios „im Mittel“ gleich sind, d. h. es gilt $\mathbf{E}(S_1(t)) = \mathbf{E}(S_2(t))$.

Aufgabe 2.35

Die Ankunftszeiten von Kunden an einem Bankschalter werden durch einen homogenen Poisson-Prozess $N(t)$ mit Intensität λ modelliert. Zeigen Sie: Die Ankunftszeit T_n des n -ten Kunden ist Erlang-verteilt, d. h. $T_n \sim \Gamma(n; \lambda)$.

Aufgabe 2.36

Überlegen Sie in Anknüpfung an Aufgabe 2.3, wie Sie die verschiedene Einzelrisiken in einem Privathaushalt, einem Versicherungsunternehmen, einem Rückversicherungsunternehmen, einer Bank oder einem Wirtschaftsunternehmen aus einer anderen (bestimmten) Branche mittels einer Risikomatrix visualisieren können (einschließlich einer kritischen Betrachtung der Grenzen dieses Hilfsmittels).

2.7 Zusammenfassung

- Risiken lassen sich mathematisch als Zufallsvariablen mit zugehöriger Wahrscheinlichkeitsverteilung und ggf. zusätzlich zeitabhängig als stochastischer Prozess beschreiben.
- Die mathematische Modellierung von Finanzrisiken und Schadenrisiken (etwa Versicherungsrisiken) besitzt viele Gemeinsamkeiten. Der wichtigste prinzipielle Unterschied besteht darin, dass bei Finanzrisiken sowohl negative als auch positive Wertentwicklungen abzubilden sind.
- Zur Modellierung komplexer Risiken, etwa bzgl. kompletter Versicherungsbestände oder Unternehmenswertentwicklungen, ist eine Zerlegung in Teilrisiken erforderlich. In der Schadenmodellierung werden meist zunächst Schadenhöhe und Schadenanzahl getrennt betrachtet.
- Potenzielle Schadenhöhen und Wertverteilungen werden meist durch stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben. Bei der Auswahl des passenden Verteilungstyps kann man sich von grundsätzlichen Charakteristika der Gestalt leiten lassen, wie etwa von der Ausprägung des Tails. Die freien Parameter des Verteilungsmodells lassen sich danach in der Regel über ihre statistische Interpretation (z. B. als Erwartungswert oder Varianz der Verteilung) festlegen.
- Schadenanzahlentwicklungen werden sehr häufig mittels Poisson-Prozessen beschrieben. Der homogene Poisson-Prozess als Basisvariante zeichnet sich durch eine konstante Schadenintensität λ aus. Die mathematische Grundidee weiterer praxisrelevanter Varianten besteht in einer Modifikation des Ansatzes für die Schadenintensität.
- Durch Extremwertverteilungen lassen sich Maxima (z. B. die monatlichen Maxima prozentualer DAX-Tagesverluste) bzw. Überschreitungen von hohen Schwellenwerten beschreiben. Für Maxima ist die verallgemeinerte Extremwertverteilung das „natürliche“ Modell, für Überschreitungen ist es die verallgemeinerte Pareto-Verteilung.

- Bei der Aggregation von Teilrisiken unterscheidet man das individuelle Modell (Anzahl der Teilrisiken ist bekannt) und das kollektive Modell (Anzahl der Teilrisiken ist eine Zufallsvariable). Oft werden bei der Ermittlung von Gesamtschaden- bzw. Gesamtwertverteilungen auch Simulationsmethoden verwendet.

2.8 Selbsttest

1. Wie kann man Risiken grundsätzlich mittels Zufallsvariablen und zugehöriger Wahrscheinlichkeitsverteilungen mathematisch beschreiben?
2. Nennen Sie verschiedene Grundtypen von Schadenhöhenverteilungen und Schadenanzahlverteilungen, die in der Schadenmodellierung zum Einsatz kommen. Anhand vorgegebener Formeln für die Verteilungsfunktionen sollten Sie deren grundsätzliche Gestalt erläutern können, insbesondere im Hinblick auf einen Vergleich zwischen unterschiedlichen Verteilungstypen und der Variation der Verteilungsparameter bei vorgegebenem Verteilungstyp.
3. Erläutern Sie den Begriff *Schadenanzahlprozess* und speziell den Bernoulli-Prozess und den homogenen Poisson-Prozess als wichtigste Beispiele.
4. Interpretieren Sie die den Poisson-Prozess charakterisierenden mathematischen Bedingungen im Kontext der Schadenanzahlmodellierung und erläutern Sie vor diesem Hintergrund verschiedene Varianten des Poisson-Prozesses (inhomogener Poisson-Prozess, Poisson-Ansteckungsprozess usw.).
5. Erläutern Sie durch einen beispielhaften Vergleich von Bernoulli-Prozess für die Schadenanzahlmodellierung und arithmetischem und geometrischem Binomialgitter-Prozess zur Wertentwicklungsmodellierung einige Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Modellierung von Schadenanzahlen bzw. Kapitalentwicklungen.
6. Erläutern Sie den allgemeinen Random Walk als Grundmodell zur Modellierung von Wertentwicklungen und gehen Sie dabei zumindest ansatzweise auch auf weitere Modelle für Kapitalentwicklungen ein.
7. Erläutern Sie die Normalverteilung als Basismodell für die Verteilung stetiger Renditen und die Lognormalverteilung als Basismodell für die Verteilung von Kursen bzw. Preisen. Gehen Sie dabei insbesondere auch auf die formelmäßigen Zusammenhänge von Kursen/Preisen und Renditen sowie die Aggregation von Renditen im Zeitverlauf ein.
8. Beschreiben Sie die Aggregationsproblematik bei der simultanen Modellierung mehrerer Risiken und skizzieren Sie Lösungsansätze, insbesondere den grundsätzlichen Aufbau von Gesamtunternehmensmodellen zur Risikoaggregation mittels Simulationstechniken.
9. Erläutern und vergleichen Sie das individuelle und das kollektive Modell der Risikoaggregation und insbesondere die Bedeutung von Faltungsformeln in diesem Zusammenhang. Welche (rechentechnischen) Schwierigkeiten treten dabei auf? Wie behilft man sich, wenn man keine geschlossene Form der Gesamtschadenverteilung angeben kann (Stichworte: Lageparameter; Approximationen)?

10. Erläutern Sie, weshalb die verallgemeinerte Extremwertverteilung und die verallgemeinerte Pareto-Verteilung in der Modellierung extremer Ereignisse eine zentrale Rolle spielen.
11. Erläutern Sie Besonderheiten der Risikoaggregation bei Finanzrisiken im Vergleich zu reinen Schadenrisiken. Unterscheiden Sie die Risikoaggregation über mehrere Zeitperioden und für mehrere Wertpapiere und gehen Sie insbesondere auf die Verteilung von Durchschnittsrenditen ein, d. h. Schätzung künftiger Durchschnittsrenditen als Zufallsvariablen bei Vorgabe von Verteilungsannahmen für die Einzel- bzw. Periodenrenditen.
12. Erläutern Sie den grundsätzlichen Aufbau sogenannter Risikomatrizen und gehen Sie auf Vor- und Nachteile dieser Methode zur Bewertung und Visualisierung der Gesamtrisikosituation von Unternehmen ein.

Risikoanalyse

Modellierung, Beurteilung und Management von Risiken
mit Praxisbeispielen

Cottin, C.; Döhler, S.

2013, XVIII, 456 S. 135 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-00829-1