

# 1 Verstehens- und strukturorientiertes Üben am Beispiel des Brüchespiels „Fang das Bild“

Susanne PREDIGER und Andrea SCHINK

## 1.1 Einleitung: Verstehensorientierte Mathematik umfasst mehr als Grundvorstellungen aufbauen

Damit Schülerinnen und Schüler die Mathematik nicht als bedeutungsloses Kalkül erleben, müssen sie tragfähige Grundvorstellungen aufbauen; diese Forderung wurde in den letzten Jahrzehnten nicht nur immer wieder formuliert und begründet (vgl. z. B. Borneleit u. a. 2001, S. 79), sondern auch zunehmend in der Unterrichtsrealität umgesetzt. Für den unterrichtlichen Umgang mit Brüchen heißt dies zum Beispiel, dass an der grundlegenden Vorstellung vom Bruch als Teil eines Ganzen intensiv gearbeitet wird und die Lernenden sehr vielfältige Bilder zu Brüchen zeichnen und Brüche zu Bildern suchen, bevor sie zum Rechnen übergehen (vgl. Malle 2004). Über diesen reinen Aufbau der elementaren Grundvorstellungen hinaus umfasst ein verständiger Umgang mit Brüchen jedoch mindestens vier weitere Komponenten:

### (1) *Elementare Grundvorstellungen wachhalten – auch in Phasen des Übens*

Nicht nur der Einstieg in ein Thema sollte verstehensorientiert sein, sondern alle Phasen des Unterrichts bis hin zur Klassenarbeit (vgl. Winter 1999; Prediger 2009): Wird nämlich der „Übergang zum Kalkül“ als Einbahnstraße ohne Umkehrmöglichkeit verstanden, werden Potentiale der permanenten Rückgriffe auf inhaltliche Vorstellungen zu wenig genutzt, zum Beispiel für inhaltliche Begründungen.

### (2) *Festigung tragfähiger Vorstellungen zu Operationen*

Nicht nur zum Bruchzahlbegriff an sich, sondern auch zu den Operationen mit Brüchen müssen tragfähige inhaltliche Vorstellungen aufgebaut und in Übungsphasen gefestigt werden. Malle nennt hier etwa die inhaltliche Deutung von  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$  als Anteil  $\frac{2}{3}$  von  $\frac{4}{5}$  oder vom Erweitern als Verfeinern eines Anteils (vgl. Malle 2004, S. 7). Diese werden nicht automatisch mit gelernt, wenn nur der Bruchzahlbegriff selbst verstehensorientiert erarbeitet wird.

(3) *Flexibles Umgehen mit Strukturierungen zwischen Teil, Anteil und Ganzem*

Das flexible Umgehen mit Strukturierungen zwischen Teil, Anteil und Ganzem, d. h. das Herstellen und Nutzen von Zusammenhängen zwischen diesen drei Komponenten als Dreiheit sollte beim Arbeiten mit Brüchen angestrebt werden (vgl. Schink 2013, S. 39ff.): So sind z. B.  $\frac{3}{4}$  (Anteil) von 12 Bonbons (Ganzes) genau 9 Bonbons (Teil); der Anteil kann aber auch durch  $\frac{9}{12}$  dargestellt werden. Der Teil zum Anteil  $\frac{3}{4}$  ist unterschiedlich groß, je nach dem Ganzen, auf das er sich bezieht. Wird das Ganze größer und der Teil bleibt gleich, so wird der Anteil kleiner. Einen Bruch versteht man also erst, wenn man alle drei Komponenten gemeinsam betrachtet.

(4) *Erfassen struktureller Beziehungen zwischen Aufgaben*

Die Erfassung struktureller Beziehungen zwischen Aufgaben sollte im Vordergrund stehen und nicht das Anwenden isolierter auswendig gelernter Verfahren (vgl. Schink 2013; Siebel und Wittmann 2012). Dies beginnt schon mit einfachen Beispielen: Wer  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$  schon berechnet hat, sollte es in Beziehung setzen können zu  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$ , entweder durch Abschätzen oder durch Multiplizieren.

Erst diese Komponenten gemeinsam kennzeichnen einen verständigen Umgang mit Brüchen, doch werden sie bisher in der Unterrichtspraxis nicht immer konsequent thematisiert, sondern eher implizit vorausgesetzt. Für ihre explizitere Behandlung haben wir ein Übungsspiel entwickelt und in seinen Wirkungen beforscht, das diese Komponenten aufgreift und im Folgenden exemplarisch für ein weiter gefasstes Verständnis von verstehens- und strukturorientiertem Üben diskutiert wird.

## 1.2 Grundideen des verstehens- und strukturorientierten Übungsspiels „Fang das Bild“

Übungsspiele sollen dazu dienen, bereits erarbeitete Lerninhalte (Vorstellungen, Begriffe, Fertigkeiten, ...) spielerisch zu vertiefen und zu festigen. Leuders plädiert auch bei dieser Methode für das Prinzip des produktiven Übens, in dem Aufgaben beziehungsreich, kognitiv aktivierend und mit strukturierten Beziehungen gestellt werden, statt isolierte Aufgaben abzuarbeiten (vgl. Leuders 2008, S. 2; ähnlich zuvor schon bei Wittmann und Müller 1990).

Das Übungsspiel „Fang das Bild“ ist ein Brettspiel für bis zu vier Personen. Es ist Teil einer Lernumgebung zum systematisierenden Abschluss der Bruchrechnung, die im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsprojekts Kosima entstanden ist (vgl. Glade u. a. 2014). Das Spiel adressiert sowohl Fertigkeiten im Operieren mit Brüchen als auch das Interpretieren der Operation und strukturierende Lesen von bildlichen Darstellungen und besteht damit aus zwei wesentlichen Übungsbereichen.

*Suchkarten* sind Karten, auf denen einzelne Brüche und Terme wie z. B. „ $1 - \frac{3}{4}$ “ stehen. Diese Ausdrücke gilt es, in den auf dem Spielfeld verdeckt liegenden *Bilder-*

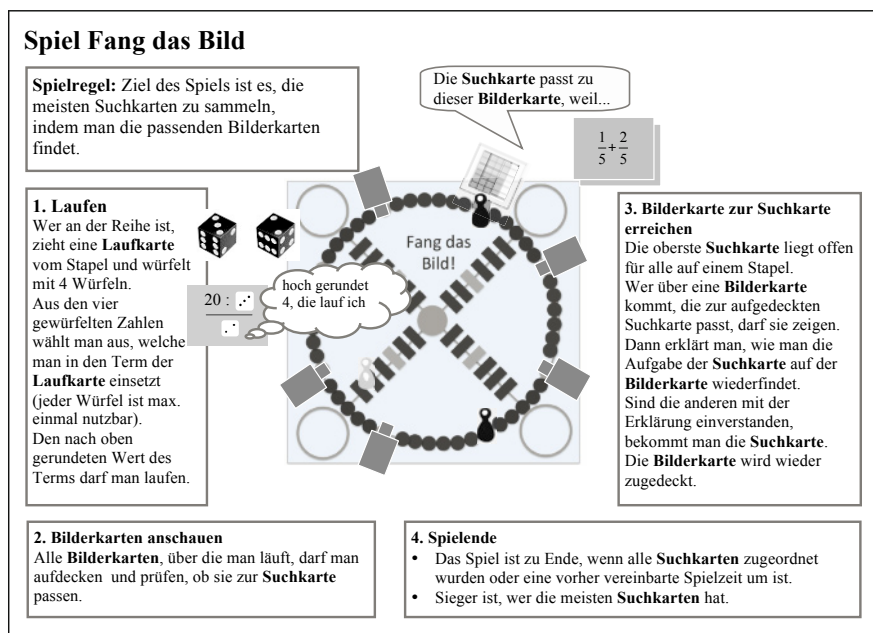


Abbildung 1.1. Das Übungsspiel „Fang das Bild“ (aus Mathewerkstatt 7, Copyright Cornelsen, Berlin)

karten interpretierend und strukturierend wieder zu finden: Jede Bilderkarte (wie in Abb. 1.2 links) besteht aus einem Rechteck mit horizontaler und vertikaler Einteilung („Kästchen“), von dem verschiedene Flächenanteile in zwei oder drei verschiedenen Farben gefärbt sind (hier hellgrau, weiß, dunkelgrau abgedruckt). Dabei wird die prinzipielle Mehrdeutigkeit von Bildern (vgl. Voigt 1990) explizit genutzt, denn die Nichteindeutigkeit der Zuordnung zwischen einzelnen Bilder- und Suchkarten macht die Suche nach Passungen erst kognitiv aktivierend. So kann in die in Abbildung 1.2 abgedruckte Bilderkarte etwa die Passung zur Suchkarte „ $1 - \frac{3}{4}$ “ hineingesehen werden, nämlich „der dunkelgraue Teil des dunkel- und hellgrauen Ganzen ist  $\frac{1}{4}$  des dunkel- und hellgrauen Ganzen“.

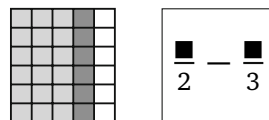


Abbildung 1.2. Beispiel für eine Bilderkarte (links) und Laufkarte (rechts)

Abbildung 1.1 zeigt, wie die 15 Suchkarten, 12 Bilderkarten und 40 Laufkarten auf dem Spielfeld angeordnet sind und verdeutlicht eine knappe Spielanleitung. Die Spielfiguren bewegen sich mittels der **Laufkarten** auf dem Spielfeld (vgl. Abb. 1.1) und versuchen, möglichst viele Suchkarten zu gewinnen: Auf den Laufkarten sind Brüche oder zweigliedrige Terme mit Brüchen und ganzen Zahlen abgebildet, in denen bis zu vier Platzhalter vorkommen (vgl. Abb. 1.2 rechts).

Die Terme enthalten unterschiedliche Operationen, und die Platzhalter stehen mal für Zähler oder Nenner, mal für ganze Zahlen und variieren ihren Platz im Term (vgl.

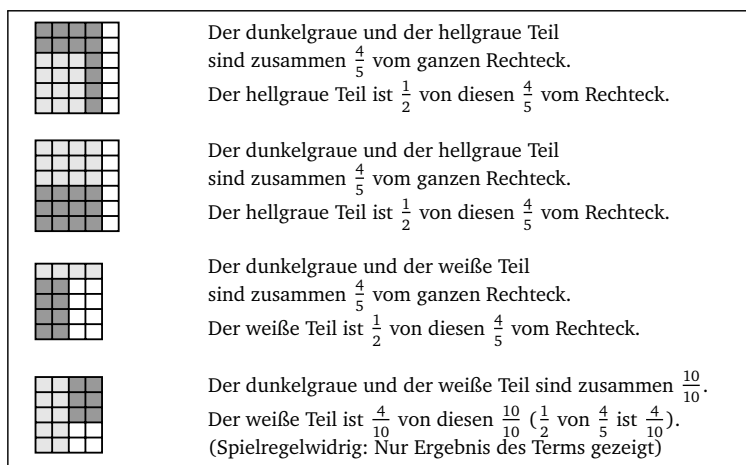


Abbildung 1.3. Vielfältige Realisierungen für „ $\frac{1}{2}$  von  $\frac{4}{5}$ “

Abb. 1.2 und Tabelle 1.2 hinten für weitere Beispiele). Ist ein Spieler an der Reihe, zieht er eine Laufkarte und würfelt mit vier Würfeln. Dann entscheidet er, welche der gewürfelten Zahlen er in welchen Platzhalter der Laufkarte einsetzen möchte. Der beim Einsetzen erhaltene Wert wird nach oben auf eine ganze Zahl gerundet und bestimmt, wie weit die Spielfigur über das Spielfeld ziehen darf.

Überquert eine Spielerin bei ihrem Zug Bilderkarten, so darf sie diese anschauen und versuchen, die Passung der aktuellen Suchkarte zu dieser Bilderkarte zu erklären. Wenn ihr das gelingt, darf sie die Suchkarte behalten; sonst ist der nächste Spieler an der Reihe. Das Spiel endet, wenn alle Suchkarten gefunden wurden bzw. nach einer vereinbarten Zeit. Sieger ist, wer die meisten Suchkarten hat.

Bezogen auf die oben aufgeführten vier Komponenten eines verständigen Umgangs mit Brüchen leisten die zwei Übungsbereiche des Spiels damit folgenden Beitrag (vgl. auch Abschnitt 1.3 für Einblicke in initiierte Bearbeitungsprozesse):

### Komponente 1: Elementare Grundvorstellungen wachhalten – auch in Phasen des Übens

Geübt wird mit den Laufkarten das Operieren mit Brüchen (Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren, Erweitern, Kürzen und Runden), jedoch nicht allein als Festigung des Kalküls, sondern verknüpft mit einem Wachhalten der elementaren Vorstellungen von Anteilen eines Ganzen (in den Rechteckbildern), relativen Anteilen (wenn Anteile von Kästchen abgezählt werden) sowie (durch das Runden der berechneten Werte auf den Laufkarten) mit einem Training von Größenvorstellungen für unechte Brüche.

### Komponente 2: Festigung tragfähiger Vorstellungen zu Operationen

Nicht nur die Brüche selbst, sondern auch die Operationen mit Brüchen sollen immer wieder inhaltlich gedeutet werden; dies erfolgt im Spiel durch die Darstellungsvernetzung zwischen der symbolischen Darstellung auf den Suchkarten und der graphischen Darstellung auf den Bilderkarten. Aktiviert werden dabei die inhaltlichen Vorstellungen vom Verfeinern oder Vergrößern für das Erweitern und Kürzen, vom Zusammen- oder Hinzufügen von Anteilen für das Addieren, Wegnehmen für das Subtrahieren, Schachteln von Anteilen für das Multiplizieren oder Ausmessen für das Dividieren (vgl. Malle 2004). Diese gedanklichen Operationen müssen in die Bilderkarten hineingesehen werden und haben jeweils mehrere Realisierungen, wie die Vielfalt der möglichen Bilderkarten für die Suchkarte „ $\frac{1}{2}$  von  $\frac{4}{5}$ “ in Abbildung 1.3 zeigt. Das letzte Beispiel widerspricht dabei allerdings der Spielregel, denn es ist zwar erlaubt, ein kleineres Ganzes innerhalb des Bildes zu suchen, jedoch reicht es nicht, nur das Ergebnis der Suchkarte zu finden, sondern auch die Ausgangsbrüche  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{4}{5}$  und ihre Beziehung, die hier durch die Operation „von“ ausgedrückt wird.

### Komponente 3: Flexibles Umgehen mit Strukturierungen zwischen Teil, Anteil und Ganzem

Die in den Bilderkarten angelegte prinzipielle Mehrdeutigkeit gibt Anlass dazu, sich über verschiedene Strukturierungen von Teil, Anteil und Ganzem auszutauschen und Zusammenhänge gezielt herzustellen.

So kann – ganz elementar – sowohl auf die Anzahl der einzelnen Kästchen geschaut werden, als auch in größeren Strukturen argumentiert werden, indem mehrere Kästchen z. B. zu Reihen oder Spalten zusammengefasst werden (vgl. Abb. 1.4 und Abschnitt 1.3.1).

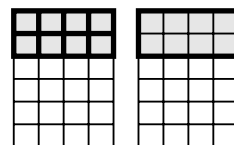


Abbildung 1.4.  $\frac{8}{24}$  und  $\frac{2}{6}$

Vielfältiger werden die Strukturierungen, wenn die Lernenden andere Ganze als das vollständige Rechteck entdecken und nutzen. Dies ist für die Identifizierung geschachtelter Anteile wie  $\frac{1}{2}$  von  $\frac{4}{5}$  (vgl. Abb. 1.3) konzeptuell notwendig, wird in der Literatur jedoch selten expliziert (empirische Belege in Schink 2013, S. 131ff.). Im Spiel kann diese Erfahrung „Das Ganze kann sich ändern, dann verändern sich auch die Anteile“, bereits für einfachere Anteile und Operationen gemacht werden, wie etwa für die Subtraktion (wie in Abb. 1.2 bzw. Abb. 1.5 für einfache Anteile). Dies ermöglicht eine Vorbereitung bzw. Unterfütterung für den konzeptuell anspruchsvollen Anteil vom Anteil sowie spätere Anforderungen in der Prozentrechnung (z. B. vermin- derter Grundwert).

Wie flexibel die Strukturierungsmöglichkeiten zwischen Teil, Anteil und Ganzem sind, zeigt die Vielfalt passender Terme zu einer Bilderkarte in Abbildung 1.5. Dass Lernen- de sich darüber hinaus noch weitere Freiheiten im Prozess nehmen, die nicht immer mathematisch tragfähig sind (vgl. Abschnitt 1.3.1), ist ein fruchtbarer Anlass für reichhaltige mathematische Diskussionen.

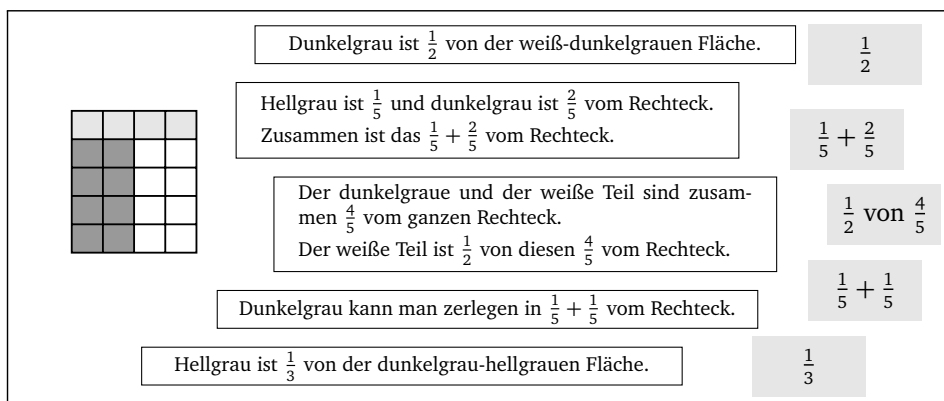


Abbildung 1.5. Ein Bild – viele mögliche tragfähige Strukturierungen

#### Komponente 4: Erfassen struktureller Beziehungen zwischen Aufgaben

Beim Erklären der Bilderkarten können auch Zusammenhänge zwischen Aufgaben festgestellt werden: So können etwa gleiche Aufgaben in verschiedenen Bildern entdeckt werden, aber auch gleiche Ergebnisse (als gefärbter Teil im Bild) zu verschiedenen Aufgaben gehören. In Abbildung 1.5 kann man z. B. einen Zusammenhang zwischen der Karte  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{2}$  von  $\frac{4}{5}$  herstellen, indem man in beiden Fällen das Ganze für  $\frac{1}{2}$  als das dunkelgrau-weiße Rechteck interpretiert. Der Unterschied in beiden Karten steckt darin, dass man im ersten Fall nur einen Teil des Rechtecks betrachtet, also ein kleineres Ganzes nutzt als im zweiten Fall, in dem der als Ergebnis erhaltene Anteil  $\frac{2}{5}$  sich im Gegensatz zum Anteil  $\frac{1}{2}$  wieder auf das gesamte Rechteck bezieht. Auch können bereits gelöste Aufgaben bzw. leichtere Aufgaben dazu herangezogen werden, weitere zu finden: Hat man z. B.  $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$  in einem Bild gut zeigen können, so ist die Chance groß, dass das auch für  $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$  klappt; dazu kann man die einmal gefundene Strukturierung z. B. in Streifen nutzen und nach einem weiteren Fünftel suchen.

Noch gezielter angeregt wird das Erfassen struktureller Beziehungen allerdings auf der Kalkülebene, und zwar durch die Optimierungsmöglichkeiten bei den Laufkarten: Die Optimierungsanforderung führt dazu, dass Lernende verschiedene Einsetzmöglichkeiten ausprobieren und vergleichen. Bei dieser *operativen Variation* der eingesetzten Zahlen untersuchen sie die Wirkungen auf das Ergebnis (vgl. Wittmann 1985) und stellen strukturelle Beziehungen zwischen den Termen her. So setzt Marvin in den Term „ $\frac{27}{\blacksquare}$ “ zunächst in beide Kästchen jeweils eine gewürfelte 1 ein und argumentiert dann zur Begründung: „Also wenn ich jetzt 27 geteilt durch 1 rechnen würde und da drunter ne 1 mach, dann hab ich ja  $\frac{27}{1}$  also 27 Ganze. Dann hätt ich doch 27 Schritte, oder? ... würd ich die 27 durch die 4 teilen und dann käm da ja weniger raus, als wenn ich jetzt die ganze 27 hab“ (vgl. Abschnitt 1.3.2).

Gerade solche operativen Variationen ermöglichen die Entwicklung eines Zahlenblicks, denn das Rechnen ist so nicht Selbstzweck, sondern trägt dazu bei „Zahlen und ihre Eigenschaften zu verstehen sowie algebraisches und funktionales Den-

ken anzubahnen“ (Siebel und Wittmann 2012, S. 2). Der Zahlenblick umfasst dabei auf kognitiver Ebene „*grundlegendes Wissen* über Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen“, „*tragfähige Vorstellungen* von Zahlen und Zahlbeziehungen“ und „*heuristische Strategien* zum adäquaten Lösen von Aufgaben“ (Siebel und Wittmann 2012, S. 4, Herv. im Original).

### 1.3 Einblicke in initiierte Lernprozesse

Ausgehend von dem spezifizierten theoretischen Potential des Übungsspiels zur Initiierung produktiver Übungsaktivitäten und Einsichten stellt sich nun die Frage, welche kognitiven Aktivitäten und Einsichten bei Schülerinnen und Schülern tatsächlich initiiert werden können. Zur Beforschung der individuellen Lernprozesse wurden im Rahmen des Kosima-Projekts (vgl. Hußmann u. a. 2011) Design-Experimente mit insgesamt 119 Schülerinnen und Schülern des siebten und achten Jahrgangs aus Realschulen, Gesamtschulen und Gymnasien durchgeführt (vgl. Cobb u. a. 2003 sowie Prediger und Link 2012 für methodologische Hintergründe von Design-Experimenten). Sie fanden im Rahmen von Master- und Examensarbeiten statt, überwiegend als Paarinterviews, in Ausnahmen als Einzelsituation. Alle Design-Experimente wurden videographiert, in Ausschnitten transkribiert und mit unterschiedlichen Fragestellungen qualitativ, kategorienentwickelnd ausgewertet.

Die Beforschung der Lernprozesse diene einerseits der Erweiterung empirisch abgesicherten Wissens über Hürden und Ressourcen von Lernenden beim Umgang mit Brüchen in verschiedenen Darstellungen, andererseits in einem iterativen Prozess von Forschung und Entwicklung der Weiterentwicklung des Designs (vgl. Prediger und Link 2012), bei dem Übungsspiel konkret der Ausschärfung der Lernpotentiale durch Weiterentwicklung des Zahlenmaterials, der Spielregeln und der notwendigen begleitenden Moderation. Die folgenden Abschnitte geben kurze Einblicke in die dabei rekonstruierten Lernprozesse, um das postulierte Potential zu belegen und die Heterogenität der Vorgehensweisen aufzuzeigen.

#### 1.3.1 Flexible individuelle Strukturierungen von Rechteckbildern – Wege zu konsolidierten Vorstellungen

In Bezug auf die Darstellungsvernetzungen von Bilder- und Suchkarten sind aus theoretischer Sicht gerade die Möglichkeiten flexibler Strukturierungen von Teil, Anteil und Ganzem interessant. Empirisch stellt sich die Frage, welche tragfähigen und nicht tragfähigen Strukturierungen der Bilder die Lernenden tatsächlich vornehmen, und wie sie diese zur Interpretation der Terme nutzen.

Diese Frage haben Sladek (2012) und Heptner (2012) für 37 Lernende untersucht und dabei in einem Prozess der qualitativen Datenanalyse unterschiedliche Kategorien herausgearbeitet, die in Tabelle 1.1 im Überblick zusammengestellt und vorsichtig quantifiziert sind.










Kategorie	Häufigkeit (in %)	Allgemeine Erklärung	Beispiele für erfolgreiche und nicht erfolgreiche Argumentation: zu prüfende Bild- und Suchkarte		individuelle Erläuterung
Strukturierungskategorien – Es wird in den vorhandenen Strukturen argumentiert					
Kästchen zählen	24%	Lernende zählen explizit im Rechteckbild die gesamten Kästchen oder einzelne Teile, um ein Ergebnis zu ermitteln.		$\frac{2}{3}$	Erfolgreiche Erläuterung (Mareike): „Weil es sind ... 6 × 4 Felder, macht 24. Und davon sind halt 16, die weiß sind, und das sind halt $\frac{2}{3}$ .“
				$\frac{3}{4}$	Nicht vollendete Strukturierung (Franzi): Es sind 6 dunkle, 2 helle und 16 weiße Kästchen.
Zeilen/Spalten zählen	18%	Lernende zählen explizit im Rechteck die Zeilen/Spalten, d.h. zerlegen auf spezifische Weise		$\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$	Erfolgreiche Erläuterung (Daniel): Die dunkle plus die helle Zeile zusammen entsprechen $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ .
				$\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$	Nicht erfolgreiche Gegenargumentation bei richtigem Bild (Daniel): Die Karte passt nicht. Es sind 5 Zeilen da, aber nur eine Zeile ist mit einer Farbe gefüllt.
Zerlegen in andere Teile	34%	Lernende zerlegen das Ganze in andere Teile als Zeilen und Spalten ohne ihr Vorgehen explizit zu erläutern.		$\frac{3}{4}$	Erfolgreich: [gleiche Bild- und Suchkarte wie vorige Zeile, nur mit richtiger Zuordnung]
				$\frac{3}{4}$	Nicht erfolgreiche Strukturierung (Franzi): Es sind keine $\frac{3}{4}$ , da keine 4 Teile vorhanden sind.
Restrukturierungskategorien – Es werden neue Strukturen innerhalb des Rechtecks geschaffen					
Konstruktion eines neuen Ganzen	16%	Lernende decken ganze Farben einer Bildkarte ab bzw. lassen sie weg. Dadurch ergibt sich ein neues Ganzes/eine neue Bezugsgröße für die Anteile.		$\frac{2}{3}$	Erfolgreiche Erläuterung (Annabell): „Wenn man blau [dunkelgrau] oder weiß abdeckt, dann bleiben einmal $\frac{1}{3}$ übrig oder das rote [hellgrau] $\frac{2}{3}$ .“
				$\frac{3}{4}$	Nicht passende Strukturierung (Thomas): Es sind $2\frac{1}{2}$ .
Konstruktion neuer Anteile	8%	Lernende strukturieren spielregelwidrig die Anteile um, z.B. durch Umfärben einzelner Kästchen		$\frac{3}{4}$	Spielregelwidrige erfolgreiche Strukturierung (Anita): „Das müssen 15 Kästchen sein ... also muss man nur ein Rotes [Hellgrau] wegstreichen.“ [Gemeint ist weiß färben.]

Tabelle 1.1. Kategorien individueller Strukturierungen – Beispiele/Häufigkeiten (nach Sladek 2012 und Heptner 2012)

Die sehr vielfältigen individuellen Strukturierungen lassen sich zwei Oberkategorien zuordnen: Bei den *Strukturierungskategorien* argumentieren Lernende in den vorgegebenen Strukturen der Bilderkarten ohne diese zu verändern: So wird etwa versucht, durch Zählen der Kästchen den gesuchten Anteil im Bild in einem oder mehreren der gefärbten Teile zu identifizieren (z. B.  $\frac{1}{5}$  von 25 Kästchen sind fünf Kästchen – wo findet man im Bild fünf Kästchen in einer Farbe?).

Bei den *Restrukturierungskategorien* dagegen verändern Lernende die gegebenen Teile, Anteile bzw. das Ganze, um die vorgegebenen Terme in die so neu entstehenden Strukturen wieder hineinzulesen: So werden z. B. ganze Teile des Rechtecks weggelassen und der übrig bleibende Teil als neues Ganzes für die Anteile im vorgegebenen Term uminterpretiert. Spielregelwidrig ist dagegen das Umfärben einzelner Kästchen wie von Anita vorgeschlagen.

Für alle fünf Kategorien gibt es mathematisch richtige und fehlerhafte Umsetzungen in den Lernprozessen, die letzte Kategorie der Konstruktion neuer Anteile verstößt allerdings gegen die Spielregel, denn hier werden Teile des Rechtecks neu eingefärbt, wie von Anita.

Insgesamt zeigt sich eine große Vielfalt an Strukturierungen und damit ein erster Beleg, dass die Aufgabenstellung flexibles Herstellen von Bezügen zwischen Teil, Anteil und Ganzem anregt. Allerdings hängt die Auswahl der Strukturierungen auch von dem Zusammenspiel der Aufgabe und den Bildkarten ab, denn manche Kombinationen von Karte und Aufgabe legen bestimmte Interpretationen von Strukturen näher als andere. Die Strukturierungen wurden daher als Konsequenz aus den Design-Experimenten weiter optimiert.

In Bezug auf das Potential zur kognitiven Aktivierung wird zudem deutlich, dass viele Lernende vorrangig schematische Strukturierungen vornehmen, nämlich durch Kästchen zählen oder Betrachtung der Zeilen und Spalten. Werden *keine Umstrukturierungen* vorgenommen, so wird das Ganze als das ganze Rechteck interpretiert und lediglich nach der Passung der Suchkarte zu diesem direkt vorgegebenen Ganzen und den von ihm markierten Teilen geschaut. So kann der dem jeweiligen Anteil entsprechende Teil etwa über den Bezug des Anteils auf die Gesamtanzahl an Kästchen des Rechtecks als Anzahl benötigter Kästchen berechnet werden. Die Passung der Suchkarte zum Bild ergibt sich dann über die Identifizierung der gefärbten Kästchen im Rechteck. Seltener sind dagegen *Restrukturierungen*, bei denen in dem bildlich unmittelbar gegebenen Ganzen neue Strukturen und Zusammenhänge hergestellt werden, die eine aktive Umdeutung der manifesten Strukturen erfordern; d. h. die neu interpretierten Strukturen „überlagern“ in gewisser Weise die durch das Rechteck (implizit) vorgegebene Lesart. Für die beiden Kategorien „Uminterpretation des Ganzen“ bzw. „Konstruktion neuer Anteile“ unterscheidet sich dabei die konkrete Ausgestaltung dieser Strukturierungsleistung: Die (spielregelgerechte) Uminterpretation des Ganzen bedeutet, dass auch die Zusammenhänge zwischen Teil und Anteil neu gedeutet werden müssen. Aus der Kenntnis des Anteils auf der Suchkarte muss ein Ausschnitt des Rechteckbildes als Teil interpretiert werden, zu dem das passende Ganze als Struktur im Bild neu gefunden werden muss. Bei der spielregelwidrigen Konstruktion neuer Anteile werden die im Bild erfassten strukturellen Zusammenhänge ebenfalls umgedeutet; hier werden jedoch durch das „Umfärben“ *neue Strukturen und Zusammenhänge zwischen völlig neuen Flächen* geschaffen, während bei der Variation des Ganzen lediglich *andere Zusammenhänge zwischen den gegebenen Strukturen* fokussiert werden (d. h. es werden Ausschnitte des Rechtecks betrachtet).

Für solche Restrukturierungen brauchen einige Lernende erst die explizite Anregung in der Interaktion, wie zum Beispiel Benni, der Annabells flexible Strukturierung des Bildes zu  $\frac{2}{3}$  zunächst nicht nachvollziehen kann, bis Annabell tatsächlich den ausgeschlossenen Rest mit einem Papier abdeckt (siehe Tabelle 1.1 und Heptner 2012, S. 30).

Insgesamt bestätigen diese Einblicke die potentielle Vielfalt individueller Strukturierungen im Zusammenhang mit Darstellungswechseln und gezielter Mehrdeutigkeit von Darstellungen. Damit auch die einzelnen Individuen diese Vielfalt aktivieren, sind zum Teil gezielte Impulse in der Interaktion notwendig.

1.3.2 Strategien zur Optimierung der Terme – Strukturorientierte Verknüpfungen

Die Laufkarten sollen die Lernenden anregen, beim Operieren mit Brüchen nicht nur Rechenanforderungen zu bewältigen, sondern auch strukturelle Beziehungen zwischen unterschiedlichen Aufgaben herstellen und nutzen zu lernen. Dabei sollen die Würfelergebnisse geschickt in Terme mit Platzhaltern eingesetzt werden, um möglichst weit laufen zu können. Zur Rekonstruktion der Ausschöpfung dieses Potentials ergibt sich die Forschungsfrage nach den konkreten Auswahl- und Bearbeitungsstrategien von Lernenden: Nach welchen Kriterien wählen Lernende überhaupt Zahlen aus? Wie äußern sich in diesen Strategien inhaltliche Vorstellungen der Lernenden zu den Wirkungen der Operationen? Wie entwickeln sich diese weiter und inwiefern kommt hierbei operativen Vorgehensweisen eine Bedeutung zu?

Term Nr.	Term-Karte und Würfel	Marvins individuelle Einsetzung und Erläuterung		Individuelle/s Optimierungsziel Z und -strategie S
I	$\frac{4}{\blacksquare} - \frac{2}{\blacksquare}$ 1, 5, 5, 6	$\frac{4}{5} - \frac{2}{5}$	„Ich glaub wenn man jetzt die beiden 5 nehmen würde, dann könnte man jetzt ja, dann könnte man einfach rechnen.“	Z: leichte Berechenbarkeit S: gleiche Nenner, egal wie groß
...				
III	$\frac{\blacksquare}{2} - \frac{\blacksquare}{\blacksquare}$ 1, 2, 5, 5	$\frac{5}{2} - \frac{1}{2}$	„hinten muss eine kleine Zahl sein“, damit nicht Null herauskommt.	Z: keine Null erhalten S: möglichst kleine Zahl subtrahieren
IV	$\frac{27 : \blacksquare}{\blacksquare}$ 1, 1, 4, 4	$\frac{27 : 1}{1}$	„Also wenn ich jetzt 27 geteilt durch 1 rechnen würde und da drunter ne 1 mach, dann hab ich ja $\frac{27}{1}$ also 27 Ganze. Dann hätt ich doch 27 Schritte, oder? ... würd ich die 27 durch die 4 teilen und dann käm da ja weniger raus, als wenn ich jetzt die ganze 27 hab.“	Z: Wert maximieren S: durch möglichst kleine Zahl dividieren
V	$\frac{1}{5} \cdot \frac{\blacksquare}{\blacksquare}$ 1, 3, 4, 4	$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{1}$	„Dann hätte man $\frac{4}{5}$ . Man könnte jetzt auch statt der 1 ne 4 reinsetzen, dann hätte man $\frac{4}{20}$ .“ [zur Begründung der ersten Einsetzung]	Z: Wert maximieren S: Multiplizieren mit möglichst großem 2. Faktor (durch Ausprobieren)
VI	$\frac{\blacksquare}{\blacksquare} \cdot \frac{2}{3}$ 3, 4, 4, 6	$\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{3}$	„Geteilt durch, also mit dem Kehbruch multiplizieren. Wär es doch eigentlich logisch, wenn ich hohe Zahlen nehmen würde.“	Z: Wert maximieren S: Dividieren eines möglichst großen Dividenten (Maximieren nicht gelungen)
...				
X	$\frac{\blacksquare}{\blacksquare} - \frac{1}{2}$ 1, 3, 5, 5	$\frac{5}{3} - \frac{1}{2}$ $\frac{5}{1} - \frac{1}{2}$	„Ich muss ja eigentlich ne hohe Zahl nehmen, weil wenn ich davon dann was abziehe, hab ich ja immer noch mehr, als wenn ich von ner niedrigen Zahl das selbe abziehe. Also $\frac{5}{5}$ wär das höchste schon mal, nein $\frac{5}{3}$ . ... [nach Intervention] Ich hab noch ne 1 und ne 5 sonst. Ahh, 5, das wären dann 5 Ganze.“	Z: Wert maximieren S: Subtrahieren von möglichst großem Minuend (gelingt nur durch Probieren)

Tabelle 1.2. Entwicklung von Marvins Optimierungsstrategien (Daten aus Otremba 2012)

Tabelle 1.2 zeigt exemplarisch den Lernweg des Siebtklässlers Marvin (Daten aus Otremba 2012), der zunächst danach optimiert, möglichst leichte Berechnungen zu erhalten. Da durch Abrunden im Term I Null herauskommt (später wurde die Spielregel auf „immer Aufrunden“ festgelegt), optimiert er in Term II und III danach, keine Null zu erhalten. Erst ab Term IV verfolgt er das Ziel, den Wert zu maximieren, was ihm zunehmend besser gelingt.

Bei den Optimierungsstrategien fällt auf, dass Marvin zwar operative Beziehungen für die Bruchoperationen erfolgreich aktivieren kann (zum Beispiel: eine Differenz wird größer, wenn der Subtrahend immer kleiner wird), gleichzeitig ist es für ihn bis zum Schluss herausfordernd, den größten Bruch zu finden, insbesondere wenn unechte Brüche zu beachten sind. So baut Marvin sukzessive seine operativen und strukturellen Beziehungsnetze zu Brüchen und Operationen mit Brüchen aus.

Das konkrete Beispiel zeigt damit exemplarisch das Potential dieses Spiels, im Prozess des Übens die Weiterentwicklung von Vorstellungen zur Wirkung von Operationen anzuregen. Gleichzeitig sensibilisiert es aber auch für die Komplexität und Vielfalt der Prozesse und Vorgehensweisen von Lernenden beim Operieren mit Brüchen. Grenzen zeigen sich mit dem dritten Einblick im folgenden Abschnitt:

### 1.3.3 Schwierigkeiten beim Rechnen – Wenn ein Übungsspiel nicht ausreicht

Ein Übungsspiel darf trotz der in ihm angelegten theoretischen Potentiale nicht als „Selbstläufer“ zum Sichern von Fertigkeiten überschätzt werden: Verfügen Lernende nicht ausreichend über die vom Spiel vorausgesetzten Kenntnisse zur (ggf. gegenseitigen) Überprüfung ihrer Fertigkeiten, so bedarf es gezielter Unterstützung und Moderation des Übeprozesses, damit Wissenslücken aufgegriffen und bearbeitet werden können und sich Fehler nicht verfestigen.

Für das Übungsspiel „Fang das Bild“ sind die Grundvorstellungen zu Brüchen und das Wissen um die Durchführung der Operationen wichtige Ressourcen, die aktiviert, vertieft und gefestigt werden sollen. Werden sie jedoch noch nicht ausreichend sicher beherrscht, so können Schülerinnen und Schüler mit dem Spiel allein ohne äußere Unterstützung und eine Kontrolle der Prozesse und Ergebnisse diese Lücke nicht schließen. Ein Beispiel für solche Schwierigkeiten wird in Tabelle 1.3 für den Interpretationsprozess der Suchkarte „ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ “ durch Larissa und Jonas (Klasse 8, Mathematikgrundkurs einer Gesamtschule) exemplarisch dargestellt. Die Daten entstammen einer Masterarbeit, die mit dem Ziel durchgeführt wurde, eben diese Entwicklung der Operationen im Zusammenspiel von Kalkül und inhaltlichen Vorstellungen genauer zu analysieren (vgl. Volkmer 2012).

Larissa und Jonas haben sowohl im Hinblick auf die technische Durchführung des Kalküls als auch die Interpretation der mathematischen Strukturen in den Bildern Schwierigkeiten und keine Ressourcen, sich gegenseitig zu korrigieren. Zwar können sie das von ihnen mit einer individuellen Rechenregel „(Zähler + Zähler) : (Nenner + Nenner)“ berechnete Ergebnis  $\frac{2}{6}$  im Bild nach einer anfänglichen Umdeutung von „ $\frac{1}{4}$ “


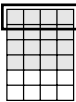
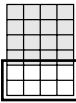

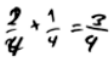
Zeile/ Akteur	Individuelle Deutungen und Erläuterungen von Larissa und Jonas	Gedeutete Struktur und Interpretation	Verstoß gegen fachliche Konstrukte: Inhalt (I), Kalkül (K)
5 L	„Das sind $\frac{2}{6}$ , ja! Weil man rechnet $1 + 1$ und $2 + 4$ .“	<b>Term:</b> Fehlmuster „Zähler plus Zähler durch Nenner plus Nenner“ 	I: Zähler und Nenner stellen zusammen eine Einheit dar. K: Anteile dürfen nicht komponentenweise addiert werden.
12 J	„Das sind doch $\frac{1}{4}$ , oder nicht, das sind doch immer vier Kästchen ...“	<b>Bild:</b> 	Fehlvorstellung Anzahl der Kästchen einer Zeile gibt den Nenner für den Anteil an ( $\frac{1}{4} = 4$ ). I: Anteile geben eine Beziehung zwischen Teil und Ganzem an.
17 L	„Das sind [L zählt mit den Fingern hell gefärbte Felder ab] zwei, vier, sechs, acht, 16 Kästchen. Das untere [L zeigt auf ungefärbtes Feld] sind acht Kästchen, das ist das $\frac{1}{3}$ .“ [D.h. das gesuchte $\frac{2}{6}$ .]	<b>Bild:</b> 	8 ist $\frac{1}{3}$ von 24. Also findet man die $\frac{2}{6}$ im Bild.
28 Int	Vielleicht hilft das, wenn ihr euch mal so ein Pizzamodell dazu aufmalt [L und J zeichnen je einen Kreis auf].		
30 L	Ja, eine halbe Pizza [L zeichnet Halbierung ein], oh, das sind $\frac{3}{4}$ . Weil eine halbe Pizza und eine viertel Pizza [L zeichnet einen zweiten Kreis und kennzeichnet $\frac{1}{4}$ . Dann überträgt sie das Viertel in den ersten Kreis] gleich $\frac{3}{4}$ Pizza, $\frac{3}{4}$ .	<b>Bild:</b> 	Das Viertel aus dem rechten Bild wird in das linke Bild übertragen. So sind beide Strukturen in einem Bild.
45 L	$\frac{3}{4}$ , weil der Nenner bleibt [L tippt mit dem Zeigefinger auf die Nenner].	<b>Bild:</b> 	Viertel als Einheit addieren sich über die Zähler und nicht die Nenner.

Tabelle 1.3. Larissas (L) und Jonas’ (J) Bearbeitung der Suchkarte  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$  (Daten aus Volkmer 2012)

als „vier Teile“ mathematisch korrekt als Struktur identifizieren, d. h. einen Darstellungswechsel vom Term zum Bild vornehmen. Ihren (für die Addition in der Literatur häufig dokumentierten) Rechenfehler, auf dem das Ergebnis  $\frac{2}{6}$  beruht, hätten sie jedoch vermutlich ohne die Intervention des Interviewers (Int), die sich an diese Szene anschließt, nicht entdecken und bearbeiten können.

Die Intervention bezieht sich auf die Aktivierung spontan abrufbarer mentaler Repräsentationen, in denen sich das hier durchgeführte Kalkül auch für die beiden Lernenden als fehlerhaft erweist: Im vom Interviewer vorgeschlagenen Pizza-Modell erkennen beide schnell, dass eine halbe Pizza und eine Viertelpizza zusammen eine  $\frac{3}{4}$  Pizza ergeben, d. h. in diesem Kontext gelingt es ihnen, die Aufgabe  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$  inhaltlich richtig zu deuten und das Ergebnis von der zuvor genutzten individuellen Rechenregel abzugrenzen.

Die Deutung der Aufgabe im konkreten Pizza-Kontext kann nun mit dem Fokus auf den gemeinsamen Nenner in einem weiteren Schritt genutzt werden, um die inhaltliche Deutung und das formale Kalkül wieder in Einklang zu bringen.

Ohne die Begleitung und Moderation des Prozesses durch die Lehrperson hätte das Übungsspiel für diese beiden Lernenden also nicht ausgereicht, den tragfähigen Umgang mit Brüchen zu sichern und zu vertiefen: Die mathematisch nicht tragfähige Interpretation hat sich hier nicht aus der Spielsituation heraus in einem kognitiven Konflikt manifestiert, da die beiden noch nicht konsequent Aufgabe und Bild aufeinander beziehen. Erst die Lehrperson regt durch den Darstellungswechsel die Fehlerkorrektur wirklich an. So ist ein Ergebnis dieses Einblicks die Sensibilisierung für die Stützung des Übeprozesses durch die Lehrperson bzw. durch ein spielimmanentes Hilfesystem.

## 1.4 Zusammenfassung und Ausblick für das Lehramtsstudium

In diesem Artikel wurde als Beispiel für ein verstehens- und strukturorientiertes Übungsspiel das Spiel „Fang das Bild“ vorgestellt. Im Hinblick auf die eingangs dargestellten Komponenten eines verständigen Umgangs mit Brüchen zeigt sich das Potential dieses Spiels, zu einem verstehensorientierten Üben beizutragen: Das operative Variieren der Zahlen in den Laufkarten, die Mehrdeutigkeit der Bilder und die Anforderung des Optimierens von Ergebnissen im Sinne eines produktiven Übens regen Lernende zu einem strukturorientierten Umgang mit Mathematik an. Die inhaltlichen Vorstellungen zu Brüchen und ihren Operationen, sowie strukturelle Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem (*Komponenten 1, 2 und 3*) werden dabei im Darstellungswechsel zwischen Bild und Term sowie in operativen Optimierungsanforderungen (*Komponente 4*) eingefordert und aktiviert. Damit leistet das Spiel einen Beitrag zum produktiven und vorstellungsorientierten Sichern der mathematischen Kompetenzen, wenn die Interaktionssituationen so gestaltet sind, dass die Fokussierung auf Fehlerkorrektur und Umstrukturierungen gelingt. Diese wichtige Rahmenbedingung ist in den Design-Experimenten deutlich geworden.

Die hier genutzten Prinzipien – operatives Variieren, gezielte Mehrdeutigkeit, Optimierung und produktives Üben – sind dabei allgemeinerer Natur und können als generelle Designprinzipien verstehensorientierter Übungsformate verstanden werden, die Lernenden Einblicke in strukturelle Zusammenhänge ermöglichen und ein tieferes Verständnis fördern können. Sie können auch in anderen mathematischen Inhaltsbereichen eingesetzt werden, um verstehensorientiert Fertigkeiten und Kenntnisse zu vertiefen. So regen z. B. Fragen zum operativen Variieren von Strukturen gezielt dazu an, Zusammenhänge zu erforschen. Gezielt angeregte Darstellungswechsel können wiederum die Flexibilisierung von Vorstellungen sowie die Vernetzung von Inhalt und Kalkül fördern.

Neben den Chancen für ein selbstständiges und verstehensorientiertes Üben, die ein Übungsspiel bietet, stellt es gleichzeitig aber auch Herausforderungen an die Gestaltung von Arbeitsprozessen. Das Fallbeispiel in Abschnitt 1.3.3 zeigt für das Spiel „Fang das Bild“, dass unter bestimmten Voraussetzungen ein Selbstlernen kein Selbstläufer ist, sondern dass es zum Teil der gezielten Moderation und Hilfestellung durch die Lehrperson im Prozess bedarf: Verfügen Lernende noch nicht ausreichend über die für das Übungsspiel notwendigen mathematischen Kenntnisse, um sich gegenseitig korrigieren zu können, schleifen sich schlimmstenfalls Fehler unbemerkt ein, und das Spiel kann seinem Zweck des Sicherns von Wissen und Fertigkeiten nicht gerecht werden. Hier bedarf es (verschiedener) geschickter Hilfestellungen unterschiedlicher Reichweite. Im Fall des Brüchspiels, aber auch in anderen Kontexten, bietet sich so etwa auch der Einsatz des Taschenrechners zur Selbstkontrolle an, um die berechneten Ergebnisse zu überprüfen und kognitive Konflikte zu erzeugen, die ein weiteres (auch moderiertes) Reflektieren anregen. In anderen Fällen ist eine Überwindung dieser Hürden und damit ein durch die Designprinzipien angestrebter Übungsprozess nur durch die geschickte und sensible Moderation weiterer Personen möglich, zum Beispiel leistungsstärkerer Mitlernender oder der Lehrperson.

Die skizzierten Fallbeispiele zeigen darüber hinaus ausblickartig, welche wichtige Rolle Design-Experimente im Lehramtsstudium spielen können als Form praxisnaher eigener Forschungserfahrungen von Studierenden in Lernprozessanalysen und Evaluationen zur iterativen Weiterentwicklung von Lehr-Lernarrangements (zu unterschiedlichen Themenbereichen, hier exemplarisch am Thema „Brüche“ dargestellt, und unter unterschiedlichen Fragestellungen sowohl zum Design als auch zu den Lehr- und Lernprozessen, hier am Beispiel verschiedener Masterarbeitsprojekte verdeutlicht). Diese Forschungserfahrungen in Bachelor-, Master- und Staatsarbeiten bewähren sich zu Ausbildungszwecken, weil sie künftige Lehrkräfte für die Tiefenstrukturen von Lernprozessen sensibilisieren und so einen erheblichen Beitrag zur Professionalisierung im Bereich fachdidaktisch fundierter Diagnose und Förderung leisten (vgl. Prediger 2010). Dies dokumentiert exemplarisch die abschließend abgedruckte Selbstreflexion aus einer Abschlussarbeit:

„Durch die intensive Auseinandersetzung mit den Lehr- Lernprozessen, wie sie im laufenden Unterricht kaum möglich zu sein scheint, konnte ich in vielfältiger und vorbereitender Weise erfahren, wie komplex die Lernprozesse Lernender sind und welch hohes Maß an Sensibilität ein adäquates Lehren erfordert. Die Momente des Erkenntnisgewinns über die Denkprozesse der Lernenden sowie über eigene effektive und auch verfehlte Entscheidungen, gehören zu den intensivsten im Verlauf meiner Arbeit.“ (Volkmer 2012, S. 45)

## Literatur

- [Borneleit u. a. 2001] BORNELEIT, Peter; DANCKWERTS, Rainer; HENN, Hans-Wolfgang; WEIGAND, Hans-Georg: Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 22 (2001), Nr. 1, S. 73–90.
- [Cobb u. a. 2003] COBB, Paul; CONFREY, Jere; DISESSA, Andrea; LEHRER, Richard; SCHAUBLE, Leona: Design experiments in educational research. In: *Educational Researcher* 32 (2003), Nr. 1, S. 9–13.
- [Glade u. a. 2014] GLADE, Matthias; PREDIGER, Susanne; SCHNEIDER, Claudia: Unser Zahlenlexikon – Zahlenwissen ordnen und vernetzen. Erscheint in: LEUDERS, Timo; PREDIGER, Susanne; BARZEL, Bärbel; HUSSMANN, Stephan (Hrsg.): *Mathewerkstatt 7*. Berlin: Cornelsen, 2014.
- [Heptner 2012] HEPTNER, Tim: *Darstellungswechsel bei Brüchen – Empirische Analysen von Strukturierungen und Begründungen von Lernenden*. Masterarbeit am IEEM Dortmund. Dortmund, 2012.
- [Hußmann u. a. 2011] HUSSMANN, Stephan; LEUDERS, Timo; PREDIGER, Susanne; BARZEL, Bärbel: Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (Kosima) – ein fachdidaktisches Forschungs- und Entwicklungsprojekt. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* (2011). S. 419–422.
- [Leuders 2008] LEUDERS, Timo: Gespielt – gelernt – gewonnen! Produktive Übungsspiele. In: *Praxis der Mathematik in der Schule* 50 (2008), Nr. 22, S. 1–7.
- [Malle 2004] MALLE, Günther: Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: *mathematik lehren* 123 (2004), S. 4–8.
- [Otremba 2012] OTREMBA, Dennis: *Verständiges Rechnen mit Brüchen – Individuelle Optimierungsstrategien von Siebtklässlern*. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Grund-, Haupt- und Realschulen am IEEM Dortmund. Dortmund, 2012.
- [Prediger 2009] PREDIGER, Susanne: Verstehen durch Vorstellen. Inhaltliches Denken von der Begriffsbildung bis zur Klassenarbeit und darüber hinaus. In: LEUDERS, Timo; HEFENDEHL-HEBEKER, Lisa; WEIGAND, Hans-Georg (Hrsg.): *Mathemagische Momente*. Berlin: Cornelsen, 2009, S. 166–175.
- [Prediger 2010] PREDIGER, Susanne: How to Develop Mathematics for Teaching and for Understanding. The Case of Meanings of the Equal Sign. In: *Journal of Mathematics Teacher Education* 13 (2010), Nr. 1, S. 73–93.
- [Prediger und Link 2012] PREDIGER, Susanne; LINK, Michael: Fachdidaktische Entwicklungsforschung – Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. In: BAYRHUBER, Horst; HARMS, Ute; MUSZYNSKI, Bernhard; RALLE, Bernd; ROTHGANGEL, Martin; SCHÖN, Lutz-Helmut; VOLLMER, Helmut J.; WEIGAND, Hans-Georg (Hrsg.): *Formate Fachdidaktischer Forschung. Empirische Projekte – historische Analysen – theoretische Grundlegungen. Fachdidaktische Forschungen*. Bd. 2. Münster u. a.: Waxmann, 2012, S. 29–46.
- [Schink 2013] SCHINK, Andrea: *Flexibler Umgang mit Brüchen – Empirische Erhebung individueller Strukturierungen zu Teil, Anteil und Ganzem*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013.

- [Siebel und Wittmann 2012] SIEBEL, Franziska; WITTMANN, Gerald: Mehr als Rechnen. Über den Zahlenblick zu funktionalem und algebraischem Denken. Band 1. In: *mathematik lehren* 171 (2012), S. 2–8.
- [Sladek 2012] SLADEK, Thomas: *Darstellungswechsel bei Brüchen – Empirische Analysen von Strukturierungen von Lernenden*. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen am IEEM Dortmund. Dortmund, 2012.
- [Voigt 1990] VOIGT, Jörg: Mehrdeutigkeit als wesentliches Moment der Unterrichtskultur. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* (1990). S. 305–308.
- [Volkmer 2012] VOLKMER, Maximilian: *Fallstudie zur Weiterentwicklung von Rechenwegen bei der Bruchrechnung im Zusammenspiel von inhaltlichem Denken und Kalkül*. Masterarbeit am IEEM Dortmund. Dortmund, 2012.
- [Winter 1999] WINTER, Heinrich: *Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung*. Manuskript. <http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/37/bruchrechnung.pdf>. Stand: 02. Januar 2013.
- [Wittmann 1985] WITTMANN, Erich C.: Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In: *mathematik lehren* 11 (1985), S. 7–11.
- [Wittmann und Müller 1990] WITTMANN, Erich C.; MÜLLER, Gerhard N.: *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Bd. 1. Stuttgart: Klett, 1990.

<http://www.springer.com/978-3-658-00991-5>

Mathematik verständlich unterrichten

Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung

Allmendinger, H.; Lengnink, K.; Vohns, A.; Wickel, G.

(Hrsg.)

2013, VIII, 274 S. 78 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-00991-5