

1 Permutationen und Kombinationen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Auswahl von Teilmengen von endlichen Mengen, dabei insbesondere mit der Frage, wie viele Möglichkeiten es prinzipiell gibt, solche Auswahlen zu treffen. Dabei unterscheiden wir bei der Auswahl, ob Elemente nur einmal oder wiederholt ausgewählt werden können und ob die Reihenfolge der Auswahl eine Rolle spielt.

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

Lernziele

- Permutationen mit und ohne Wiederholung kennen und wissen, wie deren Anzahl bestimmt wird,
- Darstellungsmethoden für Permutationen kennen und anwenden können,
- die Stirlingzahlen erster Art und Beispiele für deren Verwendung erklären können,
- Kombinationen mit und ohne Wiederholung kennen und wissen, wie deren Anzahl bestimmt wird,
- die Multinomialkoeffizienten und einige ihrer elementaren Eigenschaften kennen, herleiten und anwenden können.

1.1 Permutationen

Die Anordnung der Elemente bei einer aufzählenden Darstellung einer endlichen Menge ist unerheblich. Es gilt z.B. $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$. Falls die Anordnung eine Rolle spielt, dann wollen wir nicht von Mengen, sondern von Folgen sprechen. Die Folge $\langle 1, 2, 3 \rangle$ besteht aus den Zahlen 1, 2 und 3 in dieser Reihenfolge und ist verschieden von der Folge $\langle 3, 1, 2 \rangle$, die aus den Zahlen 3, 1 und 2 in dieser Reihenfolge besteht. In Folgen können Elemente auch mehrfach vorkommen: So ist $\langle 1, 2, 2, 1, 3, 1 \rangle$ eine Folge, verschieden von der Folge $\langle 1, 1, 1, 2, 2, 3 \rangle$. Allgemein wollen wir endliche Folgen $\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$, $k \geq 0$, betrachten, wobei die x_i Elemente irgendeiner n -elementigen Menge M sein sollen: $x_i \in M$, $1 \leq i \leq k$, $|M| = n$. Für $k = 0$ ist die Folge leer: $\langle \rangle$.

Der Einfachheit halber werden wir eine Menge $M = \{1, \dots, n\}$ auch einfach als $M = [1, n]$ notieren oder allgemeiner für $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $a \leq b$ anstelle von $M = \{i \in \mathbb{N}_0 \mid a \leq i \leq b\}$ auch $M = [a, b]$ schreiben.

1.1.1 Permutationen ohne Wiederholung

Wir betrachten zunächst die Auswahl von Folgen aus einer endlichen Menge, in der jeweils ein Element höchstens einmal vorkommen darf.

**k-Permu-
tation ohne
Wiederholung**

Definition 1.1 Sei $M = [1, n]$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$. Eine k -Permutation von M ist eine Folge $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ mit $x_i \in M$ und $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, mit $1 \leq i, j \leq k$. Wir wollen mit $P(n, k)$ die Anzahl der k -Permutationen bezeichnen, die aus einer n -elementigen Menge gebildet werden können. $\square$

Eine k -Permutation von M entspricht einer geordneten Ziehung von k Elementen aus M ohne Zurücklegen: Die Reihenfolge der Auswahl ist von Bedeutung, und ein einmal ausgewähltes Element kann nicht noch einmal ausgewählt werden.

Beispiel 1.1 Es sei $M = [1, 3]$. Die einzige 0-Permutation ist die leere Folge. Es gilt also: $P(3, 0) = 1$. Im Übrigen gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$: $P(n, 0) = 1$. Die 1-Permutationen von M sind: $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle$ und $\langle 3 \rangle$. Es gilt also: $P(3, 1) = 3$. Im Übrigen gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$: $P(n, 1) = n$. Die 2-Permutationen von M sind: $\langle 1, 2 \rangle$, $\langle 1, 3 \rangle$, $\langle 2, 1 \rangle$, $\langle 2, 3 \rangle$, $\langle 3, 1 \rangle$ und $\langle 3, 2 \rangle$. Es ist also: $P(3, 2) = 6$. Die 3-Permutationen von M sind: $\langle 1, 2, 3 \rangle$, $\langle 1, 3, 2 \rangle$, $\langle 2, 1, 3 \rangle$, $\langle 2, 3, 1 \rangle$, $\langle 3, 1, 2 \rangle$ und $\langle 3, 2, 1 \rangle$. Es ist also: $P(3, 3) = 6$. $\square$

Satz 1.1 Sei $M = [1, n]$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$, dann gilt¹

$$\begin{aligned} P(n, k) &= n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) \\ &= \prod_{i=n-k+1}^n i = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Beweis Sei $\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$ eine k -Permutation von M . Da alle x_i , $1 \leq i \leq k$, verschieden sind, gilt: Es gibt n Möglichkeiten, x_1 aus M auszuwählen, danach gibt es $(n-1)$ Möglichkeiten, x_2 aus M auszuwählen, usw. Allgemein gibt es $(n-i+1)$ Möglichkeiten x_i auszuwählen für $1 \leq i \leq k$. $\square$

**Fallende
Faktorielle**

Das Produkt

$$\begin{aligned} n^{\underline{k}} &= (n-0)(n-1)(n-2) \dots (n-(k-1)) \\ &= n(n-1)(n-1) \dots (n-k+1) \end{aligned} \quad (1.2)$$

nennt man die *fallende Faktorielle von n* und spricht „ n hoch k fallend“. Man setzt $n^{\underline{0}} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$\begin{aligned} n^{\underline{n}} &= n! \\ &= n^{\underline{k}} \cdot (n-k)^{\underline{n-k}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

¹ Zur Definition und Eigenschaften des Produktsymbols $\prod$ siehe Anhang.

sowie

$$P(n, k) = n^{\overline{k}} \quad (1.4)$$

Entsprechend nennt man das Produkt

$$\begin{aligned} n^{\overline{k}} &= (n+0)(n+1)(n+2) \dots (n+(k-1)) \\ &= n(n+1)(n+2) \dots (n+k-1) \end{aligned} \quad (1.5)$$

die *steigende Faktorielle* von n und spricht „ n hoch k steigend“. Man setzt $n^{\overline{0}} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

**Steigende
Faktorielle**

$$n^{\overline{n}} = n^{\overline{k}} \cdot (n+k)^{\overline{n-k}} \quad (1.6)$$

Fallende und steigende Faktorielle spielen eine wichtige Rolle in der diskreten Mathematik, darauf werden wir an einigen Stellen des Buches noch zurückkommen. In der Literatur findet man für die fallende Faktorielle $n^{\underline{k}}$ auch die Notation $(n)_k$ sowie für die steigende Faktorielle $n^{\overline{k}}$ auch die Notation $(n)^{\overline{k}}$.

Ein Spezialfall von Permutationen einer n -elementigen Menge sind die n -Permutationen. Aus obigem Satz und (1.3) folgt:

Folgerung 1.1 Es gilt

$$P(n, n) = n^{\overline{n}} = n!$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. □

Jede n -Permutation $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ einer Menge M mit n Elementen kann als eine bijektive Abbildung von M auf sich selbst betrachtet werden. Deshalb gilt

Folgerung 1.2 Sei M eine Menge mit $|M| = n$. Dann ist

$$|\{ \pi \mid \pi : M \rightarrow M, \pi \text{ bijektiv} \}| = n!$$

d.h. die Anzahl der möglichen bijektiven Abbildungen einer n -elementigen Menge auf sich ist $n!$. □



Übungsaufgaben

1.1 Beweisen Sie Folgerung 1.2! □

Die Fakultätsfunktion $n!$ ist eine sehr stark wachsende Funktion. Eine Vorstellung ihres Wachstumsverhalten erhält man mithilfe der *Stirling-Formel*

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

wobei $e = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = 2.718 \dots$ die *Euler-Zahl* ist.

**Stirling-
Formel
Euler-Zahl**

Eine Variante von Permutationen ohne Wiederholung ist, wenn die Menge $M = [1, n]$ partitioniert wird in k Teilmengen (Äquivalenzklassen, siehe Anhang) M_i , $1 \leq i \leq k$. Es gilt also:

$$M = \bigcup_{i=1}^k M_i \text{ mit } M_i \cap M_j = \emptyset, i \neq j, 1 \leq i, j \leq k$$

und damit

$$n = \sum_{i=1}^k n_i, \text{ mit } n_i = |M_i|, 1 \leq i \leq k$$

Beispiel 1.2 Wie viele verschiedene Buchstabenkombinationen der Länge 11 lassen sich aus den Buchstaben des Wortes *MISSISSIPPI* bilden? Wir fassen alle 11 Buchstaben in einer Multimenge zusammen:

$$M = \{I, I, I, I, M, P, P, S, S, S, S\}$$

Diese partitionieren wir in vier Teilmengen, die jeweils die wiederholt vorkommenden Buchstaben enthalten.

$$M_1 = \{I, I, I, I\}, M_2 = \{S, S, S, S\}, M_3 = \{P, P\}, M_4 = \{M\} \quad \square$$

Die Anzahl verschiedener Buchstabenkombinationen der Länge n , in der jeder Buchstabe höchstens einmal vorkommen darf, ist $P(n, n) = n!$, in unserem Fall also $11!$. Gibt es nun n_i Exemplare für einen Buchstaben a_i , so gibt es $P(n_i, n_i) = n_i!$ mögliche Reihenfolgen (Permutationen ohne Wiederholung) diese auszuwählen. Für eine Buchstabenkombination der Länge n ist es aber unerheblich, in welcher Reihenfolge die n_i Exemplare des Buchstabens a_i gewählt werden, sie ändert sich dadurch nicht. Diese Überlegungen führen zum

Satz 1.2 Die Anzahl $P(n; n_1, n_2, \dots, n_k)$ von Permutationen von n Elementen, von denen jeweils $n_1, n_2, \dots, n_k$, $1 \leq k \leq n$, ununterscheidbar sind, so dass $\sum_{i=1}^k n_i = n$ ist, ist

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k (n_i!)} \quad \square$$

Beispiel 1.3 (Forts. Beispiel 1.2) Aus den Buchstaben des Wortes *MISSISSIPPI* lassen sich also

$$P(11; 4, 4, 2, 1) = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = 34\,650$$

verschiedene Buchstabenkombinationen der Länge 11 bilden. $\square$

Im Abschnitt 1.3.2 werden wir die Zahlen $P(n; n_1, n_2, \dots, n_k)$ noch aus einem anderen Zusammenhang herleiten.

1.1.2 Stirlingzahlen erster Art

n -Permutation einer Menge $M = [1, n]$, d.h. Bijektionen π von M auf sich, können wie folgt veranschaulicht werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(n-1) & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Ein Element i mit der Eigenschaft $\pi(i) = i$ heißt *Fixpunkt* von π . Wir betrachten als Beispiel die folgende 10-Permutation:

**Fixpunkt
einer
Permutation**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 1 & 10 & 9 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

3 ist ein Fixpunkt dieser Permutation.

Wenn man eine Permutation π mehrmals hintereinander auf ein Element anwendet, entstehen Zyklen. Es gilt z.B.

$$\pi(\pi(\pi(\pi(1)))) = \pi(\pi(\pi(5))) = \pi(\pi(2)) = \pi(8) = 1$$

Die Elemente 1, 5, 2, 8 bilden also einen Zyklus. Dies notieren wir mit

$$(1 \ 5 \ 2 \ 8)$$

Dieser Zyklus enthält vier Elemente, man spricht von einem Zyklus der Länge vier.

Fixpunkte sind Zyklen der Länge eins.



Übungsaufgaben

1.2 Bestimmen Sie die weiteren Zyklen von π sowie deren Längen! $\square$

Definition 1.2 Sei π eine n -Permutation der Menge $M = [1, n]$. Gilt für $i_1, i_2, \dots, i_\ell \in M$: $\pi(i_j) = i_{j+1}$ für $1 \leq j \leq \ell - 1$ und $\pi(i_\ell) = i_1$, dann heißt $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_\ell)$ ein *Zyklus der Länge ℓ* von π . $\square$

**Zyklus einer
Permutation**

Wir können nun jede n -Permutation als „Produkt“ von Zyklen schreiben. So wird z.B. unsere Beispiel-Permutation eindeutig durch

$$\pi = (1 \ 5 \ 2 \ 8) (3) (4 \ 6 \ 7) (9 \ 10)$$

beschrieben.

Dabei kommt es nicht auf die Reihenfolge an, in der die Zyklen aufgeführt werden, und innerhalb eines Zyklus können die Elemente zyklisch nach rechts oder links verschoben werden. So kann die Beispiel-Permutation auch als

$$\pi = (6 \ 7 \ 4) (2 \ 8 \ 1 \ 5) (10 \ 9) (3)$$

geschrieben werden, während die Darstellung

$$(2 \ 5 \ 1 \ 8) (3) (4 \ 6 \ 7) (9 \ 10)$$

nicht korrekt ist. Es ist unmittelbar einsichtig, dass jeder Zyklus der Länge ℓ auf ℓ Arten dargestellt werden kann, da es genau ℓ verschiedene Verschiebungen um eine Position gibt.

Wir wollen nun untersuchen, wie viele n -Permutationen es mit k Zyklen gibt. Wir nennen diese Anzahl $s_{n,k}$, eine andere in der Literatur gebräuchliche

**Stirlingzahlen
erster Art**

Notation ist $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. Diese Zahlen heißen *Stirlingzahlen erster Art*.



Übungsaufgaben

1.3 Überlegen Sie, wie groß $s_{n,1}$ sowie $s_{n,n}$ sind! $\square$

Wir betrachten zunächst noch vier weitere Spezialfälle und geben dann nach einem Beispiel eine allgemeine Formel für die Berechnung von $s_{n,k}$ an. Die vier Fälle sind:

- (1) Für $k > n$ gilt $s_{n,k} = 0$, denn eine n -Permutation kann höchstens n Zyklen haben.
- (2) Für $n > 0$ gilt $s_{n,0} = 0$, denn da $n \neq 0$ ist, müssen die Elemente in mindestens einem Zyklus liegen.
- (3) Für $n = 0$ wird $s_{0,0} = 1$ gesetzt.
- (4) Für $k < 0$ wird $s_{n,k} = 0$ für alle $n \geq 0$ gesetzt.

Beispiel 1.4 Geben Sie alle 4-Permutationen mit 3 Zyklen an!

Man kann diese Permutationen bestimmen, indem man sie in zwei Klassen einteilt. In der ersten Klasse betrachten wir alle Permutationen, bei denen das Element 4 alleine einen Zykel bildet:

$$(1)(2\ 3)(4) \quad (1\ 2)(3)(4) \quad (1\ 3)(2)(4) \quad (1.8)$$

In der zweiten Klasse sind die Permutationen, in denen das Element 4 zu jeweils einem der 3 Zyklen der restlichen Elemente hinzugefügt wird:

$$(1\ 4)(2)(3) \quad (1)(2\ 4)(3) \quad (1)(2)(3\ 4) \quad (1.9)$$

Die Anzahl der 4-Permutationen mit 3 Zyklen ist also $s_{4,3} = 6$. $\square$

Die Idee, die Permutationen in diese beiden Klassen einzuteilen, ist die Grundlage für den Beweis des folgenden Satzes.

Satz 1.3 Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k \geq 1$ gilt

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k} \quad (1.10)$$

bzw. mit der anderen Notation

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

Beweis Um die Anzahl der n -Permutationen mit k Zyklen zu bestimmen, teilen wir diese in zwei Klassen ein. In der einen Klasse sind alle $n-1$ -Permutationen mit $k-1$ Zyklen, zu denen jeweils der Zyklus (n) hinzugefügt wird. Die Anzahl der so entstehenden n -Permutationen mit k Zyklen ist deshalb gleich $s_{n-1,k-1}$. Zur anderen Klasse gehören alle $n-1$ -Permutationen mit k Zyklen, in denen das Element n jeweils zu einem Zyklus hinzugefügt wird. Da bei den Zyklen die Reihenfolge wichtig ist, gibt es für jede der Permutationen $n-1$ Möglichkeiten, das Element n hinzuzufügen. Diese Klasse enthält somit $(n-1) \cdot s_{n-1,k}$ Elemente. Da die beiden Klassen disjunkt sind, folgt die behauptete Formel. $\square$



Übungsaufgaben

- 1.4 Vollziehen Sie noch einmal nach, dass die kombinatorischen Überlegungen im Beweis im Beispiel 1.4 konkret angewendet werden: Die Permutationen in der Zeile (1.8) bilden die erste Klasse, und die Permutationen in der Zeile (1.9) bilden die Permutationen der zweiten Klasse. $\square$

**Stirling-
Dreieck
erster Art**

Die Stirlingzahlen erster Art bilden das sogenannte *Stirling-Dreieck erster Art*:

					1						
					0		1				
				0		1		1			
		0		0	2		3		1		
	0		6		11		6		1		
0		24		50		35		10	1		
	0	120		274		225		85		15	1
						...					

Dabei denken wir uns die Zeilen des Dreiecks von oben nach unten mit $n = 0, 1, 2, \dots$ und die Einträge in jeder Zeile mit $k = 0, 1, 2, \dots, n$ durchnummeriert. Die Formel (1.10) spiegelt dann wider, dass sich der Wert an der k -ten Stelle in der Zeile n ergibt, indem man in der Zeile darüber den Wert links davon mit dem $(n-1)$ -fachen des Wertes rechts davon addiert. So ergibt sich z.B. der Wert 35 an der dritten Stelle in der Zeile 5, also $s_{5,3}$, indem man den Wert $s_{4,2} = 11$ links darüber mit dem $5-1 = 4$ -fachen des Wertes $s_{4,3} = 6$ rechts darüber addiert: $35 = 11 + 4 \cdot 6$.



Übungsaufgaben

1.5 (1) Berechnen Sie $s_{5,4}$ und bestimmen Sie alle 5-Partitionen mit 4 Zyklen, indem Sie wie im Beweis von Satz 1.3 die beiden Klassen angeben!

(2) Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$

$$s_{n,n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$$

gilt!

(3) Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$

$$s_{n,1} = (n-1)!$$

gilt!

(4) Zeigen Sie, dass für $n \geq 0$

$$n! = \sum_{k=0}^n s_{n,k}$$

gilt!

□

1.1.3 Typ einer Permutation

Definition 1.3 Sei π eine Permutation von $M = [1, n]$, $b_\ell(\pi)$ die Anzahl der Zyklen von π mit der Länge ℓ , und $b(\pi)$ sei die Anzahl der Zyklen von π . Dann heißt

$$1^{b_1(\pi)} 2^{b_2(\pi)} \dots n^{b_n(\pi)}$$

der Typ von π .²

Beispiel 1.5 Der Typ der Permutation (1.7) ist $1^1 2^1 3^1 4^1 5^0 6^0 7^0 8^0 9^0 10^0$. Alle Permutationen im Beispiel 1.4 haben den Typ $1^2 2^1 3^0 4^0$.

Aus der Definition folgt unmittelbar

Folgerung 1.3 Es sei π eine Permutation von $M = [1, n]$. Dann gilt

a) $\sum_{\ell=1}^n \ell \cdot b_\ell(\pi) = n,$

b) $\sum_{\ell=1}^n b_\ell(\pi) = b(\pi),$

c) $b_n(\pi) \leq 1.$

Satz 1.4 Die Anzahl der Permutationen der Menge $M = [1, n]$ vom Typ $1^{b_1} 2^{b_2} \dots n^{b_n}$ ist gleich

$$\frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \dots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \dots \cdot n^{b_n}} \quad (1.11)$$

Beweis Eine Permutation π vom Typ $1^{b_1(\pi)} 2^{b_2(\pi)} \dots n^{b_n(\pi)}$ hat folgende schematische Gestalt, wenn wir die Zyklen der Größe nach von links nach rechts ordnen:

$$\underbrace{(x)(x) \dots (x)}_{b_1} \underbrace{(xx)(xx) \dots (xx)}_{b_2} \dots \underbrace{(xx \dots x)}_{b_n}$$

Es gibt insgesamt n „freie“ Plätze x , die mit Elementen von M belegt werden können. Dafür gibt es $n!$ viele Möglichkeiten. Wie wir bereits im vorigen Abschnitt überlegt haben, ist die Zyklen-Darstellung einer Permutation einerseits unabhängig von der Reihenfolge der Zyklen und andererseits unabhängig von einer zyklischen Verschiebung innerhalb der Zyklen. Wir wollen zwei Permutationen äquivalent nennen, wenn sie sich nur in der Vertauschung von Zyklen gleicher Länge und durch zyklische Verschiebung ihrer Elemente unterscheiden. Für einen Zyklus der Länge ℓ gibt es $b_\ell!$ mögliche Reihenfolgen, und ein Zyklus der Länge ℓ kann ℓ -mal zyklisch verschoben werden. Für jeden Zyklus der Länge ℓ gibt es also genau $b_\ell! \cdot \ell^{b_\ell}$ verschiedene Anordnungen innerhalb einer Äquivalenzklasse. Die Anzahl der

² Der Ausdruck $1^{b_1(\pi)} 2^{b_2(\pi)} \dots n^{b_n(\pi)}$ ist nicht als Produkt von Potenzen $i^{b_i(\pi)}$, $1 \leq i \leq n$, zu verstehen, sondern als formale Notation für den Typ der Permutation π .

Elemente einer Äquivalenzklasse einer Permutation vom Typ $1^{b_1} 2^{b_2} \dots n^{b_n}$ ist also gleich

$$\frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \dots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \dots \cdot n^{b_n}}$$

was zu zeigen war. $\square$

Folgerung 1.4 a) Für k -Permutationen der Menge $M = [1, n]$ gilt:

$$s_{n,k} = \sum_{\substack{(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ \sum b_\ell = k \\ \sum \ell \cdot b_\ell = n}} \frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \dots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \dots \cdot n^{b_n}}$$

b) Des Weiteren gilt:

$$n! = \sum_{\substack{(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ \sum \ell \cdot b_\ell = n}} \frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \dots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \dots \cdot n^{b_n}}$$

Beweis a) Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Satz 1.4, wenn man berücksichtigt, dass jetzt nur die Permutationen mit k Zyklen betrachtet werden.

b) Aus Übung 1.5 (4) wissen wir, dass $n! = \sum_{k=0}^n s_{n,k}$ gilt. Hieraus folgt mit a) unmittelbar die Behauptung. $\square$

Beispiel 1.6 Wir berechnen $s_{6,2}$ mithilfe von Folgerung 1.4: Für 6-Permutationen mit 2 Zyklen gibt es die drei Typen

$$\begin{aligned} &1^1 2^0 3^0 4^0 5^1 6^0 \\ &1^0 2^1 3^0 4^1 5^0 6^0 \\ &1^0 2^0 3^2 4^0 5^0 6^0 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich (dabei führen wir $0!$ und die Potenzen mit dem Exponenten 0 nicht auf)

$$s_{6,2} = \frac{6!}{1! \cdot 1! \cdot 1^1 \cdot 5^1} + \frac{6!}{1! \cdot 1! \cdot 2^1 \cdot 4^1} + \frac{6!}{2! \cdot 3^2} = 274$$

(vergleiche mit dem Stirling-Dreieck erster Art). $\square$



Übungsaufgaben

1.6 Berechnen Sie mithilfe von Folgerung 1.4 $s_{5,3}$! $\square$

1.1.4 Permutationen mit Wiederholung

Wir wollen nun Permutationen mit Wiederholung betrachten, d.h. Elemente können mehrfach in einer Permutation vorkommen.

Definition 1.4 Sei M eine Menge mit n -Elementen. Jede Folge von k Elementen $\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$ aus M , $x_i \in M$, $1 \leq i \leq k$, $k \geq 0$, heißt eine (geordnete) k -Permutation mit Wiederholung über M . Wir wollen mit $P^*(n, k)$ die Anzahl der k -Permutationen mit Wiederholung bezeichnen, die aus einer n -elementigen Menge gebildet werden können. $\square$

k -Permutation mit Wiederholung

Eine k -Permutation von M mit Wiederholung entspricht einer geordneten Ziehung von k Elementen aus M mit Zurücklegen: Die Reihenfolge der Auswahl ist von Bedeutung, und ausgewählte Elemente können wiederholt ausgewählt werden.

Man überlegt leicht, dass es für jedes der k Elemente einer k -Permutation über einer n -elementigen Menge jeweils n Möglichkeiten gibt. Somit gilt folgender Satz.

Satz 1.5 Die Anzahl $P^*(n, k)$ der k -Permutationen mit Wiederholung über einer n -elementigen Menge ist

$$P^*(n, k) = n^k$$

$\square$

Beispiel 1.7 Wie viele Buchstabenfolgen der Länge drei können über dem deutschen Alphabet (ohne Unterscheidung von Groß- und Kleinschreibung) gebildet werden? Für jeden der drei Buchstaben haben wir 26 Möglichkeiten. Damit ergibt sich die Anzahl der Wörter der Länge drei über einem 26-buchstabigen Alphabet als $P^*(26, 3) = 26^3 = 17\,576$. $\square$



Übungsaufgaben

- 1.7 (1) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 32 (verschiedene) Spielkarten zu mischen?
- (2) Ein Passwort bestehe aus zwei Buchstaben gefolgt von vier Ziffern, wobei Ziffern, aber nicht Buchstaben mehrfach auftreten dürfen. Wie viele verschiedene Passwörter sind möglich? $\square$

1.1.5 Zusammenfassung

Eine k -Permutation ist die Auswahl einer k -elementigen Folge ohne Wiederholung aus einer n -elementigen Menge, es gibt

$$P(n, k) = n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n - k)!}$$

solcher Permutationen. Die fallende Faktorielle $n^{\underline{k}}$ ist definiert durch

$$n^{\underline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1} (n - i)$$

die steigende Faktorielle; $n^{\overline{k}}$ durch

$$n^{\overline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1} (n + i)$$

Bei Permutationen mit Wiederholung können Elemente mehr als einmal ausgewählt werden, es gibt

$$P^*(n, k) = n^k$$

Permutationen mit Wiederholung. Die Anzahl von Permutationen von n Elementen, von denen jeweils $n_1, n_2, \dots, n_k$, $1 \leq k \leq n$, ununterscheidbar sind, so dass $\sum_{i=1}^k n_i = n$ ist, ist

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k (n_i!)}$$

n -Permutationen können als Mengen von Zyklen notiert werden. Die Anzahlen der n -Permutationen mit k -Zyklen sind durch die Stirlingzahlen erster Art festgelegt:

$$s_{0,0} = 1, \quad s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k}$$

Diese Rekursion lässt sich als Stirling-Dreieck erster Art veranschaulichen. Ist $b_\ell(\pi)$ die Anzahl der Zyklen einer n -Permutation π mit der Länge ℓ , dann heißt

$$1^{b_1(\pi)} 2^{b_2(\pi)} \dots n^{b_n(\pi)}$$

der Typ von π . Die Anzahl der n -Permutationen vom Typ $1^{b_1} 2^{b_2} \dots n^{b_n}$ ist gleich

$$\frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \dots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \dots \cdot n^{b_n}}$$

1.2 Kombinationen

Bei den bisher betrachteten Permutationen spielte die Reihenfolge der Elemente eine Rolle. Zwei Permutationen mit denselben Elementen, aber in unterschiedlicher Reihenfolge, sind verschieden. Wenn wir von der Ordnung der Elemente absehen, die Reihenfolge also keine Rolle spielt, sprechen wir von ungeordneten Permutationen oder von Kombinationen. Eine Kombination stellen wir deshalb nicht als Folge von Elementen über einer Menge M dar, sondern als Teilmenge über M .

1.2.1 Kombinationen ohne Wiederholung

Definition 1.5 Sei $M = [1, n]$ und $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq n$. Eine k -Kombination (ohne Wiederholung) über M ist eine Teilmenge von M mit k Elementen. Mit $K(n, k)$ bezeichnen wir die Anzahl der k -Kombinationen, die über der Menge M gebildet werden können. $\square$

**k -Kombi-
nation ohne
Wiederholung**

Beispiel 1.8 Beim Lottospiel „6 aus 49“ bedeutet für die Spieler die Ziehung $\langle 13, 5, 27, 11, 48, 32 \rangle$ dasselbe wie die Ziehung $\langle 27, 11, 5, 48, 32, 13 \rangle$, da die Reihenfolge der gezogenen Zahlen für die Gewinnausschüttung keine Rolle spielt. Wir können also diese und alle möglichen weiteren Ziehungen mit diesen Zahlen als Menge darstellen: $\{5, 11, 13, 27, 32, 48\}$. $\square$

Man kann eine k -Kombination $\{x_1, \dots, x_k\}$ über einer n -elementigen Menge auch als eine Äquivalenzklasse betrachten, die alle k -Permutationen dieser Elemente enthält. Im Beispiel 1.8 ist $\{5, 11, 13, 27, 32, 48\}$ die Äquivalenzklasse, die als Elemente alle Folgen, die aus diesen Elementen gebildet werden können, enthält. Die Anzahl der Elemente einer solchen Äquivalenzklasse ist $P(k, k) = k!$.

Aus dieser Überlegung können wir die Anzahl der k -Kombinationen $K(n, k)$ über einer n -elementigen Menge ableiten: Es gibt $P(n, k)$ geordnete k -Permutationen ohne Wiederholungen, und zu jeder dieser gibt es $P(k, k)$ Permutationen, die wir zu einer Äquivalenzklasse, der entsprechenden k -Kombination, zusammenfassen. Es gilt also:

$$P(n, k) = K(n, k) \cdot P(k, k) \quad (1.12)$$

Damit gilt der

Satz 1.6 Die Anzahl $K(n, k)$ von Kombinationen über einer n -elementigen Menge wird durch

$$K(n, k) = \frac{P(n, k)}{P(k, k)} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \quad (1.13)$$

bestimmt. $\square$



Übungsaufgaben

- 1.8 a) Vollziehen Sie die obige Beweisidee für den Satz 1.6 anhand der Bestimmung von $K(4, 3)$ nach!
 b) Versuchen Sie einen formalen Beweis für Satz 1.6! □

Binomialkoeffizient

Den Ausdruck (1.13) nennt man auch *Binomialkoeffizient* und notiert ihn wie folgt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \quad (1.14)$$

Man spricht „ n über k “. Auf einige grundlegende Eigenschaften und Verwendungsmöglichkeiten des Binomialkoeffizienten gehen wir im Kapitel 1.3 ein.

Beispiel 1.9 Wie viele Möglichkeiten gibt es beim Lotto, 6 Zahlen aus 49 zu ziehen? Es gilt:

$$\begin{aligned} K(49, 6) &= \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 43 \cdot \dots \cdot 49}{6! \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 43} = \frac{44 \cdot \dots \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} = 13\,983\,816 \end{aligned}$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, sechs Richtige zu tippen $1:13\,983\,816$. □

Aus Satz 1.1 und Gleichung (1.14) folgt unmittelbar

$$P(n, k) = k! \binom{n}{k}$$

1.2.2 Kombinationen mit Wiederholung

Wir wollen bei Kombinationen jetzt auch Wiederholungen zulassen, d.h. wir betrachten k -elementige Multiteilmengen über n -elementigen Mengen M . Die Elemente von M können also wiederholt auf die Teilmengen verteilt werden.

k -Kombination mit Wiederholung

Um die Anzahl $K^*(n, k)$ der k -Kombinationen mit Wiederholung über einer n -elementigen Menge zu bestimmen, überlegen wir, dass wir beim Auswählen einer solchen Kombination $k-1$ Elemente (alle, bis auf das letzte) wieder auswählen können. Wenn wir uns vorstellen, dass diese Elemente von vorneherein zur Auswahl zur Verfügung stehen, dann können wir die Auswahl als Kombination ohne Zurücklegen betrachten. Damit hätten wir eine k -Kombination ohne Wiederholung über einer $n+k-1$ -elementigen Menge. Somit ergibt sich mit der Festlegung (1.14) und Satz 1.6

Satz 1.7 Die Anzahl $K^*(n, k)$ von k -Kombinationen mit Wiederholung (von k -Multimengen) über einer n -elementigen Menge M wird bestimmt durch

$$K^*(n, k) = K(n + k - 1, k) = \binom{n + k - 1}{k} = \frac{(n + k - 1)!}{k! \cdot (n - 1)!} = \frac{n^{\bar{k}}}{k!}$$

Beweis Neben der obigen informellen Begründung geben wir noch folgenden formalen Beweis für die Behauptung. Sei dazu A die Menge aller k -Multimengen über $M = [1, n]$, es ist also $|A| = K^*(n, k)$. Sei B die Menge aller k -Kombinationen (ohne Wiederholung) über der Menge $M' = \{1, \dots, n, n + 1, \dots, n + k - 1\} = [1, n + k - 1]$, damit ist $|B| = K(n + k - 1, k)$. Wenn wir nun zeigen können, dass $|A| = |B|$ ist, dann ist die Behauptung gezeigt. $|A| = |B|$ gilt, wenn wir eine bijektive Abbildung $f: A \rightarrow B$ angeben können (siehe Abschnitt 3.1.2).

Für $\{a_1, \dots, a_k\} \in A$ mit $a_i \leq a_j$ für $i < j$ ($a_i = a_j$ ist möglich, da die Menge $\{a_1, \dots, a_k\}$ eine Multimenge ist) definieren wir

$$f(\{a_1, \dots, a_k\}) = \{a_1 + 0, a_2 + 1, \dots, a_k + (k - 1)\}$$

Es gilt:

- (1) $1 \leq a_1 < a_2 + 1 < \dots < a_k + (k - 1) \leq n + k - 1$, d.h. es ist $f(\{a_1, \dots, a_k\}) \in B$.
- (2) f ist offensichtlich eine totale Funktion.
- (3) f ist offensichtlich injektiv.
- (4) f ist surjektiv. Sei dazu $\{b_1, \dots, b_k\} \in B$. Damit ist $b_i < b_j$ für $i < j$ ($b_i = b_j$ ist nicht möglich, da die Menge $\{b_1, \dots, b_k\}$ keine Multimenge ist) sowie $1 \leq b_1$ und $b_k \leq n + k - 1$. Für $\{b_1, b_2 - 1, \dots, b_k - (k - 1)\}$ gilt dann $1 \leq b_1 \leq b_2 - 1 \leq \dots \leq b_k - (k - 1) \leq n$, also $\{b_1, b_2 - 1, \dots, b_k - (k - 1)\} \in A$, und $f(\{b_1, b_2 - 1, \dots, b_k - (k - 1)\}) = \{b_1, \dots, b_k\}$. Zu jedem Element aus B existiert also ein Urbild von f in A , damit ist f surjektiv.

Aus (1) - (4) folgt, dass f eine Bijektion von A nach B ist, womit $|A| = |B|$ und damit die Behauptung gezeigt ist. $\square$

Beispiel 1.10 Wie viele Zahlenkombinationen kann man mit vier Würfeln würfeln? Einem Wurf entspricht die Auswahl eines Elementes aus der Menge $M = [1, 6]$, wobei die Reihenfolge der gewählten Zahlen keine Rolle spielt. Da bei jeder Auswahl außer bei der letzten alle Elemente wieder ausgewählt werden können, handelt es sich um eine $(6, 4)$ -Kombination mit Wiederholung. Somit kann man mit vier Würfeln

$$K^*(6, 4) = \binom{6 + 4 - 1}{4} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126$$

Zahlenkombinationen werfen. □

In Kapitel 4 kommen wir noch einmal auf die Bestimmung von Kombinationen zurück.



Übungsaufgaben

- 1.9 (1) Wie viele Möglichkeiten gibt es, im Mau-Mau-Spiel an vier MitspielerInnen jeweils fünf Karten auszugeben und eine Karte aufzudecken?
 (2) Wie viele verschiedene Mehrheitsbildungen gibt es in einer fünfköpfigen Kommission? □

1.2.3 Zusammenfassung

Eine k -Kombination ist die Auswahl einer k -elementigen Teilmenge aus einer n -elementigen Menge, es gibt

$$K(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!}$$

solcher Kombinationen. Sind als Teilmengen Multimengen erlaubt, d.h. dürfen Elemente mehrfach ausgewählt werden, spricht man von Kombinationen mit Wiederholung. Es gibt

$$K^*(n, k) = K(n + 1 - k, k) = \frac{n^{\overline{k}}}{k!}$$

k -Kombinationen mit Wiederholung.

1.3 Multinomialkoeffizienten

Den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ haben wir bereits bei der Bestimmung der Anzahl $K(n, k)$ der k -Kombinationen einer n -elementigen Menge kennengelernt: $K(n, k) = \binom{n}{k}$. Der Binomialkoeffizient spielt in vielen Abzähl- und

Auswahlproblemen eine wichtige Rolle. Einige seiner grundlegenden Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten sowie seine Verallgemeinerung zum Multinomialkoeffizienten werden wir in diesem Kapitel betrachten.

1.3.1 Binomialkoeffizienten

Den Binomialkoeffizienten haben wir bereits in der Festlegung (1.14) eingeführt. Für $n \geq k \geq 0$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad (1.15)$$

Für den Fall, dass $k > n$ oder $k < 0$ ein sollte, was gelegentlich bei Summen vorkommen kann, setzen wir $\binom{n}{k} = 0$. Im Kapitel 6 werden wir Verallgemeinerungen der Fakultätsfunktion und damit auch des Binomialkoeffizienten betrachten, bei denen $n \in \mathbb{R}$ oder sogar $n \in \mathbb{C}$ sein kann.

Im Folgenden betrachten wir ein paar grundlegende Eigenschaften und Verwendungsmöglichkeiten des Binomialkoeffizienten. Es lässt sich mit der Definition (1.15) unmittelbar ausrechnen, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n-1} = n$$

Diese Gleichungen sind Spezialfälle der folgenden *symmetrischen Identität*

**Symmetrische
Identität**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (1.16)$$

die sich ebenfalls unmittelbar aus (1.15) ergibt.

Die Binomialkoeffizienten lassen sich wie folgt rekursiv definieren:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= 1 \\ \binom{n}{k} &= \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k}, \quad 1 \leq k \leq n \end{aligned} \quad (1.17)$$

Weiterhin gelten die folgenden Beziehungen:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad k \geq 1 \tag{1.18}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}, \quad k \geq 1 \tag{1.19}$$

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \tag{1.20}$$

$$(n-k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k} \tag{1.21}$$



Übungsaufgaben

1.10 Beweisen Sie die Beziehungen (1.17 - 1.21)! □

Pascalsches
Dreieck

In der Anordnung der Binomialkoeffizienten in das sogenannte *Pascalsche Dreieck*³ spiegelt sich die Gleichung (1.18) wider:

$n = 0$				$\binom{0}{0} = 1$
$n = 1$		$\binom{1}{0} = 1$		$\binom{1}{1} = 1$
$n = 2$		$\binom{2}{0} = 1$	$\binom{2}{1} = 2$	$\binom{2}{2} = 1$
$n = 3$	$\binom{3}{0} = 1$	$\binom{3}{1} = 3$	$\binom{3}{2} = 3$	$\binom{3}{3} = 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

3 Benannt nach Blaise Pascal (1623 - 1662), Religionsphilosoph, Mathematiker und Physiker. Schon in jungen Jahren lieferte Pascal Beiträge zu Kegelschnitten und zur Konstruktion einer Rechenmaschine. Weitere Arbeiten beschäftigten sich mit Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitstheorie, und er verwendete das Prinzip der vollständigen Induktion. Des Weiteren wies er nach, dass der Luftdruck in der Höhe abnimmt, und er gilt als der größte religiöse Denker des neuzeitlichen Frankreich.

Tabelle 1.1 stellt das Dreieck als (untere) Dreiecksmatrix dar. Die Gleichung (1.18) drückt aus, dass sich der Binomialkoeffizient in der $(n + 1)$ -ten Zeile und der $(k + 1)$ -ten Spalte ergibt, wenn man den in der n -ten Zeile und den in der $(k + 1)$ -ten Spalte zu dem in der n -ten Zeile und k -ten Spalte addiert.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
$\vdots$						$\dots$					

Tabelle 1.1 Pascalsches Dreieck

Die Bezeichnung Binomialkoeffizient resultiert aus Überlegungen die *Binome*

Binom

$$(a + b)^n, n \geq 0$$

(für $a, b \in \mathbb{C}$) betreffend:

$$\begin{aligned} (a + b)^0 &= 1 \\ (a + b)^1 &= a + b \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wie lässt sich allgemein die Potenz

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b) \cdot \dots \cdot (a + b)}_{n\text{-mal}}$$

als Summe darstellen?

Beim Ausmultiplizieren dieses Produktes ergeben sich die Summanden $a^k b^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$. Wenn man die n Faktoren $(a + b)$ mit $1, \dots, n$ durchnummeriert, kann man die k a 's aus k der n Faktoren auswählen. Die Nummern der k

ausgewählten Faktoren bilden eine Teilmenge (auf die Reihenfolge kommt es nicht an) von $[1, n]$. Die Anzahl dieser Teilmengen ist $K(n, k) = \binom{n}{k}$, also gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, den Summanden $a^k b^{n-k}$ zu bilden. Aus diesen Überlegungen ergibt sich die sogenannte *Binomische Formel*:

**Binomische
Formel**

Satz 1.8 Es gilt:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{b-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \end{aligned} \quad (1.22)$$

für alle $a, b \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$. □

Wegen der Symmetrie des Binomialkoeffizienten folgt unmittelbar

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (1.23)$$

Aus der Binomischen Formel folgt unmittelbar für $x \in \mathbb{C}$

$$(x+1)^n = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \quad (1.24)$$

und hieraus für $x = 2$

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} \end{aligned} \quad (1.25)$$

sowie für $x = -1$

$$\begin{aligned} 0 &= 0^n = (1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \\ &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \end{aligned}$$

Aus dieser Beziehung folgt unmittelbar:

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \in \mathbb{U}_+}}^n \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \in \mathbb{G}_+}}^n \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

Mithilfe der Gleichung (1.25) lässt sich unmittelbar ableiten, dass für die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$, d.h. der Menge aller Teilmengen, einer n -elementigen Menge M gilt:

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^n$$

Denn gemäß Festlegung (1.14) und Satz 1.6 folgt, dass die Anzahl der Teilmengen mit k Elementen einer Menge mit n Elementen gleich

$$K(n, k) = \binom{n}{k}$$

ist. Die Anzahl aller Teilmengen von M ergibt sich daraus wie folgt

$$\begin{aligned} K(n, 0) + K(n, 1) + \dots + K(n, n) &= \sum_{k=0}^n K(n, k) = \\ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass die Anzahl der Teilmengen einer n -elementigen Menge gleich 2^n ist. Diese Zahl entspricht der Summe der Elemente in der n -ten Zeile im Pascalschen Dreieck (siehe Tabelle 1.1).

Die Teilmengen $A \in \mathcal{P}(M)$ einer n -elementigen Menge $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ lassen sich durch *Bitvektoren* $x_A = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ repräsentieren: x_i wird gleich 1 gesetzt genau dann, wenn $a_i \in A$ ist, alle anderen Komponenten von x werden 0 gesetzt. Aus dieser eindeutigen Zuordnung von $\mathcal{P}(M)$ und $\{0, 1\}^n$ folgt $|\mathcal{P}(M)| = |\{0, 1\}^n| = 2^n$, womit wir neben dem obigen Beweis mithilfe der binomischen Formel einen weiteren Beweis für diese Aussage gefunden haben.

**Bit-
vektoren**

Wir betrachten nun die Summe der n ersten Elemente in der Spalte k des Pascalschen Dreiecks (siehe Tabelle 1.1), diese ist gleich

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \quad n \geq k \geq 0 \quad (1.26)$$

bzw. wenn wir $\binom{i}{k} = 0$ für $k > i$ setzen

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \quad n \geq k \geq 0 \quad (1.27)$$

Die Summe der ersten n Elemente der k -ten Spalte ergeben also das Element in der $n+1$ -ten Zeile und $k+1$ -ten Spalte.



Übungsaufgaben

1.11 (1) Überprüfen Sie diese Gleichung anhand der Tabelle 1.1!

(2) Beweisen Sie die Gleichung (1.26) bzw. (1.27)! □

Für den Spezialfall $k = 1$ gilt einerseits

$$\sum_{i=1}^n \binom{i}{1} = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \dots + \binom{n}{1} = 1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i$$

und andererseits mit (1.26)

$$\sum_{i=1}^n \binom{i}{1} = \binom{n+1}{2}$$

Somit folgt für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen die (bekannte) Gleichung:

$$\sum_{i=1}^n i = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1.28)$$

Wir wollen Gleichung (1.27) verwenden, um die Summe $\sum_{i=0}^n i^2$ der ersten n Quadratzahlen zu berechnen: Wir überlegen zunächst, dass

$$i^2 = (i^2 - i) + i = i(i-1) + i = 2 \cdot \frac{i(i-1)}{2} + i = 2 \cdot \binom{i}{2} + \binom{i}{1}$$

ist. Mit (1.27) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n i^2 &= \sum_{i=0}^n \left(2 \cdot \binom{i}{2} + \binom{i}{1} \right) \\ &= 2 \sum_{i=0}^n \binom{i}{2} + \sum_{i=0}^n \binom{i}{1} \\ &= 2 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} \end{aligned}$$



Übungsaufgaben

- 1.12 Bestimmen Sie mit der vorgestellten Methode die Summe $\sum_{i=0}^n i^3$ der ersten n Kubikzahlen und zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \left(\sum_{i=0}^n i \right)^2$$

gilt!

□

Zunächst stellen wir fest, dass

$$i^3 = i(i-1)(i-2) + 3i(i-1) + i = i^3 + 3i^2 + i^1$$

gilt. Wegen (1.14) gilt

$$i^k = k! \binom{i}{k}$$

und somit

$$i^3 = 3! \binom{i}{3} + 3 \cdot 2! \binom{i}{2} + 1! \binom{i}{1}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n i^3 &= 6 \sum_{i=0}^n \binom{i}{3} + 6 \sum_{i=0}^n \binom{i}{2} + \sum_{i=0}^n \binom{i}{1} \\ &= 6 \cdot \binom{n+1}{4} + 6 \cdot \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \quad \text{mithilfe (1.27)} \\ &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\ &= \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \left(\sum_{i=0}^n i \right)^2 \quad \text{mithilfe (1.28)} \end{aligned}$$

In Kapitel 6.4 werden wir die Summe der Quadratzahlen und die Summe der Kubikzahlen noch mit anderen Methoden bestimmen.



Übungsaufgaben

- 1.13 (1) Zur Begrüßung geben sich n Personen paarweise die Hand. Wie viele Händepaare haben sich insgesamt geschüttelt?
- (2) Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie, dass die Formel

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \dots + \binom{n+m}{m} \\ = \binom{n+m+1}{m}$$

gilt! Geben Sie eine anschauliche Interpretation dieser Formel anhand des Pascalschen Dreiecks! $\square$

Vandermondesche Identität

Wir wollen noch eine weitere Beziehung für Binomialkoeffizienten, die sogenannte *Vandermondesche Identität*,⁴ betrachten. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel: In einer Quizshow seien n weibliche und m männliche Zuschauer. Wie viele Möglichkeiten hat die Moderatorin, von diesen k Kandidatinnen und Kandidaten für eine Fragerunde auszuwählen? Wir können die Anzahl der Möglichkeiten auf zwei Arten bestimmen. Da es sich offensichtlich um eine k -Kombination aus $m+n$ Elementen handelt, gilt gemäß Satz 1.6 und Gleichung (1.14) zum einen, dass es

$$\binom{m+n}{k}$$

Möglichkeiten gibt. Zum anderen können wir die Anzahl der Möglichkeiten auch bestimmen, indem wir die Auswahlmöglichkeiten für Kandidatinnen und Kandidaten getrennt betrachten: Es seien l der k Ausgewählten weiblich. Für jedes $l \in \{0, 1, \dots, k\}$ gibt es $\binom{n}{l}$ Möglichkeiten, Kandidatinnen auszuwählen, und $\binom{m}{k-l}$ Möglichkeiten, Kandidaten auszuwählen. Mit diesen Überlegungen ergeben sich also

$$\sum_{l=0}^k \binom{n}{l} \binom{m}{k-l}$$

Möglichkeiten für die Auswahl von k Kandidatinnen und Kandidaten aus insgesamt $m+n$ Zuschauerinnen und Zuschauern.

⁴ Benannt nach Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735 - 1796, einem französischen Musiker und Mathematiker, der sich u.a. mit der Lösung von Gleichungen höheren Grades beschäftigte.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich die Beziehung

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{l=0}^k \binom{n}{l} \binom{m}{k-l} \quad (1.29)$$

Im Kapitel 4 geben wir einen Beweis der Vandermondschen Identität mithilfe von erzeugenden Funktionen.

1.3.2 Multinomialkoeffizienten

Wir verallgemeinern nun Überlegungen aus dem vorigen Abschnitt und betrachten die *Multinome*

Multinom

$$(a_1 + \dots + a_t)^n = \left(\sum_{j=1}^t a_j \right)^n \quad (1.30)$$

für $t \geq 1$ und $n \geq 0$; für $t = 2$ handelt es sich um Binome, für die wir mit (1.23) bzw. (1.22) Summendarstellungen kennen. Das Ausmultiplizieren von (1.30), d.h. von

$$\underbrace{(a_1 + \dots + a_t) \cdot (a_1 + \dots + a_t) \cdot \dots \cdot (a_1 + \dots + a_t)}_{n\text{-mal}} \quad (1.31)$$

ergibt n Summanden der Art

$$a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_t^{n_t} \quad (1.32)$$

mit $0 \leq n_j \leq n$, $1 \leq j \leq t$, und $\sum_{j=1}^t n_j = n$, d.h. wir haben n Fächer, aus denen jeweils eins der a_j ausgewählt wird, insgesamt n_j -mal; die Gesamtanzahl von Auswahlen muss natürlich gleich n sein.

Für die Summendarstellung

$$\sum_{\substack{0 \leq n_1, \dots, n_t \leq n \\ \sum_{j=1}^t n_j = n}} f_{n; n_1, \dots, n_t} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_t^{n_t}$$

für (1.30) müssen wir die Koeffizienten $f_{n; n_1, \dots, n_t}$ bestimmen, d.h. die Anzahl, mit der der Summand $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_t^{n_t}$ aus den n -Fächern gezogen werden kann: Für a_1 gibt es

$$\binom{n}{n_1}$$

Möglichkeiten, für a_2 dann noch

$$\binom{n - n_1}{n_2}$$

Möglichkeiten, allgemein für a_j , $1 \leq j \leq t$,

$$\binom{n - n_1 - n_2 - \dots - n_{j-1}}{n_j}$$

Möglichkeiten, d.h. schließlich für a_t

$$\binom{n - n_1 - n_2 - \dots - n_{t-1}}{n_t}$$

Möglichkeiten. Insgesamt ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} f_{n;n_1,\dots,n_t} &= \binom{n}{n_1} \cdot \binom{n - n_1}{n_2} \cdot \dots \cdot \binom{n - n_1 - n_2 - \dots - n_{t-1}}{n_t} \\ &= \frac{n!}{n_1!(n - n_1)!} \cdot \frac{(n - n_1)!}{n_2!(n - n_1 - n_2)!} \cdot \frac{(n - n_1 - n_2)!}{n_3!(n - n_1 - n_2 - n_3)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n - \dots - n_{t-1})!}{n_t!(n - \dots - n_t)!} \\ &= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_t!} \end{aligned}$$

durch Vergleich mit Satz 1.2 erhalten wir unmittelbar

Folgerung 1.5 Es gilt

$$f_{n;n_1,\dots,n_t} = P(n; n_1, \dots, n_t)$$

Hierauf hätten wir auch durch entsprechende Überlegungen kommen können: Wenn wir uns (1.32) ansehen, dann suchen wir nach der Anzahl von Wörtern der Länge n , die mit den Buchstaben $a_1, \dots, a_t$ gebildet werden können, wobei jeder Buchstabe a_j genau n_j -mal vorkommt (da wir es hier mit Zahlen zu tun haben, fassen wir im Unterschied zu Wörtern gleiche Faktoren a_j , die n_j -mal vorkommen, zu Potenzen $a_j^{n_j}$ zusammen und sortieren diese Potenzen so, dass a_j vor a_{j+1} steht. $\square$

Für $f_{n;n_1,\dots,n_t}$ bzw. für

$$P(n; n_1, \dots, n_t) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_t!}$$

schreiben wir auch

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_t} \tag{1.33}$$

Im Allgemeinen erhalten wir die *Multinomische Formel*

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{j=1}^t a_j \right)^n &= \sum_{\substack{0 \leq n_1, \dots, n_t \leq n \\ \sum_{j=1}^t n_j = n}} \binom{n}{n_1, \dots, n_t} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_t^{n_t} \\
 &= \sum_{\substack{0 \leq n_1, \dots, n_t \leq n \\ \sum_{j=1}^t n_j = n}} \frac{n!}{\prod_{j=1}^t n_j!} \prod_{j=1}^t a_j^{n_j}
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

**Multi-
nomische
Formel**

Für den Spezialfall $t = 2$ erhalten wir, wenn wir $k = n_1$ setzen, woraus sich $n_2 = n - n_1 = n - k$ ergibt:

$$\begin{aligned}
 f_{n;k,n-k} &= P(n; k, n - k) \\
 &= \binom{n}{k, n - k} \\
 &= \frac{n!}{k!(n - k)!} \\
 &= \binom{n}{k} = K(n, k)
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Ersetzen wir hier n durch $n + k - 1$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
 P(n + k - 1; k, n - 1) &= \binom{n + k - 1}{k, n - 1} \\
 &= \frac{(n + k - 1)!}{k!(n - 1)!} \\
 &= \binom{n + k - 1}{k} \\
 &= K^*(n, k)
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Beispiel 1.11 Eine Familie mit sechs Personen entschließt sich nach einem Sonntagsausflug, ein Fast Food-Restaurant zu besuchen, welches vier Menüs anbietet. Der Vater, Mathematiker von Beruf, kann es nicht lassen, seine Lieben auch an diesem Tag mit einer Aufgabe zu foppen: „Wer mir sagen kann, wie viele Bestellmöglichkeiten wir haben, dem spendiere ich eine Cola.“ Da es nichts Besseres zu tun gibt, und alle wissen, wie sehr sich der Vater freut, überbrücken alle die Zeit, indem sie sich mit der Aufgabe beschäftigen. Mutter H. und Sohn P. stellen die folgende Tabelle auf, in

der in den Zeilen beispielhaft Möglichkeiten für Menüauswahlen der sechs Familienmitglieder eingetragen werden. Die Personen benennen sie dabei mit $p_1, p_2, \dots, p_6$, und die vier Menüs notieren sie mit 1, 2, 3, 4. Ihre Tabelle sieht wie folgt aus:

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
2	3	2	1	4	4
3	1	2	1	1	3
4	4	4	2	4	3
3	3	3	3	3	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Der Vater schaut zu und sagt: „Schön macht Ihr das! Aber wie behaltet Ihr den Überblick? Seid Ihr sicher, keine Möglichkeit zu vergessen oder keine mehrfach aufzuführen? Und wie lange braucht Ihr, bis die Tabelle fertig ist?“ Tochter S. und der jüngste Sohn Da. haben zugeschaut und bemerken: „Wir wollen doch nur die Anzahl wissen, dabei spielt die Reihenfolge keine Rolle“, und sie stellen eine Tabelle auf, in der jede Menüauswahl aufsteigend nach Menünummern sortiert aufgelistet ist:

$$\begin{aligned}
 &\langle 1, 2, 2, 3, 4, 4 \rangle \\
 &\langle 1, 1, 1, 2, 3, 3 \rangle \\
 &\langle 2, 3, 4, 4, 4, 4 \rangle \\
 &\langle 3, 3, 3, 3, 3, 3 \rangle \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

„Das hilft sicher, die Übersicht zu behalten“, sagt der Vater, „aber bis Ihr alles aufgeschrieben habt, ist unser Essen längst kalt geworden – geht’s nicht schneller?“ Da meldet sich Sohn Do., der wie immer bei solchen Momenten still vor sich hingegrübelt und einiges auf die bereitliegenden Servietten gekritzelt hat: „Ich kann das noch einfacher aufschreiben“, sagt er und malt folgende Zeichenketten auf:

$$\begin{aligned}
 &x|xx|x|xx \\
 &xxx|x|xx| \\
 &|x|x|xxxx \\
 &||xxxxxx| \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

„Eine Menüauswahl stelle ich als eine Zeichenkette aus den zwei Zeichen x und $|$ dar. In jeder Zeichenkette kommen genau neun Zeichen vor, nämlich genau sechs x und genau drei $|$. Die Zeichenketten bestehen immer aus vier Gruppen von x , die durch jeweils drei $|$ getrennt sind; die Anzahl der x in der i -ten Gruppe gibt an, wie oft das Menü i bestellt wird“, erläutert Do. „Ja, toll“, mokieren sich die anderen, „was bringt das denn? Das ist

doch eher komplizierter!“ „Na ja“, sagt Do., „jetzt müssen wir nur noch überlegen, wie viele Zeichenketten der Länge neun mit den beiden Symbolen x und $|$ gebildet werden können, in denen jeweils genau sechs x und drei $|$ vorkommen.“ „Prima“, sagt der Vater, „jetzt essen wir aber erst, und dann überlegen wir weiter bei einem Glas Cola, dass ich jedem von Euch spendiere.“

Diese kleine Geschichte stellt ein Beispiel dar für den Zusammenhang (1.36) zwischen Kombinationen mit Wiederholung und Permutationen, in denen verschiedene Elemente mit einer jeweils festgelegten Häufigkeit vorkommen. Wir haben einerseits $n = 4$ Elemente, aus denen $k = 6$ Elemente mit Wiederholung gezogen werden, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt. Mit Satz 1.7 ergeben sich

$$K^*(4, 6) = \binom{9}{6} = 84$$

Möglichkeiten. Andererseits haben wir zweibuchstabige Zeichenketten der Länge $n - 1 + k = 9$, in denen ein Buchstabe sechs- und der andere dreimal vorkommen. Mit Satz 1.2 ergeben sich

$$P(9; 6, 3) = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \binom{9}{6, 3} = 84$$

Möglichkeiten. □



Übungsaufgaben

- 1.14 Wie viele Lösungen $\langle x_1, \dots, x_{10} \rangle$ mit $x_i \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq i \leq 10$, besitzt die Gleichung $x_1 + \dots + x_{10} = 25$? □

Aus Übung 1.14 können wir unmittelbar die folgende Folgerung ableiten.

Folgerung 1.6 Die Gleichung

$$x_1 + \dots + x_k = n$$

mit $k, n \in \mathbb{N}_0$ besitzt

$$P(n + k - 1; n, k - 1) = \frac{(n + k - 1)!}{n! \cdot (k - 1)!} = K^*(k, n)$$

viele Lösungen $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ mit $x_i \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq i \leq k$. □

1.3.3 Zusammenfassung

Die Zahlen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

heißen Binomialkoeffizienten. Sie sind die Koeffizienten der Summanden $a^k b^{n-k}$ des Binoms $(a+b)^n$. Für die Binomialkoeffizienten gilt die Rekursion

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

welche sich als Pascalsches Dreieck veranschaulichen lässt. Für die Binomialkoeffizienten gelten vielfältige Summenbeziehungen, z.B. über Zeilen, Spalten und Diagonalen. Die Spaltenbeziehung kann zur Berechnung der Summen $\sum_{i=0}^n i^m$ verwendet werden.

Als Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten ergeben sich die Multinomialkoeffizienten

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_t} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_t!}$$

Sie sind die Koeffizienten der Summanden $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_t^{n_t}$ des Multinoms $(a_1 + a_2 + \dots + a_t)^n$.

Als eine Anwendung ergibt sich, dass die Gleichung

$$x_1 + \dots + x_k = n$$

mit $k, n \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n+k-1}{n, k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n! \cdot (k-1)!} = P(n+k-1; n, k-1) = K^*(k, n)$$

viele Lösungen $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, $x_i \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq i \leq n$, besitzt.

Elementare Kombinatorik für die Informatik
Abzählungen, Differenzengleichungen, diskretes
Differenzieren und Integrieren

Witt, K.-U.

2013, VIII, 200 S., Softcover

ISBN: 978-3-658-00993-9