

Vielfältige Darstellungen nutzen im Mathematikunterricht

Sebastian Kuntze

Pädagogische Hochschule Ludwigsburg

Kurzfassung: Darstellungen sind ein notwendiges Ausdrucksmittel für mathematische Ideen, nicht nur für Profis sondern auch, wenn Begriffe und Ideen im Mathematikunterricht zwischen den am Lernprozess Beteiligten ausgehandelt werden. Dabei kommt der Vielfalt an Darstellungen und dem Wechsel zwischen Darstellungen besondere Bedeutung zu, gerade auch wenn Darstellungen als Lernhilfen eingesetzt werden. Denn für ein flexibel einsetzbares mathematisches Begriffswissen ist es unabdingbar, Begriffe in verschiedenen Darstellungen und unter den verschiedenen damit meist verbundenen Perspektiven sehen zu können. Daraus ergeben sich auch Implikationen für fachliches und fachdidaktisches Professionswissen angehender und praktizierender Mathematiklehrkräfte, etwa zur Rolle des Nutzens von Darstellungen beim Diagnostizieren von Fehlvorstellungen und beim Gestalten von Lernhilfen.

1 Einführung

In den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK, 2004a, 2004b) ist die Kompetenz „mathematische Darstellungen verwenden“ bzw. „Darstellen von Mathematik“ einer von sechs bzw. von fünf Aspekten mathematischer Kompetenz, die in der Sekundarstufe bzw. in der Grundschule von besonderer Bedeutung sind. Dabei mag dieser Kompetenzaspekt auf den ersten Blick etwas technisch oder auch trivial erscheinen. *Technisch*, weil das Nutzen von Darstellungen auf den ersten Blick mit dem Training von Formalismen, symbolischen Ausdrücken oder Verfahren verwechselt werden kann. In diesem Verständnis entsteht eventuell sogar der Eindruck, dass gleichsam durch die Hintertüre der Bildungsstandards die Betonung solcher Formalismen und Verfahren im Mathematikunterricht weiter im Mittelpunkt stehen soll. Beispielsweise könnten Formulierungen wie „Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auswählen“ (KMK, 2004a, S. 8) suggerieren, dass es stets eine „ideal passende“ Darstel-

lung gibt, die zur Lösung von Aufgaben ausgewählt und verwendet werden soll. Wissen über Darstellungen würde sich in einem solchen Verständnis möglicherweise in einer Art Wissen über Verfahren und Formalismen erschöpfen.

Trivial könnte dieser Kompetenzaspekt erscheinen, weil die Oberflächenmerkmale von Mathematik, z. B. die verwendeten Zahl- und Rechenzeichen, mit den Inhalten des Mathematikunterrichts gleichgesetzt werden könnten. Wird unter dem „Darstellen“ beispielsweise vorwiegend verstanden, „für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen [zu] entwickeln, aus[zu]wählen und [zu] nutzen“ (KMK, 2004b, S. 7f), so könnte das Geschehen in der Mathematik und im Mathematikunterricht insofern oberflächlich interpretiert werden, als „mathematisch tätig zu sein“ demnach in erster Linie bedeutete, irgendwelche Probleme mit Hilfe von Symbolen und formalen Schreibweisen „mathematisch“ darzustellen und bereits durch die Nutzung dieser Darstellungen ihren Lösungen zuzuführen.

Dass mathematische Darstellungen in dieser Hinsicht auch viel zur Wahrnehmung des Mathematikunterrichts insgesamt aus Lernendensicht beitragen können, zeigen die Bilder in Abbildung 1. Hier wurden Lehramtsstudierende gebeten, ihr Bild vom Mathematikunterricht zu malen oder zu skizzieren (vgl. Kuntze, 2010a). Mathematische Darstellungen spielen hier vor allem als Oberflächenmerkmale eine Rolle: Sei es im Sinne einer Sammlung von Anspielungen auf Beispielinhalte, sei es als Teil einer bedrohlich wirkenden Unterrichtswelt wie im unteren Bild. In diesen Bildern erscheinen mathematische Darstellungen als untereinander unverbundene, teils schwer verstehbare Objekte. Würde man die Kompetenz „Darstellungen nutzen“ der Bildungsstandards so verstehen, so bestünde ein Hauptziel des Unterrichts darin, Darstellungen entschlüsseln zu können, sie zur Lösung von Aufgaben einzusetzen oder sie mit bestimmten Themen, Gedanken oder Gegenständen zu verbinden.

Fairerweise sollte hinzugefügt werden, dass es andererseits sicherlich keine ganz einfache Aufgabe ist, Gegenstände des Mathematikunterrichts in einem Bild umzusetzen.

Dies liegt auch an der Mathematik selbst, deren Inhalte letztlich in einer abstrahierenden Vorstellungswelt beheimatet sind (Duval, 2006). Mathematische Objekte sind damit meist gleichzeitig „unsichtbar“ und multipel repräsentierbar, was letztlich die große Bedeutung des Nutzens von Darstellungen ausmacht. Diese Überlegungen zeigen, dass die Kompetenz des Nutzens mathematischer Darstellungen, wie sie sowohl für die Grundschule als auch für Klasse 10 von der KMK genannt wird, in ihrer Bedeutung für den Mathematikunterricht und in ihrem Lernpotential erst untersucht und erschlossen sein will. Insbesondere macht Wissen und unterrichtsbezogene Reflexionsfähigkeit zum Nutzen von

Darstellungen einen wichtigen Bereich professionellen Wissens von Mathematik Lehrkräften aus (vgl. Ball, 1993; Kunter et al., 2011). In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, woraus sich die Bedeutung des Nutzens vielfältiger Darstellungen ergibt und welche Rolle diesbezügliches Wissen für das Lehren und Lernen von Mathematik spielen kann (vgl. Kuntze, in diesem Band).

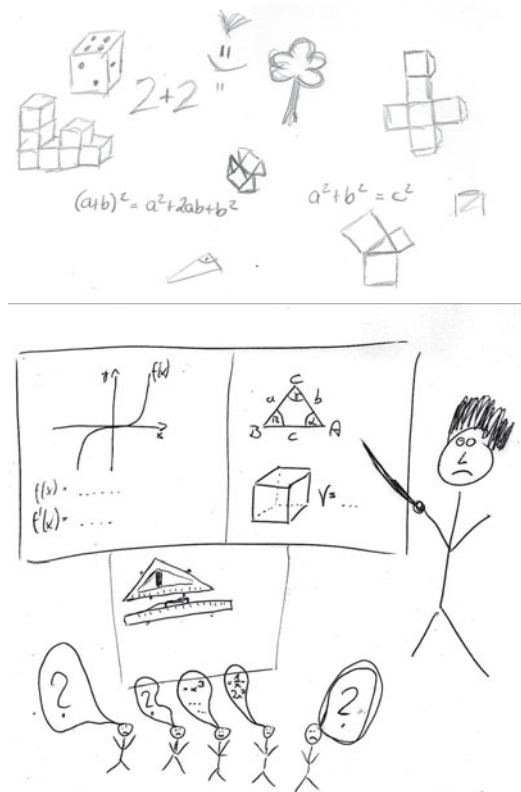


Abbildung 1: Mathematische Darstellungen und das Darstellen von Mathematikunterricht: „Rich Pictures“ von Lehramtsstudierenden zur Frage: „Wie sieht Ihr Bild von Mathematikunterricht aus? Malen, zeichnen, kritzeln Sie!“

Im Folgenden wird daher in Teil 2 ausgehend von den Bildungsstandards und einer kurzen Begriffsklärung reflektiert, welche Bedeutung das Nutzen vielfältiger Darstellungen für die Mathematik als Disziplin hat. Daraus, aber auch aus der speziellen, durch fachdidaktische Überlegungen geprägten Situation des Leh-

rens und Lernens von Mathematik ergeben sich Implikationen für den Mathematikunterricht und Fördermöglichkeiten des Aufbaus mathematischer Kompetenz, die in Teil 3 anhand von Beispielen angesprochen werden. Da die Idee des Nutzens vielfältiger Darstellungen auch große Bedeutung für das Erklären und Diagnostizieren von Schwierigkeiten von Lernenden in Mathematik sowie für das Gestalten gezielter Lernhilfen hat (Teile 4 und 5), ergeben sich auch Implikationen für das professionelle Wissen von Mathematiklehrkräften, die in einem Ausblick in Teil 6 diskutiert werden.

2 Vielfältige Darstellungen nutzen als Strategie für mathematischen Erkenntnisgewinn

Die in den Bildungsstandards enthaltenen Beschreibungen der Kompetenz des „Verwendens“ mathematischer Darstellungen (KMK, 2004a) bzw. des „Darstellens von Mathematik“ (KMK, 2004b) verweisen – vor dem Hintergrund diesbezüglicher Elemente der mathematischen Fachpraxis (vgl. Heintz, 2000) gesehen – auf wesentliche Strategien von Experten. So nutzen Mathematikerinnen und Mathematiker „verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen“ (KMK, 2004a, S. 8), untersuchen Unterschiede und interpretieren diese Darstellungen, wobei auch den „Beziehungen zwischen Darstellungsformen“ (ebd., S. 8) besonderes Augenmerk gilt. Diese an Darstellungen orientierte Untersuchung mathematischer Objekte und Gedankengänge ist in der Regel von einem häufigen Wechsel zwischen den Darstellungsformen gekennzeichnet: Unterschiedliche Darstellungen können nämlich unterschiedliche Aspekte des jeweiligen Objekts oder Gedankengangs in den Vordergrund rücken und so für die Lösung von Problemstellungen nutzbar machen. Es geht also nicht nur für Grundschülerinnen und Grundschüler, sondern gerade auch bei Experten darum, „für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen [zu] entwickeln, aus[zu]wählen und [zu] nutzen“ (KMK, 2004b, S. 7f). Dafür werden Darstellungen im Arbeitsprozess miteinander verglichen und auch bewertet. Das dabei entstehende Metawissen über Darstellungen kann nicht nur das Begriffsverständnis zu den jeweiligen mathematischen Objekten stärken, sondern es dürfte auch eine Grundlage für Problemlösestrategien (z.B. Schoenfeld, 1992) bilden. Insofern betonen die Bildungsstandards auch die Relevanz des Nutzens von Darstellungen im metakognitiven Bereich (vgl. z.B. Cohors-Fresenborg & Kaune, 2001; Schoenfeld, 1992; Hattie, 2009).

Bevor diese Überlegungen auch anhand von Beispielen weiter vertieft werden, sollte das hier zugrunde gelegte Verständnis des Begriffs „Darstellung“ (bzw. der synonym gebrauchten Termini „Repräsentation“ und „Darstellungsform“) präzisiert werden: Unter *Darstellungen* werden Objekte verstanden, die für etwas anderes stehen (Goldin & Shteingold, 2001), die diese anderen Objekte da-

mit „repräsentieren“. Darstellungen können zum Gegenstand des interindividuellen Diskurses und damit von Aushandlungsprozessen (Klein & Oettinger, 2000; Reinmann-Rothmeier & Mandl, 2001) werden. Darstellungen können prinzipiell enaktiver, bildlicher oder symbolischer Natur sein (vgl. Bruner, 1966), wenn auf Objekte mit handlungsmäßigen, ikonischen oder sprachlichen, bzw. formalen oder abstrakten Mitteln Bezug genommen wird. Mit dem Ausdruck „Nutzen *vielfältiger* Darstellungen“ (vgl. in englischer Sprache „using multiple representations“, z.B. Kuntze et al., 2011) wird betont, dass nicht nur eine einzige Darstellung verwendet wird, sondern bewusst mehrere Darstellungsformen eines mathematischen Objekts in den Denkprozess einbezogen werden.

Vielfältige Darstellungen zu nutzen ist zentral für die Wissenschaft Mathematik und mathematisches Denken. Dies liegt einerseits daran, dass mathematische Begriffe aufgrund ihrer Abstraktheit letztlich „unsichtbar“ sind und jeweils Aspekte dieser Begriffe durch Darstellungen sichtbar gemacht werden können. Wenn etwa Hilbert in der ihm zugeschriebenen Äußerung, dass die Begriffe „Punkte, Geraden und Ebenen“ jederzeit auch „Tische, Stühle und Bierseidel“ genannt werden könnten (zum Ansatz der Formalisierung in der Darstellung mathematischer Begriffe vgl. Hilbert, 1903) die Austauschbarkeit der Bezeichnung von Begriffen fordert, so bedeutet dies gerade, dass die Begriffe in einer abstrahierenden Herangehensweise von kontextgebundenen Darstellungen abgelöst werden können. Dennoch verfügen Experten meist über intuitive Vorstellungen zu mathematischen Begriffen, die mit den jeweiligen Darstellungsformen korrespondieren, in denen die Begriffe in Erscheinung treten können. So bekennt Thom (1973, S. 203f.): „Meines Erachtens hat man aus der Hilbertschen Axiomatik nicht die wahre Lektion gelernt, die folgendermaßen lautet: Man gelangt zur absoluten Strenge nur durch die völlige Elimination von Bedeutung. [...] Aber wenn man zwischen Strenge und inhaltlicher Bedeutung wählen muss, wähle ich ohne Zögern letztere. Dies hat man in der Mathematik immer getan, wo man fast immer in einer halb-formalistischen Form arbeitet, mit der nicht formalisierten Umgangssprache als Metasprache. Der ganze Berufsstand ist zufrieden und verlangt nach keiner Verbesserung“.

Dem Wechsel zwischen Darstellungen kommt über diese Gesichtspunkte hinaus eine Schlüsselrolle zu, etwa wenn unterschiedliche Aspekte mathematischer Objekte sichtbar gemacht werden sollen, Probleme mit Hilfe von Darstellungswechseln gelöst oder Verknüpfungen zwischen unterschiedlichen mathematischen Wissensbereichen hergestellt werden. So brachte beispielsweise die Vernetzung von Algebra und Geometrie der Fachwissenschaft den Vorteil, dass geometrische Probleme algebraisch dargestellt und damit mit den mathematischen Mitteln der Algebra gelöst werden konnten. Umgekehrt wurden Probleme aus

der Algebra geometrisch dargestellt und mit Mitteln dieser Teildisziplin gedeutet und bearbeitet.

Bereits grundlegende mathematische Begriffe erlauben aufgrund von unterschiedlichen Darstellungsmöglichkeiten eine Vielfalt an Perspektiven, Auffassungsmöglichkeiten und Verknüpfungen zu anderen Begriffen:

Beispielsweise zeigt Abbildung 2 unterschiedliche Darstellungen eines bestimmten Integrals – als Grenzwert einer unendlichen Summe, als formal-algebraischer Integralausdruck, als unter dem Graph eingeschlossener Flächeninhalt (hierbei ist eine graphische Darstellung oder die Darstellung als Zahlenwert zu unterscheiden), oder als Differenz zweier Werte der Stammfunktion. Alle diese Darstellungen sollten einer in diesem Bereich kompetenten Person nicht nur bekannt sein, sondern die Person sollte Bezüge zwischen den unterschiedlichen Darstellungen herstellen und zwischen ihnen wechseln können. Die unterschiedlichen Darstellungen betonen jeweils unterschiedliche Aspekte des Integralbegriffs.

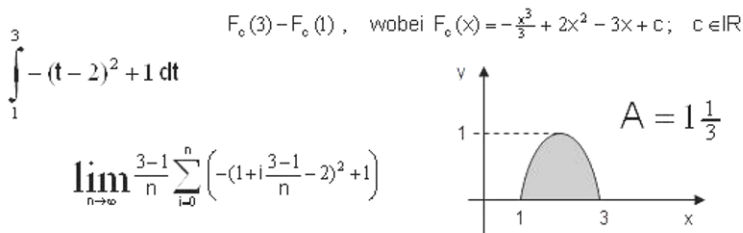


Abbildung 2: Unterschiedliche Darstellungen eines bestimmten Integrals

Diese Überlegungen treffen in ähnlicher Weise auch auf Elementarwissen zu. So zeigt Abbildung 3 unterschiedliche Darstellungen der Zahl 8. Auch hier ist für ein tragfähiges Begriffsverständnis und mathematischen Erkenntnisgewinn wesentlich, dass Bezüge zwischen den Darstellungen hergestellt werden können. Nebenbei können Darstellungsmöglichkeiten auch mit Aspekten, d.h. Auffassungsmöglichkeiten des Zahlbegriffs, korrespondieren.

Mathematischer Erkenntnisgewinn beruht auch bei diesen Beispielen nicht selten auf dem gezielten Wechseln zwischen Darstellungen, mithin der bewussten Nutzung vielfältiger Darstellungen. Beispielsweise beruhen grundlegende mathematische Strategien häufig auf Darstellungswechseln:

Das Zurückführen von Problemen auf Bekanntes bzw. auf bereits gelöste Probleme geschieht oft durch ein Wechseln der Darstellung; die Strategie des Ana-

logisierens nutzt oft die Gegenüberstellung von Darstellungen; das Reformulieren von Problemen kann als Darstellungswechsel interpretiert werden – um nur einige wenige Beispiele für solche Strategien zu nennen (vgl. auch Polya, 1954; 1969). Insbesondere ist die Strategie des Verschiebens von Problemen zwischen mathematischen Teilgebieten mit dem Wechseln von Darstellungen verknüpft: Dass z. B. das Bestimmen des Schnittpunkts zweier Geraden mit Mitteln der Gleichungslehre erfolgen kann, beruht darauf, dass das Problem algebraisiert und in dieser anderen Darstellung gelöst werden kann. Das algebraische Ergebnis kann dann wieder geometrisch gedeutet werden, in der Regel ist damit ein weiterer Darstellungswechsel verbunden.

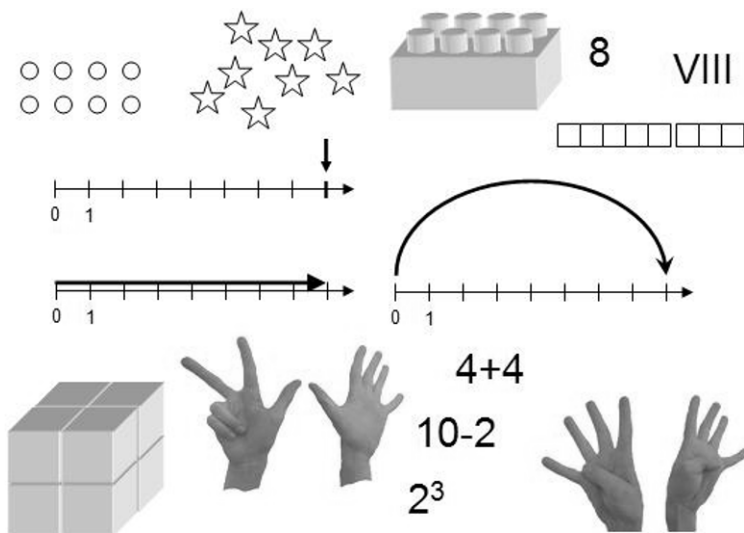


Abbildung 3: Einige unterschiedliche Darstellungen der Zahl 8

Die Relevanz des Nutzens vielfältiger Darstellungen für elementare mathematische Strategien trägt auch dazu bei, dass sich viele Beweise und Argumentationen eines Darstellungswechsels bedienen. Ein einfaches Beispiel dafür findet sich in Abbildung 4.

Das Nutzen vielfältiger Darstellungen spielt damit auch eine zentrale Rolle für das Problemlösen und Argumentieren. Boero und Morselli (2009) beschreiben die Bearbeitung des in Abbildung 4 wiedergegebenen Argumentationsproblems ferner unter der Perspektive des Modellierens (vgl. auch Kuntze, 2010b). In der

Tat vermitteln Übersetzungsschritte, wie sie für das Modellieren typisch sind (vgl. Blum, 2007), meist auch zwischen verschiedenen Darstellungsformen.

Der Wert von Darstellungen im Sinne der Modellierung von Strukturen, die einer Problemsituation zugrunde liegen, spielt beispielsweise auch in der Stochastik eine zentrale Rolle. Nicht selten stellt hier die Modellierung, d.h. die Darstellung im Rahmen eines stochastischen Modells den anspruchsvollsten Schritt bei Problemlösungen dar. Geeignete Darstellungen können in diesem Inhaltsbereich nicht nur bei Experten, sondern bereits bei Kindern in Grundschule oder Kindergarten Erkenntnisgewinne ermöglichen: Beispielsweise zeigen Martignon und Wassner (2005) auf, wie die unterschiedlichen, von Kindern zunächst experimentell beobachteten Häufigkeiten verschiedener Augensummen beim Würfeln mit zwei Würfeln anhand eines Kombinationen visualisierenden Modells erklärt werden können.

„Beweise [...], dass die Summe zweier aufeinander folgender ungerader Zahlen durch vier teilbar ist.“

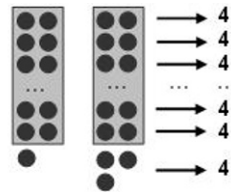


Abbildung 4: Möglichkeit der Lösung eines Argumentationsproblems von Boero und Morselli (2009, S. 187) durch Nutzen einer nicht-algebraischen Darstellung (Kuntze, 2010b)

3 Nutzen vielfältiger Darstellungen beim Aufbau mathematischer Kompetenz

Wie auch bereits am Beispiel in Abbildung 3 deutlich werden kann, kommt es beim Aufbau von Begriffswissen meist wesentlich auf das Nutzen vielfältiger Darstellungen an: Verschiedene Darstellungen können in diesem Beispiel verschiedene Zahlaspekte betonen, Einsichten in die Struktur der Zahl ermöglichen, Querbezüge zu anderen Zahlen aufbauen, Verknüpfungen mit Vorerfahrungen der Lernenden fördern, aber auch kognitive Konflikte herausfordern, die im Idealfall lernproduktiv genutzt werden können.

Dabei können Darstellungen systematisch variiert werden, um den Aufbau mathematischer Kompetenz zu fördern. Beispielsweise schlagen Kaufmann und Wessolowski (2009) vor, Kinder am Rechenschiffchen Zahlen und Rechnungen legen zu lassen, diese von den Kindern erzeugten Zahldarstellungen dann im Ge-

spräch zu analysieren, durch Umlegen oder Farbwechsel zu verändern und Verknüpfungen, die sich durch diese Veränderungen ergeben haben, wiederum zu thematisieren. Auf diese Weise legen unterschiedliche Darstellungen einer Aufgabe am Rechenschiffchen auch unterschiedliche Strategien nahe, die Aufgabe zu lösen (vgl. Abbildung 5). Mathematische Kompetenz dürfte hier einerseits dadurch gefördert werden können, dass die Darstellungen Zugänge zum Verständnis von Zahlen und Operationen mit diesen Zahlen in Aufgaben eröffnen, andererseits dürfte das relativ leicht durchführbare Verändern der Darstellung den Aufbau eines flexibel einsetzbaren Grundbestands an Strategien fördern. Analysiert man vielfältige Darstellungen wie etwa die in Abbildung 5 gegebenen genauer, so besteht das Lernpotential des Umgangs mit vielfältigen Darstellungen insbesondere auch darin, dass zu den verschiedenen Darstellungen im Rahmen abstrahierender Gedankenschritte sukzessive Wissen zu dahinter stehenden mathematischen Begriffen aufgebaut werden kann. Dabei zeigen unterschiedliche Darstellungen unterschiedliche Aspekte der beteiligten Konzepte, beispielsweise die Zerlegung der 7 beim Zehnerübergang oder etwa die Nicht-Geradzahligkeit des Ergebnisses aufgrund der Eigenschaften der Summanden.

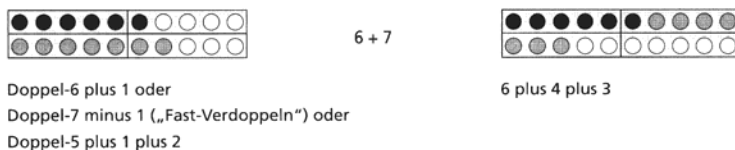


Abbildung 5: Darstellungen von Rechnungen systematisch variieren am Rechenschiffchen am Beispiel der Addition mit Zehnerübergang (entnommen aus Kaufmann & Wessolowski, 2009, S. 89)

An dieser Stelle sollte klärend hinzugefügt werden, dass Arbeitsmittel oder Medien im Mathematikunterricht für sich selbst genommen noch nicht als mathematische Darstellungen betrachtet werden – mit Hilfe dieser Arbeitsmittel und Medien können aber Darstellungen mathematischer Objekte generiert werden. Nicht selten wird die Qualität von Arbeitsmitteln und Medien daher anhand der Möglichkeiten der mit ihrer Hilfe erzeugbaren Darstellungen und deren Verknüpfungs- und Beziehungsreichtum eingeschätzt. Dies bezieht sich auch auf Kategorisierungen, z. B. in strukturierte und unstrukturierte Materialien sowie Mischformen – diese Kategorisierungen beruhen ganz offensichtlich auf Charakteristika der mit den Materialien erzeugbaren oder von ihnen nahe gelegten Darstellungen.

Nicht selten können Materialien für Darstellungen in ganz verschiedenen mathematischen Inhaltsbereichen genutzt werden, wie auch anhand von Darstellungen verschiedene Inhaltsbereiche verknüpft werden können. Martignon und Krauss (2007, 2009) geben einen Überblick über Materialien, anhand derer in der Grundschule Darstellungen erzeugt werden können, die zentrale stochastische Einsichten von Kindern in Jahrgangsstufe 1 bis 4 unterstützen können. Hierbei werden Bezüge zu Darstellungen und Materialien, die den Kindern bereits bekannt sind, hergestellt. Eine Gemeinsamkeit mit dem vorangegangenen Beispiel besteht hier offenbar in der Stoßrichtung, dass gewissermaßen „optimale“ Zugänge zum Lernen und zum Begriffswissensaufbau geschaffen werden, die insbesondere auch von jungen Lernenden genutzt werden können. Im Vordergrund steht bei beiden Ansätzen damit die Nutzung nicht-symbolischer Darstellungen mit dem Ziel der Ermöglichung enaktiver Zugänge, der Reduktion von Komplexität und der Vermeidung von Hürden, wie sie formalsprachlich-symbolische Darstellungsformen mit sich bringen. Bei beiden Ansätzen, die stellvertretend für viele andere unterrichtspraktische Vorschläge gesehen werden können, werden materialienbasierte Darstellungen als Anker für den Begriffswissensaufbau der Schülerinnen und Schüler genutzt.

Anhand dieser Beispiele wird damit einerseits die Bedeutung von Darstellungen beim Aufbau mathematischen Wissens deutlich, andererseits wird sichtbar, dass das Nutzen vielfältiger Darstellungen durchaus auch im Spektrum zwischen handelnden, bildlichen und symbolischen Darstellungsformen zum Ausdruck kommen kann – hierbei spielen Medien bzw. Arbeitsmittel und deren Möglichkeiten eine wichtige Rolle. Ganz wesentlich ist das Reflektieren über die jeweilige Darstellung im Begriffswissensaufbauprozess.

4 Schwierigkeiten von Lernenden beim Begriffswissensaufbau in Verbindung mit dem Nutzen von Darstellungen

Viele Schwierigkeiten von Lernenden beim mathematikbezogenen Begriffswissensaufbau hängen mit dem Nutzen von Darstellungen zusammen oder können anhand eines auf Darstellungen bezogenen theoretischen Hintergrunds beschrieben werden. Gerade auch Ergebnisse semiotisch orientierter Überlegungen haben hier Impulse für die fachdidaktische Diskussion gegeben, von denen im Folgenden auch für die Erörterung von Beispielen ausgegangen wird.

Mit dem Nutzen von Darstellungen sind viele Schwierigkeiten von Lernenden verbunden. Dies liegt daran, dass das Wechseln zwischen Darstellungen meist mit einem vergleichsweise erhöhten Anforderungsniveau assoziiert ist. Duval (2006) unterscheidet beim Wechseln zwischen Darstellungen so genannte „Treatments“ und „Conversions“. Während Treatments Veränderungen von Darstel-

lungen innerhalb einer bestimmten Darstellungsart sind (z.B. Äquivalenzumformungen einer Gleichung), bestehen Conversions in einer Übersetzungsleistung zwischen verschiedenen Darstellungsarten, z.B. der Übersetzung einer algebraischen Gleichung in zwei Funktionsgraphen, für die nach Schnittpunkten gesucht wird. Eine teilweise ähnliche, damit jedoch nicht identische Unterscheidung, die insbesondere in der grundschulbezogenen fachdidaktischen Diskussion benutzt wird, ist die Differenzierung zwischen dem sog. *intramodalen* vs. dem *intermodalen Transfer*. Jene Unterscheidung ist jedoch an das EIS-Prinzip nach Bruner (1966) gebunden: ein intermodaler Transfer liegt erst bei dem Wechsel zwischen Darstellungsebenen, also beispielsweise zwischen einer enaktiven und einer ikonischen Darstellung vor. Demgegenüber gilt der Wechsel etwa zwischen Tabelle und Diagramm als intramodaler Transfer, da beide dieser Darstellungsformen der symbolischen Darstellungsebene zugerechnet werden. Dennoch handelt es sich nach dem Ansatz von Duval (2006) hierbei klar um eine Conversion, in diesem Ansatz ist damit gewissermaßen eine feinere Unterscheidungsmöglichkeit gegeben.

Duval (2006) stellt fest, dass Treatments meist ein geringeres Anforderungsniveau aufweisen als Conversions (vgl. auch Gagatsis & Shiakalli, 2004; Gagatsis, Elia & Mousoulides, 2006). Während Treatments oft algorithmisch abgearbeitet werden können, beziehen sich Conversions auf darstellungsbezogene Aspekte von Begriffswissen, über das Lernende verfügen müssen, um Conversions erfolgreich ausführen zu können. Daher treten beim Nutzen vielfältiger Darstellungen häufig Schwächen von Lernenden im Begriffswissensbereich zu Tage. Insofern stellen Darstellungswechsel zwischen verschiedenen Darstellungsarten oft nicht nur besondere Hürden dar, sondern sie sind auch dazu geeignet, um Fehlvorstellungen von Lernenden zu beschreiben.

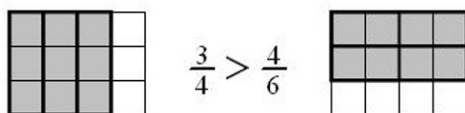


Abbildung 6: Vergleich zweier Brüche mit Hilfe einer graphischen Darstellung

Dies trifft auch auf viele in der Literatur dokumentierte Fehlermuster oder Fehlvorstellungen zu. Beispielsweise ist fehlendes Wissen zum Kardinalzahlaspekt (Wessolowski, 2011b; Rümmer & Wessolowski, 2011) damit assoziiert, dass Zahldarstellungen wie „7“ oder „eins-zwei-drei-vier-fünf-sechs-sieben“ kaum mit einer mengenauffassungsmäßigen Darstellung wie „OOOOO OO“ in Zu-

Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen
Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur
Hochschule

Sprenger, J.; Wagner, A.; Zimmermann, M. (Hrsg.)

2013, XI, 272 S. 89 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-01037-9