

## 2 Theoretische Grundlagen

Wesentliches Ziel des Kapitels ist es, aus theoretischer Perspektive zu beleuchten, in welcher Weise ein Konzept des Experimentierens auch im Fach Mathematik verortet werden kann. Denktätigkeiten, die man aus Sicht der Wissenschaftstheorie als Experimentieren bezeichnen könnte, dienen als Ausgangspunkt für solche Überlegungen. Dennoch muss die Bedeutung des Begriffs „Experimentieren“ für das Fach Mathematik präzisiert werden. Darüber hinaus sollen Analogien zu naturwissenschaftlichen Konzepten des Experimentierens sowie Bezüge zu mathematischem Problemlösen die Tragfähigkeit eines solches Konzept untermauern.

Im Fokus dieser Arbeit steht „experimentelles Denken“, was darauf hindeutet, dass es sich hier um eine Beschreibung mentaler Vorgänge handelt, nicht um Tätigkeiten im Umgang mit Realexperimenten. In den Blick genommen werden also Denkprozesse beim Experimentieren mit mathematischen Objekten, was begrifflich als *innermathematisches Experimentieren* gefasst wird. Ein Vorteil liegt darin, dass die Auseinandersetzung mit mathematischen Gegenständen nicht durch den Umgang mit Realgegenständen oder durch vorgegebene Alltagsbezüge beeinflusst wird und kognitive Prozesse dadurch möglicherweise besser sichtbar werden. Wie solche Prozesse aussehen können, soll folgendes Beispiel illustrieren: Pólya beschreibt, wie ein Mathematiker zu einer Vermutung kommt, die sich zu beweisen lohnt. Zur Veranschaulichung wählt er die Goldbachsche Vermutung und verdeutlicht damit auch den Teilprozess, den Euler ein „Quasi-Experiment“ nennt (Pólya, 1962, p. 24). In Tabelle 1 werden entsprechend dem von Pólya ausführlich dargestellten Prozess die betrachteten Beispiele (Gleichungen) und die Denkschritte im Prozess dargestellt.

**Tabelle 1: Kognitive Prozesse im Umgang mit Vermutungen nach Pólya**

Schritt	Gleichungen	Prozess
(1)	$3 + 7 = 10$ $3 + 17 = 20$ $13 + 17 = 30$	<p>Durch einen Zufall stößt man auf diese Gleichungen und bemerkt folgendes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Die Zahlen 3, 7, 13 und 17 sind (ungerade) Primzahlen.</li> <li>Die Summe ist immer gerade.</li> </ul> <p>Wie ist es mit anderen Zahlen?</p>
(2)	$6 = 3 + 3$	Betrachtung der ersten geraden Zahl, die als Summe von zwei ungeraden Primzahlen darstellbar ist.
(3)	$8 = 3 + 5$	Ausnahmen sind die Zahlen 2 und 4 (im Folgenden muss also das Attribut „ungerade“ nicht

	$10=3+7=5+5$	mehr explizit verwendet werden).
	$12=5+7$	Geht es immer so weiter?
	$14=3+11=7+7$	Versuchsweise Vermutung: Jede gerade Zahl größer als 2 kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden.
	$16=3+13=5+11$	
	$60=3+\text{Primzahl?}$ nein	Prüfen der Vermutung an einer neuen Zahl (Quasi-Experiment).
(4)	$60=5+\text{Primzahl?}$ nein	Die Vermutung lässt sich bestätigen.
	$60=7+53$	Im Fall einer Widerlegung wäre die Vermutung „erledigt“, eine Verifizierung ist kein eindeutiger Schluss, aber die Vermutung wird glaubhafter.
	$18=5+13=7+11$	Überprüfung an weiteren Beispielen.
(5)	$20=3+17=7+13$	Die Vermutung lässt sich bestätigen.
	$22=3+19=5+17=11+11$	Verifizierung kann eine Vermutung aber niemals beweisen.
	etc.	

Die von Pólya im Beispiel aufgeführten kognitiven Prozesse (eine Konkretisierung durch Pólya findet sich in Abschnitt 2.3.1) dienen einer ersten Annäherung an inner-mathematische Experimentierprozesse.

Kognitive *Prozesse* werden in der Kognitionspsychologie von kognitiven *Inhalten* unterschieden (Zimbardo, 1999, p. 275). Zu kognitiven Inhalten zählen die Autoren beispielsweise Begriffe, Tatsachen, Aussagen und Regeln. Mit kognitiven Prozessen meinen sie „geistige Operationen“ mit diesen Inhalten. Obwohl der Begriff der Kognition in der Literatur häufig sehr unterschiedlich verwendet wird, kann man unter kognitiven Prozessen diejenigen fassen, die zu Wissen und Erkenntnissen führen, sei es um unsere Umwelt zu verstehen oder um Probleme des Alltags zu lösen (Zimbardo, 1999; Betsch, Funke, & Plessner, 2011). Welche Beziehung besteht aber nun zwischen den (Denk-)Tätigkeiten, die man in der Wissenschaft als Experimentieren bezeichnen würde und den *individuellen* Kognitionen, welche in dieser Arbeit ebenfalls als „experimentell“ beschrieben werden sollen?

In den Naturwissenschaften ist Experimentieren eine zentrale Methode, neue Erkenntnisse zu gewinnen. Die Mathematik zählt nicht zwingend zu den Naturwissenschaften, gleichwohl kann Experimentieren bei mathematischem Wissenserwerb eine bedeutende Rolle spielen. Welche kognitiven Prozesse nun beim Experimentieren im Fach Mathematik von Bedeutung sind, soll an dieser Stelle zunächst aus theoretischer Perspektive betrachtet werden. Um die Bedeutung der Begriffe des „Experimentierens“ und des „experimentellen Denkens“ im Rahmen dieser Arbeit zu präzisieren, braucht es neben der kognitionspsychologischen Sicht daher weitere Sichtweisen aus verschiedenen Disziplinen: die naturwissenschaftliche Perspektive einerseits und die mathematische andererseits. In allen Disziplinen wird der Begriff des „Experiments“ verwendet

und ebenfalls in allen Disziplinen gibt es unterschiedliche Auslegungen des Begriffs. Was also im Rahmen dieser Arbeit unter experimentellem Denken und wie der Begriff des Experiments auf theoretischer Basis verstanden wird, soll in den nächsten Abschnitten deutlich werden. Zunächst wird ein Modell zu wissenschaftlichem Erkenntnisgewinn herangezogen, das nicht domänenspezifisch ist und mit seiner Klassifizierung von Denkprozessen eine vielversprechende Möglichkeit bietet, innermathematisches Experimentieren einzuordnen. Zu solchen epistemologischen Basisprozessen können theoretische Sichtweisen auf experimentelle Prozesse in der Mathematik in Beziehung gesetzt werden.

Die hier angedeutete Sicht auf mathematische Denkprozesse findet eine wissenschaftstheoretische Fundierung in den Arbeiten von C.S. Peirce, welche einen bedeutsamen theoretischen Bezugspunkt für diese Arbeit darstellen.

## 2.1 Wissenschaftlicher Erkenntnisgewinn nach Peirce

Der amerikanische Philosoph Charles Sanders Peirce (1839-1914) postuliert, mit drei verschiedenen Grundformen des wissenschaftlichen Schließens alle wissenschaftlichen Erkenntnisprozesse beschreiben zu können. Welche Formen Peirce dabei unterscheidet, soll im Folgenden entfaltet werden.

Peirce schreibt in seiner Abhandlung „The fixation of belief“ (Peirce et al., 1960a) wissenschaftlichem Schließen die Funktion von Erkenntnisgewinnung zu, indem er es als Schluss von Bekanntem auf Unbekanntes beschreibt: „The object of reasoning is to find out, from the consideration of what we already know, something else which we do not know.“ (Peirce et al., 1960b, 5.365)<sup>1</sup>. Vor diesem Hintergrund unterscheidet Peirce drei Schlussformen, welche – unter der Perspektive dieser Arbeit betrachtet – einen theoretischen Rahmen bieten, erkenntniserzeugende experimentelle Prozesse zu fassen.

Peirce charakterisiert diese drei Formen wissenschaftlichen Schließens in seiner Abhandlung „Three types of reasoning“ (Peirce et al., 1960a) näher. Bei den Benennungen der Peirce’schen Schlussformen werden im Folgenden die Begriffe *Deduktion*, *Induktion* und *Abduktion* verwendet, wohl wissend, dass Peirce für das Konzept der Abduktion im Verlauf der Entwicklung seiner Theorie unterschiedliche Termini gebraucht hat, deren Bedeutung sich ebenfalls veränderte (vgl. Fann, 1970; Reichertz, 2003; Richter, 1995; Santaella, 1997). Bei der Verwendung der genannten Begrifflichkeiten wird an dieser Stelle der Bezug vor allem zur späteren Theorie von Peirce (ab ca. 1890) hergestellt, die das Zusammenspiel der Schlussformen als forschungslogischen Dreischritt betrachtet. Die nachfolgende Betrachtung der Peirce’schen Philosophie beschränkt sich also auf einen sowohl thematisch als auch zeitlich begrenzten

<sup>1</sup> Verweise auf Collected Papers von Peirce geben in der Form a.b den Band (a) und den Abschnitt (b) an.

Teilbereich seiner Arbeiten, da die systematische Aufarbeitung seiner Arbeiten laut Reichertz (2003) bislang nur bruchstückhaft und teilweise nicht unmissverständlich geschehen ist. Ausschlaggebend für den hier gewählten Fokus auf einen Ausschnitt der Peirce'schen Ideenwelt ist dabei, dass Peirce die drei Schlussformen in seiner späteren Philosophie stärker nach ihrer Funktion im Erkenntnisprozess und nicht mehr ausschließlich nach ihrer logischen Form unterscheidet (Reichertz, 2003).

Die drei Schlussformen mit ihren unterschiedlichen Eigenschaften sollen im Folgenden jeweils für sich sowie in ihrer Verknüpfung und der sich daraus ergebenden „Dynamik des Erkenntnisprozesses“ dargestellt werden. In den darauffolgenden Abschnitten werden dann die vorgestellten Begriffe in Bezug zu mathematischem Experimentieren gesetzt.

### 2.1.1 Deduktion

Peirce beschreibt deduktives Schließen als die „Anwendung allgemeiner Regeln auf besondere Fälle“ (Peirce & Walther, 1967, p. 128) und nennt es auch „notwendiges Schließen“. Eine bekannte Regel wird auf einen unbekannten Fall angewendet. Diese Form des Schließens ist wahrheitsübertragend, das bedeutet, wenn die Voraussetzung wahr ist, ist auch die Folgerung wahr. Diese Form der Deduktion bringt keine neuen Erkenntnisse hervor, man kann sie als tautologisch bezeichnen (Meyer, 2007).

In der Mathematik als Wissenschaftsdisziplin kommt dieser Schlussform eine besondere Bedeutung zu, wenn aus bestehenden Sätzen Folgerungen abgeleitet werden, um neue Sätze zu beweisen. Die Deduktion ist die zentrale Methode zur Absicherung von mathematischen Erkenntnissen und ist eng verbunden mit dem axiomatisch-deduktiven Aufbau des mathematischen Wissenskorporus. In seiner Abhandlung „Three kinds of goodness“ fasst Peirce zentrale Eigenschaften der Deduktion zusammen: „Deduction is the only necessary reasoning. It is the reasoning of mathematics. It starts from a hypothesis, the truth or falsity of which has nothing to do with the reasoning; and of course its conclusions are equally ideal.“ (Peirce et al., 1960a, 5.145).

**Tabelle 2: Beispiel für eine Deduktion nach Peirce**

Aussage	Deduktion
Alle Perlen im Beutel sind blau.	1. rule
	↓
Alle Perlen auf dem Tisch sind aus diesem Beutel.	2. case
	↓
Alle Perlen auf dem Tisch sind blau.	3. result

Beim deduktiven Schließen werden auf der Basis von Aussagen weitere Aussagen abgeleitet, die den Wahrheitsgehalt nicht verändern. Ausgehend von einem Gesetz (rule) und einem Fall (case) wird auf ein Resultat (result) geschlossen. Im Beispiel (vgl. Tabelle 2) würde das bedeuten, dass alle Perlen auf dem Tisch blau sein müssen (result), wenn sie erstens aus dem Beutel stammen (case) und zweitens die Aussage gilt, dass alle Perlen im Beutel blau sind (rule). Ausgehend von zwei Prämissen folgt also eine Konklusion.

### 2.1.2 Induktion

Die Induktion beschreibt Peirce als den Schluss einer „Regel aus der Beobachtung eines Ergebnisses in einem bestimmten Fall“ (Peirce & Walther, 1967, pp. 128 f). Die Induktion ist die Umkehrung der Deduktion und ebenso tautologisch, aber nicht wahrheitsübertragend. Dennoch kann man sagen, dass das Ergebnis einer Induktion in gewisser Weise „wahrscheinlich“ ist.

„Induction consists in starting from a theory, deducing from it predictions of phenomena, and observing those phenomena in order to see how nearly they agree with the theory.“ (Peirce et al., 1960a, 5.170). Deutlich wird in dieser Aussage, dass bei induktiven Schlüssen bereits eine theoretische Vorannahme über einen Zusammenhang vorhanden ist und dass deren Passung zum Phänomen geprüft wird. Damit spricht Peirce der so verstandenen Induktion die Funktion der Gewinnung neuer Erkenntnisse ab. Die Leistung der Induktion besteht darin, eine bereits gebildete Hypothese an einzelnen Fällen zu prüfen, sie also zu bestätigen oder zu falsifizieren. Dazu bedarf es eines deduktiven Zwischenschritts, in dem Voraussagen getroffen werden, um eine Hypothese überhaupt erst überprüfbar zu machen. Eine Hypothese kann dann durch Einzelfälle bestärkt oder auch geschwächt werden: „Induction ist the experimental testing of a theory. [...] It never can originate any idea whatever.“ (Peirce et al., 1960a, 5.145).

**Tabelle 3: Beispiel für eine Induktion nach Peirce**

Aussage	Induktion
Alle Perlen im Beutel sind blau.	1. rule
	↑
Alle Perlen auf dem Tisch sind aus diesem Beutel.	2. case
	↑
Alle Perlen auf dem Tisch sind blau.	3. result

Induktiv geprüft werden also solche Aussagen, die eine Verallgemeinerung der zur Prüfung ausgewählten Aussage sind. Im Beispiel wird aus den beiden Prämissen, dass

die Perlen auf dem Tisch blau sind (result) und aus dem Beutel stammen (case), geschlossen, dass alle Perlen im Beutel blau sind (rule). Nach Peirce kann auf diese Weise kein neues Wissen gewonnen werden, da der Zusammenhang von Perlenfarbe und der Beuteltugehörigkeit bereits indirekt als Information (alle Perlen, die aus diesem Beutel stammen, sind blau) in den Prämissen enthalten ist.

Die besondere Bedeutung der Induktion liegt also nicht auf Erkenntnisgewinn, sondern verschiebt sich nach Peirce auf die Erkenntnisprüfung, mittels der die Gültigkeit einer Hypothese induktiv getestet werden kann. Bezogen auf das oben dargestellte Beispiel (vgl. Tabelle 3) würde das bedeuten, dass mit jeder weiteren blauen Perle, die aus dem Beutel gezogen wird, die Hypothese, dass alle Perlen im Beutel blau sind, bekräftigt wird. Zieht man aber nur eine einzige andersfarbige Perle, so kann die Hypothese abgelehnt werden. In diesem Sinn wird die Hypothese durch das Ziehen weiterer Perlen geprüft.

Die Beschreibung der Induktion bei Peirce unterscheidet sich vom landläufigen Verständnis des Begriffs Induktion. Eine gebräuchliche Unterscheidung von Schlussformen ist die von Induktion und Deduktion. Wird ausschließlich so unterschieden, so wird in der Regel der Induktion die Funktion der Erkenntnisgewinnung zugesprochen (vgl. beispielsweise Salmon, 1995). Flach und Kakas (2000a), beide Informatiker, beschäftigen sich mit der unterschiedlichen Verwendung der Begriffe und dem Verhältnis von Abduktion und Induktion. Sie betonen in diesem Zusammenhang die Kontextabhängigkeit der Sichtweise: In manchen Fällen, ist das Betrachten des Gemeinsamen, das „non-deductive reasoning“ sinnvoll, in anderen Fällen ist die Differenzierung notwendig. Im Fall des innermathematischen Experimentierens ist von Interesse, wie genau Erkenntnisgewinn entsteht und daher die Trennung von Abduktion und Induktion im Peirce'schen Sinne relevant. Diese Sichtweise der Induktion als Überprüfungsverfahren von Hypothesen wird nach Flach und Kakas aus Sicht der „confirmation theory“ gestützt, bei der die Funktion von induktiven Schlüssen als „hypothesis evaluation“ zur Bestätigung oder Widerlegung einer Hypothese (Flach & Kakas, 2000b, p. 4) festgelegt ist.

### 2.1.3 Abduktion

Der Begriff der Abduktion ist historisch gesehen eine Übersetzung des aristotelischen „Apagogé“, ein einleuchtender, aber unsicherer Schluss (Reichert, 2003). Die Abduktion bildet für Peirce den Anfang jeder Erkenntnis und ist als einzige der drei von ihm beschriebenen Schlussformen erkenntniserzeugend: „Abduction consists in studying facts and devising a theory to explain them. Its only justification is that if we are ever to understand things at all, it must be in that way.“ (Peirce et al., 1960a, S.145).

Der Abduktion kommt damit die Funktion zu, zu einem beobachteten Phänomen eine erklärende Hypothese zu bilden. Eine so gebildete Hypothese – also das Ergebnis ei-

nes Abduktionsprozesses – hat die Eigenschaft, dass sie zunächst einmal als unsicher anzusehen ist. Der Prozess der Abduktion selbst ist also ein Vorgang, bei dem eine Frage aufgeworfen wird, deren vorläufige Beantwortung eine Hypothese ist, die zwar vage, aber dennoch plausibel ist. Infolgedessen ist die Abduktion als einzige der drei Schlussformen diejenige, die neues Wissen hervorbringen kann, womit sie im Erkenntnisprozess eine bedeutende Rolle spielt. Peirce beschreibt den Prozess der Abduktion als einen kreativen Akt, der ausgehend von überraschenden Resultaten tentativ eine mögliche Erklärung liefert: „Abduction is the process of forming an explanatory hypothesis. It is the only logical operation which introduces any new idea; [...]” (Peirce et al., 1960a, 5.171).

Ausgangspunkt für abduktive Schlüsse ist also ein überraschendes Phänomen, zu dessen Verständnis eine Erklärung benötigt wird. Es wird dann ein Fall (case) als mögliche Ursache für das Phänomen gebildet, wobei das Ergebnis (result) auch aus einem anderen Grund entstanden sein kann (Meyer, 2009). Solche abduktiv gewonnenen Hypothesen sind wie bereits angesprochen plausibel, aber unsicher und genau dieser Umstand ist es, der es ermöglicht, per Abduktion zu neuem Wissen zu gelangen.

**Tabelle 4: Beispiel für eine Abduktion nach Peirce**

Aussage	Abduktion
Alle Perlen im Beutel sind blau.	2. rule
	↓
Alle Perlen auf dem Tisch sind aus diesem Beutel.	3. case
	↙
Alle Perlen auf dem Tisch sind blau.	1. result

Um das Beispiel der Perlen (vgl. Tabelle 4) beizubehalten, könnte man sich ein Szenario vorstellen, bei dem mehrere Beutel mit unterschiedlich farbigen Perlen vorhanden sind. Einige blaue Perlen liegen auf dem Tisch (result). Aus welchem Beutel die einzelnen Perlen stammen, ist unbekannt. Geht man davon aus, dass es verschieden farbige Perlen in den Beuteln gibt, so ist das Auftreten ausschließlich blauer Perlen einigermaßen überraschend. Eine mögliche Erklärung für dieses Phänomen wäre, dass die Perlen auf dem Tisch alle aus dem gleichen Beutel stammen (case) und dieser nur blaue Perlen enthält (rule). Das klingt einleuchtend, ist aber nicht zwingend wahr. Die Perlen könnten auch aus verschiedenen Beuteln stammen oder es könnten auch andersfarbige Perlen in dem einen Beutel enthalten sein. Das bedeutet, diese abduktiv gewonnene Hypothese ist noch unsicher und muss daher noch auf ihre Gültigkeit geprüft werden. Sie bietet aber eine mögliche Erklärung für das auftretende Phänomen.

Das Perlenbeispiel verdeutlicht hier vor allem die logische Form der Abduktion im Vergleich zum Schema der Deduktion und Induktion. Zur Untermauerung der besonderen Bedeutung der Abduktion im Erkenntnisprozess soll allerdings noch ein weiteres Beispiel herangezogen werden, das deutlich macht, dass die Abduktion nicht nur eine Erklärung für ein Phänomen liefert, sondern darüber hinaus wesentlich zur Entwicklung einer neuen Theorie beitragen kann. Deutlich wird dieser Charakter der Abduktion an einem von Peirce selbst dargestellten Beispiel. Peirce führt zur Verdeutlichung der Hypothesenentwicklung durch Abduktion ein von ihm im Verlauf der Entwicklung seiner Philosophie mehrfach verwendetes Beispiel an: die Entdeckung der elliptischen Umlaufbahn des Planeten Mars durch Kepler (Peirce et al., 1960b, 2.96). Zunächst nahm Kepler an, dass sich die Planeten in kreisförmigen Bahnen um die Sonne bewegen. Brahe beobachtete davon abweichende Positionen des Planeten Mars (result). Um dieses (überraschende) Phänomen zu erklären, vermutete Kepler, dass sich die Planeten elliptisch um die Sonne bewegen (rule) und daher der Mars sich ebenso bewege (case). Damit konnte Kepler die von Brahe beobachteten Werte mit einem neuen allgemeinen Gesetz in Einklang bringen (Meyer, 2009).

**Tabelle 5: Keplers Abduktion nach Peirce**

Aussage	Abduktion
Planetenbahnen um die Sonne sind elliptisch.	2. rule
	↓
Der Mars bewegt sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne.	3. case
	↖
Empirische Werte der Umlaufbahn des Mars (Brahe).	1. result

An diesem historischen (vereinfacht dargestellten) Beispiel (vgl. Tabelle 5) wird deutlich, inwiefern die Schlussform der Abduktion zu neuem Wissen oder gar zu neuen Theorien beitragen kann. Aus der Sicht von Peirce ist die Abduktion die einzige Schlussform, die dies leisten kann. Die Abduktion kommt also von einer Prämisse zu einer Konklusion, indem sie ein Gesetz (rule) für einen Fall (case) unterstellt. In dieser Hinsicht unterscheidet sich die Abduktion in ihrer logischen Form von der Deduktion und der Induktion, die von jeweils zwei Prämissen zu einer Konklusion kommen. In diesem Sinne ist die Abduktion formallogisch kein Schluss, da hier nicht mehrere Aussagen verbunden werden, um daraus zu schließen (Meyer, 2009).

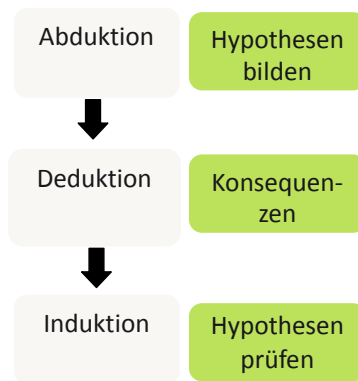
Die hier ausgeführte Beschreibung der Abduktion nach Peirce fokussiert auf diejenigen Aspekte, die als Grundlage zur Erfassung experimenteller Denkprozesse zentral erscheinen und bezieht sich wie bereits angesprochen auf eine zeitlich begrenzte Phase der Peirce'schen Philosophie. Die Bedeutung, die der Abduktion in Bezug auf experi-



mentelles Denken in der Mathematik zukommt, lässt sich besser durch das Zusammenwirken der drei Schlussformen im Peirce'schen Sinn verdeutlichen.

#### 2.1.4 Verhältnis der drei Schlussformen

Abbildung 1 verdeutlicht das Zusammenwirken der drei Schlussformen im Erkenntnisprozess: Eine Hypothese wird abduktiv gebildet. Ausgehend von dieser Hypothese werden Voraussagen getroffen, d.h. es werden deduktiv Konsequenzen expliziert (wenn... dann..), die daraufhin induktiv überprüft werden. In Peirces eigenen Worten: "Its only justification is that from its suggestion deduction can draw a prediction which can be tested by induction, and that, if we are ever to learn anything or to understand phenomena at all, it must be abduction that this is to be brought about." (Peirce et al., 1960a, 5.171).



**Abbildung 1: Verhältnis und Bedeutung der Schlussformen nach Peirce**

Im ersten Schritt, der Abduktion, trifft Peirce nochmals eine Unterscheidung zwischen dem *Prozess* und dem *Ergebnis*. Mit dem Prozess der Abduktion meint er das Erweitern der vorhandenen Daten um etwas Neues. Wie genau dies geschieht, wie bekannte und neue Objekte oder Eigenschaften in sinnvoller Weise zusammengeführt werden, ist unklar, jedoch folgt dieser Phase die Formulierung einer Hypothese als Ergebnis des Prozesses. Reichertz beschreibt Hypothesen nach Peirce als „die sprachlichen Zeugen nicht-sprachlicher Schlussprozesse“ (Reichertz, 2003, p. 94). Aus der Unsicherheit einer abduktiv gebildeten Hypothese ergibt sich die Notwendigkeit ihrer Überprüfung. Dazu ist ein deduktiver Schritt erforderlich. Dieser deduktive Schritt hat an dieser Stelle keine beweisende Funktion, sondern dient der Ableitung von Konsequenzen aus der Hypothese. Es werden also Voraussagen getroffen, die dann in einem weiteren Schritt überprüft werden können. Dieser letzte Schritt besteht aus einer induktiven Prüfung an Einzelfällen, so dass dann die Hypothese falsifiziert werden kann oder mit einem gewissen – nicht präzise zu bestimmenden – Grad von Wahrschein-

lichkeit („Plausibilität“) deren Korrektheit angenommen werden kann. Reichertz fasst den Prozess wie folgt zusammen: „Die Abduktion sucht nach Theorien, die Deduktion nach Voraussagen, die Induktion nach Fakten“ (Reichertz, 2003, p. 43).

Alle drei Schritte haben im Prozess des Erkenntnisgewinns eine besondere Bedeutung und nur das Zusammenspiel aller drei Schlussformen trägt zu einem tatsächlichen Erkenntnisgewinn bei: „Deduction proves that something *must be*; Induction shows that something *actually is* operative; Abduction merely suggests that something *may be*.” (Peirce et al., 1960a, 5.171). In diesem Sinn kann keine der drei Schlussformen isoliert von den anderen neues Wissen generieren. Das wirft natürlich die Frage auf, wann genau Erkenntnisgewinn abgeschlossen ist. Aus Sicht der Mathematik könnte man der Auffassung sein, dass erst durch einen Beweis deduktiv abgesichertes Wissen neue Erkenntnis hervorbringt. Andererseits gibt es gerade in dieser Domäne eine Vielzahl von unbewiesenen Vermutungen, die (vorläufig) als wahr gelten. Zu wirklichem Erkenntnisgewinn bedarf es nach Peirce unbedingt der Abduktion als „Initialzündung“ neuen Wissens. Abduktiv kommt ein neuer Aspekt hinzu, hier entsteht die Idee, ohne die keine Erkenntniserweiterung stattfinden kann. Die Idee markiert somit den Beginn des Erkenntnisprozesses. Die Formulierung dieser neuen Idee in Form einer Hypothese ist insofern fundamental, als sie die Voraussetzung ihrer Überprüfung bildet. Die besondere Bedeutung des nachfolgenden deduktiven Schritts ist die, dass hier die Überprüfung einer Hypothese durch Voraussagen ermöglicht wird. Es werden also ausgehend von der Hypothese (die zunächst als gültig angenommen wird) Aussagen deduktiv abgeleitet, die überprüft werden können, „[...] we [...] deduce [...] a promiscuous variety of consequences to the effect that if we perform certain acts, we shall find ourselves confronted with certain experiences“ (Peirce, Hartshorne, Weiss, & Burks, 1998, 8.209). Die anschließende Induktion entspricht einer experimentellen Überprüfung: „[...] by inductive reasoning I mean a course of experimental investigation“ (Peirce et al., 1960a, 5.168). An weiteren Einzelfällen (Fakten) kann die Gültigkeit der Hypothese bekräftigt oder widerlegt werden. Wird eine Hypothese widerlegt, so beginnt der Prozess wieder von vorn, allerdings mit größerem Vorwissen, im Idealfall bis eine geeignete Erklärung für das Phänomen gefunden wird.

In dieser dreischrittigen Erkenntnistheorie von Peirce ergänzen sich letztlich zwei wesentliche und zugleich grundverschiedene Prozesse: der der Erkenntnis*findung* und der der Erkenntnis*begründung*. Beide haben ihren Ausgangspunkt in der Abduktion, im Prozess, in dem die Idee gefunden wird und ihrem Produkt, der Hypothese. Während die Abduktion selbst noch keine Rechtfertigung erfordert, ist sie bei der Hypothese unverzichtbar. Um das abduktiv neu entdeckte Wissen zu prüfen, wird es durch die Formulierung einer Hypothese in einem sprachlichen Satz so dargestellt, dass Aussagen abgeleitet werden können. Ohne die formulierte Hypothese also wäre das Wissen nicht überprüfbar. Die Hypothese bildet somit das „Bindeglied zwischen der Phase der Entdeckung und der der Überprüfung“ (Reichertz, 2003, p. 95). Der Überprüfungsprozess umfasst dabei mehr als nur das „technische“ Abarbeiten von Einzelfallprüfungen.

Experimentelles Denken

Theoretische und empirische Konkretisierung einer  
mathematischen Kompetenz

Philipp, K.

2013, XV, 201 S. 39 Abb., 6 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-01119-2