

2 Über die Mathematik zur Philosophie. Platonischer Erkenntnisweg und moderne Mathematik

GREGOR SCHNEIDER

2.1 Einleitung¹

Das platonische Ideal „über die Mathematik zur Philosophie“, das vor allem bei Mathematikern lebendig war und ist, die sich wie Kurt Gödel mit Grundlagenfragen ihres Faches beschäftigen, ist eine bislang unerfüllte Utopie. Der Ausdruck ‚Philosophie‘ bleibt bei diesem Ideal weitgehend unbestimmt, sie muss nur etwas sein, das mindestens so klar und rein ist wie die Mathematik, aber tiefer das Wesen der Welt und des Lebens erfasst als die mathematischen Gedanken. Man findet dieses Ideal einerseits an prominenter und zitierbarer Stelle, andererseits auch relativ vage und unwiderlegt bei Platon in seinen überlieferten Dialogen und dem sogenannten Siebten Brief. Wie aber hat sich Platon diesen Erkenntnisweg über eine Beschäftigung mit der Mathematik zur Fähigkeit des Philosophierens genauer vorgestellt und was für Auswirkungen haben die Veränderungen in der Mathematik bis auf den heutigen Tag darauf, was für eine Bedeutung diesem Teil platonischer Bildung aktuell zukommen kann?

2.2 Zu einem uneingelösten Ideal

Nach Platon ist das Eingeständnis, die Antwort auf eine Frage nicht zu kennen, ein entscheidendes Moment jedes Erkenntnisprozesses. Entsprechend wird dieser Abschnitt versuchen, die Leserin in eine derartige Ausweglosigkeit (Aporie) zu führen, indem erstens plausibel gemacht wird, dass wir aus den wichtigsten Textstellen in der *Politeia* überhaupt keine richtige Vorstellung darüber haben, wie Platon sich den Weg über die Mathematik zur Dialektik gedacht hat, zweitens dieser Weg auf keinen Fall entlang der modernen Mathematik aufgrund ihres Gegenstandsbereichs verläuft und drittens bereits die ‚Denkweise‘ unserer Mathematik einen Aufstieg im Sinne Platons verhindert.

¹ Ich danke Gregor Nickel und dem unbekannten Referee für die hilfreichen Anmerkungen! Die Argumentationen des ersten Teils dieses Beitrages finden sich in anderer Form im letzten Kapitel, die aus Abschnitt 2.3 im ersten Kapitel meiner Dissertation (Schneider 2013). Die Übersetzung der euklidischen Definitionen und Postulate entspricht weitgehend der von (Thaer 1997, S. 1 ff.).

2.2.1 Die vier mathematischen Wissenschaften – eine Aporie

Platons Curriculum für die angehenden Staatsoberhäupter sieht in ihren zwanziger Jahren eine zehnjährige, konzentrierte Beschäftigung mit den vier mathematischen Wissenschaften² vor (*Politeia* 537bd). Sie dienen – so Sokrates in der *Politeia* – als Vorspiel für die philosophische Beschäftigung, die Dialektik, für die fünf Jahre vorgesehen sind, und die nach weiteren fünfzehn Jahren politischer Betätigung zur Schau der Idee des Guten führen sollte. Demnach ist nach platonischer Auffassung eine wahre philosophische Betätigung auf diesem Weg erst nach einer – modern gesprochen – Promotion in Mathematik zusammen mit einer dabei stets erfolgten Ausrichtung auf das in der Mathematik aufscheinende Höhere möglich.

Obgleich die vier mathematischen Wissenschaften als späteres Quadrivium der sieben freien Künste eine lange Wirkungsgeschichte haben, sind die Ausführungen in der *Politeia* (521c-539d) alles andere als nachvollziehbar. Eine erste Verständnisschwierigkeit ergibt sich daraus, dass auch bei den beiden scheinbar auf die Empirie bezogenen Wissenschaften – der Harmonielehre und der Astronomie – der Bezug auf das sinnlich Gegebene abgelehnt wird (*Politeia* 527ab/529c/530b). Wie sollte man aber in der Harmonielehre ohne empirischen Bezug, rein mathematisch von sich zueinander „harmonisch“ verhaltenden Zahlen sprechen können? Erklären die Kommentatoren die Harmonik bestimmter Zahlverhältnisse ja gerade durch die Harmonie der Töne, wenn man eine Saite entsprechend des Zahlverhältnisses verkürzt und zum Schwingen bringt.³ So wurden in manchen neuplatonistischen Werken Platons Ausführungen zur Harmonielehre auch anders, und zwar so verstanden, dass man mittels der musikalischen Harmonie auf einen seelischen Zusammenklang aufmerksam werden kann, und über diesen auf einen geistigen (vgl. Heilmann 2007).

Ähnlich wird bei der Besprechung der Astronomie der Vergleich mit dem Verhältnis von Skulptur und ihrer Vorzeichnung gewählt,⁴ der nicht für das Verhältnis von tatsächlichen Planetenbewegungen und ihrer mathematischen Idealisierung passt. Denn auch wenn sowohl die geometrische Idealisierung wie die Skulptur erst geschaffen wird, so ist sie doch eine Ergänzung, ein Modell, und nicht wie die Skulptur oder das Gemälde etwas Realeres oder zumindest Vollkommneres als die Vorzeichnung, und die Existenz der realen Sternenbewegungen nicht dazu da, damit wir davon Idealisierungen bilden. Der Mathematikhistoriker Ian Mueller ist demgemäß der Meinung, dass man bei der platonischen Astronomie sich an dem, was im *Timaios* „Astronomisches“ geschildert wird, orientieren müsste, was mit einer mathematischen Theorie auch in einem weiten Sinn nicht viel zu tun hat.⁵

² Eigentlich zählt Sokrates fünf, da er die Ebene Geometrie von der Stereometrie explizit unterscheidet (*Politeia* 528ae). Mit (Böhme 2000, S. 66 ff.) kann man weiter die Astronomie in eine Zeitlehre und eine Bewegungslehre aufteilen.

³ So auch (Böhme 2000, S. 86): „So überraschend Platons Forderung, das Wesen von Harmonie in einer Zahlenbeziehung zu suchen, immer wieder wirkt: Gerade sie ist in der pythagoreischen Harmonielehre erfüllt. Es sind ganz bestimmte ausgezeichnete Zahlenverhältnisse, deren Realisierung als harmonisch empfunden wird.“

⁴ „Also, sprach ich, jene bunte Arbeit am Himmel muß man nur als Beispiele gebrauchen um jenes nämlich zu erlernen, wie wenn einer auf des Daidalos oder eines anderen Künstlers oder Malers vortrefflich gezeichnete und fleißig ausgearbeitete Vorzeichnungen trifft.“ (*Politeia* 529de)

Ähnliche Verständnisschwierigkeiten erwarten einen bei den Erläuterungen zu Arithmetik und Geometrie (522b–527c). Platon lässt Sokrates zwar zur Arithmetik noch ausführlich erklären, wie der Begriff der Einheit, insofern er in der Wahrnehmung stets mit seinem Gegenteil, der Vielheit, zusammen auftritt, einen die Seele auffordernden Charakter hat, die Einheit und damit die Zahlen unabhängig von Wahrnehmungen zu untersuchen – also möglichst rein zu denken. Jedoch mit dem an der Darstellung der Astronomie und Harmonielehre geschulten Problembewusstsein scheinen auch diese Erläuterungen nur ein erster Anfang und noch nicht das für Platon an den Wissenschaften Wesentliche zu sein. Das Ziel, das letztlich durch die Beschäftigung erreicht werden soll, ist ja eine *ethische* Erkenntnis. Denn die zukünftigen Staatslenker sollen es zur Erkenntnis des Guten bringen, um nach der Rückkehr in die ‚Höhle‘ ihren Staat gut leiten zu können. „Sehr nützlich allerdings [ist die Suche, welches harmonische Zahlen sind und welches nicht] für die Auffindung des Guten und Schönen“ (*Politeia* 531c).⁵ Wie sollte die Beschäftigung mit Mathematik zu einem Wissen darüber führen, wie man gut handelt? Bedeutsam hierbei ist die Beobachtung, dass die grundlegenden Konzepte platonischer Ethik mit denen der vier mathematischen Wissenschaften gleich zu sein scheinen.⁶ Aber ein unabsehbarer Erkenntnisfortschritt wäre es, ihre Identität aufzuzeigen, denn die Frage bleibt: Wie sollte man aus der Beschäftigung mit der mathematischen Proportionalität etwas über die „ethische“ Verhältnisgleichheit lernen und – was nicht vergessen werden sollte – ein besserer Mensch werden?⁸

Nun wird aber die Wirkung der Beschäftigung mit den vier mathematischen Wissenschaften konkret angegeben, aber anders als vielleicht erwartet:

⁵ So schreibt er in (Mueller 2005, S. 114): „There are many obscurities in Socrates’ discussion of astronomy, but it is clear that Socrates is envisaging a science which is quite different from anything we think of as astronomy, even mathematical astronomy, in which the observed heavenly motions are to some extent idealized to make them more susceptible to geometric representation.“ Er hat dabei Meinungen wie die von (Mittelstraß 2005, S. 234) im Blick, die Platon so verstehen wollen, dass seine Astronomie in geometrischen Modellbildungen des Sichtbaren besteht (ähnlich Frede 2006, S. 137 f.). Diese Auffassung der Astronomie wie auch die der anderen mathematischen Wissenschaften steht im übrigen in einem offensichtlichen Widerspruch zum Liniengleichnis. Denn in diesem wird die ganze Mathematik *nicht* in einen Seinsbereich der sichtbaren *Dinge* abgebildet, sondern nur in den der Schatten und Spiegelbilder. Es wäre danach auch kein abstrahierender Aufstieg von den Dingen ins Mathematische von Platon vorgeschlagen worden.

⁶ Ebenso in *Politeia* 526de: „Zu dem allen, sagte ich, ist freilich ein sehr kleiner Teil der Rechenkunst und der Meßkunst hinreichend; der größere und weiter vorschreitende Teil derselben aber, laß uns zusehn, ob der einen Bezug hat auf jenes, nämlich zu machen, daß die Idee des Guten leichter gesehen werde. Es trägt aber, sagten wir, alles dasjenige hierzu bei, was die Seele nötigt, sich nach jener Gegend hinzuwenden, wo das Seligste von allem Seienden sich befindet, welches eben sie auf jede Weise sehen soll.“

⁷ Diese sind u. a. Einheit, Proportion, Ordnung; vgl. Burnyeat 2000, S. 75 ff., insbesondere S. 76f.: „What is distinctive about Plato is his systematic exploitation of the fact that Greek value-concepts like concord, proportion, and order are also central to contemporary mathematics. The fundamental concepts of mathematics are the fundamental concepts of ethics and aesthetics as well, so that to study mathematics is simultaneously to study, at a very abstract level, the principles of value. Your understanding of value is enlarged as you come to see that such principles have applications in quite unexpected domains, some of them beyond the limits of human life in society. Conversely, your understanding of mathematics is perfected when you see it as the abstract articulation of value. The realm of mathematics is ‘intelligible with the aid of a first principle’ (511d), because in the light of the Good you see mathematics for what it really is.“

⁸ Vgl. (Gill 2004) für andere Einwände gegen Burnyeat.

„Es ist gar nicht einfach, sondern schwer zu glauben, dass durch diese Kenntnisse jeweils ein Vermögen der Seele völlig gereinigt und wieder befeuert wird, das durch die anderen Beschäftigungen zerstört und betäubt wird, dessen Bewahrung aber wichtiger ist als die von zehntausend Augen. Denn nur dadurch wird die Wahrheit gesehen.“

Politeia 527de, übersetzt von (Frede 2006, S. 138)

Ist mit dem „Sinn der Seele“ das abstrakte Denken gemeint, das „gereinigt“ und ange-regt wird? Gemäß dem Dialog *Phaidon* ist die ungestörte Wahrheit erst bei der Lösung der Seele vom Körper erreichbar, am besten also nach dem Tod (*Phaidon* 65e–67a). Insofern ist mit dem „Sinn der Seele“ eine unkörperliche, *nicht* auf weltliche Dinge bezogene Erkenntnis des eigentlich Wirklichen möglich – und deshalb wohl weniger ein abstraktes Denken gemeint.

Aber wird an jenen esoterisch klingenden Dialogstellen nicht einfach metaphorisch gesprochen? Hier ist zu beachten, dass die platonischen Dialoge durch ihre literari-sche Form sehr sensibel auf an sie herangetragene Interpretationswünsche reagieren und sie zu erfüllen suchen. Im speziellen Fall der mathematischen Wissenschaften verstärkt sich diese Wirkung, da hier eine ungewohnte Verbindung rein rationaler mit esoterisch, mystischen Elementen aufscheint. Ein moderner oberflächlicher Wis-senschaftsbegriff, der aus einer polemischen Abgrenzung zur ‚unwissenschaftlichen‘ Esoterik, dem abzulehnenden ‚Anderen‘, gewonnen wird wie neuere religionswissen-schaftliche Untersuchungen gezeigt haben (Hanegraaff 2012), muss das für ihn ‚Ir-rationale‘ von vornherein ausgrenzen. Ich plädiere in Blick auf Plato dafür, das nicht Nachvollziehbare und ‚Fremde‘ zunächst stehen zu lassen, die Ausweglosigkeit anzu-nehmen und nicht gegen den Text zu rationalisieren.

In Platons Konzeption der vier *mathemata* als Mittel zur Umlenkung der Seele hat man demnach etwas vor sich, das man (zumindest vorerst) inhaltlich nicht nachvollziehen kann – ungeachtet des Umstandes, dass sich zu den rationalen Hintergründen der mathematischen Wissenschaften noch einiges sagen ließe (vgl. z. B. Böhme 2000 und Burnyeat 2000).

2.2.2 Der Aufstieg über die moderne Mathematik – wohin auch immer

Platon betont in der Darstellung der vier mathematischen Wissenschaften durchge-hend, dass man sie nicht nur betreiben, sondern sich ihnen *im Hinblick auf das Ideelle* in ihnen widmen muss, will man sich mit ihnen für die Dialektik üben: „[...] [sie sol-len] sich mit [der Arithmetik] beschäftigen, nicht auf gemeine Weise, sondern bis sie zur Anschauung der Natur der Zahlen gekommen sind durch die Vernunft selbst (tē noēsei autē) [...]“ (*Politeia* 525c).⁹ In der modernen Mathematik wird der Blick auf

⁹ Ähnlich zur Arithmetik: „Sie mag wohl nach ihrer Natur zu dem auf die Vernunftseinsicht Führenden, was wir suchen, gehören, niemand aber sich ihrer recht als eines auf alle Weise zum Sein Hinziehenden bedienen.“ (523a). Der die Vernunft auffordernde Charakter der Arithmetik wird daraufhin so dargestellt, dass in der Wahrnehmung Gegensätze an ein und demselben Gegenstand auftreten, von der Wahrnehmung

das Ideelle im Sinne Platons aber verstellt, da es für ihre grundlegenden Objekte, die natürlichen Zahlen und die Mengen, keine Ideen gibt oder sie zumindest so gefasst werden, dass das hinter ihnen liegende Ideelle nicht zur Erscheinung kommt; so die These, die in diesem Abschnitt mit zwei knappen Argumentationen gestützt werden soll.

Zu den natürlichen Zahlen. Wer mit der platonischen Idee einer Sache bekannt ist, kennt das Wesen dieser Sache und muss Auskunft geben können über das, was allen Dingen gleicher Art gemeinsam ist (*Politeia* 534b, *Parmenides* 132a). Im Umkehrschluss heisst dies, dass nach Platon zu jeder Gruppe von Dingen mindestens dann keine Idee existiert, wenn es nichts Gemeinsames gibt, was ihre (scheinbar) gleiche Art ausmacht. Dass es nichts essentiell Gemeinsames gibt, ist unter anderem dann der Fall, wenn es eine begriffliche Abhängigkeit zwischen den Dingen gibt. So ist die Art von ihrer Gattung begrifflich abhängig, insofern z. B. die Art *Mensch* den Begriff *Lebewesen* notwendig voraussetzt, es aber noch andere Begriffe gibt, die andere Arten der Gattung *Lebewesen* sind. Nach der gemeinsamen Idee von Mensch und Lebewesen zu fragen, macht hier keinen Sinn, weil man mit der Begrifflichkeit Gattung-Art gerade unterschiedliche Ideen in ein hierarchisches Verhältnis setzt. Insofern die begrifflich ‚spätere‘ Sache die begrifflich ‚frühere‘ voraussetzt für ihr Verständnis, enthält sie zum einen in dem, was sie ausmacht, die ‚Frühere‘, muss sich zum anderen in dem, was sie ausmacht, durch etwas, was die ‚Frühere‘ nicht enthält, unterscheiden. Das klassische Beispiel dafür ist die Folge von Punkt, Linie, Fläche und Körper, in der die Linie den Punkt voraussetzt etc. (*Aristoteles Topik* 141b).

In den platonischen Dialogen findet sich dieses negative Kriterium für Ideen nicht, aber Aristoteles erwähnt es in der *Nikomachischen Ethik*:

„Diejenigen, die diese Lehre [von den Ideen] aufgebracht haben, haben überall da keine Ideen angenommen, wo sie von einem Früher und Später redeten (darum haben sie auch keine Gesamtidee der Zahlen aufgestellt).“

Aristoteles NE, 1096a

Aristoteles berichtet hier von einem Schluss der Platoniker darauf, dass es keine Idee der Zahlen gibt. Die erste Prämisse in diesem Schluss ist, dass es bei begrifflich abhängigen Dingen keine gemeinsame Idee gibt. Die zweite, nicht explizierte Prämisse lautet: „Die natürlichen Zahlen sind begrifflich abhängig voneinander.“ Ist das (für Platon) tatsächlich der Fall?

Zum einen ist es recht offensichtlich, dass unabhängig davon, ob man einen ordinalen oder kardinalen Zahlbegriff welcher genaueren Ausprägung auch immer betrachtet, die jeweilige Bestimmung einer größeren Zahl die kleineren Zahlen im jeweiligen Sinne ‚enthält‘. Zwar scheinen die Stellen zur Konstitution der Zahlen im platonischen Korpus weder unter sich noch zum Teil jeweils für sich genommen kohärent zu sein; aber sie haben entweder wie üblich die Form, dass von den kleineren Zahlen zu den

allein damit nicht verständlich sind, und somit die ‚Seele‘ aufgefordert wird sie ohne Wahrnehmung zu ‚betrachten‘. Das kann allerdings nur der erste Schritt, negativ der Wahrnehmung gegenüber, sein, denn dafür braucht man keine Wissenschaft.

größeren übergegangen wird, oder es werden, wenn mit der Unterscheidung von gerader und ungerader Zahl begonnen wird, die Zahlen bereits als gegeben vorausgesetzt.¹⁰ Textstellen wie *Parmenides 143cd* sind Hinweise auf ein Bewusstsein für die begriffliche Abhängigkeit zwischen den natürlichen Zahlen.

Es gibt also keine platonische Idee der natürlichen Zahlen. Aber jeweils eine Idee jeder einzelnen natürlichen Zahl.¹¹ Die aktuelle Mathematik konzipiert die natürlichen Zahlen aber immer als Ganzes, meistens in der Art und Weise der Axiome der Peano-Arithmetik. Damit rückt sie aber die einzelnen Zahlideen aus dem Blickfeld und schiebt ein Konstrukt ein, dem keine platonische Idee entspricht.

Zu den mathematischen Mengen. Zunächst ist es bedeutsam den Unterschied zwischen unserem modernen Mengenbegriff und einem platonisch-frühgriechischen zu bemerken. Während wir unter einer (mathematischen) Menge eine Ansammlung untereinander beziehungsloser Objekte begreifen, bei der bis auf die Elementschaftsrelation von allem anderen abstrahiert wurde, so kommt man der frühgriechischen näher, wenn man sich vorstellt, dass stets von der Einheit des Objekts ausgegangen wird und die Teile nachgeordnet sind.¹² Bei Platon findet sich die Einheit als höchstes (Wirk)Prinzip, das seine Einheitlichkeit an die Ideen stärker weitergibt als an die weltlichen Dinge.¹³ Während Ideen gerade die Einheit vieler gleicher Dinge sind und ihre begrifflichen Teile notwendig aufeinander bezogen sind, sind moderne mathematische Mengen genau das Gegenteil, nämlich beliebige, zufällige Ansammlungen, die von so wenig wie möglich zusammengehalten werden.¹⁴ Dadurch ist ein Begriff der Menge eine Art Gegenkonzept zu den Ideen, damit in der Nähe der platonischen Materie- oder Raum,idee‘ (*chōra*) anzusiedeln, die „selbst durch eine Art von unechtem Denken ohne Bewusstsein erfassbar, kaum sicher erfassbar, worauf wir wie im Traum blicken“ (*Timaios 52b*) ist. Konzipiert man jedoch die mathematischen Mengen – wie aktuell üblich – hierarchisch und rein durch ihre Elemente gegeben, dann sind sie begrifflich abhängig und das analoge Argument gegen die Existenz einer Gesamtidee aller Zahlen kommt auch hier zum tragen. Insofern gibt es nach Platon keine Idee der Menge, die hinter den durch die ZFC-Axiome gegebenen Mengen stünde.

Platon hat also mathematische Objekte und Objektkategorien ihrem Ideengehalt nach differenziert. Hier geht es nur darum plausibel zu machen, dass Platons Vorstellung eines Aufstiegs über die Mathematik zur Philosophie mit einer Mathematik hantiert,

¹⁰ Die Hauptstellen sind *Politikos 262de*, *Philebos 18b*, *Parmenides 143a–149d* und im unechten aber platonistischen Dialog *Epinomis 990e–991b*. Gleiches gilt für weitergehende Berichte über die Zahlengeneses bei Platon, z. B. bei Aristoteles *Metaphysik 987b33–4*. Für Aristoteles selbst siehe z. B. *Kategorien 14a*.

¹¹ Man bemerke den für das Altgriechische eher ungewohnten Gebrauch des Plurals, wenn es um die Ideen der Zahlen geht (*Politeia 525cd*).

¹² Mit diesem Ansatz erklären sich auch die Definitionen der Teile einer Zahl in Buch VII besser. Zum Einheitscharakter der Zahlen bei Platon siehe auch (Böhme 2000, S. 49 ff.).

¹³ Das ergibt sich aus der sogenannten *ungeschriebenen Lehre* Platons, nach der die Überidee des Guten mit dem Einen identisch ist, nach dem Sonnengleichnis ‚bescheint‘ die Einheit damit die Ideen und verhilft ihnen zum Sein.

¹⁴ Die Mengentheorie in der Axiomatisierung der sogenannten ZFC-Axiome lebt zum Teil von genau der Differenz zwischen den begrifflich bzw. allgemein bestimmmbaren Mengen und dem Rest, von dem man im allgemeinen nur weiß, dass ‚dort‘ Mengen existieren ohne sie im einzelnen angeben zu können.

die nicht die moderne sein kann. Würde man den systematische Kern der Argumente aus diesem und dem nächsten Abschnitt in den aktuellen Diskurs einbringen, so würden diese Überlegungen – entgegen dem Sprachgebrauch in der Philosophie der Mathematik – weniger einem mathematischen Platonismus nahe stehen, als vielmehr intuitionistischen und konstruktivistischen Standpunkten.

2.2.3 Die Erfindung metamathematischen Betons

Hilberts Axiomatisierung der elementaren Geometrie (Hilbert 1962) repräsentiert für viele Mathematiker und Philosophen paradigmatisch die Art und Weise, wie man die Grundlegung eines Teilbereichs der Mathematik zu besorgen habe.¹⁵ Es werden im folgenden zwei Aspekte dieser Methode hervorgehoben und von ihnen gezeigt, dass sie antiplatonisch sind.

Die ersten drei Axiome der Verknüpfung lauten folgendermaßen (Hilbert 1962, S. 3 ff.):

1. Zu zwei Punkten A, B gibt es stets eine Gerade a , die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.¹⁶
2. Zu zwei Punkten A, B gibt es *n i c h t m e h r a l s* eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.
3. Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Erster Aspekt. Entscheidend ist nun, dass die in den Axiomen benutzten Ausdrücke wie „Punkt“ oder „Gerade“ ihre mathematische Bedeutung nur aus den Beziehungen gewinnen, in die sie in den Axiomen gestellt werden.¹⁷ Da die Ausdrücke unwichtig sind, und es nur auf die Zusammenhänge ankommt, kann man die Axiome adäquat in eine formalen Logik übertragen.¹⁸ Dieses Vorgehen bewahrt die Mathematik von allen nicht so klaren Bedeutungsnuancen einzelner Ausdrücke und beschränkt den Inhalt der Axiome auf die Zusammenhänge, die im Beweisen tatsächlich gebraucht und

¹⁵ Einmal abgesehen davon, dass Hilberts Axiome nicht in einer Prädikatenlogik erster Stufe, die es so auch noch nicht gab, formalisiert angegeben wurden.

¹⁶ „Hier wie im Folgenden sind unter zwei, drei, ... Punkten bzw. Geraden, Ebenen stets *v e r s c h i e d e n e* Punkte, bzw. Geraden, Ebenen zu verstehen.“

¹⁷ Wie Hilbert in einem Brief an Frege anmerkte (Frege 1976, S. 69): „Ja es ist doch selbstverständlich eine jede Theorie nur ein Fachwerk (Schema) von Begriffen nebst notwendigen Zusammenhängen, wobei die Grundelemente in beliebiger Weise gedacht werden können. Z. B. statt Punkte ein System Liebe, Gesetz, Schornsteinfeger ... und das alle Axiome erfüllt, so gilt auch von diesen Dingen der Pythagoras.“

¹⁸ Eine ad-hoc Formalisierung in eine Prädikatenlogik erster Stufe der drei Axiome kann folgendermaßen aussehen: (1.) $\forall x, y (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \rightarrow \exists s (G(s) \wedge \text{Inz}(x, y; s)))$. (2.) $\forall x, y, s, t (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \wedge G(s) \wedge G(t) \wedge \text{Inz}(x, y; s) \wedge \text{Inz}(x, y; t) \rightarrow s = t)$. (3.) $(\forall x (G(x) \rightarrow \exists y, z (P(y) \wedge P(z) \wedge y \neq z \wedge \text{Inz}(y, z; x)))) \wedge (\exists x, y, z, u (P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge x \neq y \wedge y \neq z \wedge G(u) \wedge \text{Inz}(x, y; u) \wedge \neg \text{Inz}(y, z; u)))$. (Dazu gehören noch ein paar Axiome darüber, dass die Prädikate P und G disjunkt sind und ähnliches.) Man beachte aber, dass die primitiven Prädikate und damit auch die ‚Punkte‘ und ‚Geraden‘ erst durch das ganze Axiomensystem bestimmt werden, soweit sie nach Hilbert elementar-geometrisch bestimmbar sind.

angewendet werden. Eine Folge davon ist aber, dass eine Struktur nun immer Struktur von vielen Modellen ist, unter denen die Struktur für sich keines auszeichnet. Die anschaulichen Punkte und Geraden bilden ein System, das Modell der durch die Hilbertschen Axiome gegebenen Struktur ist, es ist aber nur eines neben einer Vielzahl anderer. Man gelangt nicht von der Struktur zu den anschaulichen Punkten und Geraden, wenn man nicht schon weiß, was Punkte und Geraden sind, da die Axiome ihre ‚Objekte‘ nicht anschaulich eindeutig kennzeichnen.¹⁹ Umgekehrt ist der Schritt von der Anschauung zur mathematischen Struktur kein z. B. durch die Frage, was die einzelnen geometrischen Objekte wesentlich seien, geleiteter Prozess, der auch in ganz unterschiedlichen Axiomatisierungen der anschaulichen Geometrie enden kann.²⁰

Zweiter Aspekt. Der zweite Satz des dritten Axioms enthält eine Existenzaussage, die im Unterschied zu den anderen Axiomen nicht durch eine Bedingung eingeschränkt wird. Die drei Axiome zusammen genommen ergibt sich, dass es mindestens drei Punkte und drei Geraden gibt.²¹ Diese Einbindung der Existenz in die Axiomatik steht schon mit Kants Auffassung in Spannung. Nach Kant ist Existenz kein *reales*, sondern ‚bloß‘ ein *logisches* Prädikat. Das heißt es fügt dem Sachgehalt (der *realitas*) von etwas nichts hinzu; die hundert Goldtaler in meiner Tasche sind nicht ‚mehr‘ oder ‚anders‘ hundert Goldtaler als nur gedachte hundert Taler (vgl. Kant KrV, A598f./B626f.). In der Zeit Platons und in den platonischen Dialogen scheint es einen reinen Existenzbegriff noch gar nicht gegeben zu haben, da das „ist“ stets prädikativ und nicht existenzial verstanden wurde (vgl. Kahn 1986, S. 18 ff.). Dass eine Einbindung der Existenz oder etwas funktional Ähnlichem wie dem euklidischen ‚Gegebensein‘ für das Mathematisieren notwendig ist, soll hier nicht in Frage gestellt werden. Problematisch ist allerdings, dass in der Hilbertschen Axiomatik das rein Sachhaltige grundsätzlich nicht von der Existenz getrennt wird, deren Begriff aus der Anschauung, der Vorstellung oder dem Konstruieren stammt. Damit wird das ‚Aufscheinen‘ der platonischen Ideen als sachhaltige Wesen massiv erschwert, da der (mathematisch) begriffliche Bereich mit dem anschaulichen stark vermengt wurde. (Was ist der rein ideelle Gehalt der drei ersten Hilbertschen Axiome, der ohne Existenzquantor ausgedrückt werden müsste?)

Wegen den zwei genannten Aspekten ist eine Hilbertsche Axiomatisierung nicht mehr in der Lage, die Vermittlungsfunktion der Mathematik, wie sie von Platon gefordert und im nächsten Abschnitt anfänglich skizziert wird, einzunehmen. Begriff und Anschauung wurden vermischt und die Durchlässigkeit des mathematischen Bereichs zubetoniert.

¹⁹ Das liegt daran, dass sich auch alternative anschauliche Modelle konstruieren lassen, in denen zum Beispiel bestimmte Kreise die strukturellen Eigenschaften der „Geraden“ erfüllen. In den *Elementen* dagegen scheint eine anschauliche eindeutige Kennzeichnung zumindest angestrebt zu werden. Z. B. scheint die erste Definition paraphrasiert mit „Ein Punkt ist das geometrische Objekt, was keine Teile hat“, wenn auch mathematisch nicht unproblematisch, eine eindeutige Kennzeichnung zumindest zu beabsichtigen.

²⁰ Vgl. z. B. die Axiomatisierung durch Tarski in (Tarski 1959).

²¹ Man beachte, dass auch wenn man die vier der fünf Postulate der *Elemente* als Existenzbehauptungen liest, sie nur relativ zu bereits Bestehendem die Existenz von weiteren Objekten garantieren. Somit kann in den *Elementen* die Existenz keines einzigen geometrischen Objektes bewiesen werden. Das lässt diese Interpretation natürlich fraglich erscheinen.

2.3 Euklids *Elemente* als platonisches Lehrbuch

Ein platonisches Mathematikbuch ist daran zu erkennen, dass es nach den metamatematischen Vorstellungen Platons konzipiert ist. Eine zentrale Vorstellung, wie nach Platon die Mathematik in Welt und Philosophie einzubetten ist, findet sich im Linien-gleichnis (*Politeia* 509c–511e). Darin wird eine Linie mehrmals im gleichen Verhältnis geteilt und den einzelnen Teilen Seinsbereiche zugeordnet wie die zu den jeweiligen Gegenständen gehörigen Erkenntnisweisen. Der für uns wesentliche Aspekt ist die Analogie, die durch das gleiche geometrische Verhältnis der zugeordneten Lini-enteile entsteht: Wie die Lebewesen und Artefakte der Welt zu ihren Schatten und Spiegelbildern gestellt sind, so verhalten sich die Ideen zur Mathematik, und so ist auch das Verhältnis der Mathematik zu den weltlichen Zeichnungen zu betrachten. In einem mathematischen Werk mit platonischen Hintergrund müsste sich demnach berücksichtigt finden, dass sich die höheren Ideen im Mathematischen spiegeln und dass sich das Mathematische im Anschaulichen direkt abbildet.

2.3.1 Die euklidischen Definitionen

Um einen ersten Eindruck von der Spiegelung höherer Ideen in den *Elementen* zu erhalten, betrachten wir die Struktur und den mathematischen Inhalt der ersten vier Definitionen:²²

- [1.] Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat.
- [2.] Eine **Linie** ist Länge ohne Breite.
- [3.] Die Enden einer Linie sind Punkte.
- [4.] Eine **gerade Linie (Strecke)** ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleich-mäßig liegt.

Ein empathischer Blick offenbart nun u. a. folgendes: Damit die erste Definition ein-deutig ist, müssen Linien Teile haben. Die zweite Definition besagt also zumindest, dass Linien in einer Hinsicht, nämlich der Länge nach, Teile haben, aber nicht wie Fläche und Körper in weiteren Hinsichten. Während nun in den ersten beiden De-finitionen versucht wird Punkt und Linie im Gegensatz zueinander zu bestimmen, wird in der dritten Definition ihr Zusammenhang aufgemacht: Punkte sind die En-den/Grenzen von Linien. Sodann würde in der vierten Definition die erste Linienart vollständig bestimmt werden, wenn man den Begriff des Gleichmäßig-Liegens ver-stünde. Vollständig würde sie bestimmt werden, weil die gerade Linie im Unterschied zur krummen keine weitere begriffliche Unterscheidung zulässt.

Wir halten zwei Beobachtungen fest: Erstens werden mindestens drei Begrifflichkei-ten in den ersten vier Definitionen vorausgesetzt: ein Ganzes-Teile-Begriff, ein Begriff

²² Mehr als einen ersten Eindruck zu geben ist hier aufgrund der Platzbeschränkung nicht möglich. Für Ausführlicheres siehe (Schneider 2013, Kap. 1).

von Ende/Grenze und ein Begriff von Gleichmäßig-Liegen. Zweitens bauen die Definitionen aufeinander auf und werden stets um einen Schritt komplexer.

Diese beiden Umstände lenken den Blick auf die sogenannte erste ‚Ableitung‘ im platonischen Dialog *Parmenides* (137c–142a) und die dort angeführten etwa zehn Ideen. Betrachtet man die Binnenstruktur der ersten vier dieser Ideen – wobei gemäß der Bemerkung zum Verhältnis von Esoterik und Wissenschaft bei Platon in Abschnitt 2.2.1 nicht behauptet werden soll, mit dieser anfänglichen Strukturanalyse alles von diesen Ideen zu erfassen – so fallen zwei erstaunliche Parallelen zu den ersten vier Definitionen auf. Dialektisch entwickelt ergeben sich folgende vier Begriffsinhalte aus *Parmenides* 137c–138a: Die begrifflich früheste Idee ist die einfachste, die der Einheit. Wir begreifen sie aber gerade durch den Unterschied zu einer (völlig unbestimmten) Vielheit, haben damit einen zweiteiligen Gedanken, in dem Einheit und Vielheit aufs innerste verbunden sind: den Begriff vom Ganzen und seinen Teilen. Indem wir diese zweiteilige Verbindung als *einen* Begriff bestimmen, sind wir wieder bei der Einheit angekommen und haben einen Dreischritt vollzogen, ein dritter Begriff von Anfang (Einheit), Mitte (unbestimmte Vielheit) und Ende (Einheit) ist entstanden. Dieser dreiteilige Begriff ist der der *Begrenzung* und durch die zwei Enden oder Grenzen der Begriff der *Bestimmung* oder *Definition*²³.

Wie kann man nun auf diesem Weg etwas weiter bestimmen oder definieren? Wir fassen Anfang und Ende der Mitte zu einer Einheit zusammen und nivellieren damit ihren Unterschied im Verhältnis zur Mitte. Das heißt die Mitte kann sich nun zu ihren Grenzen gleich bzw. unterschiedslos verhalten und, insofern sie sich gerade zu dieser neuen Einheit anders verhält als zu dem alten Anfang und Ende, auch zu dieser neuen Grenze anders verhalten als zu den beiden alten Grenzen. Oder umgekehrt betrachtet: Die Grenzen verhalten sich *gleichmäßig* oder *ungleichmäßig* zu ihrer Mitte. Anschaulich ist das der Unterschied zwischen gerade und geknickt oder zwischen rund und eckig.²⁴

Zusammen mit der fünften Idee von Innen-Außen bzw. In-etwas-Sein ergibt sich folgende Entsprechung der Definitionen mit den höheren platonischen Ideen (siehe Tabelle).

Euklid scheint hier genau die platonischen Ideen aus dem *Parmenides* für seine Axiomatisierung der Mathematik vorauszusetzen und keine eigenständige Grundlegung der Geometrie anzustreben.

Man beachte die im Detail noch aufzuzeigende Schönheit und Kohärenz dieses Zusammenspiels von Mathematik und Philosophie. Die Idee der Gleichmäßigkeit scheint es erst zu ermöglichen, dass man geometrische Objekte begrifflich vollständig definieren kann. Denn wenn alle zu einer Linie in direktem Bezug stehenden Punkte sich im gleichen Verhältnis zu der Linie befinden und das Verhältnis zu ihren Punkten

²³ Man denke hierbei an die klassische Definition der Definition, der Bestimmung von etwas durch zwei ‚Grenzen‘, der Gattung und der Differenz (zu den anderen Spezies der gleichen Gattung): *definitio fit per genus proximum et differentiam specificam*.

²⁴ Diese Textstelle bei Platon wird traditionell fälschlicherweise anders interpretiert (s. Schneider 2013, Kap. 5).

EUKLIDS ELEMENTE	ERSTE HYPOTHESE DES PARMENIDES
1. Ein Punkt ist, was keine Teile hat.	Einheit , keine Vielheit
2. Eine Linie ist Länge ohne Breite.	Ganzes-Teile , die Einheit der Vielheit
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.	Anfang-Mitte-Ende , Begrenzung
4. Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt	gleichmäßig – ungleichmäßig Gleichmäßigkeit in Bezug auf Linie
...	
Definition 8.–12. [zum Winkel]	Ungleichmäßigkeit in Bezug auf Linie
13. Eine Grenze ist das, worin etwas endigt.	
14. Eine Figur ist, was von einer oder mehreren Grenzen <i>umfaßt</i> wird.	In-etwas-Sein
15. Ein Kreis ist eine ebene, von einer einzigen Linie umfaßte Figur mit der Eigenschaft, daß alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie laufenden Strecken einander gleich sind;	Gleichmäßigkeit in Bezug auf Figuren
...	
Def. 19.–22. [zu geradlinigen Figuren]	Ungleichmäßigkeit in Bezug auf Figuren

das einzige ist, was eine Linie begrifflich genauer bestimmt, kann sich diese Linienart in ihren einzelnen Ausprägungen nur noch in ihrer Größe unterscheiden. Ähnlich könnte im Fall des In-etwas-Sein der *philosophische Input* dazu helfen, dass man erkennt, dass in der Bestimmung der Figur in den euklidischen Definitionen tatsächlich ein intendierter antiker Vorläufer des sogenannten Paschschen Axioms (bei (Hilbert 1962, S. 5) das vierte Axiom der Anordnung) zu finden ist.

2.3.2 Die euklidischen Postulate

Die ersten fünf Ideen aus der ersten *hypothesis* des *Parmenides* konnten in den euklidischen Definitionen gefunden werden. Was ist mit den weiteren Ideen, sind auch diese in den *Elementen* aufzuspüren? Die sechste Idee ist die der *Bewegung*. Sie liegt offensichtlich den sich an die Definitionen anschließenden euklidischen Postulaten zugrunde. Diese lauten:

1. Gefordert soll sein, dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
2. dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
3. dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,
4. dass alle rechten Winkel einander gleich sind,

5. und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei beliebiger Verlängerung sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Bemerkenswert ist dabei, dass in diesen fünf Postulaten fünf verschiedene Bewegungsarten vorkommen, in jedem Postulat eine spezielle. Im ersten bewegt man sich von einem Ort zu einem anderen gegebenen Ort. Im zweiten Postulat nimmt man einen unbeschränkten Ausgang von einem Punkt bzw. zwei Punkten ohne vorgegebenes Ziel. Im dritten dreht man sich im Kreis, und im vierten ist es die Ruhe als Fehlen jeder Bewegung. Im fünften Postulat hat man zwei an unterschiedlichen Orten startende Bewegungen, die sich schließlich treffen.

Auch wenn man versucht, die hier mit ins Spiel kommende Bewegung rein begrifflich zu fassen, bleibt uns ihre Verwendung fremd, da mit ihr eine Aktivität (des Mathematikers) in die Grundsätze eingebaut wird. Diese muss zwar nicht in einem wahrnehmbaren Zeichnen bestehen, insofern für Platon Bewegung eng mit der Seele verbunden ist, wäre aber zumindest ein seelischer Vorgang.

Besser nachvollziehen lässt sich, warum Euklid gerade fünf Postulate in gerade dieser Weise aufgestellt hat. Man benötigt nämlich neben den Definitionen nur noch ein platonisches Prinzip um die fünf Postulate ableiten zu können. Die Situation ist dabei folgende: Die euklidischen Definitionen konstituieren die begrifflichen Zusammenhänge der geometrischen Objekte. Um tatsächlich Geometrie betreiben und geometrische Objekte konstruieren zu können, müssen sich die geometrischen Begrifflichkeiten in irgendeinem ‚Raum‘ manifestieren.²⁵ Erst dann kann man die verschiedensten Objekte ohne begrifflichen Zusammenhang, aber nebeneinander gegeben haben. Ein ‚Raum‘ sollte nach Platon aber nichts Eigenes zu den Dingen, die sich in ihm manifestieren, hinzubringen (*Timaios* 52ab). Etwas formaler formuliert lautet dieses platonische Homogenitätsprinzip: Sich manifestierende geometrische Begriffe dürfen grundsätzlich nicht weitergehend begrifflich bestimmbar sein dadurch, dass sie sich manifestieren. Dieses Prinzip ist in seiner Anwendung einfacher als in seiner Formulierung: Wenn im ‚Raum‘ eine Strecke da ist, und es damit zwei Punkte gibt, zwischen denen es eine gerade Linie gibt, so muss es zwischen allen Punktpaaren eine gerade Linie geben. Ansonsten könnte man rein begrifflich die Punktpaare, die Endpunkte einer geraden Linie sind, von denen, die es nicht sind, unterscheiden.

Das erste Postulat betrifft demnach die Ununterscheidbarkeit der Punkte, das zweite die homogene Umsetzung des Begriffs der geraden Linie: Wenn es im ‚Raum‘ eine gerade Linie gibt, dann hat diese Teile und ist damit selbst die Verlängerung jeder geraden Linie, die echter Teil von ihr ist. Um nicht die geraden Linien, die wiederum Teil einer längeren geraden Linie sind, von denen, die es nicht sind, unterscheiden zu können, muss jede sich manifestierende gerade Linie verlängerbar sein. Die Postulate

²⁵ Platon und Euklid hatten, wenn überhaupt, dann nicht unseren Begriff des Raums. Die folgenden Überlegungen sind aber zunächst eingängiger, wenn man sie mit Bezug auf unsere Raumvorstellung formuliert; deshalb die einfachen Anführungszeichen.

3 und 4, die mit der homogenen Umsetzung des Kreises und des rechten Winkels befasst sind, sind entsprechend abzuleiten.

Das fünfte Postulat dient dazu, den Begriff des Dreiecks homogen umzusetzen, ist aber im Vergleich zu den anderen Postulaten etwas komplizierter in seiner Formulierung und in seiner Ableitung, weil es kein begrifflich vollständig bestimmtes geometrisches Objekt betrifft. Im Unterschied zum Punkt, zur geraden Linie, zum Kreis und rechten Winkel, die begrifflich nicht weiter differenziert werden können, kann das Dreieck noch vor allem nach dem Verhältnis der Längen seiner Seiten weiter bestimmt werden. Die Argumentationsstruktur bleibt aber die gleiche: Drei gerade Linien in gewisser Konstellation bilden verlängert ein Dreieck, ansonsten könnte man die drei Strecken in dieser Konstellation, die ein Dreieck bilden, von denen, die keines bilden, begrifflich unterscheiden.

Diese systematische ‚Ableitung‘ der euklidischen Postulate ist ganz im Sinne einer apriorischen Begründung der Geometrie, wie sie dem platonischen Programm entspricht (*Politeia* 511a–d), und gibt eine Alternative zu der weit verbreiteten Meinung, die Postulate wären irgendwie durch Abstraktion vom konkreten Zeichnen gewonnen worden. Gerade durch ihre Einfachheit liefert diese ‚Ableitung‘ einen guten Grund für die Vermutung, dass es genau diese Überlegungen waren, die historisch zur Aufstellung der fünf Postulate führten. Damit würde ein ganz neues Licht auf die Geschichte der Geometrie und des Parallelensatzes fallen.

Kommen wir abschließend wieder auf die restlichen Ideen in *Parmenides* 139b–142a zurück. Sie haben bis auf die letzte, der Idee der Zeit, einen offensichtlichen Bezug zur Geometrie: die Gleichheit, die Ähnlichkeit (Kongruenz) und das Größer-Kleiner bzw. gleiches/unterschiedliches-Maß-haben. Ihr genaues Auftreten und ihre Funktion innerhalb der *Elemente* wäre wie auch das der ersten sechs Ideen noch im Detail zu untersuchen. Dass dies fruchtbar sein kann, hoffe ich im Vorhergehenden wahrscheinlich gemacht zu haben. Wäre dies geleistet, hätte man durch ein konkretes und detailliertes Beispiel einen freien Blick darauf, was es für Platon hieß, dass sich die (philosophischen) Ideen in der Mathematik spiegeln und wie seine weiteren Ausführungen im Kontext des Liniengleichnisses (*Politeia* 509dff., 521cff.) zu verstehen sind.

Literatur

- [Aristoteles NE] GIGON, Olof (Hrsg.): *Aristoteles. Die Nikomachische Ethik*. München: 2000.
- [Böhme 2000] BÖHME, Gernot: *Platons theoretische Philosophie*. Stuttgart: 2000.
- [Burnyeat 2000] BURNYEAT, M. F.: Plato on Why Mathematics is Good for the Soul. In: *Proceedings of the British Academy* 103 (2000), S. 1–81.
- [Frede 2006] FREDE, Dorothea: Platons mathematisches Curriculum. In: RAPP, Christof (Hrsg.); WAGNER, Tim (Hrsg.): *Wissen und Bildung in der antiken Philosophie*. Stuttgart, Weimar: 2006, S. 127–146.

- [Frege 1976] HERMES, Hans (Hrsg.); KAMBARTEL, Friedrich (Hrsg.); KAULBACH, Friedrich (Hrsg.): *Gottlob Frege. Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel, Bd. 2.* Hamburg: 1976.
- [Gill 2004] GILL, Christopher: Axiomatisierung zwischen Platon und Aristoteles. In: MIGLIORI, Maurizio (Hrsg.); NAPOLITANO VALDITARA, Linda M. (Hrsg.); DEL FORNO, Davide (Hrsg.): *Plato Ethicus. Philosophy is Life. Proceedings of the International Colloquium Piacenza (Italy) 2003.* Sankt Augustin: 2004, S. 165–176.
- [Hanegraaff 2012] HANEGRAAFF, Wouter: *Esotericism and the Academy. Rejected Knowledge in Western Culture.* Cambridge: 2012.
- [Heilmann 2007] HEILMANN, Anja: *Boethius' Musiktheorie und das Quadrivium.* Göttingen: 2007.
- [Hilbert 1962] HILBERT, David: *Grundlagen der Geometrie.* Stuttgart: 1962.
- [Kahn 1986] KAHN, Charles: Retrospect on the verb 'to be' and the concept of being. In: KNUUTTILA, Simo (Hrsg.); HINTIKKA, Jaakko (Hrsg.): *The Logic of Being.* Dordrecht (u. a.): 1986, S. 1–28.
- [Kant KrV] KANT, Immanuel: *Kritik der reinen Vernunft.* Hamburg: 1998.
- [Mittelstraß 2005] MITTELSTRASS, Jürgen: Die Dialektik und ihre wissenschaftlichen Vorübungen (Buch VI 510b–511e und Buch VII 521c–539d). In: HÖFFE, Otfried (Hrsg.): *Platon. Politeia.* Berlin: 2005, S. 229–250.
- [Mueller 2005] MUELLER, Ian: Mathematics and the Divine in Plato. In: KOSTSIER, T. (Hrsg.); BERGMANS, L. (Hrsg.): *Mathematics and the Divine: A Historical Study.* Amsterdam (u. a.): VERLAG, 2005, S. 99–121.
- [Schneider 2013] SCHNEIDER, Gregor: *Mathematischer Platonismus.* Dissertation. 2013.
- [Tarski 1959] TARSKI, Alfred: What is elementary Geometry? In: HENKIN, Leo (Hrsg.); SUPPES, Patrick (Hrsg.); TARSKI, Alfred (Hrsg.): *The Axiomatic Method. With special References to Geometry and Physics.* Amsterdam: 1959, S. 16–29.
- [Thaer 1997] THAER, Clemens: *Die Elemente. Bücher I–XIII/ von Euklid.* Frankfurt am Main: 1997.

Mathematik im Prozess

Philosophische, Historische und Didaktische
Perspektiven

Rathgeb, M.; Helmerich, M.; Krömer, R.; Lengnink, K.;
Nickel, G. (Hrsg.)

2013, XII, 366 S. 41 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-02273-0