

Kapitel 2

Verbände und Ordnungen

Es gibt zwei Arten, Verbände zu definieren. Die erste Art ist algebraisch und erklärt Verbände als spezielle algebraische Strukturen, die zweite Art ist relational und definiert Verbände als spezielle geordnete Mengen. Ein erstes Ziel dieses Kapitels ist es, beide Definitionsmöglichkeiten für Verbände einzuführen und sie als gleichwertig zu beweisen. Weiterhin studieren wir in beiden Fällen Unterstrukturen und die strukturerhaltenden Abbildungen, die sogenannten Homomorphismen. Als nächstes gehen wir auf Nachbarschaftsbeziehungen und die damit zusammenhängenden Hasse-Diagramme zur zeichnerischen Darstellung von Ordnungen ein. Schließlich stellen wir noch einige wichtige Konstruktionsmechanismen auf Ordnungen und Verbänden vor.

2.1 Algebraische Beschreibung von Verbänden

Wir behandeln Verbände zuerst als *algebraische Strukturen*, d.h. als Mengen mit inneren Verknüpfungen (d.h. Abbildungen auf ihnen). Der Hauptgrund dafür ist, dass ein Verband eine weniger geläufige algebraische Struktur ist als z.B. die Gruppe, der Ring, der Vektorraum oder der Körper. Weiterhin wäre bei einer ordnungstheoretischen Einführung – wegen der vielen von der Analysis und der linearen Algebra herrührenden Begriffe auf der speziellen geordneten Menge $(\mathbb{R}, \leq)$ – die Gefahr sehr groß, dass wichtige Nuancen als offensichtlich erachtet und deshalb nicht formal aus den Axiomen des Verbands deduziert werden. Algebraisch werden Verbände wie folgt festgelegt:

2.1.1 Definition Ein *Verband* ist eine algebraische Struktur $(V, \sqcup, \sqcap)$, bestehend aus einer (Träger-)Menge $V \neq \emptyset$ und zwei Abbildungen $\sqcup, \sqcap : V \times V \rightarrow V$ (notiert in Infix-Schreibweise), so dass die folgenden Eigenschaften für alle $a, b, c \in V$ gelten:

- Kommutativität: $a \sqcup b = b \sqcup a$ und $a \sqcap b = b \sqcap a$
- Assoziativität: $(a \sqcup b) \sqcup c = a \sqcup (b \sqcup c)$ und $(a \sqcap b) \sqcap c = a \sqcap (b \sqcap c)$
- Absorptionen: $(a \sqcup b) \sqcap a = a$ und $(a \sqcap b) \sqcup a = a$

□

An Stelle des Tripels $(V, \sqcup, \sqcap)$ schreiben wir öfter nur die Menge V . Sind mehrere Verbände im Spiel, so indizieren wir auch die Trägersmengen und Operationen, etwa zu $(V, \sqcup_V, \sqcap_V)$ oder $(V_1, \sqcup_1, \sqcap_1)$. Statt der Zeichen $\sqcup, \sqcap$ werden in der Literatur auch die Symbole $\vee$ und $\wedge$ bzw. $\cup$ und $\cap$ und die Namen Disjunktion / Vereinigung und Konjunktion / Durchschnitt verwendet. Dies rührt von den ersten beiden der drei Beispiele für Verbände her, die wir nachfolgend angeben.

2.1.2 Beispiele (für Verbände) Im Folgenden geben wir drei wichtige Beispiele für Verbände an, auf die wir später noch öfter zurückgreifen werden:

1. *Verband der Wahrheitswerte* $(\mathbb{B}, \vee, \wedge)$ mit $\mathbb{B} = \{tt, ff\}$, der Disjunktion $\vee$ und der Konjunktion $\wedge$.
2. *Potenzmengenverband* $(2^X, \cup, \cap)$ mit 2^X als der Potenzmenge von X , der Vereinigung $\cup$ und dem Durchschnitt $\cap$.
3. *Teilbarkeitsverband* $(\mathbb{N}, \text{kgV}, \text{ggT})$ mit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen kgV und dem größten gemeinsamen Teiler ggT :

$$\begin{aligned}\text{kgV}(a, b) &= \min\{x \in \mathbb{N} \mid a \text{ teilt } x \wedge b \text{ teilt } x\} \\ \text{ggT}(a, b) &= \max\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ teilt } a \wedge x \text{ teilt } b\}\end{aligned}$$

Dabei wird $y \in \mathbb{N}$ von $x \in \mathbb{N}$ per Definition genau dann geteilt, wenn es eine Zahl $z \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $x \cdot z = y$ gibt. Die zwei Operationen $\min$ und $\max$ liefern die kleinste bzw. die größte natürliche Zahl der nichtleeren Menge, auf die sie angewendet werden. $\square$

Im folgenden Satz werden erste, aber grundlegende Eigenschaften für Verbände angegeben, die im Falle von $\mathbb{B}$ und 2^X vielen Leserinnen und Lesern aus den Vorlesungen der ersten Semester sicherlich geläufig sind.

2.1.3 Satz Es sei ein Verband $(V, \sqcup, \sqcap)$ gegeben. Dann gelten für alle $a, b \in V$ die folgenden drei Eigenschaften:

1. $a \sqcup a = a$ und $a \sqcap a = a$ (*Idempotenz*)
2. $a \sqcap b = a \iff a \sqcup b = b$.
3. $a \sqcap b = a \sqcup b \iff a = b$.

Beweis: Es seien $a, b \in V$ beliebig vorausgesetzte Elemente. Dann beweist man die drei Aussagen wie folgt:

1. Die linke Gleichung folgt aus der Rechnung

$$\begin{aligned}a \sqcup a &= a \sqcup ((a \sqcup a) \sqcap a) && \text{Absorption} \\ &= (a \sqcap (a \sqcup a)) \sqcup a && \text{Kommutativität} \\ &= a && \text{Absorption}\end{aligned}$$

und die rechte Gleichung folgt aus der Rechnung

$$\begin{aligned}
 a \sqcap a &= a \sqcap ((a \sqcap a) \sqcup a) && \text{Absorption} \\
 &= (a \sqcup (a \sqcap a)) \sqcap a && \text{Kommutativität} \\
 &= a && \text{Absorption.}
 \end{aligned}$$

2. „ $\implies$ “: Es sei $a \sqcap b = a$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 b &= (b \sqcap a) \sqcup b && \text{Absorption} \\
 &= (a \sqcap b) \sqcup b && \text{Kommutativität} \\
 &= a \sqcup b && \text{Voraussetzung.}
 \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Durch Dualisierung des eben erbrachten Beweises (Vertauschen von $\sqcup$ und $\sqcap$ und Umbenennung; genauer wird darauf in Abschnitt 2.4 eingegangen) erhält man die Implikation

$$a \sqcup b = b \implies a = a \sqcap b.$$

3. „ $\implies$ “: Es sei $a \sqcap b = a \sqcup b$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 a &= (a \sqcup b) \sqcap a && \text{Absorption} \\
 &= (a \sqcap b) \sqcap a && \text{Voraussetzung} \\
 &= a \sqcap b && \text{Assoz., Komm., (1)} \\
 &= (b \sqcap a) \sqcap b && \text{Assoz., Komm., (1)} \\
 &= (b \sqcup a) \sqcap b && \text{Komm., Assoz., Komm.} \\
 &= b && \text{Absorption.}
 \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Diese Richtung folgt unmittelbar aus Gleichung (1). $\square$

Wir haben diesen Beweis in großem Detail durchgeführt. Später werden wir die Anwendungen der Axiome oft nicht mehr explizit erwähnen, ebenso auch die Idempotenz nicht.

Bei algebraischen Strukturen ist man an den *Unterstrukturen* interessiert, beispielsweise an Untergruppen (oder sogar Normalteilern) bei den Gruppen. Im Falle von Verbänden legt man Unterstrukturen wie folgt fest:

2.1.4 Definition Es seien V ein Verband und $W \subseteq V$ mit $W \neq \emptyset$. Gilt für alle $a, b \in W$ auch $a \sqcap b \in W$ und $a \sqcup b \in W$ (man sagt dann: W ist abgeschlossen bezüglich $\sqcup$ und $\sqcap$), so heißt die Menge W und auch das Tripel

$$(W, \sqcup|_{W \times W}, \sqcap|_{W \times W})$$

ein *Unterverband* (bzw. *Teilverband*) von V . $\square$

In Definition 2.1.4 bezeichnen die Symbole $\sqcup|_{W \times W}$ und $\sqcap|_{W \times W}$ die Restriktionen der beiden Operationen $\sqcup$ und $\sqcap$ auf den Argumentbereich W . Normalerweise bezeichnet man aber aus Gründen der Einfachheit auch die Restriktionen mit den gleichen Symbolen, also mit $\sqcup$ und $\sqcap$; Fehlinterpretationen dürfte es dabei eigentlich nicht geben. Unterverbände sind

Verbände. Offensichtlich induziert aber nicht jede nichtleere Teilmenge eines Verbands wiederum einen Verband, da die Abgeschlossenheitseigenschaft nicht immer gelten muss. Die Leserin oder der Leser überlege sich dazu einige einfache Beispiele.

Neben den Unterstrukturen ist man bei algebraischen Strukturen immer auch an den *strukturhaltenden Abbildungen*, den sogenannten Homomorphismen, interessiert; die Leserin oder der Leser kennt dies sicherlich von den einführenden Vorlesungen der Mathematik her, beispielsweise von den Gruppen oder Vektorräumen in der linearen Algebra. Verbandshomomorphismen definiert man wie nachfolgend angegeben.

2.1.5 Definition Gegeben seien zwei Verbände $(V, \sqcup_V, \sqcap_V)$ und $(W, \sqcup_W, \sqcap_W)$.

1. Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ mit

$$f(a \sqcup_V b) = f(a) \sqcup_W f(b) \quad f(a \sqcap_V b) = f(a) \sqcap_W f(b)$$

für alle $a, b \in V$ heißt ein *Verbandshomomorphismus*.

2. Ein bijektiver Verbandshomomorphismus ist ein *Verbandsisomorphismus*. Wir sagen „ V ist verbandsisomorph zu W “ oder kürzer „ V und W sind isomorph“ genau dann, wenn es einen Verbandsisomorphismus von V nach W gibt. $\square$

Auch weitere Begriffe wie Verbandsmonomorphismus (injektiver Verbandshomomorphismus) und -epimorphismus (surjektiver Verbandshomomorphismus) gibt es analog zu den Begriffen bei den Gruppen, den Ringen usw. – wir benötigen sie aber im restlichen Text nicht. Es gelten die in dem folgenden Satz aufgeführten Eigenschaften bezüglich der Komposition und der Inversenbildung. Der Beweis ergibt sich durch einfaches Nachrechnen; deshalb verzichten wir auf ihn und empfehlen, ihn zu Übungszwecken zu führen.

2.1.6 Satz Für Verbandshomomorphismen und -isomorphismen gelten die beiden folgenden Aussagen:

1. Die Komposition von Verbandshomomorphismen (bzw. -isomorphismen) ist wiederum ein Verbandshomomorphismus (bzw. -isomorphismus).
2. Ist f ein Verbandsisomorphismus, so auch die inverse Abbildung f^{-1} . $\square$

Wir haben bei den Unterverbänden und auch bei den Verbandshomomorphismen auf die Angabe von Beispielen verzichtet, da die beiden Begriffe sehr viel anschaulicher werden und auch besser visualisiert werden können, wenn man Verbände ordnungstheoretisch betrachtet. Ordnungen und die wichtigsten mit ihnen zusammenhängenden Begriffe werden im nächsten Abschnitt eingeführt, ihre Verbindung zu den Verbänden wird dann im übernächsten Abschnitt eindeutig erklärt. Die Unterstrukturen und Homomorphismen stimmen aber, wie wir ebenfalls zeigen werden, bei den beiden sich ergebenden Sichtweisen auf einen Verband nicht exakt überein. Deshalb werden wir auf die Vorsilben „Verband“ und „Ordnung“ im Rest des Buchs in der Regel nicht verzichten.

2.2 Geordnete Mengen

In diesem Abschnitt wiederholen wir die wichtigsten Grundbegriffe für geordnete Mengen. Sie müssten eigentlich alle von den einführenden Mathematik-Vorlesungen her bekannt sein. Die grundlegendsten Begriffe wie Reflexivität, Antisymmetrie usw. einer Relation haben wir schon im ersten Kapitel zusammengestellt.

2.2.1 Definition 1. Ist $\sqsubseteq$ eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf einer Menge $M \neq \emptyset$, so heißt $\sqsubseteq$ eine *Ordnungsrelation* auf M und das Paar $(M, \sqsubseteq)$ eine *geordnete Menge*.

2. Ist $\sqsubset$ eine irreflexive und transitive Relation auf einer Menge $M \neq \emptyset$, so heißt $\sqsubset$ *Striktordnungsrelation* auf M und das Paar $(M, \sqsubset)$ eine *striktgeordnete Menge*. $\square$

Etwas kürzer bezeichnet man in der Literatur sowohl die Relation $\sqsubseteq$ als auch die relationale Struktur $(M, \sqsubseteq)$ als *Ordnung* und sowohl die Relation $\sqsubset$ als auch die relationale Struktur $(M, \sqsubset)$ als *Striktordnung*. Auch wir werden in der Regel diese kürzeren Sprechweisen verwenden. Weiterhin schreiben wir manchmal nur M statt $(M, \sqsubseteq)$.

2.2.2 Satz 1. Ist $\sqsubseteq$ eine Ordnung und definiert man

$$a \sqsubset b \quad :\Longleftrightarrow \quad a \sqsubseteq b \wedge a \neq b,$$

so ist die Relation $\sqsubset$ eine Striktordnung.

2. Ist $\sqsubset$ eine Striktordnung und definiert man

$$a \sqsubseteq b \quad :\Longleftrightarrow \quad a \sqsubset b \vee a = b,$$

so ist die Relation $\sqsubseteq$ eine Ordnung. $\square$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar durch einfaches Nachrechnen. Deshalb verzichten wir auf seine Durchführung.

Man nennt die Relation $\sqsubset$ aus Satz 2.2.2.1 den strikten Anteil von $\sqsubseteq$ und die Relation $\sqsubseteq$ aus Satz 2.2.2.2 die reflexive Hülle von $\sqsubset$. Den zweiten Begriff werden wir später noch sehr viel allgemeiner kennenlernen. In Zukunft werden wir allgemeine Ordnungen, d.h. solche ohne feste Interpretation, wie sie – im Gegensatz dazu – die Ordnungen $\leq$ auf $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}$ darstellen, in der Regel mit dem Symbol $\sqsubseteq$ bezeichnen. Für den strikten Anteil schreiben wir dann in der Regel immer das Symbol $\sqsubset$.

Einige weitere bei Ordnungen sehr wichtige Begriffe werden nun eingeführt.

2.2.3 Definition Gegeben sei eine Ordnung $(M, \sqsubseteq)$.

1. Zwei Elemente $a, b \in M$ mit $a \sqsubseteq b$ oder $b \sqsubseteq a$ heißen *vergleichbar*.

2. Zwei Elemente $a, b \in M$ mit $a \not\sqsubseteq b$ und $b \not\sqsubseteq a$ heißen *unvergleichbar*.
3. Eine Teilmenge K von M mit $K \neq \emptyset$ heißt eine (mengentheoretische) *Kette*, falls für alle $a, b \in K$ gilt $a \sqsubseteq b$ oder $b \sqsubseteq a$. Ist M eine Kette, so heißt $(M, \sqsubseteq)$ eine *Totalordnung* oder *lineare Ordnung*.
4. Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt eine *Antikette*, falls $A \neq \emptyset$ und für alle $a, b \in A$ die Beziehung $a \sqsubseteq b$ nur für $a = b$ möglich ist. $\square$

Im Falle einer (unendlichen) abzählbaren Kette $K = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, bei der $a_i \sqsubseteq a_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, schreiben wir auch, wie im ersten Kapitel eingeführt, $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq a_2 \sqsubseteq \dots$, da diese Schreibweise die Sache oft mehr verdeutlicht. Diese Schreibweise ist auch für andere (unendliche) Indexbereiche geläufig, beispielsweise in der Form $\dots \sqsubseteq a_{-1} \sqsubseteq a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \dots$ im Falle des Indexbereichs $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

Wird eine Kette als eine Folge angegeben, so bildet die Menge der Kettenglieder eine Kette im Sinne der obigen Definition. Umgekehrt kann man jede abzählbare Kette auch als eine Folge mit Ordnungsbeziehungen in der Art $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \dots$ angeben. Bei überabzählbaren Ketten ist dies nicht mehr möglich. Hier muss man statt Folgen Familien $(a_i)_{i \in I}$ mit beliebigen Indexmengen benutzen.

Für das weitere Vorgehen brauchen wir der Begriff der Äquivalenzrelation mit seinen definierenden Eigenschaften der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Ist $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M , so nennt man $[a] := \{b \in M \mid a \equiv b\}$ die Äquivalenzklasse von $a \in M$. Durch die Menge der Äquivalenzklassen ist eine Zerlegung von M gegeben, d.h. alle Äquivalenzklassen sind nichtleer, verschiedene Äquivalenzklassen sind disjunkt und die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ergibt M .

Verzichtet man bei Ordnungsrelationen auf die Forderung der Antisymmetrie, so erhält man sogenannte *Quasiordnungen*, also reflexive und transitive Relationen, für die das Symbol $\preceq$ oft Verwendung findet. Quasiordnungen induzieren Ordnungen im bisherigen Sinn, indem man zu Zerlegungen übergeht. Ist nämlich das Paar $(M, \preceq)$ eine Quasiordnung, so definiert

$$a \equiv b \quad :\Longleftrightarrow \quad a \preceq b \wedge b \preceq a$$

für alle $a, b \in M$ eine Äquivalenzrelation auf M . Geht man nun zu den Äquivalenzklassen über, betrachtet also die Menge $M/\equiv$ aller Äquivalenzklassen, und setzt

$$[a] \sqsubseteq [b] \quad :\Longleftrightarrow \quad a \preceq b$$

für alle $a, b \in M$, so ist das Paar $(M/\equiv, \sqsubseteq)$ offensichtlich eine Ordnung. Die Antisymmetrie wird dabei genau durch die Zusammenfassung von all jenen Elementen zu einer Äquivalenzklasse erzwungen, für die sie in der Originalrelation nicht gilt. Natürlich bestehen zwischen der Originalrelation und der aus ihr konstruierten Äquivalenzrelation und Ordnungsrelation einige enge Beziehungen. Wir wollen dieses Thema hier aber nicht vertiefen.

Nun kommen wir zu den Unterstrukturen und strukturerhaltenden Abbildungen. Wir beginnen mit den Unterstrukturen.

2.2.4 Definition Es seien $(M, \sqsubseteq)$ eine Ordnung und $\emptyset \neq N \subseteq M$. Dann heißt $(N, \sqsubseteq|_N)$ die durch N induzierte *Teilordnung*. $\square$

In dieser Definition bezeichnet $\sqsubseteq|_N$ die Restriktion der Relation $\sqsubseteq$ auf die Teilmenge N , welche mengentheoretisch durch $\sqsubseteq|_N := \sqsubseteq \cap N \times N$ festgelegt ist. Die Restriktion einer Ordnung ist wieder eine Ordnung und verhält sich auf der Teilmenge N genau wie das Original: Sind $a, b \in N$, so gilt also $a \sqsubseteq|_N b$ genau dann, wenn $a \sqsubseteq b$ gilt. Wie beim Unterverband, so lassen wir auch bei einer Teilordnung die Restriktionskennzeichnung „ $|_N$ “ in der Regel weg, da sie sich aus dem Zusammenhang ergibt.

Die nächste Definition erklärt für die relationale Struktur einer Ordnung den entsprechenden Homomorphie- und Isomorphiebegriff.

2.2.5 Definition Gegeben seien zwei Ordnungen $(M_1, \sqsubseteq_1)$ und $(M_2, \sqsubseteq_2)$.

1. Eine Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ heißt ein *Ordnungshomomorphismus* oder *monoton*, falls für alle $a, b \in M_1$ gilt

$$a \sqsubseteq_1 b \implies f(a) \sqsubseteq_2 f(b).$$

Gilt hingegen für alle $a, b \in M_1$ die Implikation

$$a \sqsubseteq_1 b \implies f(b) \sqsubseteq_2 f(a),$$

d.h. ist f monoton bezüglich der Originalordnung $(M_1, \sqsubseteq_1)$ und der sogenannten Dualisierung der Ordnung $(M_2, \sqsubseteq_2)$, so nennt man f *antiton*.

2. Ein bijektiver Ordnungshomomorphismus heißt ein *Ordnungsisomorphismus*, falls auch die inverse Abbildung ein Ordnungshomomorphismus ist.
3. Wir sagen „ M_1 ist ordnungsisomorph zu M_2 “ oder kürzer „ M_1 und M_2 sind isomorph“ genau dann, wenn es einen Ordnungsisomorphismus von M_1 nach M_2 gibt. $\square$

Man beachte: In der Definition 2.2.5 wird für den Ordnungsisomorphismus explizit gefordert, dass die inverse Abbildung ein Ordnungshomomorphismus ist (vgl. Definition 2.1.5). Wir werden im restlichen Text fast immer die kürzere Bezeichnung „monotone Abbildung“ statt Ordnungshomomorphismus verwenden.

Analog zu Satz 2.1.6 haben wir die folgende Aussage. Der Beweis ergibt sich durch einfaches Nachrechnen. Wir verzichten deshalb auf seine Durchführung.

2.2.6 Satz Die Komposition von monotonen Abbildungen ist monoton. $\square$

Hingegen ist die Umkehrabbildung einer monotonen Abbildung im Allgemeinen nicht monoton. Ein Gegenbeispiel wird nachfolgend beschrieben.

2.2.7 Beispiel Wir definieren M_1 als die Potenzmenge von $\{a, b\}$, wobei $a \neq b$ gilt, und M_2 als die Menge, welche aus den ersten vier natürlichen Zahlen 0, 1, 2 und 3 besteht. Dann ordnen wir M_1 durch die Inklusion und M_2 wie üblich, also durch $0 < 1 < 2 < 3$. Schließlich definieren wir eine Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ wie folgt:

$$f(\emptyset) = 0 \quad f(\{a\}) = 1 \quad f(\{b\}) = 2 \quad f(\{a, b\}) = 3$$

Es ist f bijektiv und, wie man sofort nachprüft, auch monoton. Jedoch ist die bijektive Umkehrabbildung $f^{-1} : M_2 \rightarrow M_1$ nicht monoton. Es gilt zwar $1 \leq 2$, aber demgegenüber sind die Bildelemente $f^{-1}(1) = \{a\}$ und $f^{-1}(2) = \{b\}$ bezüglich der Inklusion unvergleichbar, also trifft insbesondere die für eine Monotonie notwendige Ordnungsbeziehung $f^{-1}(1) \subseteq f^{-1}(2)$ nicht zu. $\square$

Bei relationalen Strukturen, wie Ordnungen oder auch verschiedenen Arten von Graphen, muss man bei den Isomorphismen also in den Definitionen fordern, was bei algebraischen Strukturen, wie Gruppen, Ringen, Körpern und Verbänden beweisbar ist, nämlich, dass Umkehrabbildungen bijektiver strukturerhaltender Abbildungen ebenfalls strukturerhaltend sind. Von Anfängerinnen und Anfängern wird dies oft übersehen.

Nun kommen wir zu speziellen Elementen in Ordnungen und Teilmengen von Ordnungen. Sie spielen bei vielen Fragestellungen eine herausragende Rolle.

2.2.8 Definition Es sei $(M, \sqsubseteq)$ eine Ordnung. Weiterhin seien $N \subseteq M$ und $a \in M$. Dann heißt das Element a ...

- ... *obere Schranke* von N , falls für alle $b \in N$ gilt $b \sqsubseteq a$,
- ... *untere Schranke* von N , falls für alle $b \in N$ gilt $a \sqsubseteq b$,
- ... *maximales Element* von N , falls $a \in N$ und kein $b \in N$ existiert mit $a \sqsubset b$,
- ... *minimales Element* von N , falls $a \in N$ und kein $b \in N$ existiert mit $b \sqsubset a$,
- ... *größtes Element* von N , falls $a \in N$ und für alle $b \in N$ gilt $b \sqsubseteq a$,
- ... *kleinstes Element* von N , falls $a \in N$ und für alle $b \in N$ gilt $a \sqsubseteq b$. $\square$

Solche extremen Elemente müssen nicht immer existieren. Beispielsweise hat die Menge der natürlichen Zahlen bezüglich der üblichen Ordnung kein größtes Element. Bei den Schranken und den maximalen/minimalen Elementen ist auch die Eindeutigkeit nicht immer gegeben. Betrachtet man etwa die Potenzmenge von $\{a, b\}$ und darin die Teilmenge $\{\{a\}, \{b\}\}$, so besitzt diese Teilmenge genau $\{a\}$ und $\{b\}$ als minimale und maximale Elemente. Hingegen sind größte und kleinste Elemente immer eindeutig, sofern sie existieren. Dies folgt sofort aus der Antisymmetrie der Ordnung.

Den folgenden einfachen Satz werden wir oft verwenden, ohne ihn explizit zu erwähnen. Sein Beweis stellt im Prinzip einen Algorithmus zur Bestimmung eines maximalen bzw. eines minimalen Elements durch eine lineare Suche dar.

2.2.9 Satz Ist $(M, \sqsubseteq)$ eine Ordnung, so besitzt jede endliche, nichtleere Teilmenge N ein maximales und ein minimales Element.

Beweis: Es sei für N die explizite Darstellung $N = \{a_1, \dots, a_n\}$ mit $n \geq 1$ angenommen. Wir definieren eine aufsteigende Folge (deren Elemente eine Kette bilden) $x_1 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq x_n$ induktiv durch die folgenden zwei Gleichungen:

$$x_1 := a_1 \qquad x_{i+1} := \begin{cases} a_{i+1} & \text{falls } x_i \sqsubset a_{i+1} \\ x_i & \text{falls } x_i \not\sqsubset a_{i+1} \end{cases}$$

Dann ist x_n offensichtlich maximal in N . Analog zeigt man konstruktiv die Existenz eines minimalen Elements. $\square$

Fallen die beiden Mengen M und N zusammen, so spricht man nur von einem maximalen, minimalen, größten bzw. kleinsten Element und unterstellt damit natürlich implizit „von der gesamten Ordnung“. Obere Schranken und untere Schranken führen zu zwei mengenwertigen Abbildungen, die später noch eine sehr große Rolle spielen werden. Diese Abbildungen werden nun eingeführt.

2.2.10 Definition Zu einer Ordnung $(M, \sqsubseteq)$ sind durch die Festlegungen

$$\begin{aligned} \mathbf{Ma}(X) &= \{a \in M \mid a \text{ obere Schranke von } X\} \\ \mathbf{Mi}(X) &= \{a \in M \mid a \text{ untere Schranke von } X\} \end{aligned}$$

zwei Abbildungen $\mathbf{Ma}, \mathbf{Mi} : 2^M \rightarrow 2^M$ auf der Potenzmenge 2^M von M definiert. Man nennt die Mengen $\mathbf{Ma}(X)$ und $\mathbf{Mi}(X)$ den oberen bzw. den unteren *Konus* von X . $\square$

Die Bezeichnungen $\mathbf{Ma}$ und $\mathbf{Mi}$ stammen von den Worten „Majorante“ und „Minorante“ ab, welche man auch oft statt „obere Schranke“ bzw. „untere Schranke“ verwendet. Statt $\mathbf{Ma}(\{a\})$ schreiben wir kürzer $\mathbf{Ma}(a)$ und wir kürzen auch $\mathbf{Mi}(\{a\})$ zu $\mathbf{Mi}(a)$ ab. Der nachfolgende Satz stellt wichtige Eigenschaften der Abbildungen $\mathbf{Ma}$ und $\mathbf{Mi}$ zusammen.

2.2.11 Satz Für die beiden Abbildungen $\mathbf{Ma}$ und $\mathbf{Mi}$ von Definition 2.2.10 gelten die folgenden Eigenschaften für alle Mengen $N_1, N_2, N \in 2^M$:

1. Aus $N_1 \subseteq N_2$ folgt $\mathbf{Ma}(N_2) \subseteq \mathbf{Ma}(N_1)$ und $\mathbf{Mi}(N_2) \subseteq \mathbf{Mi}(N_1)$, d.h. $\mathbf{Ma}$ und $\mathbf{Mi}$ sind antitone Abbildungen.
2. Es ist $\mathbf{Ma}(\mathbf{Mi}(\mathbf{Ma}(N))) = \mathbf{Ma}(N)$ und $\mathbf{Mi}(\mathbf{Ma}(\mathbf{Mi}(N))) = \mathbf{Mi}(N)$.

Beweis: Wir gehen wie folgt vor, wobei wir beliebige Mengen $N_1, N_2, N \in 2^M$ annehmen:

- 1: Es sei also $N_1 \subseteq N_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{Ma}(N_2) &= \{a \in M \mid \forall b \in N_2 : b \sqsubseteq a\} && \text{Definition von } \mathbf{Ma} \\ &\subseteq \{a \in M \mid \forall b \in N_1 : b \sqsubseteq a\} && N_1 \subseteq N_2 \\ &= \mathbf{Ma}(N_1) && \text{Definition von } \mathbf{Ma}. \end{aligned}$$

Auf die gleiche Art und Weise verifiziert man die Antitonicitätseigenschaft von Mi .

2: Wir beweisen nur die erste Gleichung. Die andere Gleichung folgt analog.

Inklusion „ $\subseteq$ “: Ist $a \in N$ beliebig gewählt, so bekommen wir $a \subseteq b$ für alle $b \in \text{Ma}(N)$, also auch $a \in \text{Mi}(\text{Ma}(N))$. Damit gilt $N \subseteq \text{Mi}(\text{Ma}(N))$ und mit Eigenschaft (1) folgt dann die Behauptung.

Inklusion „ $\supseteq$ “: Es sei $X \subseteq M$ beliebig, und es sei $a \in X$. Dann gilt $b \subseteq a$ für alle $b \in \text{Mi}(X)$. Also gilt $a \in \text{Ma}(\text{Mi}(X))$ und damit $X \subseteq \text{Ma}(\text{Mi}(X))$. Für $X := \text{Ma}(N)$ folgt dann die Behauptung. $\square$

Im Beweis dieses Satzes haben wir M als globale Ordnung vorausgesetzt. Die nächste Definition ist sehr wichtig. Durch die in ihr eingeführten Begriffe werden wir später in der Lage sein, die Brücke zwischen den Verbänden und den Ordnungen zu schlagen.

2.2.12 Definition Es seien $(M, \subseteq)$ eine Ordnung, $N \subseteq M$ und $a \in M$. Dann heißt $a \dots$

- ... *Infimum* von N , falls a das größte Element von $\text{Mi}(N)$ ist,
- ... *Supremum* von N , falls a das kleinste Element von $\text{Ma}(N)$ ist. $\square$

Wir bezeichnen mit $\bigcap N$ das Infimum von N und mit $\bigcup N$ das Supremum von N . Statt Infimum und Supremum verwendet man auch die Begriffe *größte untere Schranke* und *kleinste obere Schranke*. Ist N eine indizierte Menge, $N = \{a_i \mid i \in I\}$, so schreiben wir $\bigcup_{i \in I} a_i$ und $\bigcap_{i \in I} a_i$ statt $\bigcup N$ und $\bigcap N$. Für ein Intervall $I = [m, n] \subseteq \mathbb{N}$ verwenden wir noch spezieller $\bigcup_{m \leq i \leq n} a_i$ und $\bigcap_{m \leq i \leq n} a_i$ als Schreibweisen. Bei nach oben unbeschränkten Intervallen $I = [m, \infty[$ von $\mathbb{N}$ sind auch $\bigcup_{i \geq m} a_i$ und $\bigcap_{i \geq m} a_i$ geläufig und werden von uns verwendet. Als kleinste bzw. größte Elemente sind Suprema und Infima eindeutig, sofern sie existieren. Dies führt zur Auffassung von $\bigcup, \bigcap : 2^M \rightarrow M$ als partielle Abbildungen. Wir werden später sehen, dass die Abbildungen $\bigcup$ und $\bigcap$ zu den Abbildungen $\sqcup$ und $\sqcap$ auf Verbänden in einer sehr ähnlichen Beziehung stehen wie $\sum$ zur zweistelligen Addition und $\prod$ zur zweistelligen Multiplikation im Fall der Arithmetik.

Die folgenden Aussagen besagen, wie sich Suprema und Infima verändern, wenn man Mengen bezüglich Inklusion verkleinert bzw. vergrößert. Wir werden sie im restlichen Text oft in Beweisen verwenden, ohne sie eigens zu erwähnen.

2.2.13 Satz Sind N_1 und N_2 Teilmengen einer Ordnung $(M, \subseteq)$ mit $N_1 \subseteq N_2$, so gelten $\bigcup N_1 \subseteq \bigcup N_2$ und $\bigcap N_2 \subseteq \bigcap N_1$, falls diese Suprema und Infima existieren.

Beweis: Es sei angenommen, dass Elemente $a, b \in M$ mit $a = \bigcup N_1$ und $b = \bigcup N_2$ existieren. Die erste Eigenschaft zeigt man dann wie folgt:

$$\begin{aligned}
 b = \bigcup N_2 &\implies b \in \text{Ma}(N_2) && \text{Definition Supremum} \\
 &\implies b \in \text{Ma}(N_1) && \text{Satz 2.2.11.1 und } N_1 \subseteq N_2 \\
 &\implies a \subseteq b && \text{Definition Supremum}
 \end{aligned}$$

Auf die gleiche Art und Weise kann man auch die zweite Eigenschaft verifizieren. $\square$

2.3 Verbände als spezielle geordnete Mengen

In diesem Abschnitt studieren wir die Wechselwirkung zwischen der algebraischen Struktur „Verband“ und der relationalen Struktur „Ordnung“. Es wird sich herausstellen, dass Verbände zu speziellen Ordnungen in einer eindeutig umkehrbaren Beziehung stehen. Wir beginnen mit der Konstruktion der Ordnung bei einem gegebenen Verband.

2.3.1 Satz (Charakterisierung einer Ordnung bzgl. eines Verbands) Es sei ein Verband $(V, \sqcup, \sqcap)$ gegeben. Definiert man auf seiner Trägermenge V eine Relation $\sqsubseteq$ durch

$$a \sqsubseteq b \iff a \sqcap b = a$$

für alle $a, b \in V$, so ist $\sqsubseteq$ eine Ordnungsrelation auf V , und für alle Teilmengen der Form $\{a, b\} \subseteq V$ gelten die nachfolgenden Gleichungen:

$$\sqcup\{a, b\} = a \sqcup b \qquad \sqcap\{a, b\} = a \sqcap b$$

Beweis: Wir beweisen zuerst die Ordnungseigenschaften.

1. „Reflexivität“: Ist $a \in V$ beliebig gewählt, so gilt:

$$\begin{aligned} a \sqsubseteq a &\iff a \sqcap a = a && \text{Definition von } \sqsubseteq \\ &\iff a = a && \text{Satz 2.1.3.1} \end{aligned}$$

2. „Antisymmetrie“: Sind $a, b \in V$ beliebig gewählt, so gilt:

$$\begin{aligned} a \sqsubseteq b \wedge b \sqsubseteq a &\iff a \sqcap b = a \wedge b \sqcap a = b && \text{Definition von } \sqsubseteq \\ &\implies a = a \sqcap b = b && \text{Kommutativität} \end{aligned}$$

3. „Transitivität“: Sind $a, b, c \in V$ beliebig gewählt, so gilt:

$$\begin{aligned} a \sqsubseteq b \wedge b \sqsubseteq c &\iff a \sqcap b = a \wedge b \sqcap c = b && \text{Definition von } \sqsubseteq \\ &\implies a \sqcap c = a \sqcap b \sqcap c && a = a \sqcap b \\ &\qquad\qquad\qquad = a && a \sqsubseteq b, b \sqsubseteq c \\ &\iff a \sqsubseteq c && \text{Definition von } \sqsubseteq \end{aligned}$$

Als nächstes beweisen wir die Gleichung $\sqcup\{a, b\} = a \sqcup b$. Das Element $a \sqcup b$ ist nach den folgenden Rechnungen eine obere Schranke von $\{a, b\}$.

$$\begin{aligned} a \sqsubseteq a \sqcup b &\iff a \sqcap (a \sqcup b) = a && \text{Definition } \sqsubseteq \\ &\iff (a \sqcup b) \sqcap a = a && \text{Kommutativität} \\ &\iff a = a && \text{Absorption} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \sqsubseteq a \sqcup b &\iff b \sqcap (a \sqcup b) = b && \text{Definition } \sqsubseteq \\ &\iff (b \sqcup a) \sqcap b = b && \text{Kommutativität} \\ &\iff b = b && \text{Absorption} \end{aligned}$$

Wegen der eben bewiesenen Eigenschaft ist folglich nur noch zu zeigen, dass $a \sqcup b$ das kleinste Element der Menge $\mathbf{Ma}(\{a, b\})$ ist. Es sei also ein beliebiges Element $x \in \mathbf{Ma}(\{a, b\})$ gegeben, d.h. es gelten $a \sqsubseteq x$ und $b \sqsubseteq x$. Dann haben wir die nachstehende Äquivalenz, welche die gewünschte Eigenschaft bringt:

$$\begin{array}{ll}
 a \sqcup b \sqsubseteq x & \iff (a \sqcup b) \sqcap x = a \sqcup b & \text{Definition } \sqsubseteq \\
 & \iff (a \sqcup b) \sqcup x = x & \text{Satz 2.1.3.2} \\
 & \iff (a \sqcup x) \sqcup (b \sqcup x) = x & \text{Idempotenz} \\
 & \iff x \sqcup x = x & a \sqsubseteq x, b \sqsubseteq x, \text{ Satz 2.1.3.2} \\
 & \iff x = x & \text{Idempotenz}
 \end{array}$$

Auf die gleiche Art und Weise zeigt man die Gleichung $\sqcap\{a, b\} = a \sqcap b$. □

Von Verbänden kommt man also zu speziellen Ordnungen. Im nächsten Satz zeigen wir die Umkehrung, also, dass man von den Ordnungen, wie sie in Satz 2.3.1 konstruiert wurden, wieder zu Verbänden kommt.

2.3.2 Satz (Charakterisierung eines Verbands bzgl. einer Ordnung) Gegeben sei eine Ordnung $(M, \sqsubseteq)$ mit der Eigenschaft, dass für $a, b \in M$ sowohl $\sqcup\{a, b\}$ als auch $\sqcap\{a, b\}$ existieren. Definiert man zwei Abbildungen

$$\sqcup, \sqcap : M \times M \rightarrow M$$

durch $a \sqcup b = \sqcup\{a, b\}$ und $a \sqcap b = \sqcap\{a, b\}$, so ist $(M, \sqcup, \sqcap)$ ein Verband.

Beweis: Wir müssen die sechs Verbandsaxiome für die Abbildungen $\sqcup$ und $\sqcap$ nachrechnen. Dies geschieht wie folgt, wobei $a, b, c \in M$ beliebige Elemente sind:

1. „Kommutativität“: Wir behandeln nur die Abbildung $\sqcup$, da der Fall $\sqcap$ analog zu behandeln ist.

$$\begin{array}{ll}
 a \sqcup b & = \sqcup\{a, b\} & \text{Definition von } \sqcup \\
 & = \sqcup\{b, a\} & \\
 & = b \sqcup a & \text{Definition von } \sqcup
 \end{array}$$

2. „Assoziativität“: Auch hier beschränken wir uns auf den Fall $\sqcup$:

$$\begin{array}{ll}
 (a \sqcup b) \sqcup c & = \sqcup\{\sqcup\{a, b\}, c\} & \text{Definition von } \sqcup \\
 & = \sqcup\{a, b, c\} & \text{Eigenschaft Supremum} \\
 & = \sqcup\{a, \sqcup\{b, c\}\} & \text{Eigenschaft Supremum} \\
 & = a \sqcup (b \sqcup c) & \text{Definition von } \sqcup
 \end{array}$$

Der Beweis, dass das Supremum der Menge $\{a, b, c\}$ gleich ist dem (nach der Annahme existierenden) Supremum der Menge $\{\sqcup\{a, b\}, c\}$ und auch gleich dem (ebenfalls nach der Annahme existierenden) Supremum der Menge $\{a, \sqcup\{b, c\}\}$, ergibt sich durch einfaches Nachrechnen und sei der Leserin oder dem Leser zur Übung empfohlen.

3. „Absorption“: Es gilt $a \sqsubseteq \sqcup\{a, b\} = a \sqcup b$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} (a \sqcup b) \sqcap a &= \sqcap\{a \sqcup b, a\} && \text{Definition von } \sqcap \\ &= a && x \sqsubseteq y \Rightarrow \sqcap\{x, y\} = x, \end{aligned}$$

also das erste Gesetz. Analog beweist man auch das zweite Absorptionsgesetz. $\square$

Insgesamt ist durch die beiden eben bewiesenen Sätze 2.3.1 und 2.3.2 die algebraische Definition 2.1.1 eines Verbands $(V, \sqcup, \sqcap)$ gleichwertig zur ordnungstheoretischen Beschreibung, bei der man für die Ordnung $(V, \sqsubseteq)$ die Existenz von Suprema $\sqcup\{a, b\}$ und Infima $\sqcap\{a, b\}$ für alle Teilmengen der speziellen Form $\{a, b\}$ von V fordert. Verbände entsprechen also genau den Ordnungen, wo zwei Elemente sowohl ein Supremum als auch ein Infimum besitzen. Damit sind auch nachträglich die Bezeichnungen $\sqcup$ für die Supremumsoperation bzw. $\sqcap$ für die Infimumsoperation als Verallgemeinerungen von $\sqcup$ und $\sqcap$ gerechtfertigt.

2.3.3 Definition Die in Satz 2.3.1 eingeführte Relation $\sqsubseteq$ heißt die durch den Verband $(V, \sqcup, \sqcap)$ induzierte Ordnung oder die *Verbandsordnung* von V . $\square$

Wegen der Hinzunahme der Ordnung wird ein Verband eigentlich zu einer gemischt algebraisch-relationalen Struktur $(V, \sqcup, \sqcap, \sqsubseteq)$ mit den Axiomen von Definition 2.1.1 und der Ordnungsfestlegung von Satz 2.3.1 als den definierenden Gesetzen.

Wie verhalten sich nun die bisher eingeführten strukturerhaltenden Abbildungen zueinander? Diese Frage wird in den nachfolgenden zwei Sätzen geklärt. Wir beginnen mit der stärkeren Aussage.

2.3.4 Satz Sind $(V_1, \sqcup_1, \sqcap_1)$ und $(V_2, \sqcup_2, \sqcap_2)$ Verbände und ist $f : V_1 \rightarrow V_2$ ein Verbandshomomorphismus, so ist f monoton bezüglich der induzierten Ordnungen $\sqsubseteq_1$ und $\sqsubseteq_2$.

Beweis: Es seien $a, b \in V_1$ beliebig vorgegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} a \sqsubseteq_1 b &\iff a \sqcap_1 b = a && \text{Definition von } \sqsubseteq_1 \\ &\implies f(a \sqcap_1 b) = f(a) && \text{Anwendung von } f \\ &\iff f(a) \sqcap_2 f(b) = f(a) && f \text{ ist Verbandshom.} \\ &\iff f(a) \sqsubseteq_2 f(b) && \text{Definition von } \sqsubseteq_2, \end{aligned}$$

was die Monotonie der Abbildung f beweist. $\square$

Die Umkehrung von Satz 2.3.4 trifft nicht zu. Es gibt also monotone Abbildungen auf Verbänden, die keine Verbandshomomorphismen sind. Ein Gegenbeispiel wurde schon in Beispiel 2.2.7 angegeben, denn die dortigen Ordnungen sind derartig, dass sie zu Verbänden führen. Jedoch gelten statt der Umkehrung, welche ja die Gültigkeit von zwei Gleichungen verlangt, die folgenden abgeschwächten Tatsachen.

2.3.5 Satz Sind $(V_1, \sqcup_1, \sqcap_1)$ und $(V_2, \sqcup_2, \sqcap_2)$ zwei Verbände und ist die Abbildung $f : V_1 \rightarrow V_2$ monoton bezüglich der induzierten Verbandsordnungen $\sqsubseteq_1$ und $\sqsubseteq_2$, so gelten für alle $a, b \in V_1$ die folgenden zwei Abschätzungen:

1. $f(a \sqcap_1 b) \sqsubseteq_2 f(a) \sqcap_2 f(b)$
2. $f(a \sqcup_1 b) \sqsupseteq_2 f(a) \sqcup_2 f(b)$

Beweis: Es seien $a, b \in V_1$ beliebige Elemente. Wir zeigen dann die beiden Behauptungen wie folgt:

1. Das Element $f(a \sqcap_1 b)$ ist eine untere Schranke der Menge $\{f(a), f(b)\}$, denn es gelten die folgenden zwei Implikationen:

$$\begin{aligned} a \sqcap_1 b &= \sqcap_1 \{a, b\} \sqsubseteq_1 a && \text{Ordnungsth. vs. Verbandsth.} \\ \Rightarrow f(a \sqcap_1 b) &\sqsubseteq_2 f(a) && f \text{ monoton} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \sqcap_1 b &= \sqcap_1 \{a, b\} \sqsubseteq_1 b && \text{Ordnungsth. vs. Verbandsth.} \\ \Rightarrow f(a \sqcap_1 b) &\sqsubseteq_2 f(b) && f \text{ monoton} \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort $f(a \sqcap_1 b) \sqsubseteq_2 \sqcap_2 \{f(a), f(b)\} = f(a) \sqcap_2 f(b)$, also die gewünschte Eigenschaft.

2. Diese Behauptung beweist man vollkommen analog. □

In diesem Satz haben wir die Notation $a \sqsupseteq b$ für $b \sqsubseteq a$ verwendet. Dies werden wir auch weiterhin tun, wenn damit die Abschätzungen besser die Dualität (genauer werden wir dies im Abschnitt 2.4 studieren) ausdrücken. Weiterhin haben wir die Abschätzung $a \sqcap b \sqsubseteq a$ für die Verbandsoperation $\sqcap$ verwendet, welche beim Beweis des Satzes 2.3.1 eigentlich hätte gezeigt werden müssen („das Infimum ist eine untere Schranke“), dort aber unterdrückt wurde. Die duale Beziehung $a \sqsubseteq b \sqcup a$ für das Supremum („das Supremum ist eine obere Schranke“) wurde im Beweis von Satz 2.3.1 hingegen explizit gezeigt.

In einem Verband fallen die zwei Begriffe Verbandshomomorphismus und monotone Abbildung also nicht zusammen. Bei den Isomorphismen hat man hingegen Übereinstimmung, wie wir nun zeigen.

2.3.6 Satz Sind $(V_1, \sqcup_1, \sqcap_1)$ und $(V_2, \sqcup_2, \sqcap_2)$ Verbände und $f : V_1 \rightarrow V_2$, so gilt: f ist ein Verbandsisomorphismus genau dann, wenn f ein Ordnungsisomorphismus bzgl. der beiden induzierten Ordnungen $\sqsubseteq_1$ und $\sqsubseteq_2$ ist.

Beweis: „ $\Rightarrow$ “: Die Monotonie von f folgt aus Satz 2.3.4. Es ist f^{-1} ein Verbandsisomorphismus (also auch -homomorphismus) nach Satz 2.1.6 und damit monoton nach Satz 2.3.4. Damit ist f ein Ordnungsisomorphismus.

„ $\Leftarrow$ “: Zu zeigen ist, dass die Eigenschaften (1) und (2) aus Satz 2.3.5 zu Gleichungen werden. Wir zeigen hier nur den Beweis für (2). Es seien also $a, b \in V_1$ beliebig gewählt und es bezeichne true die immer wahre Aussage. Da f surjektiv ist, finden wir ein Element $c \in V_1$ mit

$$f(a) \sqcup_2 f(b) = f(c). \quad (*)$$

Es gilt nun sowohl die Beziehung $a \sqsubseteq_1 c$ als auch die Beziehung $b \sqsubseteq_1 c$, denn wir haben die beiden Äquivalenzen

$$\begin{array}{ll}
 \text{true} & \iff f(a) \sqsubseteq_2 f(c) & f(a) \sqsubseteq_2 f(a) \sqcup_2 f(b) \text{ und } (*) \\
 & \iff a \sqsubseteq_1 c & f^{-1} \text{ monoton} \\
 \\
 \text{true} & \iff f(b) \sqsubseteq_2 f(c) & f(b) \sqsubseteq_2 f(a) \sqcup_2 f(b) \text{ und } (*) \\
 & \iff b \sqsubseteq_1 c & f^{-1} \text{ monoton,}
 \end{array}$$

und deren rechte Seiten implizieren $a \sqcup_1 b \sqsubseteq_1 c$. Damit sind wir aber fertig, da

$$\begin{array}{ll}
 a \sqcup_1 b \sqsubseteq_1 c & \implies f(a \sqcup_1 b) \sqsubseteq_2 f(c) & f \text{ ist monoton} \\
 & \iff f(a \sqcup_1 b) \sqsubseteq_2 f(a) \sqcup_2 f(b) & \text{Gleichung } (*)
 \end{array}$$

gilt. Mit Aussage (2) aus Satz 2.3.5 folgt dann die Gleichheit $f(a \sqcup_1 b) = f(a) \sqcup_2 f(b)$. Die Aussage (1) aus Satz 2.3.5 verschärft man analog zur Gleichheit. $\square$

2.4 Das Dualitätsprinzip der Verbandstheorie

Beim Beweisen der bisherigen verbandstheoretischen Eigenschaften stellte sich heraus, dass viele Aussagen und Beweise ineinander überführbar sind, indem man die Operation $\sqcup$ mit der Operation $\sqcap$ und die Ordnung $\sqsubseteq$ mit der Ordnung $\supseteq$ vertauscht. Dem liegt ein allgemeines Prinzip zugrunde, das wir nun angeben und auch beweisen wollen. Für den folgenden Stoff werden einige Grundkenntnisse aus der Prädikatenlogik vorausgesetzt, die vielen Leserinnen und Lesern wahrscheinlich aus einer einführenden Vorlesung zur mathematischen Logik bekannt sind. Ist dies nicht der Fall, so hoffen wir trotzdem, dass die Argumentationen einigermaßen nachvollziehbar sind. Gegebenenfalls schlage man in einem Standard-Lehrbuch über mathematische Logik nach.

Für den Beweis des Dualitätsprinzips folgen wir logischen Prinzipien und unterscheiden zwischen Syntax (Ausdrücke, Formeln) und Semantik (Werte, Wahrsein, Falschsein) einerseits und logischer Konsequenz aufgrund von Gültigkeit und Beweisbarkeit in einem Kalkül andererseits. Zum Behandeln der Syntax legen wir zuerst drei Mengen von syntaktischen Objekten, fest, nämlich die nachfolgend angegebenen:

$\mathfrak{L}$: Dies ist die Sprache (das Vokabular) der (reinen) Verbandstheorie. Die Menge $\mathfrak{L}$ besteht also aus Bezeichnern für die zwei verbandstheoretischen Operationen $\sqcup$ und $\sqcap$, für welche wir ebenfalls diese Symbole wählen.

$\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}}$: Dies ist die Menge der Terme (Ausdrücke), die über der Sprache $\mathfrak{L}$ gebildet werden können. Terme sind aufgebaut mit Hilfe der zwei Operationssymbole $\sqcup, \sqcap$ der Sprache, welche auch infix-notiert werden, sowie freien Variablen aus einer vorgegebenen Variablenmenge, welche für Elemente von Verbänden stehen. Beispiele für Terme sind etwa $x \sqcup x$ und $(x \sqcup y) \sqcap z$ oder auch nur eine einzelne Variable x ,

$\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$: Dies ist die Menge der Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe über der Sprache $\mathfrak{L}$ mit Gleichungen $t_1 = t_2$ (wobei $t_i \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{L}}$) als Primformeln. Formeln sind dabei wie üblich induktiv definiert. Beispiele für solche Formeln sind etwa $x = y$, $x \sqcup x = x$ und $\forall x : (x \sqcup x = x) \wedge (x \sqcap x = x)$.

Zu einer Formel $\varphi \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$ sei $\varphi^d \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$ diejenige Formel, die aus φ entsteht, indem die Operationssymbole $\sqcup$ und $\sqcap$ vertauscht werden. Man nennt dann die Formel φ^d die *duale Form* der Formel φ . Etwa ist $x = y$ die duale Form von $x = y$, es ist $x \sqcap x = x$ die duale Form von $x \sqcup x = x$ und es ist $\forall x : (x \sqcap x = x) \wedge (x \sqcup x = x)$ die duale Form von $\forall x : (x \sqcup x = x) \wedge (x \sqcap x = x)$. Auch $\varphi^d \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$ kann man formal durch Induktion über den Aufbau von φ definieren.

Im Beweis des folgenden Dualitätsprinzips bezeichnen wir mit $\vdash$ die Beweisbarkeitsrelation zwischen Formelmengen und Formeln und unterstellen, dass sie formal definiert ist mit Hilfe eines vollständigen und korrekten Hilbert-Kalküls (benannt nach dem Mathematiker D. Hilbert) für die Prädikatenlogik erster Stufe. Hier ist ein (formaler) Beweis einer Formel φ aus einer Formelmengen (den Hypothesen) $\mathcal{A}$ ein Baum, dessen Blätter Axiome der Prädikatenlogik oder Hypothesen aus $\mathcal{A}$ sind, dessen Wurzel die zu beweisende Formel φ ist und wo Übergänge nur den Modus ponens $\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$ als Deduktionsregel verwenden. Gibt es so einen Beweis, dann gilt definitionsgemäß die Beziehung $\mathcal{A} \vdash \varphi$. Mit $\models$ bezeichnen wir die Relation der semantischen Konsequenz zwischen Formelmengen und Formeln, d.h. es ist $\mathcal{A} \models \varphi$ genau dann wahr, falls die Formel φ in allen Modellen der Formelmengen $\mathcal{A}$ gilt. Vollständigkeit und Korrektheit besagen, dass die Relationen $\vdash$ und $\models$ übereinstimmen. Man findet die entsprechenden Einzelheiten in vielen Lehrbüchern der mathematischen Logik. Nach diesen Vorbereitungen hinsichtlich der logischen Grundlagen können wir nun das Dualitätsprinzip formulieren und auch formal beweisen.

2.4.1 Satz (Dualitätsprinzip) Gilt die Formel $\varphi \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$ in allen Verbänden, so auch die duale Formel φ^d .

Beweis: Es sei $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$ die Menge von Formeln, welche den formalen Hinschreibungen der Axiome der Verbandstheorie in der Prädikatenlogik erster Stufe entsprechen, also:

$$\mathfrak{V} = \{ \forall x \forall y : x \sqcup y = y \sqcup x, \dots, \forall x \forall y : (x \sqcap y) \sqcup x = x \}$$

Dann hat man folgende Rechnung:

φ gilt in allen Verbänden	
$\Longleftrightarrow \mathfrak{V} \models \varphi$	Definition $\models$
$\implies \mathfrak{V} \vdash \varphi$	Vollständigkeit des Kalküls
$\implies \mathfrak{V} \vdash \varphi^d$	siehe unten
$\implies \mathfrak{V} \models \varphi^d$	Korrektheit des Kalküls
$\Longleftrightarrow \varphi^d$ gilt in allen Verbänden	Definition $\models$

Die Begründung des dritten Schritts ist dabei wie folgt: Hat man einen Beweis für die Formel φ aus den Hypothesen $\mathfrak{V}$ und ersetzt man in ihm simultan jedes Vorkommen des

Symbols $\sqcup$ durch das Symbol $\sqcap$ und umgekehrt, so hat man einen (dualen) Beweis für die duale Formel φ^d aus den Hypothesen $\mathfrak{V}$, denn die Dualisierung von einem Axiom der Prädikatenlogik ist wiederum ein Axiom der Prädikatenlogik und die Dualisierung einer Formel aus $\mathfrak{V}$ liegt wiederum in $\mathfrak{V}$. $\square$

Fasst man eine Beziehung $t_1 \sqsubseteq t_2$ mit Termen $t_1, t_2 \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{L}}$ als Abkürzung für die Gleichung $t_1 \sqcap t_2 = t_1$ auf und bezeichnet t_i^d , analog zu φ^d , die duale Form von Termen, so bekommt man als Spezialfall die nachstehende Äquivalenz:

$$\begin{array}{ll}
 t_1 \sqsubseteq t_2 \text{ gilt in allen Verbänden} & \\
 \iff t_1 \sqcap t_2 = t_1 \text{ gilt in allen Verbänden} & \text{Definition von } \sqcup \\
 \iff (t_1 \sqcap t_2 = t_1)^d \text{ gilt in allen Verbänden} & \text{Dualitätsprinzip} \\
 \iff t_1^d \sqcup t_2^d = t_1^d \text{ gilt in allen Verbänden} & \text{Definition duale Formel} \\
 \iff t_2^d \sqsubseteq t_1^d \text{ gilt in allen Verbänden} &
 \end{array}$$

Im Folgenden betrachten wir zwei Beispiele für das Dualitätsprinzip. Dabei gehen wir aber von der Formelschreibweise der Prädikatenlogik wieder ab und verwenden die „freiere“ gewohnte mathematische Notation. Das erste Beispiel führt wichtige Rechenregeln ein, das zweite Beispiel wird in einer Verschärfung später noch eine sehr große Rolle spielen.

2.4.2 Beispiele (für das Dualitätsprinzip) Es sei $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein Verband mit der induzierten Verbandsordnung $(V, \sqsubseteq)$.

1. Für alle $a, b, c \in V$ gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{array}{ll}
 a \sqsubseteq b \implies a \sqcup c \sqsubseteq b \sqcup c & \text{Linksmonotonie von } \sqcup \\
 a \sqsubseteq b \implies c \sqcup a \sqsubseteq c \sqcup b & \text{Rechtsmonotonie von } \sqcup
 \end{array}$$

Beweis: Wir beweisen zuerst die Linksmonotonie. Dazu seien beliebige $a, b, c \in V$ mit $a \sqsubseteq b$ vorausgesetzt. Dann gilt:

$$\begin{array}{ll}
 (a \sqcup c) \sqcup (b \sqcup c) & = a \sqcup b \sqcup c & \text{Idempotenz von } \sqcup \\
 & = b \sqcup c & \text{Voraussetzung } a \sqsubseteq b
 \end{array}$$

Also gilt die Beziehung $a \sqcup c \sqsubseteq b \sqcup c$ nach der Definition der Ordnung $\sqsubseteq$. Der Beweis der Rechtsmonotonie folgt analog.

Die Dualisierungen der Links- und Rechtsmonotonie liefern uns sofort die folgenden Implikationen für alle $a, b, c \in V$:

$$\begin{array}{ll}
 a \supseteq b \implies a \sqcap c \supseteq b \sqcap c & \text{Linksmonotonie}^d \text{ von } \sqcap \\
 a \supseteq b \implies c \sqcap a \supseteq c \sqcap b & \text{Rechtsmonotonie}^d \text{ von } \sqcap
 \end{array}$$

Deren Umschreiben durch „Umdrehen“ der Ordnungssymbole führt dann zur Gültigkeit der folgenden zwei Implikationen für alle $a, b, c \in V$:

$$\begin{array}{ll}
 b \sqsubseteq a \implies b \sqcap c \sqsubseteq a \sqcap c & \text{Linksmonotonie von } \sqcap \\
 b \sqsubseteq a \implies c \sqcap b \sqsubseteq c \sqcap a & \text{Rechtsmonotonie von } \sqcap
 \end{array}$$

2. Es ist durchaus möglich, dass eine allgemeingültige Aussage über Verbände (also eine Eigenschaft / Formel, die in allen Verbänden gilt) durch Dualisierung in sich selbst (genauer: in eine zu sich selbst äquivalente Aussage) übergeht. Als Beispiel betrachten wir für alle $a, b, c \in V$ die folgende Implikation:

$$a \sqsubseteq c \implies a \sqcup (b \sqcap c) \sqsubseteq (a \sqcup b) \sqcap c \quad \text{Modulare Ungleichung}$$

Beweis: Es seien beliebige $a, b, c \in V$ mit $a \sqsubseteq c$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a &= a \sqcap a && \text{Idempotenz} \\ &\sqsubseteq (a \sqcup b) \sqcap a && a \sqsubseteq a \sqcup b \text{ und Linksmonotonie} \\ &\sqsubseteq (a \sqcup b) \sqcap c && \text{Voraussetzung } a \sqsubseteq c \text{ und Rechtsmonotonie} \end{aligned}$$

Weiterhin haben wir:

$$b \sqcap c \sqsubseteq (a \sqcup b) \sqcap c \quad \text{da } b \sqsubseteq a \sqcup b \text{ und Linksmonotonie}$$

Aufgrund dieser zwei Abschätzungen ist $(a \sqcup b) \sqcap c$ eine obere Schranke der Menge $\{a, b \sqcap c\}$ und somit größer als das Supremum $a \sqcup (b \sqcap c)$ dieser Menge, was die Behauptung zeigt.

Eine Dualisierung der modularen Ungleichung liefert, dass für alle $a, b, c \in V$ gilt

$$a \sqsupseteq c \implies a \sqcap (b \sqcup c) \sqsupseteq (a \sqcap b) \sqcup c,$$

und durch eine Umformung der zwei Ordnungsbeziehungen erhalten wir die eben gezeigte Implikation in der Version

$$c \sqsubseteq a \implies (a \sqcap b) \sqcup c \sqsubseteq a \sqcap (b \sqcup c).$$

Wenn wir nun in dieser allquantifizierten Aussage (die Variable) a durch c und umgekehrt ersetzen und dann die Kommutativität des Verbands ausnutzen, so erhalten wir genau die ursprüngliche modulare Ungleichung.

Fordert man, dass die rechte Seite der modularen Ungleichung eine Gleichung ist, so gelangt man zur interessanten Klasse der modularen Verbände. Diese werden im ersten Abschnitt 3.1 des nächsten Kapitels genauer untersucht. $\square$

Zum Schluss ist noch eine wichtige *Bemerkung zum Dualitätsprinzip* angebracht. Oft betrachtet man spezielle Klassen von Verbänden, die durch weitere Axiome (Gesetze, Eigenschaften, Forderungen; hier verwendet man mehrere Sprechweisen) bestimmt sind. Wie der Beweis des Dualitätsprinzips zeigt, gilt das Dualitätsprinzip nur dann für solche Verbandsklassen, wenn bei ihnen diese zusätzlichen Gesetze abgeschlossen gegenüber Dualisierung sind. Genauer heißt dies: Ist $\mathfrak{G}$ diese zusätzliche Gesetzesmenge, welche die betrachtete Verbandsklasse definiert, so muss es zu jedem Gesetz $\varphi_1 \in \mathfrak{G}$ ein Gesetz $\varphi_2 \in \mathfrak{G}$ geben, so dass φ_1^d und φ_2 logisch äquivalent sind. Beispielsweise gilt das Dualitätsprinzip für die schon erwähnte Klasse der modularen Verbände.

2.5 Nachbarschaft und Diagramme

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften definiert und untersucht, die mit der Nachbarschaft in geordneten Mengen zu tun haben. Dies führt in natürlicher Art und Weise zu Diagrammen, deren bildliche Darstellung man oft als Visualisierung für eine gegebene Ordnung und/oder einen gegebenen Verband verwendet, beispielsweise um sich Eigenschaften klar zu machen, extreme Elemente zu erkennen oder Gegenbeispiele zu suchen. Wir beginnen die Diskussion mit der Festlegung der Nachbarschaftsbeziehungen.

2.5.1 Definition Es seien V ein Verband und $a \in V$.

1. Ein Element $u \in V$ heißt *unterer Nachbar* von a , falls gilt

$$u \sqsubset a \wedge \forall b \in V : u \sqsubseteq b \sqsubseteq a \Rightarrow (u = b \vee a = b).$$

2. Ein Element $o \in V$ heißt *oberer Nachbar* von a , falls gilt

$$a \sqsubset o \wedge \forall b \in V : a \sqsubseteq b \sqsubseteq o \Rightarrow (o = b \vee a = b).$$

Wenn es auf die Richtung der Ordnungsbeziehung nicht ankommt, so spricht man auch nur von Nachbarn. $\square$

Ein unterer Nachbar bezüglich $\sqsubseteq$ ist also ein oberer Nachbar bezüglich $\sqsupseteq$. In der Literatur stützen sich viele Untersuchungen auf beide Begriffe der Nachbarschaft. Beginnen wir mit der oberen Nachbarschaft eines kleinsten Elements in Verbänden.

2.5.2 Definition Es sei V ein Verband mit kleinstem Element $\mathbf{0} \in V$.

1. Jeder obere Nachbar von $\mathbf{0}$ wird ein *Atom* genannt. Mit $\text{At}(V)$ ist die *Menge der Atome* von V bezeichnet.
2. V heißt *atomarer Verband*, falls es zu jedem $b \in V$ mit $b \neq \mathbf{0}$ ein Atom $a \in \text{At}(V)$ mit $a \sqsubseteq b$ gibt. $\square$

Der nächste Satz stellt eine große Klasse atomarer Verbände vor. Mit $\mathbf{0}$ ist wiederum das kleinste Element bezeichnet.

2.5.3 Satz Jeder endliche Verband $(V, \sqcup, \sqcap)$ (das ist ein Verband mit einer endlichen Trägermenge) besitzt ein kleinstes Element $\mathbf{0}$ und ist atomar.

Beweis: Da der Verband endlich ist, besitzt er eine explizite Darstellung mit $n > 0$ Elementen, also von der Form $V = \{a_1, \dots, a_n\}$. Es ist offensichtlich, dass dann das durch $a_1 \sqcap \dots \sqcap a_n$ gegebene Element das kleinste Element $\mathbf{0}$ von V ist.

Wir kommen nach diesen Vorbemerkungen nun zum Beweis der behaupteten Atomizität von V . Hier haben wir zwei Fälle zu betrachten.

Der erste Fall ist, dass $|V| = 1$ gilt. In diesem Fall gilt die Behauptung, da es kein $b = inV$ mit $b \neq \mathbf{0}$ gibt, die geforderte Allquantifizierung also gilt.

Es verbleibt der Falls, dass $|V| \geq 2$ gilt. Hier zeigen wir die Behauptung durch einen Widerspruchsbeweis und gehen dabei wie folgt vor. Es sei V als nicht atomar angenommen. Dann existiert (auch wegen $|V| \geq 2$) ein Element $b_0 \in V$ mit $\mathbf{0} \neq b_0$, unter dem kein Atom liegt. Wegen $b_0 \sqsubseteq b_0$ kann insbesondere b_0 kein Atom sein. Also gibt es ein weiteres Element $b_1 \in V$ mit der Eigenschaft $\mathbf{0} \sqsubset b_1 \sqsubset b_0$. Wegen $b_1 \sqsubseteq b_0$ kann auch b_1 kein Atom sein. Also gibt es wieder ein weiteres Element $b_2 \in V$ mit $\mathbf{0} \sqsubset b_2 \sqsubset b_1 \sqsubset b_0$. Auf diese Art und Weise konstruiert man Schritt für Schritt eine unendliche Kette (formal natürlich mittels Induktion!)

$$\dots \sqsubset b_i \sqsubset \dots \sqsubset b_2 \sqsubset b_1 \sqsubset b_0,$$

von paarweise verschiedenen Elementen von V , und dies ist ein Widerspruch zur Endlichkeit von V . $\square$

Natürlich besitzt jeder endliche Verband auch ein größtes Element. Dieses ist gegeben durch $a_1 \sqcup \dots \sqcup a_n$, wobei a_1 bis a_n die Elemente des Verbands sind. Atome sind unzerlegbare Elemente eines Verbands in dem folgenden Sinn.

2.5.4 Satz Sind $a, b \in \text{At}(V)$ zwei verschiedene Atome eines Verbands $(V, \sqcup, \sqcap)$, so gilt die Gleichheit $a \sqcap b = \mathbf{0}$ (wobei $\mathbf{0}$ das kleinste Element von V ist).

Beweis: Es seien $a, b \in \text{At}(V)$ mit $a \neq b$. Angenommen, es gilt $a \sqcap b \neq \mathbf{0}$. Dann haben wir die Implikation

$$\begin{array}{ll} a \sqcap b \sqsubseteq a \ \wedge \ a \sqcap b \sqsubseteq b & \text{gültige Formel} \\ \implies a \sqcap b = a \ \wedge \ a \sqcap b = b & a, b \text{ Atome, } a \sqcap b \neq \mathbf{0} \\ \implies a = b & \text{Gleichheit transitiv,} \end{array}$$

und das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $a \neq b$. $\square$

Ein weiteres Beispiel für einen atomaren Verband ist der Potenzmengenverband $(2^X, \cup, \cap)$, hier sind genau die einelementigen Mengen $\{a\}$ die Atome. Auch der Teilbarkeitsverband $(\mathbb{N}, \text{kgV}, \text{ggT})$ ist atomar. Nun sind genau die Primzahlen die Atome. Vertauscht man bei einem Verband $\sqcup$ mit $\sqcap$, so erhält man den sogenannten *dualen Verband* $(V, \sqcap, \sqcup)$ mit revertierter (dualer) Ordnung. Der duale Verband $(\mathbb{N}, \text{ggT}, \text{kgV})$ des Teilbarkeitsverbands ist kein atomarer Verband. Er besitzt die Null als kleinstes Element. Weil aber jede natürliche Zahl ungleich der Null, die Null teilt, auch ein echtes Vielfaches hat, das die Null teilt, kann es in $(\mathbb{N}, \text{ggT}, \text{kgV})$ keine Atome geben.

Ordnungen stellt man oft graphisch dar, indem man die Elemente der Trägermenge in der Euklidischen (Zeichen-)Ebene als Punkte zeichnet und dann durch Linien verbindet. Dabei wird die Ordnungsbeziehung $a \sqsubset b$ dadurch ausgedrückt, dass das Element a unterhalb vom Element b in der Zeichenebene gezeichnet wird (eventuell aus Darstellungsgründen auch versetzt) und eine Linie a mit b verbindet. Auf die Angabe von $a \sqsubseteq a$, also der Reflexivitätsbeziehungen, in solchen Bildern kann man verzichten. Ebenso muss man bei $a \sqsubseteq b$

und $b \sqsubseteq c$ nicht auch noch die Linie zwischen a und c zeichnen. Die Transitivität ist nämlich per Definition eine Ordnungseigenschaft und kann leicht aus den graphischen Darstellungen rekonstruiert werden. Durch das Weglassen der die Reflexivität anzeigenden Schlingen und der die Transitivität anzeigenden „Überbrückungslinien“ gewinnen solche Zeichnungen von Ordnungen immens an Übersichtlichkeit. Anschauliche graphischen Darstellungen von Ordnungen sind auch sehr gut dazu geeignet, extreme Elemente zu identifizieren, sich spezielle Eigenschaften zu verdeutlichen und mit neuen Konzepten zu experimentieren. Zu formalen Beweis Zwecken dürfen sie natürlich nicht verwendet werden.

Für die Inklusionsordnung auf der Potenzmenge von $\{a, b, c\}$ bekommt man beispielsweise die in Abbildung 2.1 angegebene zeichnerische Darstellung.

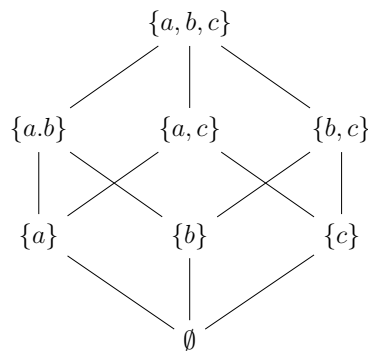


Abbildung 2.1: Das Hasse-Diagramm einer kleinen Potenzordnung

Zum Ende dieses Abschnitts wollen wir die zeichnerischen Darstellungen von Ordnungen, auch Ordnungsdiagramme genannt, durch die folgende Definition mathematisch präziser erfassen.

2.5.5 Definition Zu einer Ordnung $(M, \sqsubseteq)$ heißt die Relation $H_{\sqsubseteq}$ der unteren Nachbarschaft das *Hasse-Diagramm*. D.h. es wird für alle $a, b \in M$ festgelegt, dass

$$a H_{\sqsubseteq} b \quad :\Longleftrightarrow \quad a \text{ ist unterer Nachbar von } b.$$

Gilt für alle $a, b \in M$ die Beziehung $a \sqsubseteq b$ genau dann, wenn $a H_{\sqsubseteq}^* b$ gilt, mit $H_{\sqsubseteq}^*$ als der reflexiv-transitiven Hülle von $H_{\sqsubseteq}$ wie im ersten Kapitel eingeführt, so *besitzt die Ordnung per Definition ein Hasse-Diagramm*. $\square$

Es heißt das Hasse-Diagramm auch die *Überdeckungs-Relation* der Ordnung und wird mit dem Symbol „ $\prec$ “ bezeichnet. Zeichnungen, wie die von Abbildung 2.1, werden zu Zeichnungen von Hasse-Diagrammen als gerichtete Graphen, wenn man alle Linien durch Pfeilspitzen zu Pfeilen macht und jene immer von unten nach oben gerichtet sind. Für Hasse-Diagramme gilt die folgende grundlegende Eigenschaft, welche den zeichnerischen Darstellungen zugrunde liegt und auch anschaulich klar zu sein scheint. Auf einen formalen Beweis

dieses Satzes verzichten wir, da er mit den bisherigen Mitteln nur sehr umständlich geführt werden kann. Wir werden Satz 2.5.6 auch nirgends beim Beweisen verwenden. Er dient nur zur Rechtfertigung der graphischen Darstellung von Ordnungen und Verbänden.

2.5.6 Satz Jede endliche Ordnung besitzt ein Hasse-Diagramm. $\square$

Unendliche Ordnungen müssen durchaus kein Hasse-Diagramm besitzen. Ein einfaches Beispiel ist die geordnete Menge $(\mathbb{R}, \leq)$ der reellen Zahlen. Da die reellen Zahlen dicht sind, also zwischen zwei reellen Zahlen immer noch eine dritte liegt, ist das Hasse-Diagramm der Ordnung $(\mathbb{R}, \leq)$ die leere Relation, denn es stehen keine zwei reellen Zahlen a und b in der Beziehung „ a ist unterer Nachbar von b “. Somit ist die reflexiv-transitive Hülle des Hassediagramms die identische Relation auf $\mathbb{R}$ und damit ungleich der (nicht identischen) Ordnung auf $\mathbb{R}$.

Hasse-Diagramme sind nach dem Algebraiker H. Hasse benannt, der sie intensiv benutzte, um Sachverhalte anschaulich darzustellen. Solch eine Verwendung ist heutzutage allgemein üblich und wird durch moderne Computerprogramme zum schönen Zeichnen von Graphen noch unterstützt. Pioniere der Verbands- und Ordnungstheorie, wie etwa G. Boole, E. Schröder und R. Dedekind, scheinen keinerlei graphische Darstellungen von Ordnungen verwendet zu haben.

2.6 Einige Konstruktionsmechanismen

Bisher haben wir als einzigen Mechanismus zur Konstruktion von neuen Verbänden die Beschränkung auf Unterverbände kennengelernt. Es gibt bei algebraischen Strukturen aber einige weitere solcher Mechanismen. Diesen wollen wir uns nun zuwenden. Betrachtet man die durch diese Mechanismen auf Verbänden hervorgerufenen Ordnungen, so trifft man, wie wir sehen werden, auch hier auf bekannte Konstruktionen. Wir beginnen die Vorstellung der Konstruktionsmechanismen mit dem direkten Produkt.

2.6.1 Definition Gegeben seien zwei Verbände $(V, \sqcup_V, \sqcap_V)$ und $(W, \sqcup_W, \sqcap_W)$. Man definiert auf dem direkten Produkt $V \times W$ zwei Abbildungen komponentenweise durch

$$\langle a, b \rangle \sqcup \langle c, d \rangle = \langle a \sqcup_V c, b \sqcup_W d \rangle \quad \langle a, b \rangle \sqcap \langle c, d \rangle = \langle a \sqcap_V c, b \sqcap_W d \rangle.$$

Dann heißt $(V \times W, \sqcup, \sqcap)$ das *direkte Produkt* (oft auch der *Produktverband*) der beiden Verbände $(V, \sqcup_V, \sqcap_V)$ und $(W, \sqcup_W, \sqcap_W)$. $\square$

Um die Wortwahl „Produktverband“ zu rechtfertigen, haben wir natürlich den folgenden Satz zu beweisen:

2.6.2 Satz (Produktverband) Das direkte Produkt $(V \times W, \sqcup, \sqcap)$ von zwei Verbänden $(V, \sqcup_V, \sqcap_V)$ und $(W, \sqcup_W, \sqcap_W)$ ist wiederum ein Verband.

Beweis: Die zu zeigenden sechs Gleichungen ergeben sich direkt aus den entsprechenden

Gleichungen der vorliegenden Verbände. Etwa zeigt, unter Verwendung der Bezeichnungen von Definition 2.6.1, die Gleichung

$$\begin{aligned}
 \langle a, b \rangle \sqcup \langle c, d \rangle &= \langle a \sqcup_V c, b \sqcup_W d \rangle \\
 &= \langle c \sqcup_V a, d \sqcup_W b \rangle \\
 &= \langle c, d \rangle \sqcup \langle a, b \rangle
 \end{aligned}
 \qquad V, W \text{ Verbände}$$

für alle $a, c \in V$ und $b, d \in W$ das erste Kommutativgesetz. Analog zeigt man auch die anderen Gesetze. $\square$

Es ist offensichtlich, wie man die Definition des Produktverbands auf beliebige m -fache direkte Produkte und sogar unendliche direkte Produkte verallgemeinert. Weiterhin ergibt sich aus der Definition sofort für die Ordnung eines Produktverbands $(V \times W, \sqcup, \sqcap)$, dass

$$\langle a, b \rangle \sqsubseteq \langle c, d \rangle \iff a \sqsubseteq_V c \wedge b \sqsubseteq_W d$$

für alle $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in V \times W$ gilt. Die relationale Struktur $(V \times W, \sqsubseteq)$ bzw. deren Ordnungsrelation $\sqsubseteq$ entspricht also genau dem, was man üblicherweise eine *Produktordnung* nennt. Das Hasse-Diagramm der Ordnung eines Produktverbands $V \times W$ kann man zeichnerisch sehr einfach aus den Hasse-Diagrammen der Ordnungen von V und W erstellen. Man ersetzt zuerst im Hasse-Diagramm von V jeden Knoten durch eine Kopie des Hasse-Diagramms von W . Dann verbindet man jeden Knoten einer Kopie mit dem jeweiligen Knoten jeder anderen Kopie genau dann, wenn die den Kopien entsprechenden Knoten im Hasse-Diagramm von V verbunden sind. Schließlich streicht man noch die überflüssigen Linien. Die Leserin oder der Leser mache sich diese Vorgehensweise an kleinen Beispielen klar.

Unsere nächste Verbandskonstruktion behandelt die Menge aller Abbildungen von einem Verband in einen anderen (oder auch den gleichen) Verband und zeigt dann, wie man auch in dieser Situation zu einem neuen Verband kommt. Die Konstruktion kann als eine Verallgemeinerung der Produktkonstruktion angesehen werden, wenn man die Elemente eines direkten Produkts $\prod_{i \in I} V_i$ mit beliebiger Indexmenge I als Abbildungen f von I in $\bigcup_{i \in I} V_i$ auffasst, die $f(i) \in V_i$ für alle $i \in I$ erfüllen.

2.6.3 Definition Gegeben seien wiederum zwei Verbände $(V, \sqcup_V, \sqcap_V)$ und $(W, \sqcup_W, \sqcap_W)$. Man definiert auf der Menge W^V aller Abbildungen von V nach W zwei Operationen durch die Festlegungen

$$(f \sqcup g)(a) = f(a) \sqcup_W g(a) \qquad (f \sqcap g)(a) = f(a) \sqcap_W g(a).$$

Dann heißt $(W^V, \sqcup, \sqcap)$ der *Abbildungsverband* von $(V, \sqcup_V, \sqcap_V)$ und $(W, \sqcup_W, \sqcap_W)$. $\square$

Man beachte, dass bei der Definition des Abbildungsverbands nur die Operationen von W verwendet werden. V braucht eigentlich nur eine nichtleere Menge sein. Dass die Konstruktion wiederum einen Verband liefert, wird in dem folgenden Satz gezeigt.

2.6.4 Satz (Abbildungsverband) Der Abbildungsverband $(W^V, \sqcup, \sqcap)$ von zwei Verbänden $(V, \sqcup_V, \sqcap_V)$ und $(W, \sqcup_W, \sqcap_W)$ ist ebenfalls ein Verband.

Beweis: Wiederum ergeben sich die zu zeigenden sechs Gleichungen direkt aus den entsprechenden Gleichungen des Verbands des Resultatbereiches. Mit den Bezeichnungen von Definition 2.6.3 haben wir

$$\begin{aligned} (f \sqcup g)(a) &= f(a) \sqcup_W g(a) \\ &= g(a) \sqcup_W f(a) \\ &= (g \sqcup f)(a) \end{aligned} \qquad \text{W Verband}$$

für alle $a \in V$. Nach der Definition der Gleichheit von zwei Abbildungen (durch die Übereinstimmung aller ihrer Bildelemente; man vergleiche mit dem ersten Kapitel) zeigt dies die Gleichung $f \sqcup g = g \sqcup f$, also das erste Kommutativgesetz. Analog zeigt man auch die anderen Gesetze. $\square$

Wir betrachten nun die Ordnungsbeziehung zwischen zwei Abbildungen $f, g : V \rightarrow W$ eines Abbildungsverbands. Offensichtlich gilt

$$f \sqsubseteq g \iff \forall a \in V : f(a) \sqsubseteq_W g(a).$$

Eine so definierte Ordnung auf Abbildungen wird *Abbildungsordnung* genannt. Dieser Name ist in der Ordnungstheorie auch für die relationale Struktur $(W^V, \sqsubseteq)$ üblich. Leider gibt es keine einfache zeichnerische Möglichkeit, aus einem Hasse-Diagramm der Bildmenge das Hasse-Diagramm der Ordnung eines Abbildungsverbands zu erhalten.

Neben den allgemeinen Abbildungsverbänden sind auch einige der Unterverbände solcher Verbände von Bedeutung. Offensichtlich sind für monotone Abbildungen $f, g : V \rightarrow W$ auf Verbänden V und W auch $f \sqcup g, f \sqcap g : V \rightarrow W$ monoton. Die monotonen Abbildungen bilden also einen Unterverband des Abbildungsverbands W^V . Gleiches gilt auch für andere Abbildungsklassen.

Die nächste Konstruktion betrifft die Quotientenbildung (oder Restklassenbildung). Man benötigt dazu eine Äquivalenzrelation auf der Trägermenge, die mit den Verbandsoperationen verträglich ist. Dies kennt manche Leserin oder mancher Leser schon aus der klassischen Algebra, etwa bei Gruppen. Im Fall einer Gruppe $(G, \cdot)$ und einer Teilmenge $N \subseteq G$ ist die durch die Äquivalenz von $a \equiv b$ und $a \cdot b^{-1} \in N$ für alle $a, b \in G$ definierte Äquivalenzrelation auf G nur dann mit den Gruppenoperationen verträglich, wenn N ein Normalteiler von G ist. Man nennt so eine Relation in der Gruppentheorie eine Gruppenkongruenz. Formal werden die entsprechenden Relationen für Verbände wie folgt festgelegt.

2.6.5 Definition Eine Äquivalenzrelation $\equiv$ auf einem Verband $(V, \sqcup, \sqcap)$ heißt eine *Verbandskongruenz*, falls die Implikation

$$a \equiv b \wedge c \equiv d \implies a \sqcup c \equiv b \sqcup d \wedge a \sqcap c \equiv b \sqcap d$$

für alle Elemente $a, b, c, d \in V$ gilt. $\square$

Nachfolgend geben wir ein (auch für die Theorie wichtiges) Beispiel für eine Verbandskongruenz an, die durch einen Verbandshomomorphismus induziert wird.

2.6.6 Beispiel (Kern eines Verbandshomomorphismus) Es sei $f : V \rightarrow W$ ein Verbandshomomorphismus von einem Verband $(V, \sqcup_V, \sqcap_V)$ nach einem Verband $(W, \sqcup_W, \sqcap_W)$. Man definiert eine Relation $\equiv_f$ auf der Trägermenge V durch die Festlegung

$$a \equiv_f b \iff f(a) = f(b)$$

für alle $a, b \in V$. Offensichtlich ist dies eine Äquivalenzrelation. Sie ist aber auch verträglich mit den Operationen auf dem Verband V . Es gilt nämlich für alle $a, b, c, d \in V$ mit $a \equiv_f b$ und $c \equiv_f d$, dass

$$\begin{aligned} a \sqcup_V c \equiv_f b \sqcup_V d &\iff f(a \sqcup_V c) = f(b \sqcup_V d) && \text{Definition } \equiv_f \\ &\iff f(a) \sqcup_W f(c) = f(b) \sqcup_W f(d) && f \text{ Homomorphismus} \\ &\iff f(a) \sqcup_W f(c) = f(a) \sqcup_W f(c) && a \equiv_f b \text{ und } c \equiv_f d, \end{aligned}$$

und auch, dass

$$\begin{aligned} a \sqcap_V c \equiv_f b \sqcap_V d &\iff f(a \sqcap_V c) = f(b \sqcap_V d) && \text{Definition } \equiv_f \\ &\iff f(a) \sqcap_W f(c) = f(b) \sqcap_W f(d) && f \text{ Homomorphismus} \\ &\iff f(a) \sqcap_W f(c) = f(a) \sqcap_W f(c) && a \equiv_f b \text{ und } c \equiv_f d. \end{aligned}$$

Man nennt die oben eingeführte Verbandskongruenz $\equiv_f$ auf der Menge V den *Kern* der Abbildung f . □

Bezeichnet man die Äquivalenzklassen (Kongruenzklassen) bezüglich der Kongruenzrelation $\equiv$ ebenfalls mit den bei Äquivalenzrelationen üblichen eckigen Klammern, so besagt die in der Definition 2.6.5 geforderte Eigenschaft, dass aus $[a] = [b]$ und $[c] = [d]$ folgt $[a \sqcup c] = [b \sqcup d]$ und auch $[a \sqcap c] = [b \sqcap d]$. Dies ist genau das, was es erlaubt, auf den Äquivalenzklassen eine Verbandsstruktur festzulegen.

2.6.7 Definition Es sei $\equiv$ eine Verbandskongruenz auf dem Verband $(V, \sqcup_V, \sqcap_V)$. Weiterhin bezeichne $V/\equiv$ die Menge der Äquivalenzklassen $[a]$, $a \in V$. Auf $V/\equiv$ werden zwei Operationen wie folgt festgelegt:

$$[a] \sqcup [b] = [a \sqcup_V b] \qquad [a] \sqcap [b] = [a \sqcap_V b].$$

Dann heißt $(V/\equiv, \sqcup, \sqcap)$ der *Quotientenverband* von V modulo (oder: nach) $\equiv$. □

Nach den bisherigen Ergebnissen zu direkten Produkten und Abbildungsmengen ist das nachfolgende Ergebnis teilweise sicher schon erwartet worden.

2.6.8 Satz (Quotientenverband) Der Quotientenverband $V/\equiv$ modulo einer Verbandskongruenz $\equiv$ ist wiederum ein Verband und die *kanonische Abbildung*

$$\psi : V \rightarrow V/\equiv \qquad \psi(a) = [a]$$

ist ein surjektiver Verbandshomomorphismus von $(V, \sqcup_V, \sqcap_V)$ nach $(V/\equiv, \sqcup, \sqcap)$.

Beweis: Wir setzen die Bezeichnungen von Definition 2.6.7 voraus. Aus der Bemerkung vor dieser Definition folgt, dass die Operationen des Quotientenverbands unabhängig von den Repräsentanten der Äquivalenzklassen sind, also wohldefinierte Abbildungen auf den Äquivalenzklassen darstellen. Die zu zeigenden Gleichungen bekommt man dann direkt aus denen von V . Beispielsweise zeigt

$$\begin{aligned} [a] \sqcup [b] &= [a \sqcup_V b] \\ &= [b \sqcup_V a] \\ &= [b] \sqcup [a] \end{aligned} \qquad V \text{ Verband}$$

für alle $a, b \in V$ das erste Kommutativgesetz. Die restlichen Verbandsaxiome kann man in ähnlicher Art und Weise nachrechnen.

Die Homomorphieeigenschaft von ψ für $\sqcup$ zeigt man für alle $a, b \in V$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \psi(a \sqcup_V b) &= [a \sqcup_V b] \\ &= [a] \sqcup [b] \\ &= \psi(a) \sqcup \psi(b) \end{aligned} \qquad \text{Definition Quotientenverband}$$

Analog beweist man $\psi(a \sqcap_V b) = \psi(a) \sqcap \psi(b)$ für alle $a, b \in V$.

Die Surjektivität der Abbildung ψ ist klar, da jedes Bildelement (hier: jede Äquivalenzklasse) $[a] \in V/\equiv$ ein Urbild (hier: einen Repräsentanten) $a \in V$ besitzt. $\square$

Es sollte an dieser Stelle noch bemerkt werden, dass bei Quotientenverbänden die Ordnung auf den Klassen durch die Ordnung der jeweiligen Repräsentanten vorgegeben ist. Auch sollte noch erwähnt werden, dass der klassische Homomorphiesatz der Gruppen in übertragener Weise auch für Verbände gilt. Es wird der Leserin oder dem Leser zur Übung empfohlen, diesen zu formulieren und zu beweisen.

Man kann leicht zeigen, dass im Fall einer Kongruenz $\equiv$ auf einem endlichen Verband V die Äquivalenzklassen $[a]$ immer ein größtes Element $\top \in [a]$ und ein kleinstes Element $\perp \in [a]$ besitzen und für alle Elemente $b \in V$ mit $\perp \sqsubseteq b \sqsubseteq \top$ gilt $\perp \equiv b \equiv \top$, also $b \in [a]$. Aus dem Hasse-Diagramm der Ordnung von V bekommt man zeichnerisch das Hasse-Diagramm der Ordnung von $V/\equiv$, indem man die jeweiligen Äquivalenzklassen zu einzelnen Knoten „zusammenschrumpft“ und dadurch entstehende Mehrfachlinien entfernt. Auch dies mache sich die Leserin oder der Leser an kleinen Beispielen klar.

Alle bisherigen Konstruktionen stellen Spezialfälle von Konstruktionen der sogenannten universellen Algebra für den Bereich Verbandstheorie dar. Was noch bleiben würde, sind die Konstruktion von Summenverbänden (mit disjunkten Vereinigungen als Trägmengen) und von inversen Limites von Verbänden. Eine natürliche Vorgehensweise bei Summenverbänden ist eigentlich nur im Fall von vollständigen Verbänden möglich (einer Verbandsklasse, die wir später behandeln werden). Wir verzichten aber auf ihre Behandlung. Auch auf die inversen Limites gehen wir nicht ein, da diese doch zu weit vom eigentlichen Thema wegführen würden.

Hingegen werden wir die folgende spezielle Konstruktion vereinzelt verwenden. Sie liefert offensichtlich wieder einen Verband. Die Namensgebung stammt aus der Informatik, wo die Konstruktion bei der denotationellen Semantik von Bedeutung ist.

2.6.9 Definition Fügt man an einen Verband $(V, \sqcup_V, \sqcap_V)$ ein nicht in V enthaltenes Element $\perp$ als neues kleinstes Element bezüglich der Verbandsordnung hinzu, so heißt der entstehende Verband $(V \cup \{\perp\}, \sqcup, \sqcap)$ das *Lifting* von V . $\square$

Das Lifting von V wird oft auch mit $V^\perp$ bezeichnet. Für die beiden Operationen $\sqcup$ und $\sqcap$ des Liftings gelten offensichtlich die folgenden Eigenschaften: Sind beide Argumente a und b ungleich $\perp$, so gelten $a \sqcup b = a \sqcup_V b$ und $a \sqcap b = a \sqcap_V b$. Ist eines der Argumente gleich $\perp$, etwa a , so hat man hingegen $\perp \sqcup b = b$ und $\perp \sqcap b = \perp$.

Mittels Lifting kann man natürlich auch das Hinzufügen eines neuen größten Elements realisieren. Man dualisiert zuerst den Verband, liftet dann den dualen Verband und dualisiert schließlich das Resultat des Liftings. Fügt man an einen Verband ein neues größtes Element hinzu, so nimmt man oft $\top$ als Zeichen für dieses.

Das Lifting ist auch für (ungeordnete¹) Mengen M gebräuchlich, um durch Hinzunahme eines neuen Elements $\perp$ eine Ordnung $(M \cup \{\perp\}, \sqsubseteq)$ zu erhalten. Die Ordnungsrelation $\sqsubseteq$ auf dem Lifting $M \cup \{\perp\}$ von M ist dabei durch die Eigenschaft

$$a \sqsubseteq b \iff a = \perp \vee a = b$$

für alle Elemente $a, b \in M \cup \{\perp\}$ festgelegt. Man bezeichnet sie als *flache Ordnung*. Dieser Name wird einem klar, wenn man sich etwa das Lifting einer endlichen Menge $\{a_1, \dots, a_n\}$ als Hasse-Diagramm aufzeichnet. Es ist nämlich $\perp$ das kleinste Element und alle anderen Elemente sind paarweise unvergleichbar. Zeichnerisch heißt dies, dass die einzigen Linien im Diagramm die zwischen $\perp$ und den $a_i, 1 \leq i \leq n$, sind.

¹Genaugenommen ist jede Menge geordnet, da die Gleichheitsrelation eine Ordnungsrelation ist. Statt von ungeordneten Mengen spricht man deshalb auch von trivial geordneten Mengen.

Ordnungen und Verbände

Grundlagen, Vorgehensweisen und Anwendungen

Berghammer, R.

2013, X, 238 S. 19 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-02710-0