

Einleitung

Durch dieses Buch wird versucht, eine möglichst präzise, elementare und verständliche Einführung in die Theorie der Ordnungen und die Verbandstheorie zu geben. Weiterhin wird versucht, einige Anwendungen dieser zwei Gebiete zu demonstrieren. Neben mathematischen Anwendungen werden insbesondere auch solche betrachtet, die einen Bezug zu Problemen der Informatik besitzen.

Die Theorie der Ordnungen und die Verbandstheorie spielen heutzutage in vielen Bereichen der reinen und angewandten Mathematik, der Informatik und anderer Wissenschaften (wie beispielsweise Elektrotechnik, Wirtschaftswissenschaften und Sozialwahltheorie) eine große Rolle. Insbesondere haben sehr viele wichtige Sätze der klassischen Algebra über auf- und absteigende Kettenbedingungen, wie sie etwa bei auflösbaren Gruppen oder Noetherschen Ringen auftreten, einen ordnungstheoretischen Hintergrund. Gleiches gilt für die Methoden der Informatik zum Beweis von Terminierungen von Deduktions- und Ersetzungssystemen und von Programmen. Ein weiteres Beispiel hierzu ist die Boolesche Algebra, welche einen speziellen Zweig der Verbandstheorie bildet. Durch sie ist eine Algebraisierung der klassischen Aussagenlogik gegeben. Ihre Bedeutung für insbesondere die Informatik und die Elektrotechnik liegt hauptsächlich in Anwendungen bei den Schaltabbildungen und den logischen Schaltungen. Als letztes Anwendungsbeispiel seien noch Fixpunkte von Abbildungen genannt. Sehr viele praktisch bedeutende Probleme lassen sich als solche Fixpunktprobleme formulieren, etwa die Berechnung der relationalen transitiven und reflexiv-transitiven Hüllen oder das damit eng verbundene Erreichbarkeitsproblem auf gerichteten Graphen und Ersetzungssystemen. Algorithmische Lösungen dieser Probleme ergeben sich dann oft direkt aus den „konstruktiven“ Fixpunktsätzen über vollständigen Verbänden. Bestimmte Fixpunkte spielen auch bei der sogenannten denotationellen Semantik von Programmiersprachen eine ausgezeichnete Rolle.

Es gibt wahrscheinlich kein mathematisches Konzept, das so viele Anwendungen findet, wie das einer Ordnungsrelation bzw. einer geordneten Menge. Diese wurden in der Mathematik schon sehr früh betrachtet. Einzelne der grundlegenden Gedanken gehen sogar sehr weit zurück, teilweise bis zu Aristoteles. Eine überragende Bedeutung kam den Konzepten insbesondere zu Beginn des 20. Jahrhunderts zu, als die Grundlagen der Mathematik und hier insbesondere die der Mengenlehre intensiv diskutiert wurden. Untrennbar damit sind die Namen G. Cantor, E. Zermelo und F. Hausdorff verbunden. G. Cantor begründete die Mengenlehre. Von E. Zermelo stammt die Einsicht, dass das Auswahlaxiom ein wesentliches Beweismittel der Mathematik ist. Seine heutzutage mit Abstand am häufigsten verwendete

te Konsequenz – man sollte genauer sagen: äquivalente Formulierung – ist das bekannte Lemma von M. Zorn. Und F. Hausdorff hat wohl als erster die Ordnungsaxiome explizit in der heutigen Form formuliert. Sein sogenanntes Maximalkettenprinzip ist ebenfalls logisch äquivalent zum Auswahlaxiom.

Den Ursprung der Verbandstheorie kann man wohl bei G. Boole ansetzen, der schon im 19. Jahrhundert eine Algebraisierung der Aussagenlogik untersuchte, sowie bei R. Dedekind, der sich den Verbänden von den Idealen bei den algebraischen Zahlen, also von der algebraischen Seite her näherte. Von R. Dedekind stammt auch die heute übliche algebraische Verbandsdefinition. Von ihm wurde ein Verband auch als eine Dualgruppe bezeichnet, wie etwa in der grundlegenden und erstaunlich modern wirkenden Arbeit „Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe“, erschienen in den Mathematische Annalen 53, 371-403, 1900. Die Untersuchungen von G. Boole wurden sehr bald von anderen Wissenschaftlern aufgegriffen, insbesondere um 1880 von C.S. Peirce in seiner „Algebra of Logic“ und von E. Schröder, der von 1885 bis 1895 das umfassende Werk „Algebra der Logik“ in drei Bänden publizierte. Eine Vereinheitlichung zu der Theorie, wie wir sie heutzutage kennen, ist wohl in erster Linie das Werk von G. Birkhoff. Es sind aber noch eine Reihe von weiteren bekannten Mathematikern zu nennen, die zur Grundlegung und Weiterentwicklung der Verbandstheorie als einem Teilgebiet sowohl der modernen Algebra als auch der Ordnungstheorie beigetragen haben. Ohne Vollständigkeitsanspruch seien genannt R.P. Dilworth, O. Frink, P. Halmos, L. Kantorovik, K. Kuratowski, J. von Neumann, O. Ore und H.M. Stone. Im Hinblick auf Anwendungen der Verbandstheorie sollte auch eine Gruppe von Wissenschaftlern genannt werden, die ursprünglich von R. Wille an der Technischen Universität Darmstadt geleitet wurde, und der auch B. Ganter als ein einflussreiches Mitglied angehörte. Diese Gruppe legte die Grundlagen der Begriffsverbände, einer Verallgemeinerung der Vervollständigung von Ordnungen durch Schnitte auf beliebige Relationen, und auch der sogenannten formalen Begriffsanalyse. Letztere ist ein Gebiet mit vielen praktischen und mittlerweile auch (verbands-)theoretischen Anwendungen.

Nach diesen knappen historischen Betrachtungen wollen wir nun, ebenfalls sehr knapp, den Inhalt des Buchs skizzieren. Im ersten Kapitel stellen wir kurz die mathematischen Grundlagen aus der Mengenlehre und der Logik zusammen. Dies betrifft insbesondere spezielle Begriffe und Notationen. Dann stellen wir im zweiten Kapitel die Grundlagen der Ordnungs- und Verbandstheorie vor, wobei wir mit den Verbänden beginnen. Darauf aufbauend werden wir im dritten Kapitel dann spezielle Klassen von Ordnungen und Verbänden genauer diskutieren. Wiederum spielen hier die Verbände die Hauptrolle. Im vierten Kapitel werden wir die wichtigsten Fixpunktsätze beweisen und anhand von einigen exemplarischen Anwendungen, wie Hüllen und Galois-Verbindungen, vertiefen. Die wichtigsten Fragen im Zusammenhang mit Vervollständigungen und Darstellbarkeit durch Vervollständigungen spielen für uns dann im fünften Kapitel eine entscheidende Rolle. Danach werden wir im sechsten Kapitel die Wohlordnungen und transfiniten Zahlen mit dem Auswahlaxiom und wichtigen Folgerungen davon (genauer: dazu äquivalenten Formulierungen, wie etwa das Lemma von M. Zorn) und Anwendungen präsentieren. Dies wird uns auch erlauben, Beweise von Sätzen aus früheren Kapiteln zu bringen, die wir dort aufgrund der fehlenden Mittel noch nicht führen konnten. Mit einem siebten Kapitel über

einige spezielle Anwendungen von Ordnungen und Verbänden in der Informatik schließen wir den technischen Teil des Buchs ab. Der noch folgende Index soll der Leserin oder dem Leser das Nachschlagen erleichtern.

Wir wollen auch kurz auf begleitende und weiterführende Literatur eingehen. Die nachfolgend angegebenen Bücher gehen in der Regel bei speziellen Gebieten weit über das hinaus, was dieses Buch an Stoff enthält.

- H. Gericke, Theorie der Verbände, 2. Auflage, Bibliographisches Institut, 1967.
- H. Hermes, Einführung in die Verbandstheorie, 2. Auflage, Springer Verlag, 1967.
- G. Birkhoff, Lattice Theory, 3. Auflage, Amer. Math. Soc, 1967.
- M. Ern , Einführung in die Ordnungstheorie, Bibliographisches Institut, 1982.
- R. Freese, J. Jezek, J.B. Nation, Free Lattices, Amer. Math. Soc, 1995.
- B. Ganter, R. Wille, Formale Begriffsanalyse – Mathematische Grundlagen, Springer Verlag, 1996.
- B.A. Davey, H.A. Priestley, Introduction to Lattices and Orders, 2. Auflage, Cambridge University Press, 2002.

Das Lesen dieses Buchs, welches sich primär an Studierende der Informatik und der Mathematik im Diplom-Hauptstudium, Master-Studium oder den letzten Semestern eines Bachelor-Studiums wendet, aber, wie wir hoffen, auch Studierenden anderer Fächer helfen kann, erfordert relativ wenig tiefgehende Voraussetzungen aus der Informatik und der Mathematik. Da diese alle nicht über das hinausgehen, was wir im ersten Kapitel an Grundlagen vorstellen oder was man üblicherweise an einer höheren Schule oder in den ersten Semestern eines Diplom- oder Bachelor-Studiums in Informatik oder Mathematik lernt, verzichten wir hier auf die Angabe von entsprechender Literatur.

Das vorliegende Buch basiert auf den ersten sechs Kapiteln der zweiten Auflage meines Buchs „Ordnungen, Verbände und Relationen mit Anwendungen“, welches beim Verlag Springer Vieweg erschienen ist. Neben einer gründlichen Überarbeitung, insbesondere hinsichtlich der mathematischen Beweise und der Erklärung von komplizierteren Sachverhalten, wurden die Kapitel auch ergänzt, etwa durch neue mathematische Aussagen, zusätzliche Beispiele und Anwendungen und auch einige Algorithmen. Auch wurde ihnen ein neues Kapitel vorangestellt, das in knapper Form die erforderlichen mathematischen Grundlagen enthält. Ich bedanke mich wiederum sehr herzlich beim Verlag Springer Vieweg, insbesondere bei Frau Maren Mith fer, Frau Sybille Thelen und Herrn Bernd Hansemann, für die sehr angenehme Zusammenarbeit, sowie bei meiner Frau Sibylle für ihre Unterstützung und Hilfe.

Ordnungen und Verbände

Grundlagen, Vorgehensweisen und Anwendungen

Berghammer, R.

2013, X, 238 S. 19 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-02710-0