
2. Mengenlehre

In diesem Abschnitt geben wir einen kompakten Überblick über wesentliche Grundlagen der Mengenlehre, die im weiteren Verlauf noch relevant sein werden. Neben der allgemeinen Definition und Darstellung von Mengen gehen wir dabei auf spezielle Mengen, Beziehungen zwischen Mengen, Mengenoperationen und auch auf bedeutende Regeln und Gesetze ein, die bei Mengenoperationen zu beachten sind.

2.1 Grundlegendes

Grundsätzlich verstehen wir unter einer **Menge** eine Zusammenfassung von Elementen, die sich *eindeutig voneinander unterscheiden* lassen. Mehrfachnennungen eines Elementes in einer Menge sind also nicht zulässig.

Mengen werden in der Regel mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, C, \dots$, ihre Elemente mit lateinischen Kleinbuchstaben $a, b, c, \dots$ bezeichnet. Wollen wir ausdrücken, dass ein Element a zur Menge A gehört, schreiben wir $a \in A$. Wollen wir das Gegenteil aussagen, $a \notin A$.

Die Definition einer Menge erfolgt entweder durch die **explizite Aufzählung** oder die **implizite Beschreibung** der Elemente der Menge. Die Anzahl der unterscheidbaren Elemente einer Menge A , die auch als deren **Mächtigkeit** bezeichnet und mit $n(A)$ abgekürzt wird, bestimmt dabei meist, welche Form der Darstellung gewählt wird. Ist $n(A)$ groß, jedoch endlich, wird die explizite Form der Beschreibung bevorzugt. Liegt eine unendliche Menge vor, so ist eine verkürzte Aufzählung der Elemente üblich. Bei allen Formen erfolgt die Aufzählung bzw. Beschreibung innerhalb geschweiften Klammern.

Bei der impliziten Form wird in der geschweiften Klammer zunächst ein Element stellvertretend für alle anderen Elemente allgemein genannt. Gefolgt von einem senkrechten Strich wird dann die umfassende und eindeutige Beschreibung des stellvertretenden Elements mit Hilfe mathematischer Symbole und/oder verbaler Sätze aufgeführt.

Beispiel:

Betrachten wir eine *endliche* Menge B , die die Elemente 7, 8 und 9 beinhalten soll. Wir können diese explizit als $B = \{7; 8; 9\}$ oder implizit als $B = \{x \mid 6 < x < 10 \wedge x \text{ ganzzahlig}\}$ darstellen. Die implizite Darstellung bedeutet dabei verbal „alle x mit der Eigenschaft: x größer 6 und kleiner 10 und zugleich x ganzzahlig“, was nur von den Zahlen 7, 8 und 9 erfüllt wird. Da hier die Mächtigkeit der Menge nur bei $n(B) = 3$ liegt, ist die explizite Darstellung zu bevorzugen.

Eine *unendliche* Menge C , die die Zahlen 7, 8, 9 und alle ganzen Zahlen größer 9 beinhalten soll, würden wir als $C = \{7; 8; 9; \dots\}$ definieren, wobei „ $\dots$ “ die restlichen Elemente der Menge repräsentiert. Die Mächtigkeit der Menge C liegt in diesem Fall bei $n(C) = \infty$.

Während wir beliebige Mengen mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnen, haben sich in der Literatur eine Reihe spezieller Symbole für besondere Mengen eingebürgert. So wird etwa die **leere Menge**, die keine Elemente beinhaltet, mit $\emptyset$ und die **Universalmenge**, die bezüglich einer Anzahl an untersuchten Elementen, alle Elemente enthält, mit Ω benannt. Darüber hinaus gilt für die in der Mathematik relevanten **Zahlenmengen** folgendes:

Die Menge der *natürlichen Zahlen* beinhaltet die Zahlen 1, 2, 3, ... mit deren Hilfe Gegenstände abgezählt werden. Sie ist definiert als

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}.$$

Erweitern wir die natürlichen Zahlen um die 0 und alle negativen Zahlen, so erhalten wir die Menge der *ganzen Zahlen* als

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}.$$

Erweitern wir die Menge der ganzen Zahlen um die Zahlen, die sich als Quotient einer ganzen und einer natürlichen Zahl bzw. als abbrechende (z. B. $1/2 = 0,5$) oder nichtabbrechende (z. B. $1/3 = 0,333\dots$) periodische Dezimalzahl darstellen lassen, ergibt sich die Menge der *rationalen Zahlen* als

$$\mathbb{Q} = \{q \mid q = m/n \text{ mit } m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}\}.$$

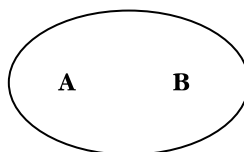
Die Menge der *reellen Zahlen* beinhaltet neben den rationalen Zahlen auch die sog. irrationalen Zahlen, so dass wir

$$\mathbb{R} = \{r \mid r \text{ ist eine rationale oder irrationale Zahl}\}$$

festhalten können. Eine Zahl wird dann als irrational bezeichnet, wenn sie sich nicht mehr als Quotient einer ganzen und einer natürlichen Zahl - und damit auch nicht als periodische Dezimalzahl - darstellen lässt. Jede nichtperiodische Dezimalzahl, bei der nicht aus den bisher ermittelten Dezimalstellen auf die noch folgenden geschlossen werden kann, ist somit eine irrationale Zahl. Typische Beispiele hierfür sind die Kreiszahl $\pi = 3,141592\dots$, die Euler'sche Zahl $e = 2,718281\dots$ und bestimmte Wurzeln.

Um auszudrücken, dass nur positive oder negative Werte aus diesen speziellen Mengen betrachtet werden, wird dies durch ein hochgestelltes „+“ bzw. „-“ gekennzeichnet. Positive reelle Zahlen sind demnach mit $\mathbb{R}^+$, negative mit $\mathbb{R}^-$ benannt.

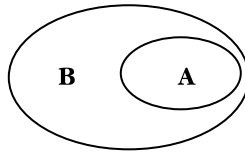
Vergleichen wir die einzelnen Elemente zweier Mengen miteinander, können wir Ordnungsbeziehungen zwischen den Mengen herstellen. Besitzen zwei Mengen A und B die gleichen Elemente, sprechen wir von **Mengengleichheit** und können $A = B$ schreiben. Besonders beim Vergleich von Mengen und bei Mengenoperationen (vgl. Abschnitt I 2.2) sind *Venn-Diagramme* hilfreich. Diese stellen Mengen als Kreise dar, wodurch sich im Fall der Mengengleichheit folgendes ergibt:



Beispiel:

Betrachten wir die beiden Mengen $A = \{\pm\sqrt{9}\}$ und $B = \{3; -3\}$, so stellen wir fest, dass beide die gleichen Elemente beinhalten, sodass $A = B$ gilt.

Ergibt der Vergleich der Elemente zweier Mengen A und B, dass alle Elemente von A auch in B enthalten sind, so sagen wir, dass A eine **Teilmenge** von B ist und schreiben $A \subseteq B$. Wir versehen das klassische Teilmengensymbol $\subset$ hier mit einem Unterstrich um zu verdeutlichen, dass die Mengen A und B auch gleich sein können. Das dazugehörige Venn-Diagramm zeigt folgendes Bild:

**Beispiele:**

1. Betrachten wir die Mengen $E = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ und $\mathbb{N}$. Da die Elemente 2, 4, 6, 8 und 10 aus E auch in der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ vorkommen, gilt $E \subset \mathbb{N}$.
2. Für die vorhergehend aufgeführten Zahlenmengen können wir $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ festhalten. Dies bedeutet also, dass **alle** Elemente von $\mathbb{N}$ auch in $\mathbb{Z}$, **alle** Elemente von $\mathbb{Z}$ auch in $\mathbb{Q}$ und **alle** Elemente von $\mathbb{Q}$ auch in $\mathbb{R}$ enthalten sind.

Gerade im Zusammenhang mit Teilmengen wird klar, dass man eine Menge auch als *Menge von Mengen* interpretieren kann. So gilt etwa $\mathbb{Z} = \{\{...\}; -2; -1; 0; \mathbb{N}\}$. Außerdem ist unmittelbar einleuchtend, dass zu den Teilmengen einer Menge A auch immer die leere Menge $\emptyset$ und die Menge A selbst gehört.

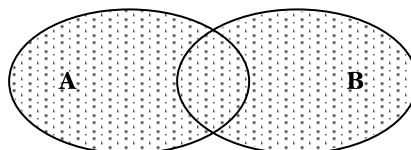
2.2 Mengenoperationen

In diesem Abschnitt befassen wir uns näher mit Operationen, die aus mehreren Mengen eine neue Menge erzeugen. Zu diesen zählen die Vereinigung, der Durchschnitt, die Differenz und das Komplement.

Unter der **Vereinigung** oder Vereinigungsmenge zweier Mengen A und B verstehen wir die Menge, die sowohl die Elemente von A als auch die Elemente von B enthält. Formal schreiben wir

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$

was sich im Venn-Diagramm (gepunktet) wie folgt dargestellt:



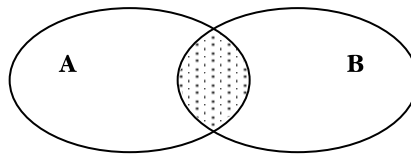
Beispiel:

Betrachten wir die Mengen $A = \{1; 2; 3\}$ und $B = \{3; 4; 5\}$, erhalten wir daraus die Vereinigung $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Der **Durchschnitt** oder die Durchschnittsmenge (Schnittmenge) zweier Mengen A und B umfasst alle Elemente, die sowohl in Menge A als auch in Menge B vorkommen. Es gilt

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},$$

was zu folgendem Venn-Diagramm führt:

**Beispiel:**

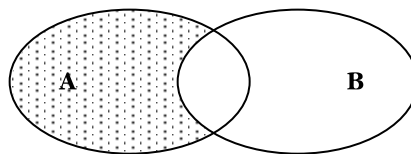
Der Durchschnitt der Mengen $A = \{1; 2; 3\}$ und $B = \{3; 4; 5\}$ ist $A \cap B = \{3\}$, da das Element 3 sowohl in A als auch in B enthalten ist.

Haben zwei Mengen A und B kein Element gemeinsam, entspricht ihr Durchschnitt der leeren Menge. Es gilt also $A \cap B = \emptyset$. In einem solchen Fall bezeichnen wir die beiden Mengen als **disjunkt**. Es sei außerdem erwähnt, dass der Durchschnitt einer Menge A mit sich selbst wieder die Menge A ergibt, also $A \cap A = A$ gilt. Analoges gilt auch für die Vereinigung, d. h. $A \cup A = A$.

Die **Differenz** oder Differenzenmenge zweier Mengen A und B (A vermindert um B) enthält alle Elemente von A, die nicht in B enthalten sind. Wir schreiben

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\},$$

was folgendes Venn-Diagramm liefert:

**Beispiel:**

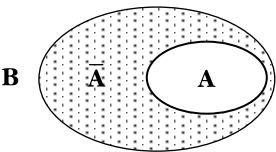
Betrachten wir zwei Mengen $A = \{1; 2; 3\}$ und $B = \{3; 4; 5\}$, so ist $A \setminus B = \{1; 2\}$, da die Elemente 1 und 2 aus A nicht in B enthalten sind.

Sind A und B zwei disjunkte Mengen, so gilt $A \setminus B = A$ und $B \setminus A = B$. Die Differenz zweier gleicher Mengen ergibt die leere Menge, d. h. $A \setminus A = \emptyset$.

Ist die Menge A eine Teilmenge der Menge B , d. h. $A \subseteq B$, enthält das **Komplement** oder die Komplementärmenge der Menge A bezüglich der Menge B alle Elemente der Menge B , die nicht in der Menge A enthalten sind. Formal gilt

$$\bar{A} = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\},$$

was das folgende Venn-Diagramm liefert:



Beispiel:

Betrachten wir zwei Mengen $A = \{1; 2; 3\}$ und $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, so gilt $\bar{A} = \{4; 5\}$, da die Elemente 4 und 5 zwar in B , jedoch nicht in A enthalten sind.

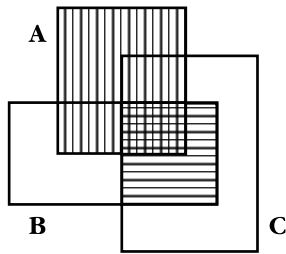
Wir erkennen, dass das Komplement nichts anderes als eine spezielle Form der Differenz ist, d. h. $\bar{A} = B \setminus A$ gilt. Es gilt außerdem, dass das Komplement eines Komplements wieder die Ursprungsmenge liefert. Im obigen Beispiel ist das Komplement von $\bar{A} = \{4; 5\}$ nämlich gerade $A = \{1; 2; 3\}$.

2.3 Mengenalgebra

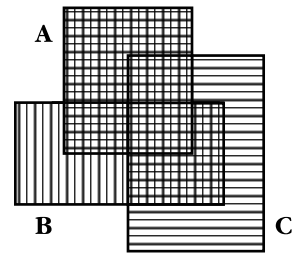
Für die in Abschnitt I 2.2 behandelten Mengenoperationen gelten eine Reihe spezieller Gesetze und Regeln, welche in der folgenden Tabelle zusammengefasst sind. Dem aufmerksamen Leser wird bei genauerer Betrachtung auffallen, dass wir einige davon bereits implizit im Text behandelt haben.

Gesetz	Bedeutung
Idempotenzgesetze	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Identitätsgesetze	$A \cup \emptyset = A$ $A \cup \Omega = \Omega$ $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap \Omega = A$
Komplementgesetze	$A \cup \bar{A} = \Omega$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$
Kommutativgesetze	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Assoziativgesetze	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributivgesetze	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
De Morgans Gesetze	$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Da die Distributivgesetze und die Gesetze von De Morgan anders als die anderen nicht auf den ersten Blick nachzuvollziehen sind, betrachten wir im Folgenden die Aussagen dieser Gesetze nochmals in Form von Venn-Diagrammen, bei denen wir zur besseren Übersicht Rechtecke zur Symbolisierung von Mengen verwenden. Die Anmerkungen in Klammern beziehen sich dabei jeweils auf das Ergebnis der Mengenoperationen. Beginnen wir zunächst mit den beiden Distributivgesetzen:

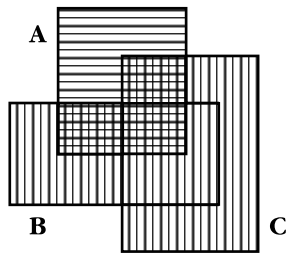


$A \cup (B \cap C)$
(einfach u. doppelt schraffiert)

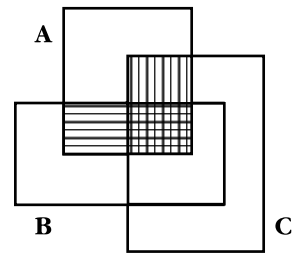


$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
(doppelt schraffiert)

=



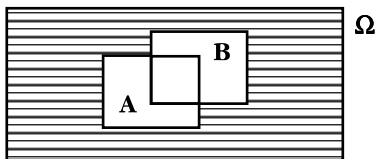
$A \cap (B \cup C)$
(doppelt schraffiert)



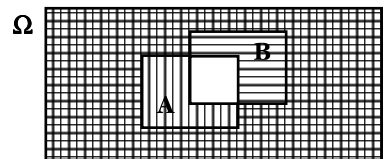
$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
(einfach u. doppelt schraffiert)

=

De Morgans Gesetze lassen sich wie folgt veranschaulichen:

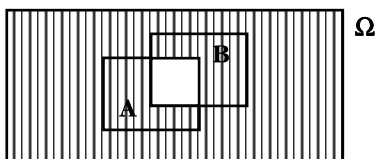


$\overline{(A \cup B)}$
(einfach schraffiert)

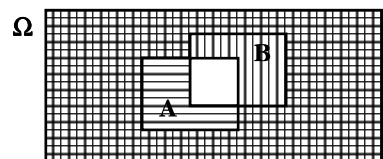


$\bar{A} \cap \bar{B}$
(doppelt schraffiert)

=



$\overline{(A \cap B)}$
(einfach schraffiert)



$\bar{A} \cup \bar{B}$
(einfach u. doppelt schraffiert)

=

Grundkurs Wirtschaftsmathematik
Prüfungsrelevantes Wissen - Praxisnahe Aufgaben -
Komplette Lösungswege
Auer, B.; Seitz, F.
2013, XXII, 478 S. 87 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-02733-9