

## Kapitel 2

# Umgang mit Vektorbündeln

Ziel dieses Kapitels ist es, einige grundlegende Techniken für den Umgang mit Vektorbündeln kennenzulernen. Wir beginnen mit dem Schnittbegriff, mit dessen Hilfe sich viele Vektorbündelprobleme oft leichter formulieren lassen. Zudem sind zahlreiche Anwendungen direkt mit Schnitten verknüpft, etwa als Spezialfall das Vektorfeldproblem, das ist die Frage nach der maximalen Anzahl von punktweise linear unabhängigen Schnitten im Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit. Wichtigstes Ergebnis ist der Schnitterweiterungssatz, der auf der Verwendung einer Zerlegung der Eins beruht. Aus diesem folgt direkt der Homotopiesatz, der besagt, daß kleine Deformationen beim Zurückziehen eines Vektorbündels dessen Isomorphieklasse nicht ändern.

Hier zeigen sich erste fundamentale Unterschiede zu den mehr Struktur verwendenden Vektorbündel-Kategorien, die wir hier aber nur andeuten können. Während für differenzierbare und topologische Vektorbündel eine Zerlegung der Eins zur Verfügung steht, ist dies beispielsweise für holomorphe Vektorbündel nicht mehr der Fall. So gibt es etwa holomorphe Vektorbündel, die außer dem Nullschnitt keine weiteren holomorphen Schnitte zulassen, während sich stetige Schnitte, zumindest für parakompakte Basisräume, immer in ausreichender Anzahl konstruieren lassen. Außerdem sei als Ausblick hier schon erwähnt, daß auch die Klassifikation von Vektorbündeln dann ganz verschieden ausfällt. Für topologische oder differenzierbare Vektorbündel bilden die Isomorphieklassen im Allgemeinen diskrete, abzählbare "Mengen", während für holomorphe Bündel ganze Räume höherer Dimension zum Parametrisieren der Isomorphieklassen nötig sind.

Zwei weitere Konstruktionen beruhen ebenfalls auf einer Verwendung der Zerlegung der Eins. Das ist einmal die Existenz einer Riemannschen Metrik, das ist ein stetig von  $b \in B$  abhängiges Skalarprodukt in der Faser  $E_b$  über  $b$ . Damit läßt sich wie bei Vektorräumen ein orthogonales Komplement zu einem Unterbündel definieren. Zum anderen liefert eine Zerlegung der Eins die Konstruktion einer Einbettung eines Vektorbündels mit einer kompakten Basis  $B$  in ein Produktbündel  $B \times \mathbb{K}^m$ . Eine erste Folgerung hieraus ist, daß die stabilen Isomorphieklassen von Vektorbündeln über  $B$  eine abelsche Gruppe bilden.

An diesem Punkt ist die Vektorbündeltheorie weit genug entwickelt, um auf eine Reihe von interessanten mit Vektorbündeln zusammenhängenden Problemen eingehen zu können. Hier sei nur das Divisionsalgebrenproblem erwähnt, dessen Lösung sich bis auf die Berechnung von  $\mathrm{SVekt}_{\mathbb{C}}(P_n(\mathbb{R}))$ , die später nachgetragen wird, an diese Stelle schon vorführen läßt.

Wie bei anderen aus lokal einfachen Modellen zusammengesetzten Objekten, lassen

sich Vektorbündel auch durch eine Formalisierung des Zusammensetzungsprozesses beschreiben. Dies ist die Sprache der Übergangsfunktionen, die ihre Kraft aber eher in der differenzierbaren Kategorie entfaltet. Eng damit zusammen hängt die Konstruktion des Verklebens oder Verheftens von Vektorbündeln und das Kollabieren eines Vektorbündels über einem Teilraum der Basis, über dem das Bündel trivial ist. Mit diesen Techniken läßt sich dann die lange exakte Sequenz eines Raumpaars  $(X, A)$  für die Funktoren  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\ )$  oder  $\text{SVekt}_{\mathbb{K}}(\ )$  herleiten, eine der Hauptmethoden zu deren Berechnung.

Zum Ende des Kapitels gehen wir noch kurz auf Faserbündel und zusätzliche Strukturen wie Orientierungen oder Gruppenoperationen ein, hauptsächlich um Vektorbündel in diesen allgemeineren Rahmen einzuordnen.

## 2.1 Schnitte

Die Schnitte eines Vektorbündels stehen in enger Beziehung zu Vektorbündel-Homomorphismen. So ist ein  $m$ -Tupel von punktweise linear unabhängigen Schnitten in einem Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$  nichts anderes als die Inklusion eines trivialen  $m$ -dimensionalen Unterbündels von  $\xi$ . Lokal gibt es in einem  $n$ -dimensionalen Vektorbündel immer ein solches  $n$ -Tupel, was nichts anderes als eine stetig mit  $b \in B$  variierende Basis von  $E_b$  ist. Damit läßt sich lokal in  $E$  fast genauso rechnen wie in einem festen Vektorraum. Nach der Besprechung einiger charakteristischer Beispiele für Schnitte wird der Schnitterweiterungssatz und der Homotopiesatz hergeleitet.

### 2.1.1 Schnitte und Vektorbündel-Homomorphismen

**Definition 2.1.1.** Ein Schnitt in einem Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$  ist eine stetige Abbildung  $s : B \rightarrow E$  mit  $p \circ s = id_B$ , d.h. jedem  $b \in B$  wird ein Vektor  $s(b)$  in der Faser über  $b$  zugeordnet.

Man beachte, daß sich mit  $b \in B$  der Vektorraum, in dem der Bildvektor  $s(b)$  liegt, i.A. ändert. Damit ist der Begriff Schnitt eine Verallgemeinerung des Begriffs vektorwertige Funktion. Schnitte in einem Produktbündel  $B \times \mathbb{K}^n$  sind, da die erste Komponente keine wesentliche Rolle spielt, offensichtlich nichts anderes als stetige Funktionen von  $B$  nach  $\mathbb{K}^n$ .

**Bezeichnung.** Für ein Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$  bezeichne  $\Gamma(\xi)$  den  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Schnitte  $s : B \rightarrow E$ .

Wichtiger als der eigentliche Linearunabhängigkeitsbegriff im Vektorraum  $\Gamma(\xi)$  ist folgende Definition:

**Definition 2.1.2.** Die  $n$  Schnitte  $s_1, s_2, \dots, s_n \in \Gamma(\xi)$  heißen genau dann punktweise linear unabhängig, wenn  $s_1(b), \dots, s_n(b)$  für alle  $b \in B$  linear unabhängig in  $E_b$  sind.

Für  $n = 1$  bedeutet linear unabhängig einfach nullstellenfrei. Wenn keine Verwechslungsgefahr mit dem Linearunabhängigkeitsbegriff in  $\Gamma(\xi)$  besteht, werden wir den Zusatz “punktweise” in der Notation oft weglassen.

Für einen Vektorraum  $V$  ist eine Basisauswahl gleichbedeutend mit einem Isomorphismus  $V \cong \mathbb{K}^n$ . Übertragen auf ein  $n$ -dimensionales Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$  ist eine stetige Basisauswahl in jede Faser, das heißt die Angabe von  $n$  linear unabhängigen Schnitten, nichts anderes als ein Isomorphismus zum Produktbündel  $B \times \mathbb{K}^n$  und umgekehrt:

**Proposition 2.1.3.** Ein Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$  der Dimension  $n$  besitzt genau dann  $n$  punktweise linear unabhängige Schnitte  $s_1, \dots, s_n$ , wenn  $\xi$  trivial ist.

*Beweis.* “ $\Rightarrow$ ”: Definiere eine Trivialisierung  $h : E \rightarrow B \times \mathbb{K}^n$  durch

$$h(v) := (p(v), (c_1, \dots, c_n)), \text{ wo } v = \sum_{i=1}^n c_i s_i(p(v)), \quad c_i \in \mathbb{K}.$$

Die Koeffizienten  $c_i$  sind eindeutig bestimmt, da die Vektoren  $\{s_1(p(v)), \dots, s_n(p(v))\}$  eine Basis von  $E_b$  bilden. Die Umkehrabbildung

$$h^{-1}(b, (v_1, \dots, v_n)) := \sum_{i=1}^n v_i s_i(b)$$

ist automatisch stetig und impliziert die Stetigkeit von  $h$ .

“ $\Leftarrow$ ”:  $B \times \mathbb{K}^n$  hat die konstanten Schnitte  $\widehat{s}_i$  mit  $\widehat{s}_i(b) = (b, e_i)$  für die Basis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  des Vektorraumes  $\mathbb{K}^n$ . Definiere  $s_i : B \rightarrow E$  durch

$$h^{-1} \circ \widehat{s}_i : B \longrightarrow E,$$

wo  $h : E \rightarrow B \times \mathbb{K}^n$  eine Trivialisierung von  $\xi$  ist. □

Der wichtige Spezialfall  $\eta = (E(\eta), p, B)$  eines Linienbündels kam bereits in einem Beispiel vor (1.1.14):

**Korollar 2.1.4.** Ein Linienbündel ist genau dann trivial, wenn es einen Schnitt ohne Nullstellen besitzt.

**Korollar 2.1.5.** Ein Satz von  $r$  linear unabhängigen Schnitten in einem  $n$ -dimensionalen Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$  mit  $r \leq n$  definiert einen Vektorbündel-Monomorphismus  $\mathbb{K}^r \longrightarrow \xi$  und damit ein  $r$ -dimensionales triviales Unterbündel von  $\xi$ .

**Bemerkung.** Da ein Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$  lokal trivial ist, hat man lokal, d.h. in  $E|_U$  mit  $E|_U \cong U \times \mathbb{K}^n$ , immer eine stetig von  $b \in U \subset B$  abhängige Basis  $s_1(b), s_2(b), \dots, s_n(b)$  von  $E_b$ , gegeben durch  $n$  linear unabhängige Schnitte, zur Verfügung und kann in  $E|_U$  fast wie in einem Vektorraum arbeiten.

Fragen zu Vektorbündel-Homomorphismen lassen sich wie folgt in Schnittprobleme übersetzen. Zu zwei Vektorbündeln  $\xi, \eta$  über  $B$  ist durch Erweiterung des Homomorphismen-Funktors  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}$  das Vektorbündel  $\text{HOM}(\xi, \eta)$  mit  $\text{HOM}(\xi, \eta)_x := \text{Hom}_{\mathbb{K}}(E(\xi)_x, E(\eta)_x)$  erklärt. Das Bündel  $\text{HOM}(\xi, \eta)$  heißt Homomorphismenbündel von  $\xi$  und  $\eta$ . Andererseits können wir die Vektorbündel-Homomorphismen von  $\xi$  nach  $\eta$  zu einem Vektorraum zusammenfassen:

$$\text{Hom}(\xi, \eta) := \{f : \xi \rightarrow \eta \mid f \text{ ist ein Vektorbündel-Homomorphismus über } B\}$$

Die Zuordnung  $x \mapsto f_x$  für einen Homomorphismus  $f \in \text{Hom}(\xi, \eta)$  definiert einen Schnitt  $s_f$  in  $\text{HOM}(\xi, \eta)$ . Umgekehrt liefert ein Schnitt  $s \in \Gamma\text{HOM}(\xi, \eta)$  durch  $f_s(v) = s(b)(v)$  für  $v \in E(\xi)_b$  einen Vektorbündel-Homomorphismus  $f_s \in \text{Hom}(\xi, \eta)$ , wobei beides Mal die Stetigkeit noch nachzutragen ist. Mit diesen Zuordnungen gilt:

**Lemma 2.1.6.** *Die Vektorräume  $\text{Hom}(\xi, \eta)$  und  $\Gamma\text{HOM}(\xi, \eta)$  sind kanonisch isomorph.*

*Beweis.* Es ist nur die Stetigkeit von  $s_f$  und  $f_s$  nachzuweisen. Dies ist eine lokale Frage. Dazu wähle  $U \subset B$  offen, sodaß  $\xi|_U$  und  $\eta|_U$  trivial sind. Durch Verwenden von Trivialisierungen übersetzt man das Problem in ein solches für zwei Produktbündel  $U \times \mathbb{K}^n$  und  $U \times \mathbb{K}^m$ . Ein Homomorphismus  $g \in \text{Hom}(U \times \mathbb{K}^n, U \times \mathbb{K}^m)$  ist dann durch seine stetige Matrizenfunktion  $g^{ad} : U \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$  gegeben (1.3.1). Andererseits ist nach Konstruktion der Erweiterung eines Funktors das Bündel  $\text{HOM}(U \times \mathbb{K}^n, U \times \mathbb{K}^m)$  nichts anderes als  $U \times \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$  mit der Produkttopologie. Für  $s_g$  gilt aber dann  $s_g(x) = (x, g^{ad}(x))$ , womit die Stetigkeit von  $s_g$  nachgewiesen ist. Genauso argumentiert man für die Umkehrabbildung von  $\Gamma\text{HOM}(\xi, \eta)$  nach  $\text{Hom}(\xi, \eta)$ .  $\square$

## 2.1.2 Beispiele

1. Es sei  $\text{Alt}^p(\ )$  der Funktor der alternierenden  $p$ -Formen. Für eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $M$  mit Tangentialbündel  $\tau M$  ist dann  $\text{Alt}^p(\tau M)$  definiert, und die Differentialformen vom Grad  $p$  auf  $M$  sind gerade die differenzierbaren Schnitte in  $\text{Alt}^p(\tau M)$  :

$$\begin{aligned} \Omega^p(M) &:= \text{der Vektorraum der Differentialformen vom Grad } p \text{ auf } M \\ &:= \{s \in \Gamma\text{Alt}^p(\tau M) \mid s \text{ ist differenzierbar}\} \end{aligned}$$

2. Es sei  $\lambda_n = (E(\lambda_n), p, P_n(\mathbb{R}))$  das kanonische Linienbündel. In (1.5.5) haben wir gesehen, daß das Bündel  $(n+1)\lambda_n$  einen Schnitt ohne Nullstellen besitzt. Schreibt man

$E(n\lambda_n)$  als  $(S^n \times \mathbb{R}^n)/\sim$  mit  $(v, w) \sim (-v, -w)$ , so definiert

$$s([x_0 : x_1 : \dots : x_n]) := [(x_0, x_1, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

einen Schnitt in  $n\lambda_n$  mit genau einer Nullstelle  $[1 : 0 : \dots : 0]$ .

3. Es sei  $f_d(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  ein homogenes Polynom vom Grad  $d > 0$ , das heißt es gilt

$$f_d(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f_d(x_0, x_1, \dots, x_n) \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.1.7)$$

Ein Beispiel ist das Fermat-Polynom  $F_d(x_0, x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=0}^n x_i^d$ . Obwohl  $f_d$  keine Funktion auf  $P_n(\mathbb{C}) = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mid (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}\}$  definiert, ist wegen (2.1.7) die Nullstellenmenge von  $f_d$  in  $P_n(\mathbb{C})$  erklärt.

$$X(f_d) := \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in P_n(\mathbb{C}) \mid f_d(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

heißt Hyperfläche vom Grad  $d$ . Es sei  $H^{\otimes d} = L^{-d}$  die  $d$ -te Tensorpotenz des Hopfbündels (1.1.9) mit Totalraum

$$E(H^{\otimes d}) = E^{-d} = (S^{2n+1} \times \mathbb{C})/\sim_{-d} \text{ mit } (x, v) \sim_{-d} (zx, z^d v) \text{ für } z \in S^1$$

Zwar definiert ein homogenes Polynom  $f_d$  keine Funktion auf  $P_n(\mathbb{C})$ , aber durch  $\widehat{f_d}(x) := [x, f_d(x)]$  erhält man einen wohldefinierten Schnitt in  $H^{\otimes d}$ , dessen Nullstellenmenge gerade  $X(f_d)$  ist. Die Schnittauffassung ist in diesem Zusammenhang offensichtlich die richtige Formulierung. Das Bündel  $H^{\otimes d}$  ist ein holomorphes Vektorbündel und alle holomorphen Schnitte von  $H^{\otimes d}$  werden, wie bekannt ist, auf die eben beschriebene Weise durch homogene Polynome geliefert.

4. Vektorfelder auf Sphären:

Geradedimensionale Sphären besitzen keine nullstellenfreie Vektorfelder, das ist der bekannte Satz vom Igel und folgt etwa mit dem Satz von Poincaré-Hopf oder aus (3.3.5) und den Eigenschaften der Euler-Klasse. Die Multiplikation mit  $i$  in jeder komplexen Koordinate definiert folgendes nullstellenfreie Vektorfeld auf  $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ :

$$s(x) = (x, (-x_1, x_0, -x_3, x_2, \dots, -x_{2n+1}, x_{2n})) \quad (2.1.8)$$

Ähnlich liefert die Multiplikation mit den Einheitsquaternionen  $i, j, k$  drei linear unabhängige Vektorfelder auf  $S^3$ , damit ist  $\tau S^3$  trivial. Die Cayley-Zahlen ergeben dann  $\tau S^7 \cong \mathbb{R}^7$ . Diese Idee verallgemeinernd haben schon Hurwitz und Radon  $\rho(n) - 1$  linear unabhängige Vektorfelder auf  $S^{n-1}$  konstruiert. Äquivalent erhält man diese über Clifford-Algebren, siehe [Oss92], [Jam76, §1] oder (2.3.6). Ein explizites Beispiel von acht solcher Clifford-Vektorfelder auf  $S^{15}$  findet man in [Jam76, Seite 4]. Die Vektorfeldfunktion  $\rho$  ist dabei wie folgt definiert:

**Definition 2.1.9.** Schreibe  $n = (2\alpha - 1) \cdot 2^\beta$  mit  $\beta = \gamma + 4\delta$ , sodaß  $0 \leq \gamma \leq 3$  gilt, dann setzt man  $\rho(n) := 2^\gamma + 8\delta$ .

Daß es nicht mehr linear unabhängige Vektorfelder geben kann, ist ein berühmtes Resultat von Adams, auf das wir noch wiederholt eingehen werden und das im letzten Abschnitt auch hergeleitet werden soll:

**Satz 2.1.10** (VEKTORFELDSATZ VON ADAMS). *Die Maximalzahl linear unabhängiger Vektorfelder auf  $S^{n-1}$  ist  $\rho(n) - 1$ .*

Einige Werte:

$n - 1$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
$\rho(n) - 1$	1	3	1	7	1	3	1	8	1	3	1

#### 5. Vektorfelder auf $P_n(\mathbb{R})$ :

Es sei  $\pi : S^n \rightarrow P_n(\mathbb{R})$  die Quotientenabbildung. Wegen  $\pi^* \tau P_n(\mathbb{R}) \cong \tau S^n$  kann es auf  $P_n(\mathbb{R})$  höchstens so viele linear unabhängige Vektorfelder geben wie auf  $S^n$ . Die unter 4. erwähnten Vektorfelder auf  $S^n$  sind jedoch mit der Abbildung  $\pi$  verträglich und definieren Vektorfelder auf  $P_n(\mathbb{R})$ , sodaß  $S^n$  und  $P_n(\mathbb{R})$  die gleiche Anzahl von linear unabhängigen Vektorfeldern besitzen. Insbesondere sind  $\tau P_1(\mathbb{R})$ ,  $\tau P_3(\mathbb{R})$  und  $\tau P_7(\mathbb{R})$  trivial. Wegen  $\tau P_n(\mathbb{R}) \oplus \underline{\mathbb{R}} \cong (n+1)\lambda_n^{\mathbb{R}}$  sind dann die Bündel  $2\lambda_1^{\mathbb{R}}$ ,  $4\lambda_3^{\mathbb{R}}$  und  $8\lambda_7^{\mathbb{R}}$  stabil trivial (vergleiche (1.2.13)).

### 2.1.3 Erweiterung und Existenz von Schnitten

Eine Zerlegung der Eins ist das geeignete technische Hilfsmittel, um lokal gegebene Daten und Strukturen zu globalen zusammenzusetzen. Sie ersetzt das ältere Zerschneiden und Zusammenfügen eines Raumes. Zerlegungen der Eins stehen auf parakompakten (siehe Abschnitt 2.9) und damit auch auf kompakten Räumen zur Verfügung, aber nicht allgemein. Alternativ kann man mit numerierbaren Bündeln über beliebigen Basisräumen arbeiten, siehe etwa [toD91]. Wegen der Verwendung einer Zerlegung der Eins gelten die Aussagen dieses Abschnitts nicht allgemein für Vektorbündel über beliebigen Basisräumen. Der Einfachheit halber setzen wir aber den Basisraum als kompakt voraus. Mit etwas mehr technischem Aufwand, aber gleichen Beweisideen, lassen sich die entsprechenden Aussagen für parakompakte Räume herleiten (siehe etwa [Kar78], [toD91]). Das Fehlen einer holomorphen Zerlegung der Eins ist, wie schon erwähnt, unter anderem für wichtige Unterschiede zwischen der topologischen (bzw. differenzierbaren) und der komplex analytischen Vektorbündel-Kategorie verantwortlich.

### Vorbereitungen.

1. Ein kompakter topologischer Raum  $X$  (das Hausdorff'sche-Trennungsaxiom sei immer mit eingeschlossen) ist insbesondere ein normaler Raum. Eine wohlbekannte Eigenschaft eines normalen Raumes ist, daß eine in einer offenen Teilmenge  $U$  enthaltene abgeschlossene Teilmenge  $A$  immer eine in  $U$  enthaltene abgeschlossene Umgebung  $V$  besitzt. Es sei jetzt  $\xi = (E, p, X)$  ein Vektorbündel über dem kompakten Raum  $X$ . Wählt man  $A = \{x\}$  und  $U$  offen mit  $\xi|_U$  trivial, so sieht man, daß es immer endlich viele abgeschlossene  $X$  überdeckende Teilmengen  $V_i$  gibt, über denen  $\xi$  trivial ist.
2. Wendet man den üblichen Satz von Tietze auf die Komponentenfunktionen bezüglich einer Basis an, so erhält man:

**Proposition 2.1.11.** (Satz von Tietze) Es sei  $X$  ein normaler Raum (z.B. kompakt),  $Y \subset X$  eine abgeschlossene Teilmenge,  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $f : Y \rightarrow V$  stetig. Dann gibt es eine stetige Erweiterung  $g : X \rightarrow V$  von  $f$  mit  $g|_Y = f$ .

3. Wir verwenden hier folgende einfache Version einer Zerlegung der Eins (siehe etwa [Sch64] oder Abschnitt 2.9). Vorab sei an die Definition des Trägers  $Tr(f)$  einer stetigen Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  erinnert. Dieser ist als Abschluß der Teilmenge, auf der  $f$  nicht verschwindet, definiert:

$$Tr(f) := \overline{f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})}.$$

**Proposition 2.1.12.** Zu jeder endlichen offenen Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  eines kompakten Raumes  $X$  gibt es stetige Abbildungen  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$Z1: f_i(x) \geq 0 \quad \forall x \in X.$$

$$Z2: Tr(f_i) \subset U_i \quad \forall i \in I.$$

$$Z3: \sum_{i \in I} f_i(x) = 1 \quad \forall x \in X.$$

Die Funktionen  $(f_i)_{i \in I}$  nennt man wegen der Bedingung Z3 eine Zerlegung der Eins.

Als erste Anwendung der Existenz einer Zerlegung der Eins leiten wir Erweiterungssätze für Schnitte und Homomorphismen her.

**Satz 2.1.13.** Es sei  $\xi = (E, p, B)$  ein Vektorbündel über dem kompakten Raum  $B$ ,  $Y \subset B$  abgeschlossen und  $s : Y \rightarrow E|_Y$  ein Schnitt. Dann gibt es eine stetige Erweiterung von  $s$  auf  $B$ .

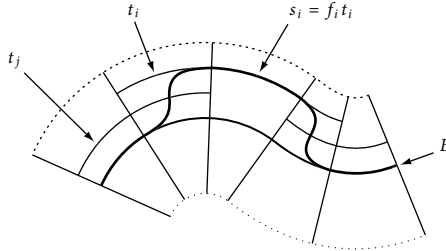
*Beweis.* Zu jedem  $x \in B$  wählen wir eine abgeschlossene Umgebung  $V = V_x$  über der  $\xi$  trivial ist. Da  $s|_{V \cap Y}$  nach Trivialisierung von  $\xi|_V$  eine vektorwertige Funktion ist, können wir den Satz von Tietze anwenden und erhalten eine Erweiterung  $t : V \rightarrow E|_V$  mit  $t|_{V \cap Y} = s|_{V \cap Y}$ . Die inneren Kerne  $\overset{\circ}{V}_x$  dieser Umgebungen liefern eine offene Überdeckung von  $B$  mit endlicher Teilüberdeckung  $U_1 = V_{x_1}, U_2 = V_{x_2}, \dots, U_r = V_{x_r}$ . Auf jedem der  $U_i$  haben wir eine Erweiterung  $t_i \in \Gamma(\xi|_{U_i})$  von  $s|_{U_i \cap Y}$ . Es sei  $(f_i)_{i \in I}, I := \{1, 2, \dots, r\}$ , eine zu den  $\overset{\circ}{U}_i$  gehörende Zerlegung der Eins. Definiere

$$s_i := \begin{cases} f_i \cdot t_i & \text{auf } U_i, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad s' := \sum_{i \in I} s_i,$$

Da  $s_i$  sowohl auf  $\overset{\circ}{U}_i$  wie auch  $B - \text{Tr}(f_i)$  einzeln stetig ist, erhält man stetige Schnitte von  $\xi$  auf ganz  $B$ . Mit  $J_y := \{j \in I \mid f_j(y) \neq 0\}$  gilt wegen Z3 für  $y \in Y$ :

$$s'(y) = \sum_{j \in J_y} f_j(y) \cdot t_j(y) = \sum_{j \in J_y} f_j(y) \cdot s(y) = \sum_{i \in I} f_i(y) \cdot s(y) = s(y),$$

sodaß  $s'$  tatsächlich eine Erweiterung von  $s$  ist. □



**Abb. 2.1.** Das Zusammenheften von Schnitten

Indem man Vektorbündel-Homomorphismen über die kanonische Isomorphie  $\text{Hom}(\xi, \eta) \cong \Gamma\text{HOM}(\xi, \eta)$  als Schnitte auffaßt, erhält man Ausdehnungssätze für Homomorphismen:

**Proposition 2.1.14.** *Es sei  $B$  ein kompakter Raum,  $Y \subset B$  ein abgeschlossener Unterraum und  $\xi_1, \xi_2$  Vektorbündel über  $B$ . Dann läßt sich jeder über  $Y$  gegebene Vektorbündel-Homomorphismus  $f : \xi_1|_Y \rightarrow \xi_2|_Y$  zu einem Vektorbündel-Homomorphismus  $\tilde{f} : \xi_1 \rightarrow \xi_2$  erweitern.*

*Beweis.* Ein Homomorphismus  $f$  über  $Y$  definiert einen Schnitt in dem Bündel

$$\text{HOM}(\xi_1, \xi_2) \xrightarrow{pr} B,$$



der über  $Y \subset B$  erklärt ist. Dieser besitzt eine Erweiterung zu einem Schnitt

$$f^{(1)} : B \longrightarrow \text{HOM}(\xi_1, \xi_2),$$

der wiederum die gesuchte Erweiterung  $\tilde{f} : \xi_1 \longrightarrow \xi_2$  definiert.  $\square$

**Bemerkung.** Alternativ kann man den Beweis des Schnitterweiterungssatzes auch direkt übertragen. Dazu betrachtet man zuerst den Fall von Produktbündeln. Der Homomorphismus  $f$  besitzt dann eine adjungierte Matrizenfunktion  $f^{ad} : Y \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ , die man direkt mit Hilfe des Satzes von Tietze auf  $B$  erweitert. Dann überträgt man die Aussage auf triviale Bündel auf die übliche Weise. Dies ist die lokale Situation für den Satz, dessen Beweis dann über eine Zerlegung der Eins wie oben zu Ende geführt wird.

**Korollar 2.1.15.** *Es sei  $B$  ein kompakter Raum und  $\xi_1, \xi_2$  Vektorbündel über  $B$ . Über dem abgeschlossenen Unterraum  $Y \subset B$  sei ein Isomorphismus  $f : \xi_1|_Y \longrightarrow \xi_2|_Y$  gegeben. Dann gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $Y$ , auf die sich  $f$  zu einem Isomorphismus  $\tilde{f} : \xi_1|_U \longrightarrow \xi_2|_U$  erweitern läßt.*

*Beweis.* Zunächst erweitert man  $f$  wie oben zu einem Vektorbündel-Homomorphismus  $\tilde{f}$  auf  $B$ . Wir betrachten jetzt die Menge  $U$  aller  $x \in B$ , für die  $\tilde{f}$  ein Isomorphismus ist. Diese ist nicht leer und enthält  $Y$  (falls  $Y \neq \emptyset$ ). Es sei  $x \in B$  ein Punkt für den  $\tilde{f}$  ein Isomorphismus ist. Durch Einschränken und Trivialisieren können wir auf die Situation eines Vektorbündel-Homomorphismus

$$g : V \times \mathbb{K}^n \longrightarrow V \times \mathbb{K}^n \quad \text{mit } g \text{ ist für } x \in V \text{ ein Isomorphismus}$$

und  $V$  offen, reduzieren. Die Funktion  $z \mapsto \det(g_z)$  ist stetig und für  $x$  von Null verschieden, also gilt dies auch noch in einer kleinen offenen Umgebung von  $x$ . Dies zeigt, daß  $U$  offen ist.  $\square$

### 2.1.4 Der Homotopiesatz

Ebenfalls eine direkte Folgerung des Isomorphieerweiterungssatzes ist der Homotopiesatz. Zum Begriff Homotopie sei auf Abschnitt 1.5 verwiesen, wir wiederholen kurz: Zwei stetige Abbildungen  $f, g : X \longrightarrow B$  heißen homotop, abgekürzt durch  $f \simeq g$ , wenn es eine stetige Abbildung, eine sogenannte Homotopie

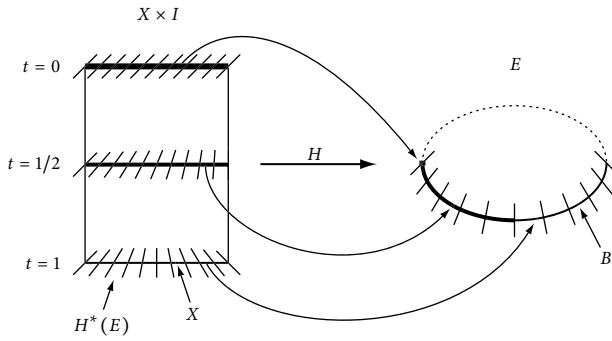
$$H : X \times I \longrightarrow B \quad \text{mit} \quad H(-, 0) = f \quad \text{und} \quad H(-, 1) = g$$

gibt. Setzt man  $H_t(x) = H(x, t)$ , so kann man  $t \mapsto H_t$  als eine stetige Deformation der Abbildung  $f$  in die Abbildung  $g$  auffassen. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation, die Äquivalenzklassen heißen Homotopieklassen und die Menge der Homotopieklassen bezeichnen wir mit

$$[X, B] := \{f : X \longrightarrow B \mid f \text{ stetig}\} / \simeq$$

Viele wichtige Funktoren  $F$  in der Topologie sind homotopieinvariant, d.h. homotope Abbildungen liefern gleiche Werte unter  $F$ . Daß dies auch für  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(-)$  gilt, ist Aussage des Homotopiesatzes. Er gilt allgemein für parakompaktes  $X$ , wir leiten ihn jedoch nur für kompakte Räume her, einen allgemeinen Beweis findet man z.B. in [toD91]. Die Gültigkeit des Homotopiesatzes hat einen starken Einfluß auf die "Größe" der Menge  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X)$ . Steht dieser für einen Raum  $X$  nicht zur Verfügung, ist  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X)$  i.A. viel umfangreicher (z.B. überabzählbar) und enthält kontinuierliche Familien von Isomorphieklassen, während im Gültigkeitsfall  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X)$  eher diskret (z.B. abzählbar) ist. Man vergleiche etwa die Sphäre  $S^1$  mit dem Intervall mit doppeltem Nullpunkt weiter unten.

Die Beweisidee des Homotopiesatzes für kompaktes  $X$  ist kurz wie folgt: Man faßt  $t \mapsto [H_t^*(\xi)]$  als Abbildung von  $[0,1]$  nach  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X)$  (mit der diskreten Topologie) auf und zeigt, daß die Isomorphieklasse von  $H_t^*(\xi)$  stetig von  $t$  abhängt, also konstant in  $t$  sein muß.



**Abb. 2.2.** Eine Homotopie mit geliftetem Bündel

**Satz 2.1.16.** Es sei  $X$  ein kompakter und  $Z$  ein beliebiger Raum, sowie  $\xi = (E, p, Z)$  ein Vektorbündel über  $Z$ . Sind die Abbildungen  $f : X \rightarrow Z$  und  $g : X \rightarrow Z$  homotop, so sind  $f^*(\xi)$  und  $g^*(\xi)$  isomorph.

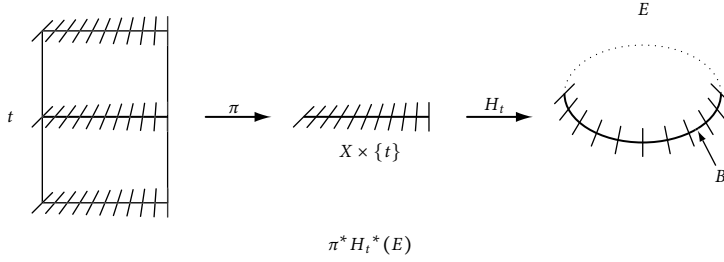
*Beweis.* Es sei  $H : X \times I \rightarrow Z$  eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ , dann ist  $H^*(\xi)$  ein Vektorbündel über  $X \times I$ , und es gilt:

$$H^*(\xi)|_{X \times \{0\}} \cong f^*(\xi) \quad \text{und} \quad H^*(\xi)|_{X \times \{1\}} \cong g^*(\xi).$$

$H_t^*(\xi)$  ist also eine „Familie“ von Vektorbündeln über  $X$ .

Es sei  $\pi : X \times I \rightarrow X$  die Projektion. Betrachte auf  $X \times I$  die Bündel  $H^*(\xi)$  und  $\pi^* H_t^*(\xi)$ . Auf dem Unterraum  $X \times \{t\}$  sind beide Bündel kanonisch isomorph, denn es gilt

$$H|_{X \times \{t\}} = H_t = H_t \circ \pi|_{X \times \{t\}}.$$



**Abb. 2.3.** Die Bündel  $\pi^* H_{1/2}^*(\xi)$  und  $H^*(\xi)$  aus Abb. 2.2 sind auf  $X \times \{1/2\}$  isomorph

Wendet man nun den Ausdehnungssatz für Isomorphismen (2.1.15) auf  $X \times \{t\} \subset X \times I$  an, so erhält man einen Isomorphismus

$$g : H^*(\xi)|_U \xrightarrow{\cong} \pi^* H_t^*(\xi)|_U$$

über der offenen Umgebung  $U$  von  $X \times \{t\}$ . Da  $X$  kompakt ist, liegt in  $U$  eine Streifenumgebung  $X \times (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset U$ .

Damit gilt also

$$H^*(\xi)|_{X \times (t - \varepsilon, t + \varepsilon)} \cong \pi^* \circ H_t^*(\xi)|_{X \times (t - \varepsilon, t + \varepsilon)}, \quad (2.1.17)$$

und für  $s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$  ist

$$H_s^*(\xi) = H^*(\xi)|_{X \times \{s\}} \cong \pi^* H_t^*(\xi)|_{X \times \{s\}} = H_t^*(\xi).$$

Mit anderen Worten ist die Zuordnung von  $t \in I$  in die Isomorphieklasse von  $H_t^*(\xi)$  in  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X)$  lokal konstant, also stetig, wenn man  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X)$  mit der diskreten Topologie versieht. Da  $I$  wegzusammenhängend ist, ist diese Funktion global konstant, also gilt  $H_0^*(\xi) \cong H_1^*(\xi)$ , d.h.  $f^*(\xi) \cong g^*(\xi)$ .  $\square$

Direkte Folgerungen sind:

**Korollar 2.1.18.** Homotope Abbildungen  $f \simeq g : X \rightarrow Y$  induzieren gleiche Homomorphismen  $f^* = g^* : \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(Y) \rightarrow \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X)$ .

**Korollar 2.1.19.** Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz zwischen kompakten Räumen, so ist

$$f^* : \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(Y) \longrightarrow \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X)$$

bijektiv.

Ein einfaches Beispiel ist etwa  $X = D^m$ , die  $m$ -Scheibe im  $\mathbb{R}^m$ , und  $Y = \{0\}$ .

Ein Raum, der zu einem Punkt homotopieäquivalent ist, heißt zusammenziehbar.

**Korollar 2.1.20.** *Ist  $X$  kompakt und zusammenziehbar, so ist jedes Vektorbündel über  $X$  trivial, d.h es gilt  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X) \cong \{[X \times \mathbb{K}^n]\}$ .*

*Beweis.* Aus der Voraussetzung folgt, daß die Identität  $id$  auf  $X$  homotop zur konstanten Abbildung  $c_{x_0}$  ist, also gilt  $\xi \cong id^*(\xi) \cong c_{x_0}^*(\xi)$ , wobei das letzte Bündel trivial ist.  $\square$

**Korollar 2.1.21.** *Ist  $\xi$  ein Vektorbündel über  $X \times I$  und  $X$  kompakt, dann sind die Bündel  $\xi|_{X \times \{0\}}$  und  $\xi|_{X \times \{1\}}$  isomorph.*

*Beweis.* Die Abbildung

$$j_t : X \xrightarrow{\cong} X \times \{t\} \subset X \times I \quad \text{mit} \quad j_t(x) = (x, t)$$

liefert die Homotopie zwischen  $j_0$  und  $j_1$ .  $\square$

Als einfache Anwendung besprechen wir ein Argument, das zeigt, wie man aus einer Zerlegung eines Vektorbündels in eine Whitney-Summe linear unabhängige Schnitte gewinnen kann.

**Proposition 2.1.22.** *Besitzt das Vektorbündel  $\xi = (E, p, S^n)$  über  $S^n$  eine Zerlegung  $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$  mit  $p := \dim(\xi_1)$ ,  $q := \dim(\xi_2)$ , so hat  $\xi$  mindestens  $a = \min(p, q)$  linear unabhängige Schnitte.*

*Beweis.* Wir wählen zwei kleine disjunkte Scheiben  $D_1, D_2$  in  $S^n$  und setzen  $X_i = S^n - \mathring{D}_i$ . Die Teilmengen  $X_1, X_2$  sind kompakt, zusammenziehbar und überdecken  $S^n$ . Damit sind die Einschränkungen  $\xi_i|_{X_i}$  trivial und wir können linear unabhängige Schnitte  $s_1, s_2, \dots, s_p$  von  $\xi_1|_{X_1}$ ,  $t_1, \dots, t_q$  von  $\xi_2|_{X_2}$  wählen (2.1.3). Nach (2.1.13) besitzen diese Schnitte Erweiterungen  $\tilde{s}_i, \tilde{t}_i$  auf  $S^n$ . Dann sind aber die Schnitte  $\tilde{s}_1 \oplus \tilde{t}_1, \dots, \tilde{s}_a \oplus \tilde{t}_a$  auf ganz  $S^n$  punktweise linear unabhängig.  $\square$

## 2.2 Riemannsche und Hermitesche Metriken

### 2.2.1 Konstruktion und Eigenschaften

Eine wichtige zusätzliche Struktur auf einem Vektorbündel wird durch ein stetig von  $b \in B$  abhängiges Skalarprodukt in jeder Faser  $E_b$  gegeben:

**Definition 2.2.1.** Eine stetige Abbildung  $\beta : E(\xi \oplus \xi) \longrightarrow \mathbb{R}$  heißt Riemannsche Metrik für ein reelles Vektorbündel  $\xi$ , wenn  $\beta$  faserweise ein Skalarprodukt  $\beta_x$  auf  $E(\xi)_x$  definiert. Entsprechend wird eine Hermitesche Metrik auf einem komplexen Vektorbündel definiert.

Ohne Änderung der Bezeichnung fassen wir eine Riemannsche Metrik auch als faserweise bilineare Abbildung mit Werten in  $\mathbb{R}$ , d.h. als Element in  $\text{Bilin}(\xi \oplus \xi, \mathbb{R})$  auf.

**Bemerkung.**

1. Der stetige Funktor  $\text{Eukl}(W)$  der symmetrischen Bilinearformen auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $W$  läßt sich auf Vektorbündel übertragen. Damit ist  $\text{EUKL}(\xi)$  für ein reelles Vektorbündel  $\xi$  erklärt und eine Riemannsche Metrik läßt sich auch als faserweise positiv definiter Schnitt in  $\text{EUKL}(\xi)$  auffassen. Zum Nachweis der Äquivalenz beider Definitionen hat man allerdings (2.1.6) von der linearen auf die bilineare Situation zu übertragen, was durch die Isomorphismenkette

$$\text{Bilin}(\xi \oplus \eta, \omega) \cong \text{Hom}(\xi \otimes \eta, \omega) \cong \Gamma \text{HOM}(\xi \otimes \eta, \omega) \cong \Gamma \text{BILIN}(\xi \oplus \eta, \omega)$$

geleistet wird. Hierbei ist  $\text{BILIN}$  der auf Vektorbündel erweiterte stetige Funktor der bilinearen Abbildungen. Entsprechendes gilt für eine Hermitesche Metrik.

2. Eine weitere Möglichkeit, die Stetigkeit einer Riemannschen Metrik  $x \mapsto \beta_x$  zu fassen, ist zu verlangen, daß für jedes  $x \in B$  ein inneres Produkt  $\beta_x$  auf  $E_x$  gegeben ist, sodaß für beliebige Schnitte  $s, t \in \Gamma(E)$  die Abbildung  $x \mapsto \beta_x(s(x), t(x))$  stetig ist.

Auf jedem Unterbündel eines Vektorbündels mit Metrik  $\beta$  erhält man trivialerweise eine Metrik durch Einschränken von  $\beta$ . Der folgende Satz gilt auch für parakompakte Räume:

**Satz 2.2.2.** Jedes Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$  über einem kompakten Basisraum  $B$  besitzt  $\xi$  eine Metrik  $\beta$ .

*Beweis.* Für ein Produktbündel  $B \times V$  kann man die konstante Metrik verwenden. Diese überträgt man mittels einer Trivialisierung auf ein triviales Bündel. Für ein beliebiges Bündel  $\xi = (E, p, B)$  sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine endliche, offene Überdeckung von  $B$ , sodaß  $E|_{U_i}$  trivial ist. Wähle zu  $(U_i)_{i \in I}$  eine Zerlegung  $(f_i)_{i \in I}$  der Eins und eine Metrik  $\beta_i$  auf  $E|_{U_i}$ . Erweitere  $\beta_i$  zu  $\tilde{\beta}_i$  durch

$$(\tilde{\beta}_i)_x := \begin{cases} f_i(x) \cdot (\beta_i)_x & \text{für } x \in U_i, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad ,$$

dann ist  $\tilde{\beta}_i$  stetig, also ein Element in  $\text{Bilin}(\xi \oplus \xi, \mathbb{R})$ , das auf  $U_i$  faserweise symmetrisch und positiv semidefinit ist. Setze

$$\beta := \sum_{i \in I} \tilde{\beta}_i,$$

dann ist auch  $\beta \in \text{Bilin}(\xi \oplus \xi, \mathbb{R})$  faserweise symmetrisch und positiv semidefinit. Zu  $x \in B$  gibt es einen Index  $\alpha \in I$  mit  $f_\alpha(x) > 0$ , d.h.  $x \in U_\alpha$ . Es ist  $(\beta_\alpha)_x = (\beta_\alpha)_x$  positiv definit, damit aber auch  $\beta$ , denn es gilt

$$\beta_x(v, v) \geq (\tilde{\beta}_\alpha)_x(v, v) > 0,$$

Also ist  $\beta$  eine Metrik für  $\xi$ . Genauso argumentiert man für eine Hermitesche Metrik.  $\square$

Eine Metrik erlaubt die Definition von Scheiben- und Sphärenbündel:

**Definition 2.2.3.**  $\xi = (E, p, B)$  sei ein Vektorbündel mit einer Metrik  $\beta$ . Der Unterraum

$$S(E) := \{v \in E \mid \beta_x(v, v) = 1 \text{ für } x = p(v)\}$$

der Vektoren der Länge 1 in  $E$  heißt Sphärenbündel von  $\xi$  und

$$D(E) := \{v \in E \mid \beta_x(v, v) \leq 1 \text{ für } x = p(v)\}$$

heißt Scheibenbündel von  $\xi$ . Der Quotientenraum

$$M(E) = B^\xi := D(E)/S(E)$$

heißt Thom-Raum von  $\xi$ .

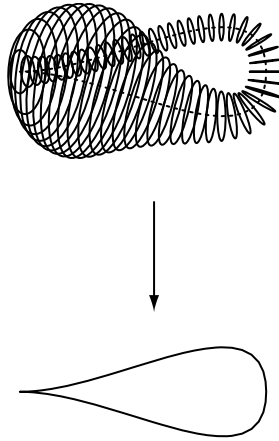
Sphärenbündel und Scheibenbündel sind Faserbündel über  $B$  mit einer Sphäre bzw. Scheibe als Faser, auf  $M(E)$  ist die Projektion jedoch nicht mehr sinnvoll definiert. Diese Begriffe werden später eine wichtige Rolle spielen.

### Beispiele.

1. Für das reelle Linienbündel  $\lambda_1^\mathbb{R} = (E, p, S^1)$  über  $P_1(\mathbb{R}) \cong S^1$  ist  $S(\lambda_1) \rightarrow S^1$  eine doppelte Überlagerung und  $D(\lambda_1)$  das Möbiusband.
2. Das Sphärenbündel von  $\lambda_1^\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  ist die Kleinsche Flasche
3. Für das universelle komplexe Linienbündel  $\lambda_1^\mathbb{C} = (E, p, S^2)$  über  $S^2 \cong P_1(\mathbb{C})$  gilt  $S(\lambda_1^\mathbb{C}) \cong S^3$ . Die Einschränkung der Projektion  $p$  auf  $S(\lambda_1^\mathbb{C}) \cong S^3$  liefert die bekannte Hopf-Abbildung:

$$\eta : S^3 \longrightarrow S^2 \tag{2.2.4}$$

4. Der Thom-Raum des Hopf-Bündels  $H = (E(H), p, P_n(\mathbb{C}))$  ist homöomorph zu  $P_{n+1}(\mathbb{C})$  (siehe (2.4.11)).

Abb. 2.4.  $S(\lambda_1^{\mathbb{R}} \oplus \underline{\mathbb{R}})$ 

Das Skalarprodukt eines Euklidischen Vektorraums  $V$  liefert einen kanonischen Isomorphismus  $V \cong V^*$ . Gleiches gilt für Vektorbündel mit Riemannscher Metrik:

**Proposition 2.2.5.** *Ein reelles Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$ , das eine Riemannsche Metrik  $\beta$  zulässt, ist isomorph zu seinem dualen Bündel  $\xi^*$ . Für ein komplexes Vektorbündel  $\eta$  mit Hermitescher Metrik folgt  $\eta^* \cong \overline{\eta}$ .*

*Beweis.* Durch

$$\begin{aligned} \omega_x : E_x &\longrightarrow \text{Hom}(E_x, \mathbb{R}) \\ v &\longmapsto \beta_x(v, -) \end{aligned}$$

wird eine faserweise lineare Abbildung  $\omega : \xi \rightarrow \xi^*$  definiert. Daß  $\omega$  faserweise bijektiv ist, folgt sofort aus den Eigenschaften von  $\beta$ . Die Stetigkeit von  $\omega$  kann man entweder direkt nachweisen (Reduktion auf ein Produktbündel und Betrachtung der entsprechenden Matrizenfunktionen, etwa wie in (1.4.9)) oder wie folgt herleiten: Die Metrik  $\beta : \xi \oplus \xi \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$  induziert einen nach (1.4.9) (stetigen) Vektorbündel-Homomorphismus  $\beta_{\otimes} : \xi \otimes \xi \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ , der unter den kanonischen Isomorphismen

$$\text{Hom}(\xi \otimes \xi, \underline{\mathbb{R}}) \cong \Gamma\text{HOM}(\xi \otimes \xi, \underline{\mathbb{R}}) \cong \Gamma\text{HOM}(\xi, \xi^*) \cong \text{Hom}(\xi, \xi^*)$$

gerade auf  $\omega$  abgebildet wird. □

Die vorliegende Situation ist ein Beispiel dafür, daß sich nicht-kanonische Vektorraum-Isomorphismen nicht unbedingt auf Vektorbündel übertragen lassen. So ist zwar jeder  $n$ -dimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  über eine Basiswahl isomorph zu  $V^*$ , aber nicht auf kanonische Weise. Nun gibt es aber Vektorbündel (über einem notwendigerweise nicht parakompakten Basisraum, z.B. das Tangentialbündel der langen Geraden), die nicht isomorph zu ihrem Dualen sind. Das zeigt die nicht-Übertragbarkeit im Allgemeinen, die jedoch unter der zusätzlichen Struktur "Skalarprodukt" gegeben ist.

Zwischen der Ordnung eines Linienbündels in  $(\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(B), \otimes)$  und der Existenz einer Riemannschen Metrik besteht ein enger Zusammenhang:

**Proposition 2.2.6.** *Für ein reelles Linienbündel  $\lambda$  mit Riemannscher Metrik ist  $\lambda \otimes \lambda$  trivial, d.h.  $[\lambda]$  hat in  $(\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(B), \otimes)$  höchstens die Ordnung 2.*

*Beweis.* Eine Riemannsche Metrik  $\beta : \lambda \oplus \lambda \rightarrow \mathbb{R}$  induziert einen Vektorbündel-Homomorphismus  $\beta_{\otimes} : \lambda \otimes \lambda \rightarrow \mathbb{R}$ , der aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus sein muß.  $\square$

**Bemerkung.** Es gilt auch die Umkehrung, denn ein Isomorphismus  $f : \lambda \otimes \lambda \rightarrow \mathbb{R}$  definiert eine stetige Abbildung  $\bar{f} : E(\lambda \oplus \lambda) \rightarrow \mathbb{R}$ , die faserweise bilinear und wegen  $\dim \lambda = 1$  auch symmetrisch ist. Nun ist für jedes feste  $x \in B$  der Wert von  $\bar{f}_x(v, v)$  für alle  $v$  immer positiv oder immer negativ. Durch geeignete Abänderung auf den Zusammenhangskomponenten von  $B$  erhält man eine Metrik.

## 2.2.2 Orthogonale Komplemente

Ein großer Vorteil des Vorliegens einer Metrik auf einem Bündel ist, daß Unterbündel ein Komplement besitzen, sich also abspalten lassen. Hat beispielsweise das Vektorbündel  $\xi$  mit Metrik einen nullstellenfreien Schnitt  $s$ , so spaltet das durch  $s$  definierte triviale Unterbündel ab und  $\xi$  läßt sich als  $\xi' \oplus \mathbb{R}$  darstellen.

**Bemerkung.** Sind  $s_1, s_2, \dots, s_r$  linear unabhängige Schnitte des Vektorbündels  $\xi = (E, p, B)$  und besitzt  $\xi$  eine Riemannsche Metrik  $\beta$ , so kann man mit dem üblichen Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren die gegebenen Schnitte faserweise in orthonormale Schnitte  $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_r$  überführen, sodaß  $s_1(x), s_2(x), \dots, s_r(x)$  und  $\bar{s}_1(x), \bar{s}_2(x), \dots, \bar{s}_r(x)$  den gleichen Unterraum von  $E_x$  aufspannen. Aus der Stetigkeit der Metrik folgt dann die Stetigkeit der Schnitte  $\bar{s}_i$ .

Es sei jetzt  $\xi = (E, p, B)$  ein Vektorbündel mit Metrik  $\beta$  und  $F \subset E$  ein Unterbündel. Definiere

$$P_x : E_x \longrightarrow F_x \subset E_x$$

als orthogonale Projektion von  $E_x$  auf den Unterraum  $F_x \subset E_x$ . Dies definiert eine Abbildung

$$P : E \longrightarrow F \subset E \quad \text{mit} \quad P \circ P = P.$$

**Lemma 2.2.7.**  *$P$  ist ein strikter Vektorbündel-Homomorphismus.*



*Beweis.* Es fehlt nur die Stetigkeit von  $P$ . Dazu wähle eine Teilmenge  $U \subset B$ , über der  $E$  und  $F$  trivial sind. Dann gibt es  $m = \dim F$  linear unabhängige Schnitte  $s_1, \dots, s_m$  von  $F$  über  $U$ , die wir nach der letzten Bemerkung als faserweise orthonormal voraussetzen dürfen. Der Projektionsoperator  $P_x : E_x \rightarrow F_x$  besitzt für  $v \in E_x$  die explizite Formel

$$P_x(v) = \sum_{i=1}^m \beta_x(v, s_i(x)) \cdot s_i(x) \in F_x,$$

woraus die Stetigkeit von  $P$  folgt. □

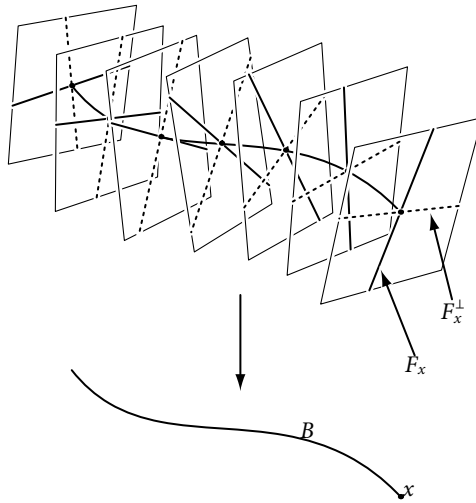
Da  $P$  ein Projektionsoperator ist, haben wir eine Zerlegung von  $E$  nach (1.3.12)

$$E \cong \text{Bild}(P) \oplus \ker(P) = F \oplus \ker(P).$$

Definiere

$$F^\perp := \bigcup_{x \in B} F_x^\perp \subset E,$$

dann ist  $F^\perp = \ker(P)$  ein Unterbündel und heißt orthogonales Komplement von  $F$ .



**Abb. 2.5.** Ein Linienbündel und sein orthogonales Komplement

Damit ist gezeigt:

**Satz 2.2.8.** Es sei  $\xi = (E, p, B)$  ein Vektorbündel mit einer Metrik und  $F \subset E$  ein Unterbündel. Dann besitzt  $F$  ein orthogonales Komplement  $F^\perp$  und man hat eine Aufspaltung

$$E \cong F \oplus F^\perp$$

**Korollar 2.2.9.** *Besitzt  $\xi$  eine Metrik, dann spaltet jede kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln*

$$0 \longrightarrow \xi_1 \longrightarrow \xi \longrightarrow \xi_2 \longrightarrow 0,$$

*d.h.  $\xi$  ist isomorph zu  $\xi_1 \oplus \xi_2$ .*

### Beispiele.

1.  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$  sei die Einbettung einer  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeit. Definiere  $\nu M := TM^\perp$  im  $M \times \mathbb{R}^{n+k}$ , dann gilt

$$TM \oplus \nu M = M \times \mathbb{R}^{n+k}.$$

2. Das komplexe Linienbündel  $T_{\mathbb{C}}^{(k)}$  aus (1.1.2) ist nach Konstruktion ein Unterbündel von  $S^2 \times \mathbb{C}^2$  und hat deshalb ein Linienbündel  $(T_{\mathbb{C}}^{(k)})^\perp$  als orthogonales Komplement bezüglich der Hermiteschen Metrik auf  $S^2 \times \mathbb{C}^2$ . Der Totalraum von  $(T_{\mathbb{C}}^{(k)})^\perp$  ( $k > 0$ ) besteht offensichtlich aus den Fasern

$$\{(z, (-t \cdot (\bar{z})^k, t)) \mid z \neq 0, \infty, t \in \mathbb{C}\} \cup \{(\infty, (t, 0)) \mid t \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, (0, t)) \mid t \in \mathbb{C}\},$$

und das ist genau der Totalraum von  $T_{\mathbb{C}}^{(-k)}$ . Die Antipodenabbildung  $A : S^2 \rightarrow S^2$  schreibt sich unter der Identifikation  $S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  als  $A(z) = -1/\bar{z}$  für  $z \neq 0, \infty$ ,  $A(\infty) = 0$  und  $A(0) = \infty$ . Nach Definition des induzierten Bündels hat  $A^*(T_{\mathbb{C}}^{(k)})$  dann (bis auf eine redundante Variable in  $S^2$ ) den Totalraum

$$\{(z, (s, -s/(\bar{z})^k)) \mid z \neq 0, \infty, s \in \mathbb{C}\} \cup \{(\infty, (s, 0)) \mid s \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, (0, s)) \mid s \in \mathbb{C}\},$$

der damit ebenfalls dem von  $(T_{\mathbb{C}}^{(k)})^\perp$  gleicht, es folgt

$$(T_{\mathbb{C}}^{(k)})^\perp \cong A^*(T_{\mathbb{C}}^{(k)}) \cong T_{\mathbb{C}}^{(-k)}$$

und das im Whitney-Summen Abschnitt diskutierte Bild für  $\lambda_1^{\mathbb{R}} \oplus \lambda_1^{\mathbb{R}} \cong \underline{\mathbb{R}}^2$  lässt sich unmittelbar ins Komplexe übertragen und entspricht genau der ersten Isomorphie. Die der letzten Isomorphie entsprechende Beziehung  $A^*(\lambda_1^{\mathbb{C}}) \cong (\lambda_1^{\mathbb{C}})^*$  wird später in (2.4.12) noch einmal direkt nachgewiesen.

3.  $\tau S^{2n+1}$  und  $\tau P_n(\mathbb{C})$ .

Es sei  $\pi : S^{2n+1} \rightarrow P_n(\mathbb{C})$  die Quotientenabbildung. Das Tangentialbündel  $\tau P_n(\mathbb{C})$  wurde in Abschnitt 1.5 durch die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{C}} \xrightarrow{\varepsilon} F_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\widehat{T\pi}} \tau P_n(\mathbb{C}) \rightarrow 0 \quad (2.2.10)$$

beschrieben. Hier ist  $F_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \times \mathbb{C}^{n+1} / \sim \cong (n+1)H$  mit  $(x, \nu) \sim (\lambda x, \lambda \nu)$  für  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $[x, \nu]$  als Äquivalenzklasse von  $(x, \nu)$  und  $\varepsilon([v], \mu) = [\nu, \mu \nu]$ . Das kommutative

Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^{2n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} & \longrightarrow & S^{2n+1} \\ \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow \pi \\ F_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & P_n(\mathbb{C}) \end{array}$$

mit  $\tilde{\pi}(v, w) = [v, w]$  zeigt gerade  $\pi^*(F_{\mathbb{C}}) \cong S^{2n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$ . Definiert man  $\tilde{\varepsilon} : S^{2n+1} \times \mathbb{C} \rightarrow S^{2n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$  durch  $\tilde{\varepsilon}(v, \mu) = (v, \mu v)$ , so gilt  $\tilde{\pi} \circ \tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ . Damit läßt sich die mittels  $\pi$  auf  $S^{2n+1}$  geliftete Sequenz (2.2.10) wie folgt schreiben:

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} \underline{\mathbb{C}}^{n+1} \longrightarrow \pi^*(\tau P_n(\mathbb{C})) \longrightarrow 0.$$

Dies bedeutet, daß  $\pi^*(\tau(P_n(\mathbb{C})))$  das orthogonale Komplement zu  $\tilde{\varepsilon}(\underline{\mathbb{C}})$  in  $\underline{\mathbb{C}}^{n+1}$  ist:

$$\pi^*(\tau(P_n(\mathbb{C}))) = \tilde{\varepsilon}(\underline{\mathbb{C}})^\perp \quad \text{in} \quad S^{2n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \quad \text{oder}$$

$$E(\pi^*(\tau P_n(\mathbb{C}))) = \{(v, w) \in S^{2n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \mid \langle v, w \rangle_{\mathbb{C}} = 0\}, \quad (2.2.11)$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$  das übliche Hermitesche Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}^{n+1}$  ist. Bezeichnet  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$  das Euklidische Skalarprodukt, gilt für das Tangentialbündel der Sphäre

$$E(\tau S^{2n+1}) = \{(v, w) \in S^{2n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \mid \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}} = 0\}.$$

Aus  $\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}} = 0$  und  $\langle i \cdot v, w \rangle_{\mathbb{R}} = 0$  folgt  $\langle v, w \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ . Definiert man jetzt  $d : \mathbb{R} \rightarrow \tau S^{2n+1}$  durch  $d(v, \lambda) = (v, i \cdot \lambda v)$ , so ist dann  $\pi^*(\tau P_n(\mathbb{C}))$  offensichtlich das orthogonale Komplement von  $d(\mathbb{R})$  in  $\tau S^{2n+1}$  ( $d$  entspricht dem Vektorfeld  $s$  in (2.1.8)). Damit ist

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \tau S^{2n+1} \rightarrow \pi^*(\tau P_n(\mathbb{C})) \rightarrow 0$$

exakt, oder

$$\tau S^{2n+1} \cong \mathbb{R} \oplus \pi^*(\tau P_n(\mathbb{C})). \quad (2.2.12)$$

Dies zeigt wie das Vektorfeld-Problem auf  $S^{2n+1}$  und das Schnittproblem in  $\pi^*(\tau(P_n(\mathbb{C})))$  zusammenhängen.

## 2.2.3 Einbettungen und stabile Inverse

**Definition 2.2.13.** Man nennt ein Vektorbündel  $\eta$  ein stabiles Inverses für das Vektorbündel  $\xi$ , falls die Whitney-Summe beider Bündel trivial ist:  $\xi \oplus \eta \cong B \times \mathbb{K}^m$ .

Als Beispiel haben wir bereits das Normalenbündel  $\nu M$  zu einer Einbettung  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$  einer  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit als stabiles Inverses zum Tangentialbündel  $\tau M$  kennengelernt.

Ein Vektorbündel  $\xi$  mit stabilem Inversen  $\eta$  besitzt immer eine Einbettung in ein Produktbündel und umgekehrt, denn als  $\eta$  kann man  $\xi^\perp$  verwenden, wenn  $\xi$  Unterbündel von  $B \times \mathbb{K}^m$  ist. Nicht alle Vektorbündel besitzen stabile Inverse, aber solange die Basis kompakt ist, ist dies immer richtig:

**Satz 2.2.14.**  *$X$  sei ein kompakter Raum und  $\xi = (E, p, X)$  ein  $n$ -dimensionales Vektorbündel über  $X$ . Dann gibt es eine Einbettung von  $\xi$  in ein Produktbündel, d.h. einen injektiven Vektorbündel-Homomorphismus*

$$\psi : E(\xi) \longrightarrow X \times \mathbb{K}^{n+r}$$

für genügend großes  $r$ .

*Beweis.* Es sei  $(U_i)_{i=1,\dots,m}$  eine endliche, offene Überdeckung von  $X$  mit den Karten

$$h_i : E|_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{K}^n$$

und der zugehörigen Zerlegung  $\{f_i\}$  der Eins. Durch

$$\begin{aligned} \tilde{h}_i : E(\xi) &\longrightarrow X \times \mathbb{K}^n \\ v &\longmapsto (p(v), f_i(p(v)) \cdot h_i(v)) \end{aligned}$$

erhält man einen wohldefinierten stetigen Vektorbündel-Homomorphismus, der außerhalb von  $U_i$  verschwindet. Definiere

$$\psi := \sum_{i=1}^m \tilde{h}_i : \xi \longrightarrow X \times \mathbb{K}^{n \cdot m} \quad \text{wobei} \quad \begin{aligned} \tilde{h}_1 &\text{ nach } X \times \mathbb{K}^n \times \{0\} \times \dots \\ \tilde{h}_2 &\text{ nach } X \times \{0\} \times \mathbb{K}^n \times \dots \text{ usw. abbildet.} \end{aligned}$$

Da es zu jedem  $x \in X$  einen Index  $i$  mit  $x \in U_i$  und  $f_i(x) > 0$  gibt, ist

$$\tilde{h}_i|_{E_x} : E_x \longrightarrow \{x\} \times \{0\} \times \dots \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \{0\} \subset \{x\} \times \mathbb{K}^{n \cdot m}$$

injektiv, denn die anderen Summanden von  $\psi$  bilden in andere Faktoren ab, also ist  $\psi$  injektiv.  $\square$

**Bemerkung.** Man beachte den Einfluß der Anzahl der nötigen Kartenumgebungen  $U_i$  auf die Einbettungsdimension.

**Korollar 2.2.15.** *Jedes Vektorbündel  $\xi$  über einem kompakten Raum  $B$  besitzt ein stabiles Inverses.*

*Beweis.* Für ein  $n$ -dimensionales Vektorbündel folgt dies aus (2.2.14) und (2.2.8). Ist  $\xi$  nicht von konstanter Dimension, so betrachte das Bündel  $Rg^\perp(\xi)$  mit Totalraum

$$\bigcup_{b \in B} \{b\} \times \mathbb{K}^{n_0 - \text{rang}_\xi(b)},$$

wo  $\text{rang}_\xi : B \longrightarrow \mathbb{Z}$  die Funktion mit  $\text{rang}_\xi(b) = \dim E_b$  und  $n_0 = \max\{\text{rang}_\xi(b) \mid b \in B\}$  ist. Aus der lokalen Trivialität von  $\xi$  folgt, daß  $Rg^\perp(\xi)$  ein Vektorbündel ist. Das Vektorbündel  $\xi \oplus Rg^\perp(\xi)$  ist dann von konstanter Dimension und kann wie vorher in ein Produktbündel eingebettet werden.  $\square$

Ist  $\eta$  stabiles Inverses für  $\xi$ , so gilt für die stabilen Isomorphieklassen in  $\text{SVekt}_{\mathbb{K}}(B)$  offensichtlich  $[\xi]_s + [\eta]_s = 0$ , denn das Produktbündel repräsentiert die 0 in  $\text{SVekt}_{\mathbb{K}}(B)$ . Es folgt:

**Korollar 2.2.16.** *Für einen kompakten Raum  $B$  ist  $\text{SVekt}_{\mathbb{K}}(B)$  eine abelsche Gruppe.*

**Beispiel 2.2.17.** Zur Illustration diskutieren wir den Zusammenhang zwischen Schnitten in Vielfachen eines Linienbündels und dessen Einbettungen in Produktbündel.

Es sei  $L = (L, p, B)$  ein reelles Linienbündel mit Riemannscher Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , die einen Isomorphismus  $\gamma : L \otimes L \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\gamma(v \otimes w) = (p(v), \langle v, w \rangle)$  induziert (2.2.6).

Gegeben sei ein nullstellenfreier Schnitt  $s$  von  $nL$ :

$$\begin{aligned} s : B &\longrightarrow E(nL) \\ b &\longmapsto s(b) = (s_1(b), s_2(b), \dots, s_n(b)). \quad (s_i(b) \in L_b) \end{aligned}$$

Wir fassen  $s$  als Vektorbündel-Homomorphismus

$$\bar{s} : \underline{\mathbb{R}} \longrightarrow nL \quad \text{mit } \bar{s}(b, t) = t \cdot s(b)$$

auf. Tensorieren mit  $id_L$  ergibt

$$\begin{aligned} \bar{s} \otimes id_L : \underline{\mathbb{R}} \otimes L &\longrightarrow n \cdot L \otimes L \\ (b, t) \otimes v &\longmapsto t \cdot (s_1(b) \otimes v, \dots, s_n(b) \otimes v). \end{aligned}$$

Komposition mit  $\gamma$  liefert

$$\begin{aligned} e_s : L &\longrightarrow B \times \mathbb{R}^n \\ v &\longmapsto (p(v), \langle s_1(p(v)), v \rangle, \dots, \langle s_n(p(v)), v \rangle). \end{aligned}$$

Dies ist eine Einbettung, denn  $s$  war nullstellenfrei.

Die  $n$  Komponenten  $s_i$  des nullstellenfreien Schnitts  $s$  liefern durch  $g(b, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) := \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot s_i(b)$  einen surjektiven Vektorbündel-Homomorphismus

$$g : B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow L,$$

denn nicht alle  $s_i$  können auf einem gegebenem  $b \in B$  gleichzeitig verschwinden. Da  $\mathbb{R}^n$  eine Metrik besitzt, hat  $L$  ein orthogonales Komplement  $L^\perp$  und man hat eine Spaltung  $\mathbb{R}^n \cong L \oplus L^\perp$ . Dies ergibt wieder, aber weniger explizit als oben, die Einbettung  $L \subset \mathbb{R}^n$ , zeigt dafür zusätzlich, daß das Vorliegen eines nullstellenfreien Schnitts in  $nL$  die Existenz einer Metrik auf  $L$  schon impliziert.

Ist umgekehrt eine Einbettung  $f : L \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben, so kann man obigen Weg einfach rückwärts gehen und erhält einen nullstellenfreien Schnitt  $s_f$ .

Alternativ und expliziter kann man die Einbettung  $f : L \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf die Sphärenbündel einschränken (man verwende etwa auf  $L$  die durch  $f$  induzierte Metrik) und erhält eine  $\mathbb{Z}/2$ -äquivariante Abbildung

$$\bar{f} : S(L) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{pr} S^{n-1}$$

wobei  $0 \neq A \in \mathbb{Z}/2$  durch Multiplikation mit  $-1$  operiert. Bilde

$$\begin{aligned} S(L) &\longrightarrow S(L) \times S^{n-1} \\ v &\longmapsto (v, \bar{f}(v)) \end{aligned}$$

und dazu die Quotientenabbildung

$$s_f : B = S(L)/(\mathbb{Z}/2) \longrightarrow (S(L) \times S^{n-1})/(\mathbb{Z}/2).$$

Dann ist  $s_f$  ein nullstellenfreier Schnitt von  $nL$ , denn, wie leicht zu sehen ist, ist der Quotient  $(S(L) \times S^{n-1})/(\mathbb{Z}/2) = S(nL)$  ein Sphärenbündel von  $nL$ .

**Beispiel.** Das Tangentialbündel  $\tau = \tau P_n(\mathbb{C})$

In Abschnitt 1.5 wurde die kurze exakte Vektorbündel-Sequenz

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{C}} \xrightarrow{\varepsilon} (n+1)H \longrightarrow \tau \rightarrow 0 \quad (2.2.18)$$

mit der Folgerung

$$\tau P_n(\mathbb{C}) \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong (n+1)H$$

hergeleitet. Verwendet man die Beschreibung der Linienbündel  $L^k = L^{\otimes k}$ ,  $H = L^{-1}$  als Quotienten von  $S^{2n+1} \times \mathbb{C}$  aus (1.1.9)

$$E(L^k) = (S^{2n+1} \times \mathbb{C})/\sim_k, \quad (x, c) \sim_k (\lambda x, \lambda^{-k} c), \quad \lambda \in S^1,$$

so ist der Vektorbündel-Homomorphismus  $\varepsilon$  durch

$$\varepsilon([v_0 : v_1 : \dots : v_n], c) = [(v_0, v_1, \dots, v_n), (c \cdot v_0, c \cdot v_1, \dots, c \cdot v_n)]_{\sim-1}$$

in  $(S^{2n+1} \times \mathbb{C}^{n+1})/\sim_{-1} = E((n+1)H)$  gegeben. Hierbei bezeichnet  $[-]_{\sim_k}$  die zu  $\sim_k$  gehörende Äquivalenzklasse.

Tensoriert man diese Sequenz mit dem universellen Linienbündel  $L = \lambda_n^{\mathbb{C}}$ , erhält man mit  $H \otimes L \cong \underline{\mathbb{C}}$  folgende exakte Sequenz

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{\varepsilon \otimes id_L} \underline{\mathbb{C}}^{n+1} \longrightarrow \tau \otimes L \rightarrow 0. \quad (2.2.19)$$

Dies bedeutet, daß  $\tau \otimes L$  ein Negativ (und orthogonales Komplement) von  $L$  ist. Das orthogonale Komplement  $L^\perp$  von  $L$  ist definiert durch

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{i} \underline{\mathbb{C}}^{n+1} \longrightarrow L^\perp \rightarrow 0.$$

Verwendet man wieder die Beschreibung der Linienbündel  $L^k$  als Quotienten von  $S^{2n+1} \times \mathbb{C}$ , so zeigt eine leichte Rechnung, daß  $\varepsilon \otimes id_L$  gerade die Inklusion  $i : L \hookrightarrow \underline{\mathbb{C}}^{n+1}$  ist, die beiden Quotientenbündel  $\underline{\mathbb{C}}^{n+1}/i(L) \cong L$  und  $\underline{\mathbb{C}}^{n+1}/(\varepsilon \otimes id_L) = \tau \otimes L$  also isomorph sein müssen. Aus dieser Isomorphie

$$\tau P_n(\mathbb{C}) \otimes L \cong L^\perp \quad (2.2.20)$$

erhält man unter Verwendung von  $\text{HOM}(\xi, \eta) = \xi^* \otimes \eta$  die Isomorphismen

$$\tau P_n(\mathbb{C}) = L^\perp \otimes H = L^* \otimes L^\perp = \text{HOM}(L, L^\perp), \quad (2.2.21)$$

also die Beschreibung von  $\tau$  ohne den Summanden  $\underline{\mathbb{C}}$ .

**Bemerkungen.**

1. Die Rechnung zu  $\varepsilon \otimes id_L = i$  kann man unter Verwendung allgemeiner Sätze umgehen. Zunächst folgt aus den exakten Sequenzen

$$-[L]_s = [L^\perp]_s = [\tau \otimes L]_s \text{ in } \text{SVekt}_{\mathbb{C}}(P_n(\mathbb{C})).$$

Aber, wie später gezeigt wird (3.2.25), gilt hier  $\text{SVekt}_{\mathbb{C}}(P_n(\mathbb{C})) \cong \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(P_n(\mathbb{C}))$ , woraus  $L^\perp \cong \tau \otimes L$  folgt.

2. Diese Beschreibung von  $\tau$ , die hier eher formal hergeleitet wurde, läßt sich auch auf direktem geometrischen Weg herstellen, siehe etwa [MiS74, §4] oder [MaT97, 18.13]. Im reellen Fall wurde dies bereits im Beispiel (1.4.4) ausgeführt.

**Beispiel.** Wann spaltet  $\tau := \tau P_n(\mathbb{C})$  ein Linienbündel ab?

Dieses Problem läßt sich leicht auf ein Schnittpunktproblem reduzieren: Spaltet nämlich  $\tau$  etwa die Tensorpotenz  $H^a$  des Hopf-Bündels ab, so hat man eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^a \rightarrow \tau \rightarrow N \rightarrow 0$$

die nach Tensorieren mit  $L^a$  die Sequenz

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{C}} \rightarrow \tau \otimes L^a \rightarrow N \otimes L^a \rightarrow 0$$

liefert. Unsere Frage ist also äquivalent zur Frage, ob  $\tau \otimes L^a$  einen nullstellenfreien Schnitt besitzt.

Hierzu betrachtet man dann üblicherweise die Euler-Klasse  $e(\tau \otimes L^a)$ , (siehe Abschnitt 4.2), denn diese muß verschwinden, falls  $\tau \otimes L^a$  einen Schnitt ohne Nullstellen zuläßt. Die Berechnung dieser Euler-Klasse  $e(\tau \otimes L^a)$ , die hier mit der  $n$ -ten Chern-Klasse  $c_n(\tau \otimes L^a)$  übereinstimmt und die wir später im Beispiel (4.2.6) durchführen werden, ergibt: Nur für  $n$  ungerade und  $a = 2$  verschwindet  $e(\tau \otimes L^a)$ . Verwendet man nun den Satz, daß ein  $2n$ -dimensionales (reelles) orientiertes Vektorbündel über einer  $2n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit (oder CW-Komplex) genau dann einen Schnitt ohne Nullstellen besitzt, wenn seine Euler-Klasse verschwindet, (siehe (5.2.5)) so ist man fertig und hat einen Beweis für

**Proposition 2.2.22.** Für ungerades  $n$  spaltet  $\tau P_n(\mathbb{C})$  auf in

$$\tau P_n(\mathbb{C}) \cong N \oplus H^2.$$

Kennt man einen Kandidaten für eine Aufspaltung, kann man nach einer expliziten Konstruktion suchen. Zunächst ist eine Aufspaltung von  $\tau$  äquivalent zu einer solchen von  $\tau \otimes L$ , was wegen  $\tau \otimes L \cong L^\perp$  (2.2.20) möglicherweise einfacher ist. In der Tat kann man leicht eine Einbettung

$$L \rightarrow \bar{L}^\perp,$$

wobei  $\bar{\xi}$  das zu  $\xi$  konjugierte Bündel ist, finden: Für ungerades  $n$  definiert die Multiplikation mit der Einheitsquaternion  $j \in \mathbb{H}$  auf  $P_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{n+1} = P_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{H}^{(n+1)/2}$  einen Vektorbündel-Automorphismus  $J$ , der wegen  $i \cdot j = -j \cdot i$  aber  $\mathbb{C}$ -antilinear ist. Wegen  $\langle v, j \cdot v \rangle = 0$  für  $v \in \mathbb{C}^{n+1}$  bildet  $J$  das Unterbündel  $L$  in  $\bar{L}^\perp$  injektiv ab. Durch Konjugation erhält man dann eine Einbettung

$$\bar{L} = H \hookrightarrow L^\perp$$

und durch Tensorieren mit  $H$  das gesuchte Unterbündel

$$H^2 \hookrightarrow L^\perp \otimes H = \tau P_n(\mathbb{C})$$

und damit einen direkten und konstruktiven Beweis von (2.2.22).

In (3.3.35) werden wir das Aufspaltungsverhalten des Bündels  $\tau P_n(\mathbb{C})$  weiter untersuchen.

## 2.3 Vektorbündel-Probleme

Eine Reihe von bekannten algebraischen und geometrischen Problemen können in Vektorbündel-Probleme übersetzt und damit auch gelöst werden. Zur Illustration der Nützlichkeit der bisher behandelten Begriffsbildungen sollen hier einige dieser Probleme mit ihren Übersetzungen und teilweise auch mit einer Andeutung des Lösungswegs vorgestellt werden. Gelegentlich müssen wir dabei allerdings etwas vorausgreifen, was sowohl die benötigten Berechnungen wie auch manche Begriffsbildungen betrifft.

### A) Probleme aus der Algebra.

1) Wir gehen als erstes auf das Divisionsalgebren-Problem ein. Dies ist ein altes klassisches Problem, dessen Lösungsweg wir hier schon skizzieren können und das die Übersetzung algebraischer Probleme in Aussagen über Vektorbündel beispielhaft zeigt.

**Problem:** Für welche Werte von  $n$  besitzt  $\mathbb{R}^n$  eine nullteilerfreie Multiplikation?

Mit Multiplikation ist hier eine bilineare Abbildung  $m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  gemeint und nullteilerfrei heißt, daß aus  $m(a, b) = 0$  schon  $a = 0$  oder  $b = 0$  folgt. Assoziativgesetz oder Kommutativität werden nicht verlangt. Eine solche Multiplikation  $m$  macht  $\mathbb{R}^n$  zu einer Divisionsalgebra. Cayley-Zahlen, Quaternionen,  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{R}$  liefern Beispiele in den Dimensionen  $n = 8, 4, 2, 1$ . Die Übersetzung in ein Vektorbündel-Problem stammt bereits von Stiefel (vor 1940):

**Proposition 2.3.1.** Falls  $\mathbb{R}^n$  eine nullteilerfreie Multiplikation  $m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  besitzt, hat das Tangentialbündel  $\tau P_{n-1}(\mathbb{R})$  des reell projektiven Raums  $n - 1$  linear unabhängige Schnitte, ist also trivial.

*Beweis.* Die Multiplikation mit dem  $i$ -ten Basiselement  $e_i = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  ist nach Voraussetzung injektiv, definiert also einen Isomorphismus  $x \mapsto m(x, e_i)$ . Durch

$$v_i(m(x, e_1)) = m(x, e_i)$$



definiert man Isomorphismen  $v_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , mit  $v_1 = id$ , sodaß für jedes  $x \neq 0$  die Vektoren  $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$  linear unabhängig sind. Gilt nämlich  $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i(z) = 0$ , so hätte man mit  $z = m(y, e_1)$

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i(z) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i(m(y, e_1)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i m(y, e_i) = m(y, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i)$$

einen Nullteiler. Durch Anwenden des üblichen Orthonormalisierungsverfahrens erhält man aus den  $v_i$  für jedes  $x \in S^{n-1}$  orthonormale Vektoren

$$x, w_2(x), w_3(x), \dots, w_n(x)$$

die nach wie vor stetig von  $x$  abhängen. Wegen  $(x, w_i(x)) \in T_x S^{n-1}$  hat dann  $\tau S^{n-1}$  insgesamt  $n-1$  linear unabhängige Schnitte, ist also trivial. Der resultierende Isomorphismus  $\Psi$  mit  $\Psi(x, \sum_{i=2}^n \lambda_i w_i(z)) = (x, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$  ist mit der Äquivalenzrelation  $\sim_1$  aus (1.5.4) verträglich und faktorisiert zu einer Trivialisierung von  $\tau P_{n-1}(\mathbb{R})$ .  $\square$

2) Eine Variante und Verallgemeinerung von 1) ist das Bilinearformen-Problem:

**Problem:** Für welche  $r, k$  gibt es für festes  $n$  eine nicht-singuläre bilineare Abbildung  $\beta : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ ?

Dabei heißt  $\beta$  nicht-singulär, wenn aus  $\beta(x, y) = 0$  immer  $x = 0$  oder  $y = 0$  folgt. Ein Beispiel wird von einer nullteilerfreien Multiplikation auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  geliefert.

**Proposition 2.3.2.** Ist  $\beta : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^k$  eine nicht-singuläre bilineare Abbildung, so hat das Vektorbündel  $k\lambda_n$  über  $P_n(\mathbb{R})$  zumindest  $r$  linear unabhängige Schnitte.

*Beweis.* Wir vertauschen die Faktoren, schränken  $\beta$  zu  $\beta_2 : S^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^k$  ein und definieren

$$\beta_3 : S^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow S^n \times \mathbb{R}^k \quad \text{durch} \quad \beta_3(x, v) = (x, \beta_2(x, v)).$$

Mit den folgenden Äquivalenzrelationen

$$\begin{array}{ccccccc} (x, v) & S^n \times \mathbb{R}^r & \xrightarrow{\beta_3} & S^n \times \mathbb{R}^k & (x, w) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \sim \\ (-x, v) & S^n \times \mathbb{R}^r & \xrightarrow{\beta_3} & S^n \times \mathbb{R}^k & (-x, -w) \end{array}$$

ist  $\beta_3$  verträglich und induziert daher einen Vektorbündel-Homomorphismus

$$\beta_4 : P_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^r \longrightarrow (S^n \times \mathbb{R}^k) / \sim.$$

Nach (1.1.11) ist  $(S^n \times \mathbb{R}^k) / \sim$  aber gerade der Totalraum von  $k\lambda_n$ . Daß  $\beta$  nicht-singulär ist, impliziert, daß  $\beta_4$  injektiv ist. Dies definiert die  $r$  linear unabhängigen Schnitte von  $k\lambda_n$ .  $\square$

Für eine ausführliche Diskussion des Bilinearformen-Problems sei auf [Lam66], [Lam68] verwiesen.

Eine nullteilerfreie Multiplikation auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  definiert eine nicht-singuläre Abbildung  $\beta : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  und damit  $n+1$  linear unabhängige Schnitte in  $(n+1)\lambda_n$ , eine wegen  $\tau P_n(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} \cong (n+1)\lambda_n^{\mathbb{R}}$  etwas schwächere Folgerung als der Satz von Stiefel, sie ist jedoch ausreichend für die Lösung des Divisionsalgebren-Problems. Sie hat den Vorteil, als Argument direkter zu sein und eine Diskussion des Tangentialbündels von  $P_n(\mathbb{R})$  ganz zu vermeiden.

**Korollar 2.3.3.** *Gibt es auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  eine nullteilerfreie Multiplikation, so ist das Vektorbündel  $(n+1)\lambda_n$  über  $P_n(\mathbb{R})$  trivial.*

### Lösungsskizze des Divisionsalgebren-Problems:

Für die Frage, für welche Werte von  $n$  eine nullteilerfreie Multiplikation auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  möglich ist, erhielt Stiefel durch Verwendung von Stiefel-Whitney-Klassen als Folgerung seines Satzes (2.3.1), daß  $n+1$  eine Potenz von 2 sein muß. Daß für  $n$  nur die Werte  $n = 0, 1, 3, 7$  in Frage kommen, ist Inhalt des Divisionsalgebrensatzes:

**Satz 2.3.4.** *Nur für  $n = 0, 1, 3, 7$  besitzt  $\mathbb{R}^{n+1}$  eine nullteilerfreie Multiplikation.*

Zur Herleitung verwenden wir die Berechnung der Gruppe der stabilen komplexen Bündel auf  $P_n(\mathbb{R})$ , d.h. von  $\text{SVekt}_{\mathbb{C}}(P_n(\mathbb{R}))$ . Diese Berechnung ist zwar relativ einfach, beruht aber auf dem Periodizitätssatz von Bott und wird erst später ausgeführt (5.5.5).

**Lemma 2.3.5.** *Die Gruppe  $\text{SVekt}_{\mathbb{C}}(P_n(\mathbb{R}))$  ist zyklisch von der Ordnung  $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  mit Erzeugendem  $[\lambda_n^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}]_s$ .*

Zum Beweis des Divisionsalgebrensatzes nehmen wir an, daß  $\mathbb{R}^{n+1}$  eine nullteilerfreie Multiplikation besitzt. Dann folgt mit dem Satz von Stiefel oder (2.3.3) durch Komplexifizieren die Trivialität des Bündels  $(n+1)\lambda_n^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ . Wegen  $(n+1) \cdot [\lambda_n^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}]_s = 0$  muß  $n+1$  also von der 2-er Potenz  $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  geteilt werden. Die Bedingung  $(n+1) \cdot [\lambda_n^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}]_s = 0$  ist linear in  $n$ , die Ordnung von  $[\lambda_n^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}]_s$  steigt jedoch exponentiell mit  $n$ . Mit etwas elementarer Zahlentheorie zeigt man dann leicht, daß nur die Fälle  $n = 0, 1, 3, 7$  bleiben. Der übliche über die Hopf-Invariante verlaufende Beweis des Divisionsalgebrensatzes wird in 10) weiter unten skizziert.

**Bemerkung.** Wie oben deutlich wurde, gibt es einen engen Zusammenhang zwischen nicht-singulären Bilinearformen, Vektorfeldern auf  $S^m$  und Schnitten in  $s \cdot \lambda_k^{\mathbb{R}}$ , auf den wir noch mehrfach treffen werden. Wie lassen sich solche Bilinearformen konstruieren?

Es sei  $\phi(n)$  die Anzahl der Zahlen zwischen 1 und  $n$ , die zu 0, 1, 2, 4 kongruent modulo 8 sind:

$$\phi(n) := |\{s \mid 0 < s \leq n \text{ und } s \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod{8}\}|.$$

Wir werden später sehen (5.5.8), daß die Gruppe  $\text{SVekt}_{\mathbb{R}}(P_n(\mathbb{R}))$  zyklisch von der Ordnung  $2^{\phi(n)}$  mit  $[\lambda_n]_s$  als Erzeugendem ist. Die Clifford-Algebren Konstruktion (siehe etwa [Oss92, §4.6]) liefert nun für jedes Vielfache  $m$  von  $2^{\phi(n)}$  eine nicht-singuläre Bilinearform

$$\beta = \beta_{n,m} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (2.3.6)$$

mit  $\beta(e_1, -) = id$ . Indem man die Funktionen  $x \mapsto (x, \beta(e_2, x), \dots, \beta(e_n, x))$  orthonormalisiert, erhält man  $n - 1$  orthonormale Vektorfelder auf  $S^{m-1}$ , dies sind die in (2.1.2) erwähnten Clifford-Vektorfelder, die die dort gegebenen Beispiele mit der Multiplikation mit  $i$  bzw.  $i, j, k$  verallgemeinern. Andererseits definiert  $\beta$  nach (2.3.2) eine Trivialisierung  $\theta(\beta) : \mathbb{R}^m \rightarrow m \cdot \lambda_{n-1}^{\mathbb{R}}$ , was genau zur Wahl von  $m$  als Vielfaches der Ordnung von  $[\lambda_n]_s$  paßt. Die durch  $\beta$  definierten Vektorfelder sind "linear". Indem man nun den hier über  $\beta$  gegebenen Zusammenhang zwischen  $n - 1$  Vektorfeldern auf  $S^{m-1}$  und Trivialisierungen von  $m \cdot \lambda_{n-1}^{\mathbb{R}}$  auch für beliebige "nichtlineare" Vektorfelder herstellt, erhält man eine Lösung des Vektorfeld-Problems, siehe 8) weiter unten.

3) Eine komplexe quadratische Form  $q : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$  nennt man anisotrop, wenn ihr Imaginärteil,  $im(q) : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , der selbst eine reelle quadratische Form ist, nur für  $z = 0$  verschwindet. Gesucht sind solche Formen mit minimalem  $n$ , insbesondere der Wert von

$$r(m) := \min \{n \mid \text{es gibt eine anisotrope komplexe quadratische Form } q : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n\}.$$

Für Motivation zu dieser algebraischen Invariante sei auf [DaL84] verwiesen. Eingeschränkt auf  $S^{2m-1}$  liefert der Imaginärteil  $im(q)$  einer solchen Form  $q$  eine  $\mathbb{Z}/4$ -äquivalente Abbildung  $im(q)/\|im(q)\| : S^{2m-1} \rightarrow S^{n-1}$ . Hier operiert  $\mathbb{Z}/4$  auf  $S^{2m-1}$  durch Multiplikation mit  $i$  und auf  $S^{n-1}$  durch Multiplikation mit  $-1$ . Dividiert man auf  $S^{2m-1}$  die Operation der Untergruppe, die von  $-1$  erzeugt wird, heraus, erhält man eine  $\mathbb{Z}/2$ -äquivalente Abbildung

$$a(q) : P_{2m-1}(\mathbb{R}) \longrightarrow S^{n-1},$$

wobei jetzt  $\mathbb{Z}/2$  frei auf  $P_{2m-1}(\mathbb{R})$  durch Multiplikation mit  $i$  operiert. Damit ist jeder anisotropen komplexen quadratischen Form  $q$  eine  $\mathbb{Z}/2$ -äquivalente Abbildung  $a(q) : P_{2m-1}(\mathbb{R}) \longrightarrow S^{n-1}$  zugeordnet.

Allgemein definiert man für einen freien  $\mathbb{Z}/2$ -Raum  $X$  die  $\mathbb{Z}/2$ -Höhe (level)  $s(X)$  als

$$s(X) := \min \{n \mid \text{es gibt eine } \mathbb{Z}/2\text{-äquivalente stetige Abbildung } f : X \longrightarrow S^{n-1}\}.$$

Hierbei operiert  $\mathbb{Z}/2$  wieder frei auf  $S^{n-1}$  über die Antipodenabbildung. Die topologische Invariante  $s(P_{2m-1}(\mathbb{R}))$  ist also eine untere Schranke für die algebraische Invariante  $r(m)$ , d.h. es gilt  $r(m) \geq s(P_{2m-1}(\mathbb{R}))$ . Das eigentliche zugehörige Vektorbündel-Problem erhält man dann durch folgende Übersetzung von  $s(X)$  für  $X = P_{2m-1}(\mathbb{R})$ .

Es sei  $X$  ein Hausdorff-Raum mit einer freien Operation der Gruppe  $\mathbb{Z}/2 = \{id, t\}$ . Dann ist die Quotientenabbildung  $X \longrightarrow X/(\mathbb{Z}/2) =: Y$  eine doppelte Überlagerung und es ist leicht zu sehen, daß

$$X \times_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{R} = (X \times \mathbb{R}) / \sim \longrightarrow Y \quad \text{mit } (tx, r) \sim (x, -r)$$

ein reelles Linienbündel  $L$  ist (siehe Abschnitt 2.7.3 oder das Beispiel (1.1.11)). Der Totalraum  $E(L)$  enthält  $X = X \times_{\mathbb{Z}/2} S^0 \cong S(L)$  als Unterraum. Eine  $\mathbb{Z}/2$ -äquivariante Abbildung  $f : X \longrightarrow S^{n-1}$  liefert eine äquivariante Abbildung

$$id \times f : X \longrightarrow X \times S^{n-1} \subset X \times \mathbb{R}^n$$

und diese nach Quotientenbildung

$$s_f : Y = X/(\mathbb{Z}/2) \longrightarrow (X \times \mathbb{R}^n) / \sim = E(nL)$$

einen nullstellenfreien Schnitt  $s_f$  in  $nL$ .

Umgekehrt ergibt ein Schnitt  $s : Y \rightarrow E(nL)$  ohne Nullstellen über die in (2.2.17) betrachtete Übersetzung eine Einbettung  $e_s : L \longrightarrow Y \times \mathbb{R}^n$ , aus der man durch Einschränkung auf  $X \subset E(L)$  und Projektion auf  $S^{n-1}$  eine  $\mathbb{Z}/2$ -äquivariante Abbildung  $f_s : X \longrightarrow S^{n-1}$  erhält.

Damit ist die Bestimmung von  $s(X)$  in ein äquivalentes Schnitt-Problem übersetzt. Ob  $nL$  einen nullstellenfreien Schnitt zuläßt, kann dann weiter mit Hilfe der Euler-Klasse in einer geeigneten Kohomologietheorie untersucht werden. Auf diese Weise konnte eine Reihe von  $\mathbb{Z}/2$ -Höhen bestimmt werden, für  $X = P_{2m-1}(\mathbb{R})$  erhält man beispielsweise

$$s(P_{2m-1}(\mathbb{R})) = \begin{cases} m+1, & \text{für } m \equiv 0, 2 \pmod{8} \\ m+2, & \text{für } m \equiv 1, 3, 4, 5, 7 \pmod{8} \\ m+3, & \text{für } m \equiv 6 \pmod{8} \end{cases},$$

siehe [Sto89].

## B) Probleme aus der Topologie und Geometrie.

### 4) Multiplikationen auf $S^n$ .

Trägt  $S^n$  die Struktur einer Lie-Gruppe, so ist das Tangentialbündel  $\tau S^n$  wie für jede Lie-Gruppe trivial. Nach 7) kommt nur  $n = 1, 3, 7$  in Frage. Verlangt man nur die Existenz einer stetigen Multiplikation  $m : S^n \times S^n \rightarrow S^n$  mit neutralem Element  $e$ , so hat man als schwächere Folgerung erst einmal, daß  $n$  ungerade sein muß. Dies ist aber ganz elementar herleitbar und soll deshalb als Beispiel besprochen werden:

Man wählt ein Element  $a \in S^n - \{e\}$  nahe bei  $e$ , sodaß  $m(a, x) \neq -x$  für alle  $x \in S^n$  gilt. Die Orthogonalisierung von  $x \mapsto m(a, x)$ , nämlich

$$v(x) := \langle x, m(a, x) \rangle \cdot x - m(a, x)$$

steht senkrecht auf  $x$  und liefert damit ein Vektorfeld auf  $S^n$ , das wegen der Bedingung  $m(a, x) \notin \{x, -x\}$  nullstellenfrei ist. Daß es auf  $S^{2m}$  kein nullstellenfreies Vektorfeld geben kann, ist ein ganz altes klassisches Resultat und wird später über die Euler-Klasse mitbewiesen. Sobald der Abbildungsgradbegriff auf  $S^n$  erklärt ist, hat man folgendes direkte Argument: Ein Vektorfeld  $v$  ohne Nullstellen definiert durch

$$h(x, t) := \cos(\pi t)x + \sin(\pi t) \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$$

eine Homotopie zwischen der Identität und der Antipodenabbildung  $A$  auf  $S^n$ . Der Abbildungsgrad von  $A$  ist aber  $(-1)^{n+1}$ , sodaß man für gerades  $n$  einen Widerspruch erhält. Für  $n = 2$  kommt man sogar mit der Berechnung von  $\pi_1(S^1)$  aus, indem man  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}(S^2) \cong \mathbb{Z}$  (3.1.7) verwendet und die Wirkung von  $A^*$  auf  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}(S^2)$  direkt bestimmt (2.4.12).

Interessanter ist die weitere Abschwächung dieser Frage, nämlich welche Sphären  $H$ -Räume sind, d.h. eine stetige Abbildung  $m : S^n \times S^n \rightarrow S^n$  besitzen, sodaß jeweils  $x \mapsto m(x, e)$  und  $x \mapsto m(e, x)$  homotop zur Identität sind. Hier scheint es keine direkte Übersetzung in ein Vektorbündel-Problem zu geben. Die Rückführung auf das Hopf-Invarianten Problem, angedeutet in 10), zeigt, daß wieder nur  $n = 1, 3, 7$  in Frage kommen.

5) Als nächstes beschreiben wir kurz die Übersetzung des Immersionsproblems in ein Vektorbündel-Problem (Literatur hierzu: [MPS80], [toD91], [Hir59]). Eine  $C^\infty$ -Abbildung  $f : M \rightarrow N$  zwischen  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  heißt Immersion, wenn die Ableitung von  $f$ ,  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  in jedem Punkt  $x \in M$  injektiv ist. Eine Immersion ist zwar lokal injektiv, aber nicht unbedingt global. Induziert  $f$  jedoch einen Homöomorphismus  $f : M \rightarrow f(M)$ , so ist  $f$  eine Einbettung. Auch für eine Immersion  $f : M \rightarrow N$  ist ein Normalenbündel  $v_f$  erklärt, die Ableitung  $Tf$  faktorisiert nach (1.2.7) über  $f^*(\tau N)$  zu einem injektiven Vektorbündel-Homomorphismus  $\tau M \subset f^*(\tau N)$  und man setzt

$$v_f := \tau M^\perp \text{ in } f^*(\tau N)$$

oder verwendet das Quotientenbündel  $f^*(\tau N)/\tau M$ .

Eine Immersion  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  besitzt damit ein  $k$ -dimensionales Normalenbündel. Der wichtige Satz von Hirsch ([Hir59]) liefert die Umkehrung und damit die Übersetzung des Immersionsproblems in ein Vektorbündel-Problem:

**Satz 2.3.7.** *Eine geschlossene  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $M^n$  besitzt eine Immersion in den Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^{n+k}$  für  $k \geq 1$ , genau dann, wenn es ein  $k$ -dimensionales reelles Vektorbündel  $\xi$  gibt, sodaß  $\tau M \oplus \xi$  trivial ist.*

## 6) Schnittprobleme.

Wie wir in den Beispielen bereits gesehen haben, führen viele Übersetzungen zur Frage, ob ein Vektorbündel einen Schnitt ohne Nullstellen besitzt. Als wichtigstes notwendiges Kriterium für die Existenz eines solchen Schnitts ist das Verschwinden der Euler-Klasse von  $\xi$  in einer geeigneten Kohomologietheorie zu nennen. Die Homotopie-Euler-Klasse für Bündel über einer Einhängung und die Euler-Klasse in gewöhnlicher Kohomologie  $e(\xi)$

werden wir später ausführlich behandeln. Ist  $\xi$  ein  $n$ -dimensionales Bündel über einem  $n$ -dimensionalen Komplex, etwa einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit, so gilt auch die Umkehrung obiger Aussage, d.h. verschwindet  $e(\xi)$ , so hat  $\xi$  einen nullstellenfreien Schnitt. Für die stabile Kohomotopie-Euler-Klasse gilt dies sogar, solange  $\dim X < 2(n-1)$  erfüllt ist (siehe [Cra80]).

Unzugänglicher ist das analoge Problem für die Existenz von  $r$  punktweise linear unabhängigen Schnitten. Folgende wohlbekannte Methode übersetzt dies in ein Einschnitt-Problem:

**Proposition 2.3.8.** *Besitzt das reelle  $k$ -dimensionale Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$   $m$  linear unabhängige Schnitte  $s_1, s_2, \dots, s_m$ , so besitzt das äußere Tensorprodukt  $\xi \hat{\otimes} \lambda_{m-1}$  von  $\xi$  und dem kanonischen Linienbündel  $\lambda_{m-1}$  über  $B \times P_{m-1}(\mathbb{R})$  einen nullstellenfreien Schnitt  $s$ .*

*Beweis.* Man kann den Schnitt  $s$  ganz explizit angeben: Definiere  $s : B \times P_{m-1}(\mathbb{R}) \rightarrow E \hat{\otimes} E(\lambda_{m-1})$  für  $b \in B$  und  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m) \in S^{m-1}$  mit  $[v] = [v_1 : v_2 : \dots : v_m] \in P_{m-1}(\mathbb{R})$  durch

$$s(b, [v]) := (v_1 \cdot s_1(b) + v_2 \cdot s_2(b) + \dots + v_m \cdot s_m(b)) \otimes ([v], (v_1, v_2, \dots, v_m)).$$

Dann ist  $s$  wohldefiniert, denn der Wert von  $s$  ist unabhängig von der Auswahl von  $(v_1, v_2, \dots, v_m) \in S^{m-1}$  oder  $-(v_1, v_2, \dots, v_m)$  und hat keine Nullstellen.  $\square$

Diese Übersetzung hängt eng mit dem Vorhandensein eines kanonischen Schnittes in  $m\lambda_{m-1}$  aus (1.5.5) zusammen, siehe auch (2.2.17). Durch Untersuchung der Euler-Klasse des Bündels  $v \hat{\otimes} \lambda_{m-1}$  für das Normalenbündel  $v$  einer Einbettung oder Immersion (siehe Problem 5)), die bei Vorliegen eines nullstellenfreien Schnittes verschwinden muß, konnten so eine Reihe von Immersionen ausgeschlossen werden.

In einem bestimmten Dimensionsbereich hat der letzte Satz sogar eine Umkehrung, was noch kurz angedeutet werden soll. Dazu sei  $B$  eine Mannigfaltigkeit oder ein  $CW$ -Komplex der Dimension  $n$  und es gelte  $n < 2(\dim \xi - m)$ . Wir schreiben  $B \times P_{m-1}(\mathbb{R})$  und  $E \hat{\otimes} E(\lambda_{m-1})$  als Quotienten nach den Äquivalenzrelationen  $(b, v) \sim (b, -v)$  auf  $B \times S^{m-1}$  und  $(e, v) \sim (-e, -v)$  auf  $E \times S^{m-1}$  wie in (1.4.13).

Aus einem nullteilerfreien Schnitt  $s : B \times P_{m-1}(\mathbb{R}) \rightarrow E \hat{\otimes} E(\lambda_{m-1})$  erhält man dann leicht mit etwas Überlagerungstheorie die kommutative Ergänzung  $\tilde{s}$  im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B \times S^{m-1} & \xrightarrow{\tilde{s}} & E \times S^{m-1} \\ \downarrow \text{id} \times p & & \downarrow q \\ B \times P_{m-1}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{s} & E \hat{\otimes} E(\lambda_{m-1}) \end{array}$$

von doppelten Überlagerungsabbildungen  $\text{id} \times p$  und  $q$ . Die Komposition  $pr_E \circ \tilde{s} : B \times S^{m-1} \rightarrow E$  liefert nach radialer Erweiterung eine sogenannte schiefsymmetrische Abbildung  $t : B \times \mathbb{R}^m \rightarrow E$  über  $\text{id}_B$ . Der Satz (1.2) aus [HaH62] besagt dann, daß  $t$  homotop

ist zu einem injektiven Vektorbündel-Homomorphismus, der dann die gesuchten Schnitte liefert.

7) Parallelisierbarkeit von Sphären.

Die Frage für welche  $n$  das Tangentialbündel der Sphäre  $\tau S^n$  trivial ist, wurde erst als Folgerung des Periodizitätssatzes von Bott geklärt:

**Satz 2.3.9.** *Nur für  $n = 1, 3, 7$  ist  $\tau S^n$  trivial.*

Heute ist es üblich, dieses Problem auf den (nicht linearen) Satz über die Hopf-Invariante 1 zurückzuführen, siehe 10). Eine Übersetzung in ein Vektorbündel-Problem erhält man wie folgt. Von einer Trivialisierung von  $\tau S^{n-1}$  ausgehend erhält man  $n-1$  orthogonale Schnitte in  $\tau S^{n-1}$ , die wir als Abbildungen  $s_i : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  auffassen. Durch  $x \mapsto (s_1(x), s_2(x), \dots, s_{n-1}(x), x)$  definiert man dann eine Abbildung  $s : S^{n-1} \rightarrow O(n)$  in die orthogonale Gruppe, die man als Klebeabbildung zur Konstruktion eines  $n$ -dimensionalen Bündels  $\xi$  über  $S^n$  verwendet (siehe (3.1.9)). Dieses Bündel hat dann eine nicht durch 2 teilbare Euler-Klasse (was einer Hopf-Invarianten 1 entspricht). Es ist eine Folgerung aus der Bott-Periodizität, daß es für  $n \geq 9$  solche Bündel nicht geben kann. Für Details sei auf Abschnitt 3.2 verwiesen.

8) Das Vektorfeld-Problem.

Wir haben in 4) gesehen, daß  $S^{2m}$  kein nullstellenfreies Vektorfeld zuläßt, es aber auf  $S^{2m-1}$  mindestens ein solches Vektorfeld gibt. Das Vektorfeld-Problem für  $S^n$  ist die Frage nach der maximalen Anzahl punktweise linear unabhängiger Vektorfelder. Sie läßt sich fast vollständig in ein Vektorbündel-Problem übersetzen. Seine Lösung - der Vektorfeldsatz von Adams - wurde bereits angesprochen (2.1.10). Gegeben seien  $(n-k)$  orthonormale Vektorfelder  $s_1, s_2, \dots, s_{n-k} : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $s_i(x) \perp x$ . Ganz ähnlich wie in 2) definiert man eine Abbildung

$$\theta_s : S^{n-k} \times S^n \rightarrow S^{n-k} \times S^n$$

durch

$$\theta_s(w, x) := (w, s_1(x) \cdot w_1 + s_2(x) \cdot w_2 + \dots + s_{n-k}(x) \cdot w_{n-k} + x \cdot w_{n-k+1}),$$

mit  $w = (w_1, \dots, w_{n-k+1}) \in S^{n-k} \subset \mathbb{R}^{n-k+1}$ . Identifiziert man  $w$  mit  $-w$  erhält man von  $\theta_s$  respektierte  $\mathbb{Z}/2$ -Operationen auf beiden Seiten, sodaß  $\theta_s$  eine Quotientenabbildung auf den resultierenden Sphärenbündeln (1.1.11) induziert:

$$\tilde{\theta}_s : S(\mathbb{R}^{n+1}) = (S^{n-k}/(\mathbb{Z}/2)) \times S^n = P_{n-k}(\mathbb{R}) \times S^n \rightarrow S^{n-k} \times_{\mathbb{Z}/2} S^n = S((n+1)\lambda_{n-k}^{\mathbb{R}}). \quad (2.3.10)$$

Diese Abbildung ist fasererhaltend und wie leicht zu sehen ist, vom Abbildungsgrad  $\pm 1$  auf jeder Faser, aber i.A. nicht die Einschränkung eines Vektorbündel-Isomorphismus. Eine solche Abbildung heißt Faserhomotopieäquivalenz. Obwohl Faserhomotopieäquivalenz i.A. eine starke Abschwächung des Isomorphiebegriffs ist, hat man auf  $P_{n-k}(\mathbb{R})$  die mit K-Theorie, also linearen Methoden, herleitbare Sondersituation, daß das Vorliegen einer Faserhomotopieäquivalenz eine stabile Isomorphie zwischen den zugehörigen Vektorbündeln

impliziert. Damit ist das Vektorfeld-Problem doch noch in ein Vektorbündel-Problem übersetzt: man bestimme das kleinste  $k$  mit  $[(n+1) \cdot \lambda_{n-k}^{\mathbb{R}}]_s = 0$  in  $\text{SVekt}_{\mathbb{R}}(P_{n-k}(\mathbb{R}))$ . Ähnlich wie  $\text{SVekt}_{\mathbb{C}}(P_m(\mathbb{R}))$  ist  $\text{SVekt}_{\mathbb{R}}(P_{n-k}(\mathbb{R}))$  eine zyklische Gruppe mit bekannter Ordnung (5.5.8). Löst man dieses nunmehr zur elementaren Zahlentheorie zählende Rätsel, findet man die Funktion  $\rho$  aus dem Vektorfeldsatz für die Maximalzahl linear unabhängiger Vektorfelder. Details findet man im letzten Kapitel.

Eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $M^n$  heißt  $\pi$ -Mannigfaltigkeit, wenn ihr Tangentialbündel stabil trivial ist. Das Vektorfeld-Problem für  $\pi$ -Mannigfaltigkeiten hat eine ähnliche Antwort wie für Sphären und wird ebenfalls im letzten Kapitel behandelt.

### 9) Geometrische Dimension.

Die (stabile) geometrische Dimension  $gd(x)$  eines Vektorbündels  $\xi$  oder seiner Äquivalenzklasse  $x = [\xi]_s$  in  $\text{SVekt}_{\mathbb{K}}(X)$  ist das kleinste  $n$ , für das sich ein Vektorbündel  $\eta$  der Dimension  $n$  mit  $[\eta]_s = [\xi]_s = x$  finden läßt (siehe Abschnitt 1.2.3). Stabil triviale Bündel haben die geometrische Dimension 0 und das Immersionsproblem für eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $M^n$  ist nach 5) äquivalent zur Frage nach der geometrischen Dimension von  $-\tau M$ .

Neben den stabil trivialen Bündeln  $\tau S^n$  gibt es weitere nicht stabil triviale Bündel auf  $S^n$ , nämlich die Klassen in  $\text{SVekt}_{\mathbb{R}}(S^n)$ . Der Satz von Barratt-Mahowald (9.1.1) beantwortet die Frage nach der geometrischen Dimension dieser Elemente. So läßt sich beispielsweise (abgesehen von niedrigdimensionalen Ausnahmen) jede stabile Klasse  $z$  aus  $\text{SVekt}_{\mathbb{R}}(S^{4k})$  durch ein  $(2k+1)$ -dimensionales Bündel repräsentieren. Wählt man für  $z$  ein  $(4k+1)$ -dimensionales Bündel  $\xi$  mit  $[\xi]_s = z$ , so ist die Frage nach  $gd(z)$  nichts anderes als das "Vektorfeld"-Problem für  $\xi$ .

### 10) Das Hopf-Invarianten-Problem.

Zum Schluß gehen wir noch kurz auf das Hopf-Invarianten-1-Problem ein, da mehrfach darauf Bezug genommen wird und dies einen einheitlichen und einfachen Zugang zu einigen der oben angeführten Probleme ermöglicht. Zwar gehört es nicht direkt zu den linearen Problemen mit Vektorbündel-Übersetzung, es hat aber eine elegante Lösung innerhalb der K-Theorie bzw. mit dem Funktor  $\text{SVekt}_{\mathbb{K}}$ , also mit linearen Methoden. Diesen Zugang findet man etwa in [Ati67], [Kar78], [AGP02].

Einer stetigen Abbildung  $f: S^{2n+1} \rightarrow S^{n+1}$  wird unter Verwendung des Produkts einer Kohomologietheorie oder auch ganz geometrisch durch Verschlingungszahlen eine ganze Zahl  $H_0(f)$ , ihre Hopf-Invariante, zugeordnet (siehe etwa [toD08], [AGP02], [Oss92] und Abschnitt 8.2.5). Die Hopf-Abbildungen

$$\eta: S^3 \rightarrow S^2, \quad \nu: S^7 \rightarrow S^4, \quad \sigma: S^{15} \rightarrow S^8,$$

definiert etwa als Projektionen der Spärenbündel  $S(\lambda_1^{\mathbb{K}}) \rightarrow P_1(\mathbb{K})$  der kanonischen Linienvbündel für  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ , haben alle Hopf-Invariante 1. Leicht herzustellen sind Abbildungen mit gerader Hopf-Invarianten und es war lange Zeit ein berühmtes Problem, ob es weitere Abbildungen von Hopf-Invariante 1 gibt. Die Antwort stammt von Adams:

**Satz 2.3.11.** *Abbildungen  $f: S^{2n+1} \rightarrow S^{n+1}$  mit Hopf-Invariante 1 gibt es nur in den Dimensionen mit  $n = 1, 3, 7$ .*



Auf folgende Weise lassen sich die Probleme aus 4), 1) und 7) auf diesen Satz zurückführen:

Gegeben sei eine Abbildung  $g : S^n \times S^n \rightarrow S^n$  vom Bigrad  $(a, b)$ , d.h. es gilt  $a = \text{grad}(g|_{S^n \times \{x_0\}})$  und  $b = \text{grad}(g|_{\{x_0\} \times S^n})$ . Wendet man auf  $g$  die Hopf-Konstruktion  $\mathcal{H}$  an (siehe Abschnitt 8.5), erhält man eine Abbildung  $\mathcal{H}(g) : S^{2n+1} \rightarrow S^{n+1}$ . Ein eher technisches Lemma besagt dann, daß die Hopf-Invariante von  $\mathcal{H}(g)$  durch das Produkt  $a \cdot b$  gegeben ist. Eine  $H$ -Raum Multiplikation  $m : S^n \times S^n \rightarrow S^n$  hat per Definition den Bigrad  $(1, 1)$ , es folgt, daß  $\mathcal{H}(m)$  Hopf-Invariante 1 hat.

Eine nullteilerfreie Multiplikation auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  liefert durch Einschränken und neu skalieren eine  $H$ -Raum Multiplikation auf  $S^n$  und damit ebenfalls eine Abbildung von Hopf-Invariante 1. Hier braucht man von der Multiplikation auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  lediglich deren Stetigkeit und nicht die Bilinearität vorauszusetzen.

Nicht viel komplizierter ist die Konstruktion einer  $H$ -Raum Multiplikation auf  $S^n$  aus einer gegebenen Trivialisierung des Tangentialbündels  $\tau S^n$  (siehe etwa [MPS80, Ch.2, 5.8.]).

**11)** Zum Schluß sei auf das eher unterhaltsame Problem, für welche Sphären  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  das “Umstülpen” oder “Innere nach außen kehren” möglich ist, hingewiesen. Genauer gemeint ist damit, ob man die Standardeinbettung  $f_0 = i : S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  der  $n$ -Sphäre durch eine Familie von Immersionen  $f_t$  in die mit einer Spiegelung  $R$  an einer Hyperebene komponierte Einbettung  $f_1 = R \circ i$ , also die umgestülpte Sphäre, deformieren kann. Der bekannte Satz von Smale über die Klassifikation von Immersionen von  $S^n$  in  $\mathbb{R}^{n+k}$  reduziert dieses Problem zur Frage, ob das Tangentialbündel  $\tau S^{n+1}$  trivial ist. Das Umstülpen ist also nur für  $n = 0, 2, 6$  möglich. Siehe etwa [MPR04] und die dort angegebene Literatur. Für  $n = 2$  gibt es leicht zugängliche Filme, die das Umstülpen der  $S^2$  zeigen.

Weitere Übersetzungsbeispiele vorwiegend in K-Theorie-Probleme findet man in [MPS80].

## 2.4 Klassifikation und Konstruktion von Vektorbündeln durch lokale Daten

Ein Vektorbündel ist per Definition lokal trivial. Umgekehrt bedeutet dies einerseits, daß man ein Vektorbündel aus trivialen Teilen zusammensetzen kann, das ist der konstruktive Aspekt, andererseits bis auf Isomorphie durch lokale Daten kennzeichnen kann, das ist der Klassifikationsaspekt. Der letzte Aspekt, mit dem wir beginnen, läßt sich zu einem gewissen Kalkül, dem Rechnen mit Übergangsfunktionen, ausbauen. Dies ist die klassische Art des Umgangs mit Vektorbündeln. Charakteristisch ist die konsequente Konzentration auf das Transformationsverhalten der Objekte, heute wird eine eher globale Betrachtungsweise bevorzugt.

### 2.4.1 Übergangsfunktionen

Die Übergangsfunktionen eines Vektorbündels beschreiben den Koordinatenwechsel zwischen dessen Karten. Es seien  $(U_i, h_i)$ ,  $i = 1, 2$ , zwei Karten des Vektorbündels  $\xi = (E, p, B)$ . Auf  $U := U_1 \cap U_2$  sind dann die beiden Trivialisierungen

$$h_1 : E|_U \longrightarrow U \times \mathbb{K}^n \text{ und } h_2 : E|_U \longrightarrow U \times \mathbb{K}^n$$

definiert. Die Komposition

$$h_2 \circ h_1^{-1} : U \times \mathbb{K}^n \longrightarrow U \times \mathbb{K}^n$$

ist ein Automorphismus des Produktbündels  $U \times \mathbb{K}^n$  und wird daher durch die zugehörige adjungierte Matrizen-Funktion

$$g_{21} : U \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ mit } g_{21} := (h_2 \circ h_1^{-1})^{ad}$$

beschrieben.

**Definition 2.4.1.** Die zu den Karten  $h_1$  und  $h_2$  des Vektorbündels  $\xi$  gehörende Übergangsfunktion  $g_{21} : U \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$  wird durch die Gleichung

$$h_2 \circ h_1^{-1}(x, v) = (x, g_{21}(x) \cdot v)$$

definiert.

Die folgenden drei Eigenschaften von Übergangsfunktionen folgen leicht direkt aus ihrer Definition:

**Lemma 2.4.2.** Sind  $(U_s, h_s)$  mit  $s = i, j, k$  Karten mit Übergangsfunktionen  $g_{st}$ , so gilt:

Ü1:  $b \in U_i \cap U_j \cap U_k \implies g_{kj}(b) \cdot g_{ji}(b) = g_{ki}(b)$  (wobei  $\cdot$  die Multiplikation in  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$  ist).

Ü2:  $b \in U_i \implies g_{ii}(b) = id.$

Ü3:  $b \in U_i \cap U_j \implies g_{ij}(b)^{-1} = g_{ji}(b).$

**Definition 2.4.3.** Zu einer offenen Überdeckung  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  von  $B$  sei eine Familie von Funktionen

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

gegeben. Die Familie  $\{g_{ij}\}$  heißt System von Übergangsfunktionen (oder  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ -Kozykel) zur Überdeckung  $\mathcal{U}$ , wenn die Eigenschaften Ü1-Ü3 erfüllt sind.

Wir nennen eine Familie von Karten  $(U_i, h_i)_{i \in I}$  eines Vektorbündels  $\xi = (E, p, B)$  einen Atlas für  $\xi$ , wenn die  $U_i$  ganz  $B$  überdecken. Zu jedem Atlas gehört damit ein System von Übergangsfunktionen  $\{g_{ij}\}$  mit

$$h_i \circ h_j^{-1}(b, v) = (b, g_{ij}(b) \cdot v).$$

### Beispiele.

1.  $\lambda_n^{\mathbb{C}} = (E(\lambda_n^{\mathbb{C}}), p, P_n(\mathbb{C}))$  sei das kanonische Linienbündel. Wir betrachten die schon bekannten Karten von  $\lambda_n^{\mathbb{C}}$ :

$$\begin{aligned} h_i : \quad p^{-1}(U_i) &\longrightarrow U_i \times \mathbb{C} \\ ([x_0, \dots, x_n], v) &\longmapsto ([x_0, \dots, x_n], v_i) \end{aligned}$$

wobei die Teilmengen  $U_i := \{[x_0, x_1, \dots, x_n] \in P_n(\mathbb{C}) \mid x_i \neq 0\} \subset P_n(\mathbb{C})$  eine offene Überdeckung von  $P_n(\mathbb{C})$  bilden. Mit der Umkehrabbildung von  $h_i$

$$h_i^{-1}([x], \lambda) := \left([x], \frac{\lambda}{x_i} \cdot x\right).$$

ergibt sich dann auf  $U_i \cap U_j$ :

$$h_j \circ h_i^{-1}([x], \lambda) = h_j \left([x], \frac{\lambda}{x_i} \cdot x\right) = \left([x], \frac{\lambda}{x_i} \cdot x_j\right) = ([x], g_{ji}([x]) \cdot \lambda),$$

Damit sind die Übergangsfunktionen von  $\lambda_n^{\mathbb{C}}$  durch

$$g_{ji}([x]) = \frac{x_j}{x_i} \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$$

gegeben.

2. Die Übergangsfunktionen der  $m$ -ten Tensorpotenz  $\lambda_n^{\otimes m}$  des kanonischen Linienbündels zu der oben angegebenen Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $P_n(\mathbb{C})$  sind

$$g_{ji}^{\otimes m}([x]) = \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^m \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}).$$

Dies zeigt man entweder wie in 1. mit entsprechenden Karten oder verwendet das Beispiel nach (2.4.15) weiter unten.

3. Für  $i = 1, 2$  seien  $\xi_i = (E_i, p_i, B)$  zwei Vektorbündel über  $B$  mit Systemen von Übergangsfunktionen  $\{g_{ij}\}$  bzw.  $\{h_{ij}\}$  bezüglich der gleichen Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $B$ . Die Whitney Summe  $\xi_1 \oplus \xi_2$  hat dann Übergangsfunktionen in der Form folgender Blockmatrix

$$b \longmapsto \begin{pmatrix} g_{ij}(b) & 0 \\ 0 & h_{ij}(b) \end{pmatrix}.$$

4.  $f : X \rightarrow B$  sei stetig und  $(U_i, h_i)$  ein Atlas für das Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$  mit  $\{g_{ij}\}$  als System von Übergangsfunktionen bezüglich der offenen Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $B$ . Dann liefert  $U'_i := f^{-1}(U_i)$  eine offene Überdeckung von  $X$ , und  $f^*(\xi)$  hat als System von Übergangsfunktionen  $\{h_{ij}\}$  gerade die Kompositionen  $h_{ij}(x) := g_{ij}(f(x))$ .

## 2.4.2 Klassifikation mittels Übergangsfunktionen

Um die Abhängigkeit der Übergangsfunktionen von den Auswahlen zu klären, halten wir zunächst die offene Überdeckung  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  von  $B$  fest und setzen voraus, daß alle vor kommenden Vektorbündel über den Teilmengen  $U_i$  trivial sind.

**Definition 2.4.4.** Zwei Systeme von Übergangsfunktionen  $\{g_{ij}\}$  und  $\{g'_{ij}\}$  zur Überdeckung  $\mathcal{U}$  heißen äquivalent oder kohomolog, wenn es stetige Funktionen  $\gamma_i : U_i \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{K})$  mit

$$g_{ij}(b) = \gamma_i(b)^{-1} \cdot g'_{ij}(b) \cdot \gamma_j(b) \quad (2.4.5)$$

für alle  $i, j$  und  $b \in U_i \cap U_j$  gibt.

Die Kartenabhängigkeit beschreibt folgendes Lemma:

**Lemma 2.4.6.** Sind  $(U_i, h_i)_{i \in I}$  und  $(U_i, h'_i)_{i \in I}$  zwei Atlanten für das Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$  bezüglich  $\mathcal{U}$ , so sind die zugehörigen Systeme von Übergangsfunktionen  $\{g_{ij}\}$  und  $\{g'_{ij}\}$  kohomolog.

*Beweis.* Folgendes kommutative Diagramm mit  $U = U_i \cap U_j$ ,  $\gamma_j := (h'_j \circ h_j^{-1})^{ad}$  ergibt die Behauptung, indem man in der oberen Zeile zu den adjungierten Matrizen-Funktionen übergeht:

$$\begin{array}{ccccccc} U \times \mathbb{K}^n & \xrightarrow{(h'_j h_j^{-1})} & U \times \mathbb{K}^n & \xrightarrow{(h'_i h'_j^{-1})} & U \times \mathbb{K}^n & \xrightarrow{(h_i h'_i^{-1})} & U \times \mathbb{K}^n \\ \uparrow h_j & & \uparrow h'_j & & \uparrow h'_i & & \uparrow h_i \\ E|_U & \xrightarrow{\text{id}} & E|_U & \xrightarrow{\text{id}} & E|_U & \xrightarrow{\text{id}} & E|_U \end{array} \quad (2.4.7)$$

□

Bevor wir Übergangsfunktionen von isomorphen Vektorbündeln untersuchen, vermerken wir die dazu benötigte lokale Darstellung eines Vektorbündel-Homomorphismus  $f : \xi = (E, p, B) \longrightarrow \xi' = (E', p', B)$ , wobei  $\{g_{ij}\}$  und  $\{g'_{ij}\}$  die zugehörigen Übergangsfunktionen sind.

Über das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E|_{U_i} & \xrightarrow{f|_{U_i}} & E'|_{U_i} \\ \downarrow h_i & & \downarrow h'_i \\ U_i \times \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & U_i \times \mathbb{K}^m \end{array} \quad \bar{f}_i := h'_i \circ f|_{U_i} \circ h_i^{-1} \quad f_i := \bar{f}_i^{ad}$$

definiert der Vektorbündel-Homomorphismus  $f$  Funktionen

$$f_i : U_i \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$$

mit

$$g'_{ji}(x) \cdot f_i(x) = f_j(x) \cdot g_{ji}(x) \quad \text{für } x \in U_i \cap U_j \quad (2.4.8)$$

wie eine Rechnung analog zu (2.4.6) zeigt. Hat man umgekehrt Funktionen  $f_i : U_i \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ , die das Transformationsverhalten (2.4.8) besitzen, so erhält man durch Rückwärtsanwenden obiger Überlegung lokal auf  $U_i$  definierte Vektorbündel-Homomorphismen  $F_i : E|_{U_i} \longrightarrow E'|_{U_i}$ . Die Bedingung (2.4.8) impliziert gerade die Übereinstimmung von  $F_i$  und  $F_j$  auf  $U_i \cap U_j$ , sodaß man einen wohldefinierten Vektorbündel-Homomorphismus  $F : \xi \longrightarrow \xi'$  erhält.

**Bemerkung.** Analog zu (2.4.8) wird ein Schnitt  $s$  in  $\xi$  durch Funktionen  $s_i : U_i \longrightarrow \mathbb{K}^n$  mit dem Transformationsverhalten

$$g_{ij}(x) \cdot s_j(x) = s_i(x) \quad (2.4.9)$$

gegeben.

Ein Beispiel hierzu erhält man durch ein homogenes Polynom  $f_d \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  vom Grad  $d$ , indem man

$$s_i([x]) := \frac{f_d(x)}{x_i^d}$$

setzt. Dann ist  $s_i$  eine wohldefinierte  $\mathbb{C}$ -wertige Funktion auf  $U_i$  und der resultierende Schnitt ist ein Schnitt in  $\lambda_n^{\otimes(-d)} = H^{\otimes d}$ , siehe (2.1.7).

Die Verallgemeinerung von (2.4.6) ist nun leicht:

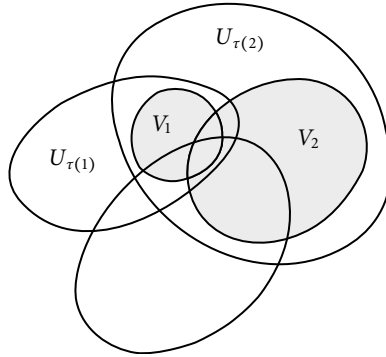
**Satz 2.4.10.** *Es seien  $\xi = (E, p, B)$  und  $\xi' = (E', p', B)$  zwei  $n$ -dimensionale Vektorbündel über  $B$  mit Systemen von Übergangsfunktionen  $\{g_{ij}\}$  und  $\{g'_{ij}\}$  zur Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $B$ . Dann gilt:*

$$\xi \text{ und } \xi' \text{ sind isomorph} \iff \{g_{ij}\} \text{ und } \{g'_{ij}\} \text{ sind kohomolog.}$$

*Beweis.* Ein ähnliches Diagramm wie in (2.4.6) beweist die Richtung „ $\Rightarrow$ “. Für die Umkehrung „ $\Leftarrow$ “ kann man annehmen, daß Karten vorliegen, die zu den gegebenen Übergangsfunktionen passen, denn andere Karten liefern nach (2.4.6) ja kohomologe Systeme von Übergangsfunktionen. Die Funktionen  $\gamma_i$  aus der Kohomologie-Relation (2.4.5) erfüllen gerade (2.4.8) und sind damit die lokalen Daten für einen Vektorbündel-Isomorphismus  $f : \xi \longrightarrow \xi'$   $\square$

Damit hat man eine Art Klassifikation für Vektorbündel, die über den Mengen aus einer festen Überdeckung  $\mathcal{U}$  trivial sind, erreicht. Variiert man die Überdeckung, so hat man für

Vergleiche zu einer gemeinsamen Verfeinerung überzugehen: Ist  $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$  eine Verfeinerung von  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  mit  $V_j \subset U_{\tau(j)}$  mit einer gewählten Funktion  $\tau$



**Abb. 2.6.** Verfeinerung

so erhält man die Übergangsfunktionen  $\{t_{ij}\}$  zu  $\mathcal{V}$  durch Einschränkung

$$t_{ij} : V_i \cap V_j \hookrightarrow U_{\tau(i)} \cap U_{\tau(j)} \xrightarrow{g_{\tau(i)\tau(j)}} \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K}).$$

Dieser Prozeß führt zur Beschreibung von Isomorphieklassen von Vektorbündeln durch Kohomologieklassen, siehe etwa [toD91], [Kar78]. Ein System von Übergangsfunktionen  $\{g_{ij}\}$  definiert eine Kohomologieklass in einer Kohomologiemenge  $\check{H}^1(B; \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K}))$ . Dies ist auch der Grund für die Terminologie Kozykel und kohomolog.

### Beispiele.

1. Es sei  $\lambda_1$  das universelle Linienbündel über  $P_1(\mathbb{R})$  und  $f : S^1 \rightarrow P_1(\mathbb{R})$  mit  $(x_0, x_1) \mapsto [x_0 : x_1]$  die kanonische Projektion. Wähle

$$U_i := \{[x_0 : x_1] \mid x_i \neq 0\} \text{ und } \tilde{U}_i := \{(x_0, x_1) \mid x_i \neq 0\}$$

mit Übergangsfunktion  $g_{01}([x_0 : x_1]) = \frac{x_0}{x_1}$ . Für  $f^*(\lambda_1)$  haben wir die Übergangsfunktion  $\tilde{g}_{01}(x_0, x_1) = \frac{x_0}{x_1}$ . Setze:

$$\gamma_0(x_0, x_1) := x_0^{-1} \text{ und } \gamma_1(x_0, x_1) := x_1^{-1}$$

auf  $\tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1$ , dann gilt

$$\tilde{g}_{01}(b) = \gamma_0^{-1}(b) \cdot 1 \cdot \gamma_1(b).$$

Also ist  $f^*(\lambda_1)$  trivial, denn seine Übergangsfunktionen sind äquivalent zu denen des Produktbündels, nämlich den konstanten.

2. Identifikation eines Vektorbündels mittels seiner Übergangsfunktionen: Betrachte im projektiven Raum  $P_{n+1}(\mathbb{C})$  mit homogenen Koordinaten  $[x_0 : x_1 : \dots : x_n : x_{n+1}]$  das Komplement  $E$  des Punktes  $z_0 := [0 : 0 : \dots : 1] \in P_{n+1}(\mathbb{C})$

$$E := P_{n+1}(\mathbb{C}) - \{z_0\}$$

Auf  $E$  hat man durch  $\pi([x_0 : x_1 : \dots : x_n : x_{n+1}]) := [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$  eine Abbildung  $\pi : E \rightarrow P_n(\mathbb{C})$ . Dann ist  $\theta := (E, \pi, P_n(\mathbb{C}))$  ein komplexes Linienbündel, denn man hat offensichtlich die Fasern  $\pi^{-1}(z) \cong \mathbb{C}$  für jedes  $z \in P_n(\mathbb{C})$  und folgende Karten auf  $U_i = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$

$$\begin{aligned} h_i : \pi^{-1}(U_i) &\rightarrow U_i \times \mathbb{C} \\ h_i([x_0 : x_1 : \dots : x_n : x_{n+1}]) &= ([x_0 : x_1 : \dots : x_n], \frac{x_{n+1}}{x_i}). \end{aligned}$$

Die zugehörigen Übergangsfunktionen sind wegen

$$h_i \circ h_j^{-1}([x_0 : x_1 : \dots : x_n], \lambda) = ([x_0 : x_1 : \dots : x_n], \frac{x_j}{x_i} \cdot \lambda)$$

durch

$$g_{ij}([z]) = \frac{z_j}{z_i} \in \mathbb{C}^*$$

gegeben. Da die  $m$ -te Tensorpotenz  $L^{\otimes m}$  des kanonischen Linienbündels über  $P_n(\mathbb{C})$  bezüglich der Überdeckung  $(U_i)_{i \leq n}$  die Übergangsfunktionen

$$g_{ij}^{\otimes m}([z]) = \left( \frac{z_i}{z_j} \right)^m \in \mathbb{C}^*$$

besitzt muß  $\theta$  isomorph zum Hopfbündel  $H = L^{\otimes(-1)}$  sein.

**Bemerkung.** Der Thom-Raum von  $\theta$  ist homöomorph zur Einpunkt-Kompaktifizierung von  $E$ , also ist der Thom-Raum von  $H$  homöomorph zu  $P_{n+1}(\mathbb{C})$  :

$$P_n(\mathbb{C})^H \cong P_{n+1}(\mathbb{C}) \quad (2.4.11)$$

Weiter ist  $E$  ein Beispiel für eine Tubenumgebung (siehe etwa [toD91]), nämlich für die Untermannigfaltigkeit  $s_0(P_n(\mathbb{C}))$  in  $P_{n+1}(\mathbb{C})$ , wo  $s_0$  der Nullschnitt von  $\theta$  ist. Außerdem folgt, daß  $\theta$  isomorph zum Normalenbündel dieser Einbettung ist.

3. Die Antipodenabbildung  $A : S^2 \rightarrow S^2$ ,  $A(x) = -x$ , schreibt sich nach Identifikation von  $P_1(\mathbb{C})$  mit  $S^2$  als  $A([z_0 : z_1]) = [-\bar{z}_1 : \bar{z}_0]$  (siehe Abschnitt 1.5). Das induzierte Bündel  $A^*(\lambda_1^{\mathbb{C}})$  läßt sich durch die Bestimmung seiner Übergangsfunktionen identifizieren. Wie oben bemerkt, ist die Übergangsfunktion  $g'_{10}$  von  $A^*(\lambda_1^{\mathbb{C}})$  durch  $g_{01} \circ A$  gegeben, wobei man zu beachten hat, daß  $A$  die Umgebungen  $U_0$  und  $U_1$  vertauscht, die Nummerierung also entsprechend zu ändern ist:

$$g'_{10}([z_0 : z_1]) = g_{01} \circ A([z_0 : z_1]) = g_{01}([-\bar{z}_1 : \bar{z}_0]) = \frac{-\bar{z}_1}{\bar{z}_0}$$

Mit  $\gamma_1([z_0 : z_1]) = -z_1\bar{z}_1$  und  $\gamma_0([z_0 : z_1]) = z_0\bar{z}_0$  erhält man folgende Kohomologie-Relation (2.4.10):

$$g''_{10}([z_0 : z_1]) = (-z_1\bar{z}_1)^{-1} \cdot g'_{10}([z_0 : z_1]) \cdot (z_0\bar{z}_0) = \frac{z_0}{z_1}.$$

Dies ist aber die Übergangsfunktion von  $H = \lambda_1^*$ , es folgt:

$$A^*(L) \cong H \quad (2.4.12)$$

4. Mit dem gleichen Argument wie bei 3) folgt etwa auch  $T^*(L) \cong L$  für die Vertauschungsabbildung  $T : P_1(\mathbb{C}) \longrightarrow P_1(\mathbb{C})$  mit  $T([z_0 : z_1]) = [z_1 : z_0]$ .

### 2.4.3 Konstruktionen mittels Übergangsfunktionen

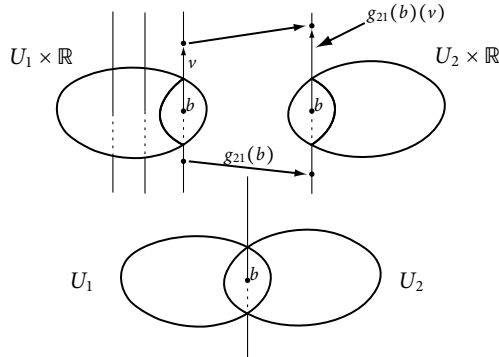
Ein System von Übergangsfunktionen  $\{g_{ij}\}$  legt nicht nur ein Vektorbündel bis auf Isomorphie fest, sondern erlaubt auch die Konstruktion eines zu  $\{g_{ij}\}$  passenden Vektorbündels.

**Satz 2.4.13.** *Es sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung des Raumes  $B$  und  $\{g_{ji}\}$  ein dazugehöriges System von Übergangsfunktionen. Dann gibt es ein Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$  mit Karten  $(U_i, h_i)$ , sodaß die Kartenwechsel wieder die gegebenen Übergangsfunktionen  $(h_j \circ h_i^{-1})^{ad} = g_{ji}$  ergeben.*

*Beweis.* In der disjunkten Vereinigung

$$Z := \bigcup_{i \in I} U_i \times \mathbb{K}^n$$

erklärt man eine Äquivalenzrelation  $\sim$  indem man  $(b, v) \in U_i \times \mathbb{K}^n$  mit  $(b, g_{ji}(b) \cdot v) \in U_j \times \mathbb{K}^n$  für  $b \in U_i \cap U_j$  identifiziert. Die Kozykelbedingungen Ü1-Ü3 garantieren, daß dies tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklasse von  $(b, v) \in U_i \times \mathbb{K}^n$  notieren wir als  $[b, v, i]$ .



Definiere  $E := Z / \sim$  mit der Quotiententopologie und erkläre  $p : E \longrightarrow B$  durch  $p([b, v, i]) := b$ . Da  $g_{ij}$  linear ist, ist

$$[b, v, i] + [b, v', i] =: [b, v + v', i]$$

(mit gleichem  $i$ ) wohldefiniert, und

$$p^{-1}(b) = \{[b, v, i] \mid b \text{ fest}\} = \{(b, v, i) \mid b, i \text{ fest, } v \in \mathbb{K}^n\} \cong \mathbb{K}^n$$



ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Somit ist VB1 erfüllt.

Definiere

$$h_i^{-1} : U_i \times \mathbb{K}^n \longrightarrow E|_{V_i}$$

über die Komposition

$$U_i \times \mathbb{K}^n \longrightarrow Z \xrightarrow{pr} E = Z / \sim,$$

d.h.  $h_i^{-1}(b, v) := [b, v, i]$ . Dann ist  $h_i^{-1}$  stetig, offen ( $pr$  ist offen), bijektiv und faserweise linear, also ist  $h_i$  eine Karte und VB2 ist ebenfalls erfüllt. Wegen

$$[b, v, i] = [b, g_{ji}(b)(v), j]$$

gilt

$$h_j \circ h_i^{-1}(b, v) = h_j([b, v, i]) = h_j([b, g_{ji}(b)(v), j]) = (b, g_{ji}(b, v)),$$

und das Vektorbündel  $\xi := (E, p, B)$  hat als System von Übergangsfunktionen das Ausgangssystem.  $\square$

**Anwendung.**  $M^n$  sei eine (abstrakte) differenzierbare Mannigfaltigkeit mit  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  als  $C^\infty$ -Atlas, d.h.

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow U'_i =: \varphi(U_i) \subset \mathbb{R}^n$$

ist ein Homöomorphismus und

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : U'_i \cap U'_j \longrightarrow U'_i \cap U'_j$$

ist eine  $C^\infty$ -Abbildung. Definiert man  $g_{ji}(b) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  als Ableitung von  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  bei  $\varphi_i(b)$ , dann bilden die Funktionen  $\{g_{ji}\}$  ein System von Übergangsfunktionen.

**Definition 2.4.14.** Das zu diesem System von Übergangsfunktionen gehörende Vektorbündel  $(TM, p, M)$  heißt Tangentialbündel von  $M$ .

Dies zeigt sehr schön, daß sowohl der Ableitung wie auch dem Tangentialbündel der gleiche Linearisierungsprozeß zugrunde liegen. Als konkretes Beispiel wird die Berechnung der Übergangsfunktion des Tangentialbündels der  $n$ -Sphäre in (3.1.15) weiter unten ausgeführt.

Die in Abschnitt 1.4 konstruierte Erweiterung eines Funktors  $T$  von der Kategorie der Vektorräume auf die der Vektorbündel, läßt sich jetzt auch alternativ mit dem Existenzsatz (2.4.13) durchführen. Der Funktor  $T$  sei Einfachheit halber wieder richtungserhaltend und habe nur eine Variable.

Gegeben sei ein Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$  mit Atlas  $(U_i, h_i)_{i \in I}$  und den durch  $g_{ij} = (h_i \circ h_j^{-1})^{ad}$  definierten Übergangsfunktionen  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Definiere ein neues System von Übergangsfunktionen  $T(g_{ij})$  durch

$$T(g_{ij}) : U_i \cap U_j \xrightarrow{g_{ij}} \text{GL}_n(\mathbb{K}) \subset \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n) \xrightarrow{T} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(T(\mathbb{K}^n), T(\mathbb{K}^n)) \supset \text{GL}_m(\mathbb{K}),$$

dann ist leicht zu sehen:

**Lemma 2.4.15.** Die Übergangsfunktionen von  $T(\xi)$  werden durch  $T(g_{ij})$  gegeben.

Umgekehrt, definiert man  $T'(\xi)$  über (2.4.13) durch das System von Übergangsfunktionen  $\{T(g_{ij})\}$ , dann ist  $T'(\xi)$  isomorph zu  $T(\xi)$ .

**Beispiel.** Für einen  $m$ -dimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  mit  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  sei

$$T(V) := V^{\otimes n} = V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$$

die  $n$ -te Tensorpotenz. Wie man dann die zugehörigen Übergangsfunktionen  $T(g_{ij})$  durch Blockmatrizen beschreibt wurde bereits in Abschnitt 1.4 in einem Beispiel angegeben. Betrachtet man jetzt speziell den Fall  $m = 1$ , so ist  $V^{\otimes n}$  ebenfalls eindimensional und

$$T : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\otimes n}, \mathbb{K}^{\otimes n}) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}).$$

ist durch  $\alpha \mapsto \alpha^n$  gegeben. Ist  $L$  ein reelles oder komplexes Linienbündel mit den Übergangsfunktionen

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\},$$

dann sind die Übergangsfunktionen von  $L^{\otimes n}$  einfach durch  $b \mapsto (g_{ij}(b))^n$  gegeben. Man beachte, daß dies nur sinnvoll ist, wenn  $\mathbb{K}$  kommutativ ist, in Übereinstimmung damit, daß dann  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^1(B)$  mit  $\otimes$  eine abelsche Gruppe ist.

**Beispiel.** Die Abbildung  $m_p : P_n(\mathbb{C}) \rightarrow P_n(\mathbb{C})$ ,  $p > 0$ , wurde definiert durch

$$[(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)] \longmapsto [(x_0^p : x_1^p : \cdots : x_n^p)].$$

Dann gilt:

$$m_p^*(\lambda_1) = \lambda_1^{\otimes p},$$

wie man jetzt leicht durch Betrachtung der Übergangsfunktionen sieht.

Etwas flexibler als die Kohomologie-Relation (2.4.5) ist die Möglichkeit, ein System von Übergangsfunktionen homotop abzuändern. Daß sich dabei die Isomorphieklasse des zugehörigen Vektorbündels nicht ändert, ist eine direkte Folgerung aus dem Homotopiesatz, kann jedoch auch direkt hergeleitet werden (siehe etwa [LuM98]).

**Definition 2.4.16.** Zwei Systeme von Übergangsfunktionen  $\{g_{ij}\}$  und  $\{h_{ij}\}$  zur Überdeckung  $\mathcal{U} = (U_j)_{j \in J}$  von  $B$  heißen homotop, wenn die Homotopien  $H_{ij} : (U_i \cap U_j) \times I \longrightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{K})$  ebenfalls die Bedingungen Ü1-Ü3 erfüllen, also selbst ein System von Übergangsfunktionen auf  $B \times I$  darstellen.

Sind  $\xi, \eta$  und  $\omega$  die durch die Systeme  $\{g_{ij}\}$ ,  $\{h_{ij}\}$  und  $\{H_{ij}\}$  definierten Vektorbündel auf  $B$  bzw.  $B \times I$ , so gilt offensichtlich

$$\omega|_{B \times \{0\}} \cong \xi, \quad \omega|_{B \times \{1\}} \cong \eta$$

und aus (2.1.21) folgt:

**Korollar 2.4.17.** *Homotope Systeme von Übergangsfunktionen auf einem kompakten Raum  $B$  definieren isomorphe Vektorbündel.*

**Beispiele.** Reelle Linienbündel über  $S^1$ :

Wähle  $U_1 = S^1 - \{N\}$ ,  $U_2 = S^1 - \{S\}$  wobei  $N$  und  $S$  kleine disjunkte, abgeschlossene, zusammenhängende Bogenstücke etwa um Nord- und Südpol sind. Die einzige Übergangsfunktion  $g_{12} : U_1 \cap U_2 \rightarrow \mathbb{R}^*$  läßt sich über eine Homotopie nach  $\{+1, -1\}$  deformieren. Die Teilmenge  $U_1 \cap U_2$  hat zwei zusammenziehbare Wegekomponten  $A$  und  $B$ . Auf  $A$  können wir  $g_{12}(x) = +1$  vorschreiben, für  $B$  bleiben nur die Werte  $+1, -1$ . Mit  $g_{12}(x) = +1$  erhält man das triviale Linienbündel, mit  $g_{12}(x) = -1$  das kanonische Linienbündel  $\lambda_1$ . Für diese Überdeckung gibt es also nicht mehr Vektorbündel. Auf die abgeschlossenen Hüllen  $\overline{U}_i$  können wir (2.1.20) anwenden, um zu folgern, daß man für ein gegebenes Vektorbündel über  $S^1$  immer Karten über  $U_i$  wählen kann. Damit folgt:

**Korollar 2.4.18.**  $\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(S^1) \cong \{[\mathbb{R}], [\lambda_1]\}$

Für komplexe Bündel über  $S^1$  hingegen gilt:

**Korollar 2.4.19.**  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(S^1) \cong \{[\mathbb{C}^n]\}$ .

*Beweis.* Die Gruppe  $\text{Gl}_n(\mathbb{C})$  ist wegzusammenhängend (siehe Abschnitt 3.6), deshalb zeigt obiges Argument, daß die Übergangsfunktion  $g_{12}$  homotop zur konstanten Abbildung mit Wert  $id$  ist.  $\square$

## 2.5 Kleben, Kollabieren

Während bei den bisher betrachteten Konstruktionen überwiegend die Fasern umgestaltet wurden und Einfluß der Linearen Algebra überwog, handelt es sich beim Verkleben und Kollabieren von Vektorbündeln um Konstruktionen, bei denen die Basisräume betroffen oder verändert werden, der Schwerpunkt also eher auf der topologischen Seite liegt.

### 2.5.1 Klebekonstruktionen

Das Verheften, Verkleben oder Identifizieren zweier Vektorbündel längs eines Unterraumes  $A$  des Basisraumes ist eine wichtige Konstruktion. Ein erstes Beispiel hierzu war die Konstruktion eines Vektorbündels aus einem System von Übergangsfunktionen (2.4.13). Statt

Produktbündel kann man jedoch auch nichttriviale Bündel verkleben. Wir betrachten folgende Situation:

**Voraussetzung 2.5.1.** Gegeben sei ein Raum  $X$  mit Unterräumen  $X_1, X_2$  und Vektorbündeln  $\xi_i = (E_i, p_i, X_i)$  über  $X_i$ . Es gelte  $X = X_1 \cup X_2$ ,  $A = X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ , weiter sei ein Isomorphismus  $\varphi : E_1|_A \rightarrow E_2|_A$  über  $A$  gegeben.

**Konstruktion.** Auf der disjunkten Vereinigung  $E_1 \dot{\cup} E_2$  betrachten wir die durch

$$e \sim \varphi(e) \text{ für } e \in E_1|_A \text{ und } e \sim e' \iff e = e' \text{ sonst}$$

erzeugte Äquivalenzrelation  $\sim$  und definieren  $\xi_1 \cup_\varphi \xi_2 = (E_1 \cup_\varphi E_2, p, X)$  durch

$$E_1 \cup_\varphi E_2 := E_1 \dot{\cup} E_2 / \sim$$

mit offensichtlicher Definition für  $p$ .

Sind  $X_1$  und  $X_2$  offen, dann ist  $\xi_1 \cup_\varphi \xi_2$  ein Vektorbündel über  $X$ . Zum Beweis braucht man nur die gesuchte Kartenumgebung von  $x \in X$  so klein zu wählen, daß die beiden Bündel  $\xi_1, \xi_2$  trivial sind, dann ist man in der Situation von (2.4.13), wo triviale Vektorbündel mittels Übergangsfunktionen über offenen Teilmengen verklebt wurden. Wichtig ist der Fall, in dem  $X_1$  und  $X_2$  kompakt sind:

**Satz 2.5.2.** Die Voraussetzungen seien wie in (2.5.1), außerdem seien  $X, X_1, X_2$  kompakt, dann ist  $\xi_1 \cup_\varphi \xi_2$  ein Vektorbündel über  $X$ .

*Beweis.* Da VB1 offensichtlich ist, fehlt nur VB2: Für  $x \notin A$  ist dies trivialerweise richtig, da  $(E_1 \cup_\varphi E_2)|_{X-A} = E_1|_{X-A} \dot{\cup} E_2|_{X-A}$  gilt. Zu  $x \in A$  wähle eine abgeschlossene Umgebung  $V_1$  von  $x$  in  $X_1$ , über der  $E_1$  trivial ist (siehe etwa Abschnitt 2.1, 2.1.3). Dies liefert eine Karte

$$h_1 : E_1|_{V_1} \xrightarrow{\cong} V_1 \times \mathbb{K}^n,$$

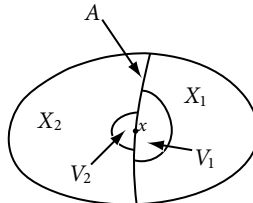
die man zu folgenden Karten einschränken kann:

$$\begin{aligned} h_1^A : E_1|_{A \cap V_1} &\longrightarrow (A \cap V_1) \times \mathbb{K}^n, \\ h_2^A := h_1^A \circ \varphi^{-1} : E_2|_{A \cap V_1} &\longrightarrow (A \cap V_1) \times \mathbb{K}^n. \end{aligned}$$

Nach (2.1.15) gibt eine Umgebung  $V_2$  von  $x$  in  $X_2$ , auf der  $h_2^A$  zu einem Isomorphismus

$$h_2 : E_2|_{V_2} \longrightarrow V_2 \times \mathbb{K}^n$$

erweitert werden kann.



Nach Konstruktion sind  $h_1$  und  $h_2$  über  $V_1 \cap V_2$  unter  $\varphi$  miteinander verträglich und liefern einen Isomorphismus

$$h_1 \cup_{\varphi} h_2 : (E_1 \cup_{\varphi} E_2)|_{V_1 \cup V_2} \longrightarrow (V_1 \cup V_2) \times \mathbb{K}^n.$$

Da  $V_1 \cup V_2$  eine Umgebung von  $x$  in  $X$  ist, folgt VB2.  $\square$

$\xi_1 \cup_{\varphi} \xi_2$  heißt das mittels der Klebeabbildung  $\varphi$  längs  $A$  geklebte Vektorbündel. Eine offensichtliche Eigenschaft der Klebekonstruktion ist

$$\xi_1 \cup_{\varphi} \xi_2 \oplus \xi'_1 \cup_{\varphi'} \xi'_2 \cong (\xi_1 \oplus \xi'_1) \cup_{\varphi \oplus \varphi'} (\xi_2 \oplus \xi'_2),$$

wobei jeweils über den gleichen Unterraum  $A$  verklebt wird.

Die Isomorphieklasse von  $\xi_1 \cup_{\varphi} \xi_2$  hängt, wie bei Übergangsfunktionen, nur von der Homotopieklasse von  $\varphi$  ab - vorausgesetzt der Homotopiesatz ist anwendbar. Hierbei ist eine Homotopie von zwei Isomorphismen  $\varphi$  und  $\psi$  ein Isomorphismus

$$\Phi : \pi^*(\xi_1)|_{A \times I} \longrightarrow \pi^*(\xi_2)|_{A \times I} \quad \text{mit } \Phi|_{A \times \{0\}} = \varphi \quad \text{und} \quad \Phi|_{A \times \{1\}} = \psi$$

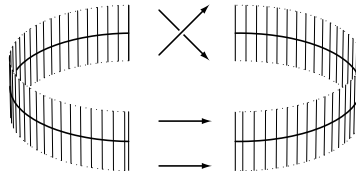
wo  $\pi : X_i \times I \longrightarrow X_i$  die Projektion ist. Verklebt man  $\pi^*(\xi_1)$  und  $\pi^*(\xi_2)$  mit  $\Phi$  über  $A \times I$  zu einem Bündel über  $X \times I$ , so sieht man mittels (2.1.21)

**Korollar 2.5.3.** *Es seien  $X, X_1, X_2$  kompakt,  $X = X_1 \cup X_2$ ,  $A = X_1 \cap X_2$ ,  $\xi_i$  Vektorbündel über  $X_i$  und  $\psi \simeq \varphi$  zwei homotope Isomorphismen über  $A$ , dann folgt*

$$\xi_1 \cup_{\psi} \xi_2 \cong \xi_1 \cup_{\varphi} \xi_2.$$

### Beispiele.

1. Es sei  $X = S^1$  die 1-Sphäre und  $X_1 = D^+$ ,  $X_2 = D^-$  mit  $D^+ \cap D^- = S^0 = \{\pm 1\}$ , sowie  $E_1 = D^+ \times \mathbb{R}$  und  $E_2 = D^- \times \mathbb{R}$ . Der Isomorphismus  $\varphi : E_1|_A \rightarrow E_2|_A$  sei durch  $\varphi(x)(v) := (x, x \cdot v)$  gegeben, dann ist  $E_1 \cup_{\varphi} E_2$  das Möbius-Bündel  $\lambda_1$  über  $S^1$ .



2. Im Kegel  $CA := A \times [0, 1] / A \times \{0\}$  über  $A$  (siehe nächsten Abschnitt oder Abschnitt 2.9) faßt man  $A$  über  $A \cong A \times \{1\} \subset CA$  als Unterraum auf. Gegeben sei ein Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$  über dem kompakten Raum  $B$  und eine Trivialisierung

$$\alpha : \xi|_A \xrightarrow{\cong} A \times \mathbb{K}^n$$

von  $\xi$  über dem abgeschlossenen Unterraum  $A \subset B$ . Dann ist  $\xi \cup_{\alpha} (CA \times \mathbb{K}^n)$  als Bündel über  $B \cup CA$  erklärt. Diese Konstruktion wird im nächsten Abschnitt benötigt.

3. Nimmt man  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $X_1 = D_-^2 \subset S^2$  (untere Halbkugel),  $X_2 = D_+^2$  (obere Halbkugel) mit  $A = S^1$ , dem Äquator in  $S^2$ , als Bündel  $\xi_1 = \xi_2 = (B \times \mathbb{C}, p, B)$  und als Isomorphismus die Abbildung  $\alpha : S^1 \times \mathbb{C} \rightarrow S^1 \times \mathbb{C}$  mit  $\alpha(z, v) = (z, z \cdot v)$ , wobei man  $S^1$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  auffaßt, so erhält man ein Linienbündel  $\eta$  über  $S^2$ . Um welches Bündel es sich hierbei handelt, werden wir später klären.

Das zur Kohomologie-Relation bei Übergangsfunktionen anloge Resultat für das Verkleben zweier Bündel ist wie folgt:

**Lemma 2.5.4.** *Gegeben seien Vektorbündel  $\xi_1, \xi'_1$  über  $X_1$ ,  $\xi_2, \xi'_2$  über  $X_2$  mit Isomorphismen  $\varphi : \xi_{1|A} \rightarrow \xi_{2|A}$  und  $\varphi' : \xi'_{1|A} \rightarrow \xi'_{2|A}$  auf  $A = X_1 \cap X_2$  mit  $X, X_1, X_2$  kompakt, sodaß  $\xi_1 \cup_\varphi \xi_2$  und  $\xi'_1 \cup_{\varphi'} \xi'_2$  definiert sind. Erfüllen die Homomorphismen  $f_1 : \xi_1 \rightarrow \xi'_1$  und  $f_2 : \xi_2 \rightarrow \xi'_2$  die Bedingung  $f_{2|A} \circ \varphi = \varphi' \circ f_{1|A}$ , d.h. es kommutiert*

$$\begin{array}{ccc} \xi_{1|A} & \xrightarrow{\varphi} & \xi_{2|A} \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\ \xi'_{1|A} & \xrightarrow{\varphi'} & \xi'_{2|A} \end{array} \quad (2.5.5)$$

dann setzen sich  $f_1$  und  $f_2$  zu einem Vektorbündel-Homomorphismus  $f : \xi_1 \cup_\varphi \xi_2 \rightarrow \xi'_1 \cup_{\varphi'} \xi'_2$  zusammen.

*Beweis.* Die Bedingung (2.5.5) besagt gerade, daß der von  $f_1$  und  $f_2$  auf den disjunkten Vereinigungen  $E(\xi_1) \dot{\cup} E(\xi_2)$  und  $E(\xi'_1) \dot{\cup} E(\xi'_2)$  definierte Homomorphismus mit den die Bündel  $\xi_1 \cup_\varphi \xi_2$  und  $\xi'_1 \cup_{\varphi'} \xi'_2$  definierenden Äquivalenzrelationen verträglich ist und so zum Homomorphismus  $f$  faktorisiert.  $\square$

### Beispiele 2.5.6.

1. Es sei  $\xi = (E, p, X)$  ein Vektorbündel über  $X = X_1 \cup X_2$ ,  $f_i : E|_{X_i} \rightarrow X_i \times \mathbb{K}^n$ ,  $i = 1, 2$ , Trivialisierungen und  $A = X_1 \cap X_2$ ,  $X_1, X_2$  kompakt. Setzt man  $\xi_i = \xi|_{X_i}$ ,  $\varphi = id$ ,  $\xi'_i = X_i \times \mathbb{K}^n$  und  $\varphi' = f_{2|A} \circ f_{1|A}^{-1}$  so folgt

$$\xi = \xi_1 \cup_{id} \xi_2 \cong (X_1 \times \mathbb{K}^n) \cup_{\varphi'} (X_2 \times \mathbb{K}^n) \quad (2.5.7)$$

2. Zusammenhängende Summe:

Gegeben seien  $n$ -dimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorbündel  $\xi = (E, p, M^m)$ ,  $\theta = (F, q, S^m)$  über einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M^m$  und der  $m$ -Sphäre  $S^m$ . Wähle jeweils  $m$ -Scheiben  $D_1 \subset M^m$ ,  $D_2 \subset S^m$  und Trivialisierungen

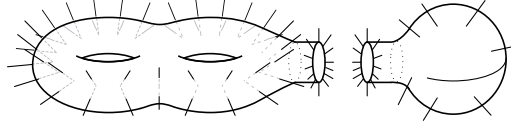
$$\alpha : \xi|_{D_1} \xrightarrow{\cong} D_1 \times \mathbb{K}^n, \quad \beta : \theta|_{D_2} \xrightarrow{\cong} D_2 \times \mathbb{K}^n$$

und setze  $\varphi = \beta^{-1} \circ \alpha$ , wobei wir  $D_1$  und  $D_2$  identifizieren. Mit  $X_1 = M - \mathring{D}_1$ ,  $X_2 = S^m - \mathring{D}_2$ ,  $A = X_1 \cap X_2 = \partial D$  und  $\varphi : \xi|_{\partial D} \rightarrow \theta|_{\partial D}$  als Isomorphismus ist dann das

Bündel

$$\gamma := (\xi|_{M-\hat{D}_1}) \cup_{\varphi} (\theta|_{S^m-\hat{D}_2})$$

definiert.



**Abb. 2.7.** Zusammenhängende Summe zweier Bündel

**Interpretation:** Man setzt für das Bündel  $\xi|_{D_1}$  ein Bündel über  $S^m$  ein, oder man bildet eine zusammenhängende Summe der beiden Bündel, ähnlich wie für Mannigfaltigkeiten.

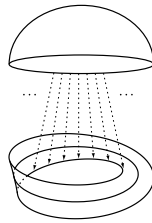
Für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  werden wir weiter unten im Beweis zu (3.1.1) zeigen, daß die Homotopieklassen von  $\varphi$  nicht von der Auswahl der Trivialisierungen  $\alpha$  und  $\beta$  abhängt. Man erhält so eine Operation

$$\diamond : \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(S^m) \times \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(M^m) \longrightarrow \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(M^m) \quad (2.5.8)$$

der Gruppe  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(S^m)$  (siehe (3.1.2)) auf der Menge  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(M^m)$ . Damit lassen sich z.B.  $m$ -dimensionale Bündel über  $M^m$  beschreiben und untersuchen. Diese Operation werden wir in (2.6.16) formalisieren und auch ihre Eigenschaften beschreiben, später wird auch erklärt, wie man reelle Bündel behandelt. Für Anwendungen sei auf Abschnitt 5.3.4 und auf (3.5.14) verwiesen.

3. Zum Schluß noch ein Versuch zur Veranschaulichung von  $\lambda_2^{\mathbb{R}}$  über  $P_2(\mathbb{R})$ :

Dazu schreiben wir die projektive Ebene  $P_2(\mathbb{R})$  als Vereinigung eines Möbiusbandes  $X_1 = M$  und einer Scheibe  $X_2 = D^2$  über ihren gemeinsamen Rand  $X_1 \cap X_2 = \partial D^2 = \partial M$ :



**Abb. 2.8.** Die projektive Ebene zusammengesetzt aus Scheibe und Möbiusband

Das Möbiusband fassen wir als Scheibenbündel  $M = D(\lambda_1^{\mathbb{R}})$  des Linienbündels  $\lambda_1^{\mathbb{R}} = (E(\lambda_1^{\mathbb{R}}), \pi, P_1(\mathbb{R}))$  auf, dessen Rand, das Sphärenbündel  $S(\lambda_1^{\mathbb{R}})$ , homöomorph zur Kreislinie  $S^1$  ist. Wir wissen bereits, daß  $\pi^*(\lambda_1^{\mathbb{R}})|_{S(\lambda_1^{\mathbb{R}})}$  trivial ist, wählen eine Trivialisierung

$$\varphi : \pi^*(\lambda_1^{\mathbb{R}})|_{\partial M} \longrightarrow \partial M \times \mathbb{R}$$

und definieren damit ein Bündel

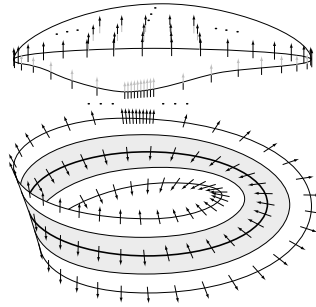
$$\xi := \pi^*(\lambda_1^{\mathbb{R}})|_M \cup_{\varphi} (D^2 \times \mathbb{R}).$$

Die Inklusion  $i : P_1(\mathbb{R}) \subset M \subset P_2(\mathbb{R})$  induziert eine Injektion

$$i^* : \text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(P_2(\mathbb{R})) \longrightarrow \text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(P_1(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cdot [\lambda_1^{\mathbb{R}}],$$

dies folgt aus (2.6.1) mit der Paarsequenz zu  $S^1 \simeq M \subset P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})/M \cong D^2/\partial D^2 = S^2$  und  $\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(S^2) \cong \{0\}$  (3.1.9). Daher muß  $\xi$  isomorph zu  $\lambda_2^{\mathbb{R}}$  über  $P_2(\mathbb{R}) = M \cup_{\partial M} D^2$  sein, denn es gilt offensichtlich  $i^*(\xi) \cong \lambda_1^{\mathbb{R}}$ .

Bis auf Homotopie von Isomorphismen gibt es zwei Klebeabbildungen  $\varphi_+ = \varphi$  und  $\varphi_- = -\varphi$ , denn jede Klebeabbildung geht aus  $\varphi$  durch Komposition mit einem Automorphismus  $S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$  hervor, und diese werden ja durch die zugehörigen adjungierten Matrizenfunktionen  $S^1 \longrightarrow GL_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} - \{0\}$  gegeben. Beide Klebeabbildungen ergeben isomorphe Bündel, wie man leicht durch Anwendung von (2.5.4) sieht. In der folgenden Abbildung ist  $\pi^*(\lambda_1^{\mathbb{R}})|_M$  durch Einzeichnung einiger Fasern angedeutet.



**Abb. 2.9.** Das Bündel  $\xi$

## 2.5.2 Kollabieren von Bündeln über Unterräumen

Eine häufig vorkommende Konstruktion ist die Bildung des Quotientenraumes  $X/A$  für einen Unterraum  $A \subset X$ . Dabei werden alle Punkte in  $A$  zu einem einzigen identifiziert. Wir wiederholen kurz die Definition. Man setzt zwei Punkte  $a, b \in X$  äquivalent,  $a \sim b$ , wenn  $a$  und  $b$  beide in  $A$  liegen, ansonsten sollen  $a$  und  $b$  nur äquivalent bei Gleichheit sein. Der hierzu gehörende Quotientenraum  $X/\sim$  mit der Quotiententopologie wird mit  $X/A$ , die Quotientenabbildung mit  $j : X \longrightarrow X/A$  und die Inklusion von  $A$  in  $X$  mit  $i : A \longrightarrow X$  bezeichnet. Ist  $X$  kompakt und  $A$  abgeschlossen, so ist auch  $X/A$  kompakt.

Damit ein Vektorbündel  $\xi = (E, p, X)$  über  $X$  sich von einem solchen über  $X/A$  (bis auf Isomorphie) induzieren läßt, ist die Trivialität von  $\xi|_A$  notwendig, denn die Komposition  $j \circ i : A \longrightarrow X/A$  ist konstant. Diese Bedingung ist aber auch ausreichend. Zu einer gegebenen Trivialisierung  $\alpha : \xi|_A \longrightarrow A \times \mathbb{K}^n$  läßt sich wie folgt ein Vektorbündel  $\xi/\alpha = (E/\alpha, p', X/A)$  konstruieren:



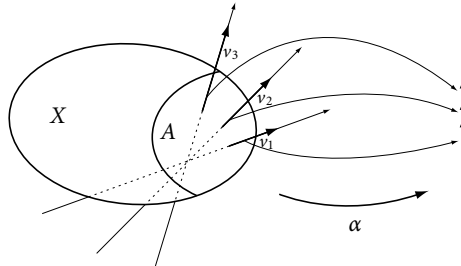
**Konstruktion** (von  $\xi/\alpha$ ). Wir definieren auf dem Totalraum  $E$  eine Äquivalenzrelation  $\approx$  durch

$$e \approx e' \iff \begin{array}{l} 1) p(e) \in A \text{ und } p(e') \in A \\ 2) pr_{\mathbb{K}^n}(\alpha(e)) = pr_{\mathbb{K}^n}(\alpha(e')) \end{array}$$

wobei  $pr_{\mathbb{K}^n} : A \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  die Projektion ist. Liegt  $p(e)$  oder  $p(e')$  nicht in  $A$ , so soll  $e \approx e'$  nur für  $e = e'$  gelten. Setze  $E/\alpha := E/\approx$  und definiere  $\tilde{j} : E \rightarrow E/\alpha$  als Quotientenabbildung. Da die Äquivalenzrelation  $\approx$  mit  $\sim$  unter  $p$  verträglich ist, induziert  $p$  eine Projektion  $p' : E/\alpha \rightarrow X/A$ .

**Lemma 2.5.9.** *Es sei  $X$  ein kompakter Raum,  $A \subset X$  abgeschlossen und  $\alpha$  eine Trivialisierung von  $\xi|_A$ . Dann ist  $\xi/\alpha = (E/\alpha, p', X/A)$  ein Vektorbündel, das sogenannte mittels  $\alpha$  über  $A$  kollabierte Vektorbündel.*

Zur Vorstellung: Alle Fasern  $E_x$  über  $x \in A$  werden mit einem festen Vektorraum mittels  $pr_{\mathbb{K}^n} \circ \alpha(E_x) \cong \mathbb{K}^n$  identifiziert, während innerhalb einer Faser selbst keine Identifikationen stattfinden. Anstelle der Trivialisierung  $\alpha$  gibt man deshalb auch oft den entsprechenden faserweise bijektiven Vektorbündel-Homomorphismus  $pr_{\mathbb{K}^n} \circ \alpha : \xi|_A \rightarrow \mathbb{K}^n$  an.



*Beweis.* Es fehlt nur VB2 und dies auch nur bei dem Punkt  $A/A \in X/A$ . Nach (2.1.15) können wir  $\alpha$  zu einem Isomorphismus

$$\tilde{\alpha} : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{K}^n$$

erweitern, wobei  $U$  eine offene Umgebung von  $A$  in  $X$  ist. Dieser Isomorphismus induziert einen Isomorphismus

$$(E|_U)/\alpha \rightarrow (U \times \mathbb{K}^n)/id_{A \times \mathbb{K}^n} = (U/A) \times \mathbb{K}^n$$

der eine Vektorbündel-Karte von  $\xi/\alpha$  auf der offenen Umgebung  $U/A$  von  $A/A$  ist.  $\square$

Wir erwähnen eine zweite Konstruktion mit Übergangsfunktionen:  $X$  und  $A$  seien kompakt,  $\xi$  und  $\alpha$  seien wie oben. Man erweitert  $\alpha$  zu einer Karte  $(U_1, h_1)$  mit einer offenen Umgebung  $U_1$  von  $A$  und ergänzt mit weiteren Karten  $(U_i, h_i)$  so zu einer offenen Überdeckung von  $X$ , sodaß  $U_i \cap A = \emptyset$  für  $i \neq 1$  gilt. Dann sind die Kartenwechselgebiete  $U_i \cap U_j$  mit

$i \neq j$  alle disjunkt zu  $A$  und die zugehörigen Übergangsfunktionen definieren ein System von Übergangsfunktionen auf  $X/A$  und damit nach (2.4.13) ein Vektorbündel über  $X/A$ , das mit  $\xi_{/\alpha}$  übereinstimmt. Offensichtlich gilt dann  $j^*(\xi_{/\alpha}) \cong \xi$ .

### Beispiele.

1. Für  $X = D^2$ ,  $A = \partial D^2 = S^1$  ist  $X/A \cong S^2$ . Wählt man  $\xi = X \times \mathbb{C}$  und  $\alpha : S^1 \times \mathbb{C} \rightarrow S^1 \times \mathbb{C}$  mit  $\alpha(z, v) = (z, z \cdot v)$ , so ist  $\xi_{/\alpha}$  ein Linienbündel über  $S^2$ , das isomorph zum kanonischen Linienbündel  $\lambda_1^{\mathbb{C}} = (E_{\lambda_1^{\mathbb{C}}}, p, P_1(\mathbb{C}))$  ist.
2. Schreibt man  $S^1$  als  $[-1, 1]/\{-1, +1\}$ , so erhält man aus der Trivialisierung  $\alpha : \{-1, +1\} \times \mathbb{R} \rightarrow \{-1, +1\} \times \mathbb{R}$  mit  $\alpha(x, t) = (x, x \cdot t)$  aus  $\xi = [-1, +1] \times \mathbb{R}$  offensichtlich das Möbius-Bündel als  $\xi_{/\alpha}$ .

Zu den Eigenschaften der Konstruktion  $\xi \mapsto \xi_{/\alpha}$ :

Trivialerweise ist die Quotientenabbildung  $\tilde{j} : E \rightarrow E/\alpha$  ein faserweise bijektiver Vektorbündel-Homomorphismus. Damit ist automatisch  $j^*(\xi_{/\alpha})$  isomorph zu  $\xi$ , denn  $\tilde{j}$  faktorisiert zum Isomorphismus  $\bar{j} : E \rightarrow j^*(E/\alpha)$ . Im Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\tilde{j}} & E/\alpha \\
 \searrow \tilde{j} & & \nearrow \\
 \downarrow p & j^*(E/\alpha) & \downarrow p' \\
 \swarrow & & \searrow \\
 X & \xrightarrow{j} & X/A
 \end{array}$$

Schränkt man  $\tilde{j}$  auf  $A$  ein, d.h. betrachtet  $\tilde{j}|_{E|_A} : E|_A \rightarrow (E/\alpha)|_{(A/A)} \cong \mathbb{K}^n$ , so erhält man im Wesentlichen die Trivialisierung  $\alpha$  zurück (je nachdem, wie man die Faser von  $E/\alpha$  bei  $A/A$  mit  $\mathbb{K}^n$  identifiziert).

Es sei  $pr : X \times I \rightarrow X$  die Projektion und  $\xi = (E, p, X)$  ein Vektorbündel über  $X$ . Das Bündel  $pr^*(\xi) = (E \times I, p \times id_I, X \times I)$  hat den Totalraum  $E \times I$  und wir nennen zwei Trivialisierungen  $\alpha, \beta$  von  $E|_A$  homotope Trivialisierungen, wenn es eine Trivialisierung  $\gamma$  von  $E \times I$  über  $A \times I$  gibt mit

$$\gamma(e, 0) = \alpha(e) \quad \text{und} \quad \gamma(e, 1) = \beta(e) \quad \text{für alle } e \in E|_A.$$

Dann ist das Bündel  $pr^*(\xi)_{/\gamma}$  über  $(X \times I)/(A \times I)$  erklärt. Es sei

$$\rho : (X/A) \times I \rightarrow (X \times I)/(A \times I)$$

die kanonische Abbildung, die für kompakte Räume  $X$  und  $A$  ein Homöomorphismus ist. Das Vektorbündel  $\theta = \rho^*(pr^*(\xi)_{/\gamma})$  ist ein Vektorbündel über  $X/A \times I$  mit

$$\theta|_{X/A \times \{0\}} \cong \xi_{/\alpha} \quad \text{und} \quad \theta|_{X/A \times \{1\}} \cong \xi_{/\beta}.$$

Nach (2.1.21) sind diese Bündel isomorph und wir haben bewiesen:

**Satz 2.5.10.** Die Isomorphieklasse des Vektorbündels  $\xi_{/\alpha} = (E/\alpha, p', X/A)$  hängt für kompakte Räume  $A \subset X$  nur von der Homotopieklasse der Trivialisierung  $\alpha : E|_A \rightarrow A \times \mathbb{K}^n$  ab.

Für die Anwendungen benötigen wir:

**Lemma 2.5.11.** Die topologische Gruppe  $GL_n(\mathbb{C})$  ist wegzusammenhängend und die Gruppe  $GL_n(\mathbb{R})$  hat zwei Wegekomponenten, unterschieden durch das Vorzeichen der Determinante.

*Beweis.* Siehe Abschnitt 3.6. □

Eine wichtige Anwendung des letzten Satzes ist:

**Satz 2.5.12.** Ist der abgeschlossene Unterraum  $A$  des kompakten Raumes  $X$  zusammenziehbar, so induziert die Quotientenabbildung  $j$  eine Bijektion

$$j^* : \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X/A) \rightarrow \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X).$$

*Beweis.* Zunächst der komplexe Fall. Wegen  $A \simeq *$  ist jedes Vektorbündel  $\gamma$  über  $A$  trivial. Ist  $\alpha$  eine Trivialisierung von  $\gamma$ , so unterscheidet sich eine weitere  $\beta$  von  $\alpha$  nur um die Übergangsfunktion

$$g_{\alpha\beta} = (\alpha \circ \beta^{-1})^{ad} : A \rightarrow GL_n(\mathbb{C}).$$

Da  $id_A$  homotop zu einer konstanten Abbildung ist, ist auch  $g_{\alpha\beta} \circ id_A$  homotop zu einer konstanten Abbildung und mit (2.5.11) folgt, daß  $g_{\alpha\beta}$  homotop zur konstanten Abbildung  $y \mapsto id$  ist. Damit sind  $\alpha$  und  $\beta$  homotope Trivialisierungen.

Für ein Vektorbündel  $\xi = (E, p, X)$  besitzt damit  $E|_A$  eine bis auf Homotopie eindeutige Trivialisierung  $\alpha$  und somit ist nach (2.5.10) die Isomorphieklasse von  $\xi_{/\alpha}$  in  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X/A)$  unabhängig von  $\alpha$ . Die Zuordnung  $\xi \mapsto \xi_{/\alpha}$  induziert eine zu  $j^*$  inverse Abbildung  $\Gamma : \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X) \rightarrow \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X/A)$ . Die Beziehung  $j^* \circ \Gamma = id$  wurde bereits oben nachgewiesen. Es sei  $\eta = (F, p, X/A)$  ein Vektorbündel über  $X/A$ . Für  $\Gamma \circ j^* = id$  ist zu zeigen, daß  $j^*(\eta)_{/\alpha}$  isomorph zu  $\eta$  ist. Das Bündel  $j^*(\eta)$  besitzt die beiden Bündelabbildungen  $j_1 : j^*(\eta) \rightarrow \eta$  (als induziertes Bündel) und  $j_2 : j^*(\eta) \rightarrow j^*(\eta)_{/\alpha}$  (als Quotientenabbildung), im Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 j^*(F) & \xrightarrow{j_2} & j^*(F)/\alpha \\
 \downarrow & \searrow j_1 \quad \swarrow j_3 & \downarrow \\
 & F & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{j} & X/A
 \end{array}$$

Wählt man nun als  $\alpha : j^*(F)|_A \rightarrow F_{A/A}$  die offensichtliche Trivialisierung, so faktorisiert  $j_1$  über  $j_2$  zum gesuchten Isomorphismus  $j_3 : j^*(\eta)|_\alpha \rightarrow \eta$ .

Im reellen Fall sind folgende Zusatzüberlegungen notwendig. Die Übergangsfunktion  $g_{\alpha\beta} = (\alpha \circ \beta^{-1})^{ad} : A \rightarrow Gl_n(\mathbb{R})$ , die den Unterschied zwischen zwei Trivialisierungen beschreibt, ist jetzt homotop zu  $id$  oder zu der linearen Abbildung  $T$  mit  $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Es reicht zu zeigen, daß  $\xi|_\alpha$  und  $\xi|_{\bar{T}\circ\alpha}$  mit  $\bar{T}(x, v) = (x, T \cdot v)$  isomorph sind. Das ist aber klar, wenn man sich die die Bündel definierenden Äquivalenzrelationen ansieht. Da  $\bar{T}$  unabhängig von der Basiskomponente ist, sind die Äquivalenzrelationen sogar gleich.  $\square$

**Korollar 2.5.13.** *Ist der abgeschlossene Unterraum  $A$  des kompakten Raumes  $X$  zusammenziehbar, so induziert die Quotientenabbildung  $j$  eine Bijektion*

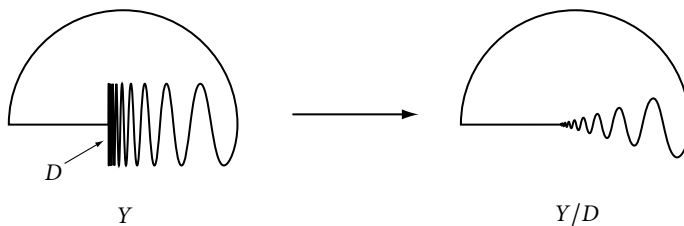
$$j^* : \text{SVekt}_{\mathbb{K}}(X/A) \rightarrow \text{SVekt}_{\mathbb{K}}(X).$$

*Beweis.* Die Argumente im Beweis von (2.5.12) sind mit der Relation stabil-isomorph verträglich, nach Addition von ausreichend vielen trivialen Summanden kann man immer auf die Situation von Vektorbündeln reduzieren.  $\square$

In der in den beiden letzten Sätzen hergeleiteten Eigenschaft zeigen die Funktoren  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n$ ,  $\text{SVekt}_{\mathbb{K}}$  und  $\pi_1$  bzw.  $H_1(-)$  unterschiedliches Verhalten: Ist der Unterraum  $A$  von  $X$  zusammenziehbar, so ist in bestimmten Situationen die Abbildung  $j : X \rightarrow X/A$  sogar eine Homotopieäquivalenz (z.B. für  $CW$ -Komplexe). Im Allgemeinen ist dies jedoch nicht richtig, wie das Beispiel des polnischen Kreises  $Y$  (siehe Abschnitt 2.9) zeigt. Der kompakte Raum  $Y$  enthält ein zusammenziehbares abgeschlossenes Intervall  $D$ , sodaß  $Y/D$  homöomorph zu  $S^1$  ist. Es folgt

$$\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(Y) \cong \text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(Y/D) \cong \text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(S^1) \cong \mathbb{Z}/2. \quad (2.5.14)$$

Aber  $Y$  ist einfach zusammenhängend, sodaß Fundamentalgruppe  $\pi_1(Y, y)$  und singuläre Homologie  $H_1(Y, \mathbb{Z})$  verschwinden.



Es sei  $CA := A \times [0, 1]/A \times \{0\}$  der Kegel über  $A$ , wobei wir  $A$  und  $A \times \{1\}$  identifizieren. Der Unterraum  $CA$  in  $X \cup CA$  ist zusammenziehbar und für kompakte Räume  $X$ ,  $A$  ist die von den Inklusionen  $A \subset X$ ,  $i : CA \rightarrow X \cup CA$  induzierte Abbildung

$$\bar{i} : X/A \rightarrow (X \cup CA)/CA$$

ein Homöomorphismus. Damit hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X/A) & \xrightarrow{j^*} & \mathrm{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X) \\
 \uparrow \cong (i^*) & & \uparrow i^* \\
 \mathrm{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X \cup CA/CA) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X \cup CA)
 \end{array}$$

das den Zusammenhang zwischen der Kollabier-Konstruktion und dem Verkleben von Vektorbündeln herstellt. Setze  $X_1 = X$ ,  $X_2 = CA$ ,  $\xi_1 = \xi = (E, p, X)$ ,  $\xi_2 = (CA \times \mathbb{K}^n, p, CA)$  und fasse eine Trivialisierung  $\alpha : E|_A \cong A \times \mathbb{K}^n$  auf als Isomorphismus  $\varphi : \xi_{1|A} \longrightarrow \xi_{2|A}$ , dann ist  $\theta = \xi_1 \cup_{\varphi} \xi_2$  erklärt und es gilt

$$i^* \theta \cong \xi \cong j^* \xi_{/\alpha} \quad (2.5.15)$$

**Beispiel 2.5.16.** Fast-parallelisierbare Mannigfaltigkeiten I

**Definition 2.5.17.** Eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $M$  heißt fast-parallelisierbar, wenn das Tangentialbündel von  $M$  auf dem Komplement eines Punktes trivial ist.

Offensichtliche Beispiele solcher Mannigfaltigkeiten sind Homotopiesphären, das sind  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten, die zwar homöomorph aber nicht diffeomorph zu einer Sphäre sind. Ein wichtiger Ausgangspunkt bei der Klassifikation von Homotopiesphären war das Resultat, daß das Tangentialbündel einer Homotopiesphäre immer stabil trivial ist. Der erste Schritt hierzu ist die Einsicht, daß eine Homotopiesphäre fast-parallelisierbar ist.

Es sei  $M^m$  eine  $m$ -dimensionale zusammenhängende geschlossene fast-parallelisierbare Mannigfaltigkeit. Für eine kleine Scheibe  $D$  in  $M$  ist  $\tau M|_{M-\dot{D}}$  trivial und wir können eine Trivialisierung  $\alpha : \tau M|_{M-\dot{D}} \longrightarrow (M - \dot{D}) \times \mathbb{R}^m$  wählen. Damit ist das Bündel  $\xi := \tau M / \alpha$  über  $M / (M - \dot{D}) = D / \partial D = S^m$  definiert. Das Tangentialbündel  $\tau M$  läßt sich also von einem Vektorbündel  $\xi^m$  auf  $S^m$  über die Quotientenabbildung  $q : M \rightarrow M / (M - \dot{D}) = S^m$  liften :  $\tau M \cong q^*(\xi)$ . Nun ist  $\mathrm{Vekt}_{\mathbb{R}}^m(S^m)$  bekannt (siehe (3.3.19)), damit läßt sich das Bündel  $\tau M$  weiter analysieren und insbesondere feststellen, ob  $\tau M$  stabil trivial ist, oder wie viele linear unabhängige Vektorfelder möglich sind. Dieses Beispiel soll später weitergeführt werden (siehe Abschnitt 7.3.2).

## 2.6 Exakte Sequenzen

Exakte Sequenzen sind eine der Hauptmethoden zur Berechnung von  $\mathrm{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X)$ . Wir besprechen zunächst die exakten Sequenzen eines Raumpaars und die Kofasersequenz einer Abbildung, die Stabilisierungssequenz ist Thema späterer Abschnitte. Für  $\mathrm{SVekt}_{\mathbb{K}}$  erhält man für ein Raupaar eine lange exakte Sequenz von Gruppen, für  $\mathrm{Vekt}_{\mathbb{K}}^n$  zunächst

nur eine exakte Mengensequenz. Für  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n$  und  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  oder orientierte reelle Bündel läßt sich auf einer Einhängung  $X = \Sigma Y$  eine Gruppenstruktur einführen, sodaß zumindest eine Teilsequenz dann zu einer exakten Sequenz von Gruppen wird.

### 2.6.1 Die lange exakte Sequenz eines Raumpaares

Versucht man für einen Raum  $X$  mit Unterraum  $A$ , hier beide als kompakt vorausgesetzt, die Vektorbündel über  $X$  aus denjenigen über  $A$  und  $X/A$  zu bestimmen, wird man wie folgt zur langen exakten Sequenz des Raumpaares  $(X, A)$  geführt. Hierzu wendet man den Funktor  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n$  auf

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} X/A$$

an und erhält mit

$$\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X/A) \xrightarrow{j^*} \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X) \xrightarrow{i^*} \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(A)$$

eine exakte Sequenz von Mengen. Das bedeutet, daß in jeder der Mengen ein Grundpunkt - hier immer  $[\underline{\mathbb{K}}^n]$  - gewählt ist und  $\text{Bild}(j^*) = (i^*)^{-1}([\underline{\mathbb{K}}^n])$  gilt (siehe Abschnitt 2.9). Damit hat sich zwar die Eigenschaft  $j^{-1}(A/A) = \text{Bild}(i)$  der Raumsequenz übertragen, aber die Injektivität von  $i$  bzw. die Surjektivität von  $j$  besitzen zunächst keine Entsprechungen. Wir halten fest:

**Proposition 2.6.1.** *Für ein kompaktes Raumpaar  $(X, A)$  ist*

$$\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X/A) \xrightarrow{j^*} \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X) \xrightarrow{i^*} \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(A)$$

*eine exakte Sequenz von punktierten Mengen.*

*Beweis.* Da  $j \circ i$  konstant ist, gilt  $i^* \circ j^*(x) = [\underline{\mathbb{K}}^n]$  oder  $\text{Bild}(j^*) \subset (i^*)^{-1}([\underline{\mathbb{K}}^n])$ . Umgekehrt, ist für  $[\xi] \in \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X)$  die Einschränkung  $i^*(\xi) = \xi|_A$  trivial, so ist mit einer gewählten Trivialisierung  $\alpha : \xi|_A \cong \underline{\mathbb{K}}^n$  das Bündel  $\xi|_\alpha$  über  $X/A$  definiert. Oben wurde aber gezeigt, daß  $j^*(\xi|_\alpha) \cong \xi$  gilt, also folgt  $(i^*)^{-1}([\underline{\mathbb{K}}^n]) \subset \text{Bild}(j^*)$ .  $\square$

Völlig analog und oft nützlicher wegen der vorhandenen Gruppenstruktur hat man:

**Proposition 2.6.2.** *Für einen kompakten Raum  $X$  mit abgeschlossenem Unterraum  $A$  ist*

$$\text{SVekt}_{\mathbb{K}}(X/A) \xrightarrow{j^*} \text{SVekt}_{\mathbb{K}}(X) \xrightarrow{i^*} \text{SVekt}_{\mathbb{K}}(A) \quad (2.6.3)$$

*eine exakte Sequenz von Gruppen.*

*Beweis.* Da  $j \circ i$  konstant ist, folgt  $i^* \circ j^* = 0$  und es gilt  $\text{Bild}(j^*) \subset \ker(i^*)$ . Umgekehrt: Es gelte  $i^*([\xi]_s) = 0$  in  $\text{SVekt}_{\mathbb{K}}(A)$ , dann ist  $\xi|_A$  stabil trivial und für geeignetes  $m$  gibt es

eine Trivialisierung  $\alpha : (\xi \oplus \underline{\mathbb{K}}^m)_{|A} \longrightarrow A \times \mathbb{K}^{n+m}$ . Dann ist  $[(\xi \oplus \underline{\mathbb{K}}^m)_{|A}]_s$  ein Urbild von  $[\xi]_s$  unter  $j^*$ .  $\square$

Bei einer exakten Sequenz von Gruppen ist der Grundpunkt immer das neutrale Element und die Exaktheit formuliert sich um in  $\text{Bild}(j^*) = \ker(i^*)$ . Die Urbilder unter  $i^*$  sind dann Nebenklassen von  $\ker(i^*)$  und damit alle gleich "groß", was ohne Vorliegen einer Gruppenstruktur nicht erfüllt sein muß. Vor der Fortführung der Diskussion ein Beispiel:

**Beispiel.** Bekanntlich kann man die projektive Ebene  $P_2(\mathbb{R})$  als Vereinigung eines Möbiusbandes  $M$  und eines Kegels  $C\partial M \cong CS^1 \cong D^2$  über den Rand von  $M$  schreiben (siehe Abb. 2.8):

$$P_2(\mathbb{R}) = M \cup C\partial M.$$

Wegen

$$\text{SVekt}_{\mathbb{R}}(M/\partial M) \cong \text{SVekt}_{\mathbb{R}}(M \cup C\partial M/C\partial M) \cong \text{SVekt}_{\mathbb{R}}(M \cup C\partial M) = \text{SVekt}_{\mathbb{R}}(P_2(\mathbb{R}))$$

können wir die exakte Sequenz

$$\text{SVekt}_{\mathbb{R}}(P_2(\mathbb{R})) \xrightarrow{j^*} \text{SVekt}_{\mathbb{R}}(M) \xrightarrow{i^*} \text{SVekt}_{\mathbb{R}}(\partial M). \quad (2.6.4)$$

einsetzen. Das Möbiusband ist homotopieäquivalent zu seinem Nullschnitt, dabei geht die Inklusion  $S^1 \cong \partial M \longrightarrow M \cong S^1$  in die nichttriviale doppelte Überlagerung der  $S^1$  über. Wie bereits in (1.2.4) gesehen, wird das Möbius-Bündel trivial, wenn man es mittels der Projektion dieser doppelten Überlagerung liftet, d.h. man hat damit  $i^*(\lambda_1^{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{R}$ . Da  $\text{SVekt}_{\mathbb{R}}(S^1) \cong \mathbb{Z}/2$  von  $[\lambda_1^{\mathbb{R}}]_s$  erzeugt wird, folgt  $i^* = 0$  und damit die Surjektivität von  $j^*$ . Den Kern von  $j^*$  bestimmen wir weiter unten.

Was läßt sich allgemein zur Urbildmenge  $(j^*)^{-1}(\xi)$  für ein Bündel  $\xi$  über  $X$ , das über  $A$  trivial ist, sagen? Ist der Unterraum  $A \subset X$  nicht zusammenziehbar, so gibt es i.A. viele verschiedene Wahlen für die Trivialisierung  $\alpha : \xi_{|A} \rightarrow A \times \mathbb{K}^n$  und  $\xi_{|A}$ , d.h. Urbilder für  $\xi$  unter  $j^*$ . Das ist der Grund für die Nichtinjektivität von  $j^*$ . Aber je zwei Trivialisierungen  $\alpha_1, \alpha_2 : \xi_{|A} \rightarrow A \times \mathbb{K}^n$  unterscheiden sich um einen Automorphismus  $\beta = \alpha_1 \circ \alpha_2^{-1}$  des Produktbündels  $A \times \mathbb{K}^n$ . Damit ist das Bündel  $\eta := (CA \times \mathbb{K}^n)_{/\beta}$  über  $CA/A$  ein Maß dafür, wie sehr sich  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  unterscheiden. Die Nichtinjektivität von  $j^*$  sollte also durch Elemente in  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(CA/A)$  beschreibbar sein. Das ist tatsächlich richtig, doch zuvor benötigen wir noch als Vorbereitung den Einhängungsbegriff und eine Beschreibung von Bündeln über einer Einhängung. Die (unreduzierte) Einhängung  $SX$  von  $X$  wird definiert als Quotientenraum

$$SX := CX/X = (X \times [0, 1]/X \times \{0\})/X \times \{1\}$$

und  $Sf : SX \longrightarrow SY$  für  $f : X \rightarrow Y$  als die von  $(x, t) \mapsto (f(x), t)$  induzierte Abbildung. Die Einhängung einer Sphäre ist homöomorph zu einer Sphäre:  $S(S^n) \cong S^{n+1}$ . Für kompaktes  $X$  ist auch  $SX$  kompakt. Arbeitet man mit Basispunkten, so definiert man für einen Raum  $X$  mit Basispunkt  $x_0$  die reduzierte Einhängung  $\Sigma X$  indem man in  $SX$  den Unterraum  $\{x_0\} \times I$  zu einem Punkt, dem neuen Basispunkt, zusammenschlägt. Da dieser

Unterraum zusammenziehbar ist, ergibt sich für  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n$  kein Unterschied. Für eine basispunkterhaltende Abbildung  $f$  ist dann  $\Sigma f$  erklärt (siehe Abschnitt 2.9).

Vektorbündel über einer Einhängung  $SZ = CX/X$  wurden oben durch  $E_\alpha := (CX \times \mathbb{K}^n)_{/\alpha}$  zu einer gegebenen Trivialisierung  $\alpha : X \times \mathbb{K}^n \rightarrow X \times \mathbb{K}^n$  konstruiert. Wir nennen dies die Kollabierbeschreibung für  $E_\alpha$ . Oft schreibt man aber die Einhängung  $SX$  als Vereinigung der beiden Kegel

$$C_0 = X \times [0, 1/2]/X \times \{0\} \text{ und } C_1 = X \times [1/2, 1]/X \times \{1\}$$

und verklebt zwei Produktbündel über  $C_0$  und  $C_1$  mittels des Isomorphismus  $\alpha : X \times \mathbb{K}^n \rightarrow X \times \mathbb{K}^n$  längs des Durchschnitts  $X = X \times \{1/2\} = C_0 \cap C_1$  zu einem Bündel

$$E'_\alpha := (C_0 \times \mathbb{K}^n) \cup_\alpha (C_1 \times \mathbb{K}^n).$$

Die Zuordnung

$$(x, t, v) \mapsto \begin{cases} (x, t, v) & \text{für } t \leq 1/2 \\ (x, t, pr_{\mathbb{K}^n} \circ \alpha(x, v)) & \text{für } t \geq 1/2 \end{cases}$$

induziert einen über  $id_{SX}$  liegenden Vektorbündel-Isomorphismus

$$E_\alpha = (CX \times \mathbb{K}^n)_{/\alpha} \longrightarrow (C_0 \times \mathbb{K}^n) \cup_\alpha (C_1 \times \mathbb{K}^n) = E'_\alpha. \quad (2.6.5)$$

Im Folgenden werden wir beide Bündel nicht weiter unterscheiden und die zweite Konstruktion die Klebebeschreibung für  $E_\alpha$  nennen.

Ist  $\xi$  wie oben ein Bündel der Form  $E(\xi) = (C_0 \times \mathbb{K}^n) \cup_\alpha (C_1 \times \mathbb{K}^n)$ , so bezeichnen wir die zum Klebe-Isomorphismus  $\alpha : X \times \mathbb{K}^n \rightarrow X \times \mathbb{K}^n$  assoziierte Matrizen-Funktion  $\alpha^{ad} : X \rightarrow Gl_n(\mathbb{K})$  mit  $c_\xi$  und nennen diese ebenfalls Klebefunktion von  $\xi$ . Im nächsten Kapitel werden wir sehen, daß sich alle Bündel über einer Einhängung bis auf Isomorphie auf diese Weise konstruieren lassen (und die Homotopieklasse von  $c_\xi$  auch durch  $[\xi]$  bestimmt ist). Damit hat man die Möglichkeit, sich Bündel über  $\Sigma X$  durch ihre Klebefunktion vorzustellen.

Zurück zur Urbildmenge  $(j^*)^{-1}(\mathbb{K}^n)$  in der Sequenz  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X/A) \xrightarrow{j^*} \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X) \xrightarrow{i^*} \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(A)$ . Die Bündel in  $(j^*)^{-1}(\mathbb{K}^n)$  werden durch Automorphismen  $\alpha$  des Produktbündels  $A \times \mathbb{K}^n$  geliefert, die wiederum durch Bündel über der Einhängung gemessen werden. Präzisiert wird dies mit folgendem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(SA) & \xrightarrow{\delta} & \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X/A) & \longrightarrow & \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X) \\ \uparrow = & & \uparrow \cong & \nearrow & \parallel \\ \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(CA/A) & & \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X \cup CA/CA) & & \\ \uparrow \cong & & \downarrow \cong & \searrow & \\ \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X \cup CA/X) & \xrightarrow{j^*} & \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X \cup CA) & \xrightarrow{i^*} & \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X) \end{array} \quad (2.6.6)$$



durch das wir die sogenannte verbindende Abbildung (bzw. verbindenden Homomorphismus bei Gruppensequenzen)  $\delta : \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(SA) \rightarrow \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X/A)$  definieren. Alle nicht bezeichneten Abbildungen sind von Inklusionen oder Quotientenabbildungen induziert. Die rechte Hälfte des Diagramms kommutiert nach (2.5.15). Nun liegt in der oberen und unteren Zeile die Situation aus (2.6.1) vor, einmal mit  $(X, A)$ , einmal mit  $(X \cup CA, X)$ . Also ist die Sequenz

$$\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(SA) \xrightarrow{\delta} \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X/A) \xrightarrow{j^*} \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X)$$

exakt und wir haben die gesuchte Beschreibung von  $(j^*)^{-1}(\underline{\mathbb{K}}^n)$  gefunden. Die gleiche Diskussion trifft nun aber auch wieder auf das Raumpaar  $(X \cup CA, X)$  zu. Wir können wieder eine verbindende Abbildung  $\delta'$  definieren usw., es entstehen jetzt aber keine ganz neuen Terme mehr, sondern die Räume wiederholen sich als Einhängungen:

**Proposition 2.6.7.** *Für ein kompaktes Raumpaar  $(X, A)$  ist die Sequenz*

$$\begin{array}{ccccccc} \delta \rightarrow & \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(SX/SA) & \xrightarrow{Sj^*} & \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(SX) & \xrightarrow{Si^*} & & \\ & \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(SA) & \xrightarrow{\delta} & \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X/A) & \xrightarrow{j^*} & \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X) & \xrightarrow{i^*} \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(A) \end{array}$$

*exakt.*

*Beweis.* Es fehlt nur noch die Exaktheit an der Stelle  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(SA)$ , die weiter unten nachgetragen wird. An allen anderen Stellen liegt dann eine Wiederholung der schon behandelten Fälle vor, wenn man noch  $SX/SA \cong S(X/A)$  verwendet.  $\square$

Die gleichen Überlegungen gelten für  $\text{SVekt}_{\mathbb{K}}$  anstelle von  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n$ . Mit der von der Whitney-Summe induzierten Addition liegt hier automatisch eine exakte Sequenz von Gruppen vor. Der verbindende Homomorphismus  $\delta$  wird durch das zu (2.6.6) analoge Diagramm definiert, ist also auch von stetigen Abbildungen induziert und damit tatsächlich ein Homomorphismus. Es gilt dann

**Proposition 2.6.8.** *Für ein kompaktes Raumpaar  $(X, A)$  ist*

$$\begin{array}{ccccccc} \delta \rightarrow & \text{SVekt}_{\mathbb{K}}(SX/SA) & \xrightarrow{Sj^*} & \text{SVekt}_{\mathbb{K}}(SX) & \xrightarrow{Si^*} & & \\ & \text{SVekt}_{\mathbb{K}}(SA) & \xrightarrow{\delta} & \text{SVekt}_{\mathbb{K}}(X/A) & \xrightarrow{j^*} & \text{SVekt}_{\mathbb{K}}(X) & \xrightarrow{i^*} \text{SVekt}_{\mathbb{K}}(A) \end{array}$$

*eine exakte Sequenz von Gruppen.*

### Bemerkungen.

1. Mit Hilfe der Beziehung (2.5.15) lassen sich die Abbildungen in obigem Diagramm (2.6.6) auf Bündelebene explizit beschreiben.

2. Die verbindende Abbildung  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(SA) \xrightarrow{\delta} \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X/A)$  ist natürlich bezüglich Raumpaarabbildungen  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , das heißt für Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f(A) \subset B$  gilt  $f^* \circ \delta_{(Y,B)} = \delta_{(X,A)} \circ (\Sigma f|_A)^*$ , wie sofort aus dem definierenden Diagramm (2.6.6) folgt.
3. Obige Sequenz läßt sich zur langen exakten Paarsequenz in der K-Theorie nach rechts fortsetzen.
4. Exakte Sequenzen für die Funktoren  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n$  oder  $\text{SVekt}_{\mathbb{K}}$  lassen sich leicht und durchsichtiger nach Herleitung der Klassifikationssätze aufstellen. Sie ordnen sich dann als Spezialfälle der langen exakten Sequenz einer Faserung oder Kofaserung unter.

Fortführung des letzten Beispiels:

Aus der Fortsetzung der exakten Sequenz (2.6.4)

$$\text{SVekt}_{\mathbb{R}}(S^2) \xrightarrow{\delta} \text{SVekt}_{\mathbb{R}}(P_2(\mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$$

erhalten wir zusammen mit  $\text{SVekt}_{\mathbb{R}}(S^2) \cong \mathbb{Z}/2$  das Resultat, daß  $\text{SVekt}_{\mathbb{R}}(P_2(\mathbb{R}))$  eine Gruppe mit höchstens 4 Elementen sein kann. Indem man diese Sequenz noch einen Schritt weiter nach links fortsetzt, kann man zeigen, daß  $\delta$  injektiv ist. Damit ist  $\text{SVekt}_{\mathbb{R}}(P_2(\mathbb{R}))$  eine Erweiterung der beiden Gruppen  $\mathbb{Z}/2$  und  $\mathbb{Z}/2$ . Später werden wir zeigen, daß  $2\lambda_2^{\mathbb{R}}$  nicht trivial ist (5.4.2), hieraus folgt dann sofort - ohne Berechnung von  $\delta$  - als Endergebnis

$$\text{SVekt}_{\mathbb{R}}(P_2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/4.$$

## 2.6.2 Die Puppe-Sequenz

Zum Arbeiten flexibler und später wichtiger als die Paarsequenz eines Raumpaares  $(X, A)$  ist die Kofaser- oder Puppe-Sequenz einer stetigen Abbildung  $f : Y \rightarrow X$ , die den Fall einer Inklusion des Unterraumes  $A \subset X$  zu dem einer beliebigen Abbildung von  $Y$  nach  $X$  verallgemeinert. Wegen der späteren Verwendung für die Komultiplikation auf  $\Sigma X$  arbeiten wir im Folgenden in der Kategorie der punktierten kompakten Räume.

**Definition 2.6.9.** Zu einer basispunkterhaltenden Abbildung  $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  wird die Kofaser oder der Abbildungskegel  $C_f$  definiert, indem man mittels  $f$  einen reduzierten Kegel  $CY = Y \times I / (Y \times \{0\} \cup \{y_0\} \times I)$  über  $Y$  an  $X$  anheftet:

$$C_f := X \cup_f CY = CY \dot{\cup} X / \sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation  $\sim$  von  $(x, 1) \sim f(x)$  erzeugt wird. Entsprechend definiert man die unreduzierte Version ohne Basispunkte.

Ist  $f = i$  eine Inklusion, so verallgemeinert  $C_f$  die oben betrachtete Konstruktion  $X \cup CY$ . Wir haben eine kanonische Inklusion  $j : X \subset C_f$  und definieren eine Abbildung  $p :$

$C_f \rightarrow \Sigma Y$  als Quotientenabbildung komponiert mit einer kanonischen Identifikation:

$$p : C_f \longrightarrow C_f/X \xrightarrow{\cong} CY/Y = \Sigma Y.$$

Dann können wir folgende Sequenz von Abbildungen bilden:

$$Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{j} C_f \xrightarrow{p} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma j} \Sigma C_f \rightarrow \quad (2.6.10)$$

Diese Sequenz heißt Puppe- oder Kofaser-Sequenz von  $f$ . Unser nächstes Ziel ist die folgende Verallgemeinerung des Paarsequenz-Satzes:

**Satz 2.6.11.** *Für eine stetige punktierte Abbildung  $f : Y \rightarrow X$  induziert die Puppe-Sequenz eine lange exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\Sigma p^*} \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(\Sigma C_f) &\xrightarrow{\Sigma j^*} \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(\Sigma X) \xrightarrow{\Sigma f^*} \\ \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(\Sigma Y) &\xrightarrow{p^*} \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(C_f) \xrightarrow{j^*} \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X) \xrightarrow{f^*} \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(Y) \end{aligned}$$

Die Aussage gilt auch mit  $\text{SVekt}_{\mathbb{K}}$  anstelle von  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n$ .

*Beweis:* Wir zeigen zunächst die Exaktheit an drei Stellen der Sequenz. Die Exaktheit bei  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(C_f)$  folgt wegen  $\Sigma Y \simeq C_f/X$  aus (2.6.1). Um die Exaktheit bei  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X)$  zu zeigen, verwenden wir den Abbildungszylinder  $Z_f$  einer stetigen Abbildung  $f$ . Dieser ist definiert als

$$Z_f := X \dot{\cup} (Y \times I) / \sim, \quad (2.6.12)$$

wobei die Äquivalenzrelation  $\sim$  durch  $(y, 1) \sim f(y)$  gegeben ist. Wir haben dann

- (a) eine Inklusion  $Y \hookrightarrow Z_f$  über  $y \mapsto (y, 0)$  mit  $Z_f/Y = C_f$  und der Quotientenabbildung  $j' : Z_f \rightarrow C_f$ ,
- (b) eine Inklusion  $u : X \rightarrow Z_f$ ,
- (c) eine Projektion  $pr : Z_f \rightarrow X$  mit  $x \mapsto x$  für  $x \in X$  und  $(y, t) \mapsto f(y)$  für  $(y, t) \in Y \times I$ ,
- (d)  $u$  ist eine Homotopieäquivalenz mit  $pr$  als Inversem und
- (e) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{j} & C_f \\ \parallel & & \simeq \downarrow u & & \parallel \\ Y & \longrightarrow & Z_f & \xrightarrow{j'} & C_f \end{array}$$

mit  $j = j' \circ u$ . Die untere Sequenz induziert eine exakte Sequenz nach (2.6.1). Da  $u^*$  bijektiv ist, induziert auch die obere Sequenz eine exakte Sequenz und die Exaktheit bei  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(X)$  folgt. Der einzige etwas kompliziertere Fall ist die Exaktheit bei  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(\Sigma Y)$ .

Über einem Raum  $W$  verwenden wir neben dem bisher verwendeten Kegel  $C^+W = CW = W \times [0, 1] / (W \times \{0\} \cup \{w_0\} \times [0, 1])$  einen weiteren Kegel  $C^-W := W \times [1, 2] / (W \times \{2\} \cup \{w_0\} \times [1, 2])$ , wobei in beiden der Raum  $W = W \times \{1\}$  die Kegelbasis bilden soll, und setzen  $\Sigma'X := C^+X \cup C^-X \cong \Sigma X$ . Mit dem Hilfsraum

$$Z := C^-X \cup_f C^+Y$$

(wobei  $(y, 1) \in C^+Y$  mit  $(f(y), 1) \in C^-X$  identifiziert wird) bilden wir dann folgendes kommutatives Diagramm

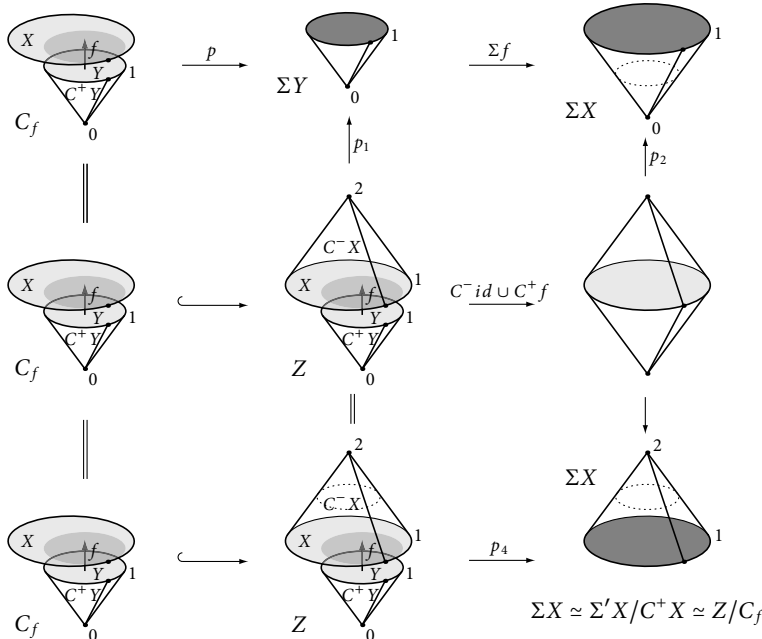
$$\begin{array}{ccccc} C_f & \xrightarrow{p} & \Sigma Y & \xrightarrow{\Sigma f} & \Sigma X \\ \parallel & & \uparrow p_1 & & \uparrow p_2 \\ C_f & \xrightarrow{c} & Z & \xrightarrow{C^-id \cup C^+f} & \Sigma'X \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow p_3 \\ C_f & \xrightarrow{c} & Z & \xrightarrow{p_4} & \Sigma X \end{array}$$

wobei

$$\begin{aligned} p_1: Z &\longrightarrow Z/C^-X \simeq \Sigma Y \\ p_2: \Sigma'X &\longrightarrow \Sigma'X/C^-X \simeq \Sigma X \\ p_3: \Sigma'X &\longrightarrow \Sigma'X/C^+X \simeq \Sigma X \\ p_4: Z &\longrightarrow Z/C_f \simeq \Sigma X \end{aligned}$$

die offensichtlichen Quotientenabbildungen sind.

$$\Sigma Y \simeq Z/C^-X \simeq C_f/X \qquad \Sigma X \simeq \Sigma'X/C^-X \simeq C^+X/X$$



Nach Anwendung von  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n$  erhält man daraus das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(C_f) & \xleftarrow{p_1^*} & \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(\Sigma Y) & \xleftarrow{\quad} & \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(\Sigma X) \\
 \parallel & & \cong \downarrow p_1^* & & \cong \downarrow p_2^* \\
 \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(C_f) & \xleftarrow{\quad} & \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(Z) & \xleftarrow{(C^-id \cup C^+f)^*} & \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(\Sigma' X) \\
 \parallel & & \parallel & & \cong \uparrow p_3^* \\
 \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(C_f) & \xleftarrow{\quad} & \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(Z) & \xleftarrow{p_4^*} & \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(\Sigma X)
 \end{array}$$

Bei  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  werden Quotienten nach zusammenziehbaren Unterräumen (Kegel) gebildet, diese induzieren Bijektionen in  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n$ . Da die untere Zeile nach (2.6.1) exakt ist, ist es auch die obere.

Wegen  $\Sigma X / \Sigma A \cong \Sigma(X/A)$  gilt (2.6.1) auch für den Funktor  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(\Sigma-)$  anstelle von  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(-)$ , damit wiederholen sich die Situationen immer wieder und die Exaktheit der Sequenz ist bewiesen.

Ist  $Y = A$  und  $f = i : A \rightarrow X$  eine Inklusion, so ist  $C_i = X \cup CA$ ,  $C_i/X \simeq SA$  und man erhält mit dem gleichen Argument unter Verwendung des entsprechenden Hilfsraumes wie für die Puppe-Sequenz den Exaktheitsbeweis für die noch fehlende Stelle in der Paarsequenz.

### Bemerkungen.

1. Die Bijektion  $(p_2^*)^{-1} \circ p_3^*$  ist in  $\text{SVekt}_{\mathbb{K}}$  die Multiplikation mit  $-1$ .
2. Es gilt  $\Sigma C_f \simeq C_{\Sigma f}$ , da nur umparametrisiert wird.
3. Über die im letzten Beweis eingeführte Abbildungszylinder-Konstruktion läßt sich jede Abbildung bis auf Homotopieäquivalenz in eine Inklusion überführen. An die Stelle des Quotienten tritt dann die Kofaser.

**Beispiele.** Als Beispiel für eine Puppe-Sequenz betrachten wir einen  $CW$ -Komplex  $X$ . Eine  $CW$ -Struktur auf einem Raum  $X$  wird durch eine Folge von Unterräumen

$$\emptyset \subset X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X,$$

gegeben, wobei  $X^0$  aus Punkten besteht und  $X^n$  aus  $X^{n-1}$  durch Anheften von  $n$ -Zellen  $(D_\alpha)_{\alpha \in I}$  entsteht. Für Details und Beweise sei auf die Literatur verwiesen, etwa [toD91]. Den Vorgang des Anheftens der  $n$ -Zellen kann man dann durch eine Kofasersequenz

$$\bigvee_{\alpha \in I} S_\alpha^{n-1} \xrightarrow{\Phi} X^{n-1} \longrightarrow X^n \longrightarrow \Sigma \bigvee_{\alpha \in I} S_\alpha^{n-1} \longrightarrow \quad (2.6.13)$$

beschreiben, d.h. das  $n$ -Skelett  $X^n$  ist die Kofaser der anheftenden Abbildung  $\Phi$  der  $n$ -Zellen. Ein einfaches Beispiel ist der projektive Raum  $P_m(\mathbb{R})$  mit dem  $n$ -Skelett  $P_n(\mathbb{R})$  und der Quotientenabbildung  $\pi : S^{n-1} \rightarrow P_{n-1}(\mathbb{R})$  als anheftender Abbildung einer  $n$ -Zelle für  $n \leq m$

$$S^{n-1} \xrightarrow{\pi} P_{n-1}(\mathbb{R}) \longrightarrow P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S^n \rightarrow$$

### 2.6.3 Gruppenstruktur

Über einer Einhängung  $\Sigma X$  läßt sich für komplexe Bündel und später auch für orientierte reelle Bündel eine Gruppenmultiplikation einführen, die Handhabung und Berechnung von  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(\Sigma X)$  erleichtern. Für reelle Bündel gibt es dabei Probleme mit dem Basispunkt, die Behandlung dieses Falles wird daher auf später verschoben, (siehe Abschnitt 3.6, 3.6.2, (3.5.4)).

Ab jetzt arbeiten wir mit komplexen Bündeln, die Übertragung auf orientierte reelle, die später verwendet werden soll, ist völlig problemlos. Als Vorbereitung benötigen wir:

**Lemma 2.6.14.** *Für einen kompakten Raum  $X$  induziert das Einschränken von Bündeln eine Bijektion*

$$\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X) \times \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X) \xrightarrow{\cong} \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X \vee X).$$

*Beweis.* Es sei  $Z := X \dot{\cup} X$  die disjunkte Vereinigung zweier Kopien von  $X$  und  $A := \{x_1, x_2\}$  der Unterraum der Kopien des Basispunktes  $x_0 \in X$ . Dann gilt  $Z/A = X \vee X$  und wir haben eine exakte Mengensequenz zu  $(Z, A)$ :

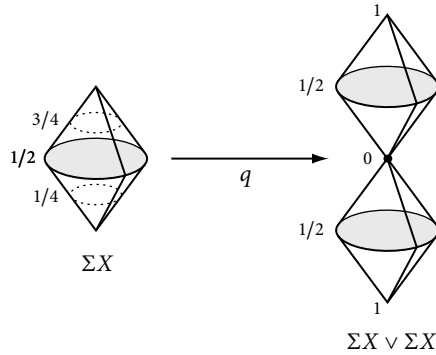
$$\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma A) \xrightarrow{\delta} \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X \vee X) \xrightarrow{j^*} \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X \dot{\cup} X) \rightarrow \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(A)$$

Offensichtlich hat man eine Bijektion  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X \dot{\cup} X) \cong \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X) \times \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X)$ , die wir als Identifikation auffassen werden. Nun verschwindet  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma A) = \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(S^1)$  nach (2.4.19) (im Gegensatz zum reellen Fall, wo man  $\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^n(\Sigma A) \neq \{0\}$  hat), damit folgt noch nicht die Injektivität von  $j^*$ , denn bei einer Mengensequenz erhält man nur eine Aussage über  $(j^*)^{-1}(\ast)$ . Könnte man hier die weiter unten konstruierte Operation von  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma A)$  auf  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X \vee X)$  verwenden, so würde  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma A) = \{0\}$  als Argument ausreichen. Wir helfen uns mit der Konstruktion einer zu  $j^*$  inversen Abbildung  $s$ .

Dazu repräsentiert man zwei Elemente aus  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X)$  durch Bündel  $\xi_1, \xi_2$  mit Trivialisierungen  $\alpha_i$  über dem Basispunkt  $x_0 \in X$ . Die Kollabierkonstruktion liefert dann ein Bündel  $\xi_1 \vee \xi_2$  über  $X \vee X$  indem man mittels der  $\alpha_i$  die beiden Fasern über den beiden Basispunkten in der disjunkten Vereinigung  $X \dot{\cup} X$  identifiziert. In der Terminologie von Abschnitt 2.5.2 ist dann  $\xi_1 \vee \xi_2$  das Bündel  $(\xi_1 \dot{\cup} \xi_2)/\alpha$ , wobei  $\alpha$  aus beiden Trivialisierungen  $\alpha_i$  über  $A := \{x_1, x_2\}$  zusammengesetzt ist. Für komplexe Bündel ist das Bündel  $E_1 \vee E_2$  nach (2.5.10) unabhängig von der Auswahl der beiden Trivialisierungen, denn alle Trivialisierungen über einem Punkt sind jeweils homotop zueinander. Dann ist  $s([\xi_1], [\xi_2]) := [\xi_1 \vee \xi_2]$  wohldefiniert. Trivialerweise gilt  $j^* \circ s = id$ . Für ein gegebenes Bündel  $\xi$  über  $X \vee X$  mit Einschränkungen  $\xi_1 \dot{\cup} \xi_2$  über  $X \dot{\cup} X$  wählen wir eine Trivialisierung  $\alpha_0 : E(\xi)_{x_0} \cong \mathbb{C}^n$  und definieren  $\alpha$  durch  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$ . Die kanonische Abbildung  $\xi_1 \dot{\cup} \xi_2 \rightarrow \xi$  faktorisiert dann zu einem Isomorphismus  $(\xi_1 \dot{\cup} \xi_2)/\alpha \cong \xi$ , womit  $s \circ j$  folgt.  $\square$

Die Komultiplikationsabbildung  $q : \Sigma X \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$ , die durch (siehe Abschnitt 2.9)

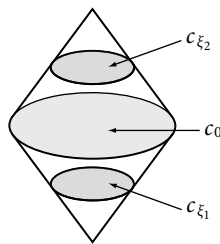
$$q([x, t]) := \begin{cases} ([x, 2t], x_0) & \text{für } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (x_0, [x, 2t - 1]) & \text{für } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**Abb. 2.10.** Die Komultiplikation  $q$ 

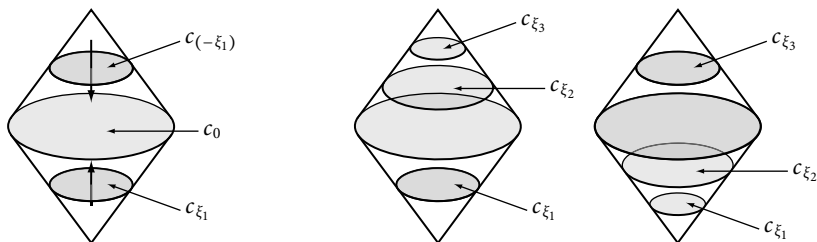
definiert wird, liefert durch Zurückziehen dann die Gruppenoperation auf  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma X)$  :

$$\begin{aligned} \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma X) \times \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma X) &\xrightarrow{\cong} \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma X \vee \Sigma X) \xrightarrow{q^*} \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma X) \\ [\xi_1] + [\xi_2] &:= q^*([\xi_1 \vee \xi_2]) \end{aligned} \quad (2.6.15)$$

Obwohl additiv notiert, ist diese Operation i.A. nicht kommutativ. Erst auf einer doppelten Einhängung ist dies immer der Fall. Vorstellen kann man sich diese Gruppenoperation als zusammenhängende Summe der Bündel (wie am Ende von Abschnitt 2.5). Stellt man sich Bündel über  $\Sigma X$  durch ihre Klebefunktionen  $c_{\xi}$  vor, dann ist  $\xi_1 + \xi_2$  als das auf  $X \times \{1/4\}$  mittels der Klebeabbildung  $c_{\xi_1}$  und auf  $X \times \{3/4\}$  mittels  $c_{\xi_2}$  hergestellte Bündel wie im Bild gegeben ( $c_0$  bezeichnet die konstante Klebeabbildung  $c_0(x) = id$ ):

**Abb. 2.11.** Die Summe  $\xi_1 + \xi_2$ 

Der Nachweis der Gruppenaxiome ist dann ganz leicht und läßt sich durch die folgenden Bilder klar machen. Das zu  $\xi$  inverse Bündel  $(-\xi)$  erhält man durch Umkehrung der Kleberichtung und die Isomorphie  $\xi + (-\xi) \cong \underline{\mathbb{C}}^n$ , indem man die Klebelevel über eine Homotopie auf  $X \times \{1/2\}$  aufeinander zulaufen läßt. Bei der Assoziativität handelt sich nur um eine Umparametrisierung.



**Abb. 2.12.** Klebeabbildungen bei Inversenbildung und Assoziativität

Mit dieser Gruppenstruktur für komplexe und orientierte reelle Bündel werden die lange exakte Sequenz eines Raumpaares und die Puppe-Sequenz eine exakte Sequenz von Gruppen, sobald Einhängungen vorliegen. Für reelle Bündel ohne Orientierung bleiben diese Sequenzen reine, wenig nützliche, exakte Mengensequenzen, da auch bei Einhängungen keine Gruppenstruktur definiert ist. Deshalb werden wir später orientierte reelle Bündel betrachten, die sich ähnlich wie komplexe verhalten, wo diese Defekte nicht vorhanden sind.

Der übliche Zugang zur Gruppenstruktur auf  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma X)$  ergibt sich nach Herleitung der Klassifikationssätze in Abschnitt 3.4: Dann wird  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma X)$  mit einer Homotopiemenge  $[\Sigma X, BU(n)]_0$  identifiziert und die hier betrachtete Gruppenstruktur entspricht der üblichen auf dieser Menge durch die Komultiplikation von  $\Sigma X$  induzierten. Dieser Zugang macht klar, daß man für exakte Sequenzen eigentlich in der Kategorie der Räume mit Basispunkten arbeiten muß. Systematischer wäre es daher, eine punktierte Version  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(\Sigma X)_0$  von  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(\Sigma X)$ , bestehend aus Isomorphieklassen von Vektorbündeln  $\xi = (E, p, \Sigma X)$  zusammen mit einer Trivialisierung  $\alpha : E_{x_0} \rightarrow \mathbb{K}^n$  der Faser über dem Basispunkt, einzuführen und diese zu verwenden, siehe (3.5.4). Dann läßt sich auch im reellen Fall eine Gruppenstruktur  $\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^n(\Sigma X)_0$  einführen. Während  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma X)_0 \cong \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma X)$  gilt (dies gilt, solange die Strukturgruppe der Bündel, wie hier  $U(n)$  oder später  $SO(n)$  zusammenhängend ist), sind  $\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^n(\Sigma X)_0$  und  $\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^n(\Sigma X)$  i.A. verschieden.

## 2.6.4 Kooperation

Wir betrachten die Kofasersequenz einer Abbildung  $f : Y \rightarrow X$  zwischen kompakten Räumen:

$$Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{j} C_f \xrightarrow{p} \Sigma Y \rightarrow$$

Eine oft wichtige zusätzliche Struktur ist die Kooperation von  $\Sigma Y$  auf der Kofaser  $C_f$ . Die hierdurch definierte Operation der Gruppe  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma Y)$  auf der Menge  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(C_f)$  zerlegt diese in Bahnen, die sich als Urbildmengen von Elementen unter  $j^*$  herausstellen. Dies macht sowohl  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(C_f)$  wie auch die Abbildung  $j^*$  im Allgemeinen erst für eine Berechnung zugänglich. Damit verbleiben in der Puppe-Sequenz nur die beiden Mengen  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(Y)$  und  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X)$  "unstrukturiert". Die Operation der Fundamentalgruppe  $\pi_1(X)$  auf der Faser  $F \cong \pi_0(F)$  einer Überlagerung  $F \rightarrow \tilde{X} \rightarrow X$  kann vielleicht als bekanntes einführendes Beispiel dienen.



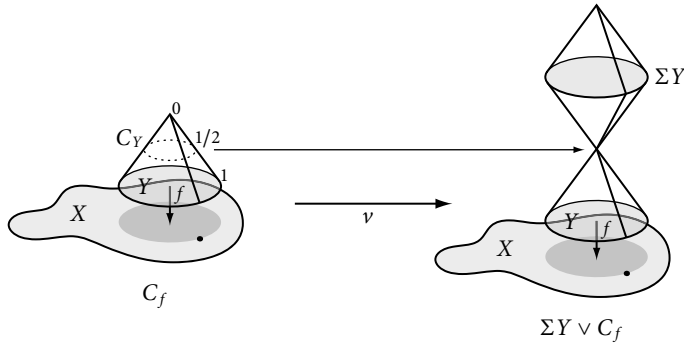
Wir haben diese Kooperation bereits im Spezialfall einer Inklusion  $A \subset X$  mit Kofaser  $X/A$  als Motivation weiter oben zur Definition der verbindenden Abbildung  $\delta$  angedeutet. Dazu wurden Bündel über  $X/A$  über die Kollabierkonstruktion als  $\xi/\alpha$  beschrieben, wobei  $\xi$  ein Bündel über  $X$  und  $\alpha$  eine Trivialisierung von  $\xi|_A$  war. Die Wahlmöglichkeiten für  $\alpha$  wurden durch Elemente aus  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma A)$  parametrisiert. Eine entsprechende Beschreibung gilt auch für Bündel über einer beliebigen Kofaser  $C_f$ , indem man  $X$  durch den homotopieäquivalenten Abbildungszylinder ersetzt. Geht man noch wie oben bei Bündeln über einer Einhängung vorgeführt von der Kollabierkonstruktion zur Klebekonstruktion über, so läßt sich das Variieren von  $\alpha$  durch die Konstruktion einer Operation der Gruppe  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma Y)$  auf der Menge  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(C_f)$  erfassen und formalisieren. Wichtiger ist wie gesagt die daraus resultierende Möglichkeit, die Urbildmengen für Elemente  $x \in \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X)$  unter  $j^* : \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(C_f) \rightarrow \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X)$  in den Griff zu bekommen.

Die Kogruppe  $\Sigma Y$  kooperiert von links auf der Kofaser  $C_f$  von  $f : Y \rightarrow X$  durch folgende Kooperationsabbildung

$$v : C_f \longrightarrow \Sigma Y \vee C_f$$

mit  $v(x) := x$  für  $x \in X \subset C_f$  und

$$v([y, t]) := \begin{cases} [y, 2t] \in \Sigma Y & \text{für } t \leq 1/2 \\ [y, 2t - 1] \in C_f & \text{für } t \geq 1/2 \end{cases}.$$



**Abb. 2.13.** Die Kooperationsabbildung  $v$

Die Abbildung  $v$  schnürt den in  $C_f$  enthaltenen Kegel  $CY$  in der Mitte ein, der eine Teil wird zu  $\Sigma Y$ , der andere zu  $C_f$ .

Diese Kooperationsabbildung induziert nun eine Operation

$$\begin{aligned} \diamond : \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma Y) \times \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(C_f) &\longrightarrow \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(C_f) \\ [\alpha] \diamond [\xi] &:= v^*([\alpha \vee \xi]) \end{aligned} \tag{2.6.16}$$

mit den Eigenschaften:

**Proposition 2.6.17.** Für  $[\xi] \in \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(C_f)$  und  $\alpha, \beta \in \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma Y)$  gilt:

1.  $(\alpha + \beta) \diamond [\xi] = \alpha \diamond (\beta \diamond [\xi])$
2.  $[\mathbb{C}^n] \diamond [\xi] = [\xi]$
3.  $\alpha \diamond [\mathbb{C}^n] = p^*(\alpha)$
4.  $\beta \diamond p^*(\alpha) = p^*(\beta + \alpha)$ .

Der Beweis ist einfach und kann ähnlich wie der Nachweis der Gruppenaxiome für  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma Y)$  durch Zeichnen erbracht werden und soll deshalb übergangen werden. Mit  $Q_2 = \nu^{-1}(\Sigma Y) = Y \times [0, 1/2] / (Y \times \{0\} \cup \{y_0\} \times [0, 1/2])$  bezeichnen wir den halben oberen Kegel in  $C_f$  und mit  $Q_1 = \nu^{-1}(C_f) = X \cup_f (Y \times [1/2, 1] / \{y_0\} \times [1/2, 1])$  den darunter liegenden Teil, der zum Abbildungszyylinder von  $f$  homöomorph ist. Schlägt man  $Q_1 \cap Q_2 = Y \times \{1/2\}$  in  $C_f$  zu einem Punkt zusammen, so erhält man  $\Sigma Y \vee C_f$  bis auf Homöomorphie.

Die Bündelinterpretation der Operation ist dann offensichtlich und die Verbindung zur oben angedeuteten Beschreibung von Bündeln über  $C_f$  leicht herzustellen. Für die Anwendungen am wichtigsten ist:

**Proposition 2.6.18.** Zwei Bündel  $\xi_1, \xi_2$  über  $C_f$  haben isomorphe Restriktionen unter  $j: X \subset C_f$  genau dann, wenn es ein  $[\alpha] \in \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma Y)$  gibt mit

$$[\xi_2] = [\alpha] \diamond [\xi_1].$$

Mit anderen Worten, die Urbilder  $(j^*)^{-1}(x)$  für  $x \in \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X)$  sind genau die Bahnen der Operation von  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma Y)$  auf  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(C_f)$ . So folgt zum Beispiel aus dem Verschwinden von  $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma Y)$  nun die Injektivität von  $j^*$ , da alle Bahnen dann einelementig sind.

*Beweis.* Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_f & \xrightarrow{\nu} & \Sigma Y \vee C_f \\ \uparrow & & \uparrow \\ X & \longrightarrow & \{y_0\} \vee X \end{array}$$

folgt sofort  $j^*([\xi_2]) = j^*([\alpha] \diamond [\xi_1]) = j^* \nu^*([\alpha \vee \xi_1]) = j^*([\xi_1])$ . Für die Umkehrung können wir annehmen, daß  $\xi_1$  und  $\xi_2$  mit  $j^*([\xi_2]) = j^*([\xi_1])$  wie folgt gewählt sind:

$$\xi_{1|Q_2} \text{ ist trivial und } \xi_{2|Q_1} \text{ ist isomorph zu } \xi_{1|Q_1} \text{ (wegen } j^*([\xi_2]) = j^*([\xi_1]) \text{)}.$$

Dann ist auch  $\xi_{2|Q_1 \cap Q_2}$  trivial und wir wählen eine Trivialisierung  $\gamma$ . Das mit  $\gamma$  über  $Q_1 \cap Q_2 = Y \times \{1/2\}$  kollabierte Bündel  $(\xi_2)_{/\gamma}$  ist ein Bündel über  $\Sigma Y \vee C_f = C_f / (Y \times \{1/2\})$  mit  $\nu^*((\xi_2)_{/\gamma}) \cong \xi_2$ . Nach (2.6.14) können wir  $(\xi_2)_{/\gamma}$  als  $((\xi_2)_{/\gamma})_{|\Sigma Y} \vee ((\xi_2)_{/\gamma})_{|C_f}$  schreiben. Aber  $((\xi_2)_{/\gamma})_{|C_f}$  ist nach Wahl der Bündel gerade isomorph zu  $\xi_1$  und wenn wir  $\alpha = (\xi_2)_{/\gamma}|_{\Sigma Y}$  setzen, dann bedeutet  $\nu^*((\xi_2)_{/\gamma}) \cong \xi_2$  gerade  $[\xi_2] = [\alpha] \diamond [\xi_1]$ .  $\square$

**Bemerkungen.**

1. In der exakten Sequenz

$$\mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma X) \xrightarrow{\Sigma f^*} \mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma Y) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(C_f) \rightarrow \mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(X) \rightarrow \mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(Y)$$

gilt für  $\alpha, \beta \in \mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma X)$

$$p^*(\alpha) = p^*(\beta) \iff \exists \gamma \alpha = \beta + \Sigma f^*(\gamma).$$

Da  $p^*$  kein Gruppenhomomorphismus ist, ist dieser Schluß nicht unmittelbar erlaubt. Indem man  $\Sigma Y$  als Kofaser schreibt, die zugehörige Operation in die Gruppenaddition übersetzt und (2.6.18) verwendet, erhält man einen Beweis.

2. Ein Beispiel für die eingeführte Operation ist die im letzten Abschnitt erwähnte zusammenhängende Summe von Vektorbündeln über einer  $m$ -dimensionalen geschlossenen zusammenhängenden Mannigfaltigkeit  $M$ . Die zugehörige Kofasersequenz ist

$$S^{m-1} \xrightarrow{f} (M - \mathring{D}) \longrightarrow (M - \mathring{D}) \cup_f D \cong M \rightarrow S^m.$$

Hier ist  $D \subset M$  eine  $m$ -Scheibe und  $f : S^{m-1} \rightarrow D$  die Inklusion des Randes. Ersetzt man  $M - \mathring{D}$  durch das homotopieäquivalente  $(m-1)$ -Skelett von  $M$ , so wird aus  $f$  die anheftende Abbildung der obersten Zelle von  $M$ .

3. Wir werden später das Thema Kooperation noch einmal aufnehmen und dann mit der dann zur Verfügung stehenden reellen Version  $\mathrm{Vekt}_{\mathbb{R}}^2(P_2(\mathbb{R}))$  berechnen.
4. Stabilisieren  $[\xi] \mapsto [\xi]_s$ , d.h. die Abbildung  $\mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma Y) \rightarrow \mathrm{SVekt}_{\mathbb{C}}(\Sigma Y)$  ist ein Gruppenhomomorphismus (3.1.20), (3.4.32).
5. Interessant im Zusammenhang mit (2.6.18) wäre eine explizite Beschreibung der Standgruppen der Elemente in  $\mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(C_f)$  unter der Operation von  $\mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma Y)$ . Über das nächste Lemma hinausgehende Aussagen hierzu findet man in [Dol66].

Das folgende Lemma, das eine leichter anwendbare Umformulierung der Standgruppenbedingung mittels eines Abbildungstorus für die Operation von  $\mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma Y)$  auf  $\mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(C_f)$  beinhaltet, wird nur im Beweis des Vergleichssatzes (3.2.13) benötigt. Zu einem Paar von Abbildungen  $f, g : A \rightarrow B$  definiert man dazu den Abbildungstorus  $T(f, g)$  durch

$$T(f, g) := B \dot{\cup} A \times I / ((a, 0) \sim f(a), (a, 1) \sim g(a))$$

d.h. an  $A \times I$  wird  $B$  einmal mittels  $f$  an das untere Ende und einmal mittels  $g$  an das andere Ende angeheftet. Wir betrachten jetzt den Abbildungstorus

$$T_f := T(v, i_2) \text{ der Abbildungen } v, i_2 : C_f \longrightarrow \Sigma Y \vee C_f$$

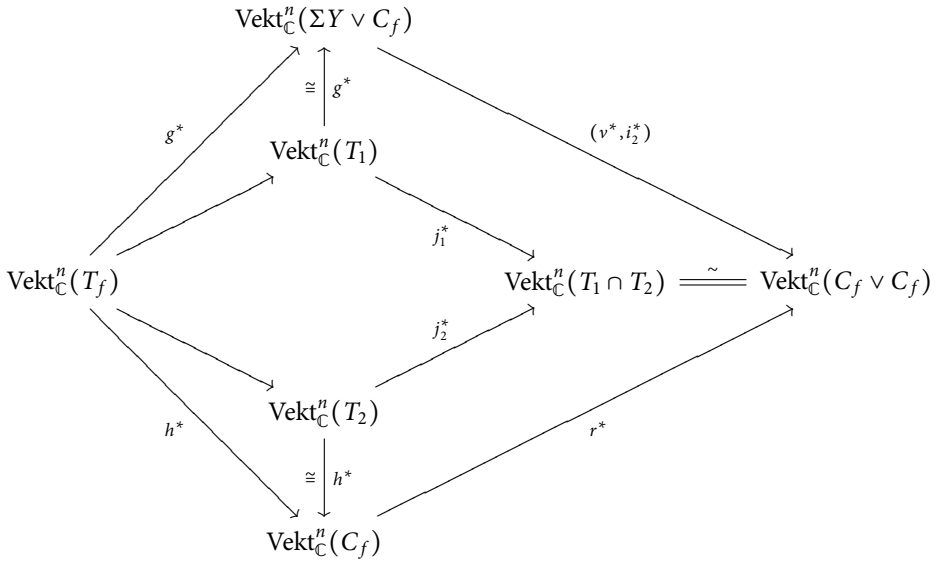
für die Puppe-Sequenz  $Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{j} C_f \xrightarrow{p} \Sigma Y$  mit Kooperation  $v$  und Inklusion  $i_2$ . Mit  $g : \Sigma Y \vee C_f \longrightarrow T_f$  bezeichnen wir die kanonische Inklusion.

**Lemma 2.6.19.** Die Bildmenge von  $g^* : \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(T_f) \longrightarrow \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma Y \vee C_f)$  besteht genau aus den Paaren  $(\alpha, \beta) \in \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma Y \vee C_f) \cong \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma Y) \times \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(C_f)$  mit  $\alpha \diamond \beta = \beta$ .

*Beweis.* Wir teilen  $T_f$  neu auf in zwei Teilräume  $T_1, T_2$  :

$$\begin{aligned} T_2 &:= C_f \times \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] && \simeq C_f \\ T_1 &:= \left[(\Sigma Y \vee C_f) \cup C_f \times \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup C_f \times \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right] / \sim \quad \text{mit } (x, 0) \sim v(x), (x, 1) \sim i_2(x) \end{aligned}$$

Indem man die Teilintervalle jeweils auf einen Endpunkt schrumpfen läßt, sieht man, daß die Einschränkung der Inklusion  $g$  eine Homotopieäquivalenz  $g : \Sigma Y \vee C_f \longrightarrow T_1$  induziert. Ebenso schränkt sich die Inklusion  $C_f \times \{1/2\} \subset T_f$  zu einer Homotopieäquivalenz  $h : C_f \simeq T_2$  ein. Der Durchschnitt  $T_1 \cap T_2$  besteht aus zwei im Basispunkt verbundenen Kopien von  $C_f$  :  $T_1 \cap T_2 = C_f \vee C_f$ . Die beiden Inklusionen  $j_1 : T_1 \cap T_2 \longrightarrow T_1$  und  $j_2 : T_1 \cap T_2 \longrightarrow T_2$  sind dann homotop zu  $(v, i_2)$  bzw. zur Faltungsabbildung  $r : C_f \vee C_f \rightarrow C_f$ . Zusammengefaßt erhalten wir folgendes kommutative Diagramm



Schreibt sich ein Paar  $(\alpha, \beta) \in \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma Y \vee C_f)$  als  $g^*(\gamma)$  und verfolgt man den Weg von  $\gamma$  in diesem Diagramm, so erhält man die Bedingung

$$(v^*, i_2^*)(\alpha, \beta) = (\alpha \diamond \beta, \beta) = (h^*(\gamma), h^*(\gamma)),$$

also  $\alpha \diamond \beta = \beta$ . Es sei umgekehrt ein Paar  $x := (\alpha, \beta) \in \text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma Y \vee C_f)$  mit  $\alpha \diamond \beta = \beta$  gegeben. Dann definieren  $x$  und  $y := \beta$  über das Diagramm Bündel über  $T_1$  und  $T_2$ , die auf  $T_1 \cap T_2$  übereinstimmen, also zu einem Bündel  $\gamma$  über  $T_f$  längs  $T_1 \cap T_2$  verklebt werden können. Damit liegt  $x = g^*(\gamma)$  im Bild von  $g^*$ .  $\square$

## 2.7 Prinzipalbündel und Faserbündel

Der Begriff Prinzipalbündel erlaubt es, die Theorie der Vektorbündel in einen allgemeinen Rahmen einzuordnen und in Verbindung zu Gruppenoperationen zu setzen. Einige Beziehungen und Konstruktionen werden hierdurch durchsichtiger. Dieses Kapitel stellt lediglich einen Überblick dar, es wird die übliche Terminologie eingeführt und an einigen Beispielen erläutert, für mehr Details und Beweise sei auf die Literatur verwiesen, etwa [toD91]. Im ersten Abschnitt werden Prinzipalbündel, Faserbündel und die lange exakte Homotopiesequenz einer Faserung besprochen, der nächste enthält den Spezialfall, der Vektorbündel betrifft. Wir gehen kurz auf die Klassifikation von Prinzipalbündeln ein, insbesondere auf den Zusammenhang zur vielleicht bekannten Überlagerungstheorie, die einen elementaren Zugang zur Berechnung von  $\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(B)$  ermöglicht.

### 2.7.1 G-Prinzipalbündel

Zuerst wiederholen wir einige Bezeichnungen aus dem Gebiet der Transformationsgruppen. Im Folgenden sei  $G$  eine topologische Gruppe. Eine stetige Abbildung  $\mu : X \times G \rightarrow X$  heißt Rechtsoperation von  $G$  auf dem Raum  $X$  (und das Paar  $(X, G)$  Rechts- $G$ -Raum) - geschrieben als  $x \cdot g = \mu(x, g)$  - wenn gilt:

- (a)  $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$  für alle  $g, h \in G, x \in X$
- (b)  $x \cdot e = x$  für alle  $x \in X$  und das neutrale Element  $e \in G$ .

Eine stetige Abbildung  $f : (X, G) \rightarrow (Y, G)$  heißt  $G$ -äquvariant, wenn  $f(x \cdot g) = f(x) \cdot g$  für alle  $g \in G, x \in X$  gilt.

Die Teilmenge  $xG := \{xg \mid g \in G\} \subset X$  heißt Bahn oder Orbit von  $x$  und der Menge aller Orbits  $X/G := \{xG \mid x \in X\}$  mit der Quotiententopologie bezüglich der Äquivalenzrelation  $x \sim y \Leftrightarrow xG = yG$  heißt Orbitraum. Die Zuordnung  $x \mapsto xG$  definiert die kanonische Projektion  $p : X \rightarrow X/G$ .

Eine Operation heißt frei, wenn aus  $g \cdot x = x$  für ein  $x$  immer  $g = e$  folgt.

Entsprechend werden Links- $G$ -Räume erklärt. Ist  $X \times G \rightarrow X$  eine Rechtsoperation, so definiert  $g \cdot x := x \cdot g^{-1}$  eine Linksoperation  $G \times X \rightarrow X$  (und umgekehrt).

**Definition 2.7.1.** Ein  $G$ -Prinzipalbündel  $\eta = (P, p, B)$  besteht aus

1. einer freien  $G$ -Operation auf  $P$
2. einer stetigen Abbildung  $p : P \rightarrow B$  mit  $p(x \cdot g) = p(x)$  für alle  $x \in P, g \in G$ , die lokal trivial im folgenden Sinne ist:
3. Zu jedem  $b \in B$  gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $b$  und einen  $G$ -äquvarianten Homöomorphismus  $h : p^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ , wobei  $G$  auf  $U$  trivial und auf  $G$  durch

Rechtsmultiplikation operiert, insbesondere kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
 p^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times G \\
 \downarrow p & & \downarrow \text{pr}_U \\
 U & \xrightarrow{=} & U
 \end{array}$$

Ein  $G$  Prinzipalbündel ist also im Wesentlichen eine freie  $G$ -Operation, die zusätzlich lokal trivial ist. Ein Homomorphismus zwischen  $G$ -Prinzipalbündeln über  $B$  ist einfach eine  $G$ -äquivalente Abbildung.

Mit  $\text{Prin}_G(B)$  bezeichnen wir die Menge der Isomorphieklassen der  $G$ -Prinzipalbündel über  $B$ .

Zu einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow B$  und einem  $G$ -Prinzipalbündel  $\eta = (P, p, B)$  ist das induzierte  $G$ -Prinzipalbündel  $f^*(\eta) = (f^*P, p', X)$  erklärt, indem man so vorgeht wie bei Vektorbündeln.

**Beispiele.** Die Operation von  $\mathbb{Z}/2 = \{id, A\}$  auf  $S^n$  über die Antipodenabbildung  $A$  mit Orbitraum  $P_n(\mathbb{R})$  ist ein  $\mathbb{Z}/2$ -Prinzipalbündel und die Operation von  $S^1 \subset \mathbb{C}$  auf  $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  über die Skalarmultiplikation mit komplexen Zahlen liefert ein  $S^1$ -Prinzipalbündel  $S^{2n+1} \rightarrow P_n(\mathbb{C})$ . Da in beiden Fällen die Gruppe kommutativ ist, spielt die Frage ob Links- oder Rechtsoperation keine Rolle. Die bereits bekannten Vektorbündelkarten für die kanonischen Linienbündel für  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  lassen sich leicht zu Prinzipalbündelkarten modifizieren. Das Bündel  $S^3 \rightarrow P_1(\mathbb{C}) = S^2$  heißt Hopf-Faserung oder Hopf-Abbildung.

Fast alle Sprechweisen (wie z.B. Karten, Schnitte usw.), die wir für Vektorbündel eingeführt haben, lassen sich auf Prinzipalbündel übertragen, wir werden diese ohne weiteres sinngemäß verwenden. Zwei leicht herzuleitende Eigenschaften von Prinzipalbündeln, in dem diese sich von Vektorbündel stark unterscheiden, sind:

1. Jeder Homomorphismus von  $G$ -Prinzipalbündeln über  $B$  ist automatisch ein Isomorphismus.
2. Hat ein Prinzipalbündel einen (globalen) Schnitt, so ist es trivial.

Wie bei Vektorbündeln hat man eine lokale Beschreibung durch Übergangsfunktionen (siehe etwa [toD91, IV]). Sind  $h_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$  Karten für  $\eta$ , so wird der Kartenwechsel

$$h_j \circ h_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times G \rightarrow (U_i \cap U_j) \times G \quad \text{durch} \quad (u, g) \mapsto (u, g_{ji}(u) \cdot g)$$

mit einer Übergangsfunktion  $g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  gegeben. Die bei Vektorbündeln gemachten Aussagen gelten sinngemäß auch für  $G$ -Prinzipalbündel. Die zu einem Atlas von

$\eta$  gehörenden Übergangsfunktionen erfüllen die Kozykelrelationen Ü1-Ü3, der Begriff “kohomolog” hat die entsprechende Bedeutung und jedes System von Übergangsfunktionen  $\{g_{ji}\}$  mit Werten in  $G$  definiert ein  $G$ -Prinzipalbündel.

Bequem ist folgende Sprechweise.

**Definition 2.7.2.** Eine stetige Abbildung  $p : E \rightarrow B$  heißt lokal triviales Bündel oder Faserbündel mit Faser  $F$ , wenn es zu jedem  $b \in B$  eine offene Umgebung  $U$  von  $b$  und einen fasererhaltenden Homöomorphismus  $h : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  gibt. Fasererhaltend bedeutet wieder die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F \\ \downarrow p & & \downarrow \text{pr}_U \\ U & \xrightarrow{=} & U \end{array}$$

d.h.  $p \circ h^{-1}(u, f) = u$  für alle  $u \in U, f \in F$ .

Beispiele für Faserbündel sind Vektorbündel, Prinzipalbündel und Überlagerungen. Die von Vektorbündeln vertrauten Sprechweisen wie Totalraum, Basis, Projektion, Produktbündel, Schnitt usw. übertragen sich sinngemäß auch auf Faserbündel.

Ein Faserbündel (zumindest über einer parakompakten Basis) ist insbesondere eine Faserung, d.h. besitzt die Homotopiehochhebungseigenschaft (siehe etwa [toD91], [Spa66], Abschnitt 2.9). Zu einer Faserung und damit für jedes Faserbündel  $p : E \rightarrow B$  mit Faser  $F$  hat man immer eine lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen:

$$\rightarrow \pi_n(F, f) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f) \rightarrow . \quad (2.7.3)$$

Hier ist  $i : F \hookrightarrow E$  die Inklusion der Faser  $F = p^{-1}(b)$  und  $f \in F$ .

Im Spezialfall einer Überlagerung  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  ist  $F = p^{-1}(b)$  diskret, damit gilt  $\pi_n(F, f) = 0$  für  $n \geq 1$  und die Sequenz (2.7.3) reduziert sich zu

$$0 \rightarrow \pi_1(\tilde{X}, f) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X, b) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, f) \xrightarrow{i_*} \pi_0(\tilde{X}, f) \xrightarrow{p_*} \pi_0(X, b) \rightarrow 1, \quad (2.7.4)$$

wobei man  $\pi_0(F, f)$  mit  $F$  identifizieren kann.

An ein Prinzipalbündel lassen sich unterschiedliche Fasern  $F$  anmontieren; damit erhält man den Zusammenhang zu Faserbündeln:

**Definition 2.7.5.** Gegeben sei ein  $G$ -Prinzipalbündel  $\eta = (P, p, B)$  und ein Links- $G$ -Raum  $F$ . Das zu  $\eta$  assoziierte Faserbündel

$$\eta[F] := (P \times_G F, \pi, B)$$

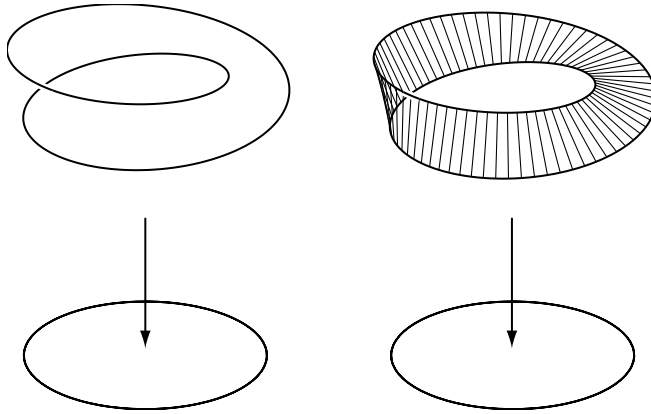
wird definiert durch

$$P \times_G F := (P \times F) / \sim \quad \text{mit} \quad (e, g \cdot f) \sim (e \cdot g, f)$$

mit Äquivalenzklasse  $[e, f]$  von  $(e, f)$  und Projektion  $\pi([e, f]) := e$ .

## 2.7.2 Vektorbündel und Prinzipalbündel

Vektorbündel sind zu  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ -Prinzipalbündel assoziierte Faserbündel. Als Beispiele haben wir bereits die kanonischen  $\mathbb{K}$ -Linienbündel  $\lambda_n$  über  $P_n(\mathbb{K})$  auf diese Weise beschrieben, siehe (1.1.10).



**Abb. 2.14.** Ein  $\mathbb{Z}/2$ -Prinzipalbündel und sein assoziiertes Linienbündel

Wir halten fest: Ist  $\eta = (P, p, B)$  ein  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ -Prinzipalbündel, dann ist  $\eta[\mathbb{K}^n] = (P \times_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})} \mathbb{K}^n, \pi, B)$  ein  $n$ -dimensionales  $\mathbb{K}$ -Vektorbündel, wobei  $\mathbb{K}^n$  die übliche  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ -Operation trägt. Explizit (mit  $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ,  $F = \mathbb{K}^n$ ):

Wegen  $\pi^{-1}(b) = p^{-1}(b) \times_G \mathbb{K}^n \cong \mathbb{K}^n$  gilt VB1 für  $\eta[\mathbb{K}^n]$ . Daß die lokalen Trivialisierungen nicht nur Homöomorphismen, sondern faserweise linear sind und damit VB2 erfüllt ist, sieht man ebenfalls leicht ein. Es sei  $h : p^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  eine Karte von  $\eta$  und  $h_2$  deren zweite Komponente. Hält man im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi^{-1}(U) & = & p^{-1}(U) \times_G F & \xrightarrow{h \times_G 1} & (U \times G) \times_G F & \xrightarrow{\psi} & U \times F \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{pr}_U \\
 U & \xrightarrow{\text{id}} & U & \xrightarrow{\text{id}} & U & \xrightarrow{\text{id}} & U
 \end{array}$$



mit dem Homöomorphismus  $\psi$  mit  $\psi([u, g, f]) := (p(u), g \cdot f)$  den Punkt  $b = p(u) \in U \subset B$  fest, so wird  $[u, f]$  auf  $(b, h_2(u) \cdot f)$  abgebildet, aber  $f \mapsto h_2(u) \cdot f$  ist  $\mathbb{K}$ -linear und  $\psi \circ (h \times_G 1)$  daher eine Vektorbündelkarte.

Umgekehrt lässt sich das dazugehörige  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ -Prinzipalbündel  $\xi_{\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})}$  zu einem gegebenen  $n$ -dimensionalen Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$  zurückgewinnen. Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten:

Auf dem Produktbündel  $\underline{\mathbb{K}}^n = (B \times \mathbb{K}^n, p, B)$  operiert  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$  durch  $(b, v) \mapsto (b, A \cdot v)$  für  $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ . Diese Linksoperation induziert eine Rechtsoperation auf dem Vektorbündel  $\mathrm{HOM}(\underline{\mathbb{K}}^n, \xi)$ . Auf dem Unterbündel

$$\mathrm{ISO}(\underline{\mathbb{K}}^n, \xi) := \{f \in \mathrm{HOM}(\underline{\mathbb{K}}^n, \xi) \mid f_x \text{ ist ein Isomorphismus für alle } x\}$$

operiert  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$  frei. Setze

$$\xi_{\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})} := \mathrm{ISO}(\underline{\mathbb{K}}^n, \xi),$$

dann ist  $\xi_{\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})}$  ein  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ -Prinzipalbündel mit  $\xi_{\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})}[\mathbb{K}^n] \cong \xi$  und die Zuordnung  $\eta \mapsto \eta[\mathbb{K}^n]$  induziert eine Bijektion

$$\mathrm{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(B) \cong \mathrm{Prin}_{\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})}(B). \quad (2.7.6)$$

Die andere Möglichkeit, zu einem Vektorbündel  $\xi$  ein zugehöriges  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ -Prinzipalbündel zu konstruieren, besteht in der Verwendung von Übergangsfunktionen. Die zu einem Vektorbündel  $\xi$  gehörenden Übergangsfunktionen liefern, wie oben schon bemerkt, ein  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ -Prinzipalbündel und umgekehrt. Hierdurch erhält man auch einen Beweis der Beziehung (2.7.6).

Verschiedene Konstruktionen mit Faserbündeln, wie etwa das Bilden von Sphärenbündel oder der äußeren Potenzen eines Vektorbündels lassen sich über Prinzipalbündel sehr einfach durchführen.

**Beispiele 2.7.7.** Es sei  $\xi = (E, p, B)$  ein  $n$ -dimensionales  $\mathbb{K}$ -Vektorbündel mit  $\eta = (P, \pi, B)$  als zugehörigem  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ -Prinzipalbündel.

1. Die übliche Operation von  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$  auf  $\mathbb{K}^n$  induziert eine Operation von  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$  auf  $\Lambda^i(\mathbb{K}^n)$ . Heftet man mit dieser Operation den Vektorraum  $\Lambda^i(\mathbb{K}^n)$  an  $\eta$ , so folgt

$$\eta[\Lambda^i(\mathbb{K}^n)] \cong \Lambda^i(\xi).$$

Genauso lassen sich andere (stetige) Funktoren von Vektorräumen auf Bündel übertragen.

2. Auf  $E_0 := E - s_0(B)$ , mit  $s_0$  als Nullschnitt von  $\xi$ , operiert  $\mathbb{K}^*$  durch faserweise Skalarmultiplikation.  $P(E)$  sei der hierdurch definierte Orbitraum

$$P(E) := E_0 / \sim \quad \text{mit} \quad v_1 \sim v_2 :\Leftrightarrow p(v_1) = p(v_2) \text{ und es gibt } \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ mit } v_1 = \lambda v_2$$

mit zugehöriger Projektion  $\pi : P(E) \rightarrow B$ . Dann ist  $\pi^{-1}(x) = P(E_x)$  gerade der projektive Raum der Faser von  $\xi$  bei  $x$  und  $P(\xi) := (P(E), \pi, B)$  ist ein Faserbündel

mit Faser  $P_{n-1}(\mathbb{K})$ , das wir auch durch Anmontieren von  $P_{n-1}(\mathbb{K})$  an  $\eta$  konstruieren können:

$$P \times_{\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})} (P_{n-1}(\mathbb{K})) \cong P(E) \quad (2.7.8)$$

Hierbei operiert  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$  auf  $P_{n-1}(\mathbb{K})$  über die Quotientenabbildung  $(\mathbb{K}^n - \{0\}) \rightarrow P_{n-1}(\mathbb{K})$ .

3. Die Operation  $G \times V \rightarrow V$  einer Lie-Gruppe  $G$  auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$ ,  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  heißt reelle (komplexe) Darstellung von  $G$ , wenn für jedes  $g \in G$  die Abbildung  $v \mapsto g \cdot v$  eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung ist. Wählt man in  $V$  eine Basis, so ist eine solche Darstellung durch einen stetigen Homomorphismus  $\rho : G \rightarrow \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$  gegeben (adjungierte Matrizen-Funktion). Hat man ein  $G$ -Prinzipalbündel  $\eta = (P, \pi, B)$ , so definiert jede Darstellung  $\rho : G \rightarrow \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$  von  $G$  nach der allgemeinen Konstruktion ein  $n$ -dimensionales Vektorbündel

$$\eta[(\mathbb{K}^n, \rho)] = (P \times_{\rho} \mathbb{K}^n, \pi, B)$$

über  $B$ .

Auf diese Weise lassen sich bestimmte Konstruktionen von Darstellungen wie etwa das Tensorprodukt oder die induzierte Darstellung leicht auf Vektorbündel übertragen. Außerdem kommutiert das Anheften von Darstellungen mit direkter Summe und Tensorprodukt. Ist zum Beispiel  $\eta = (S^{2n+1}, p, P_n(\mathbb{C}))$  das oben eingeführte Prinzipalbündel und  $\rho_k : S^1 \rightarrow \mathrm{Gl}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$  die Darstellung  $z \mapsto z^k$  für  $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$ . Dann gilt

$$\eta[(\mathbb{C}, \rho_k)] \cong \lambda_n^{\otimes k}$$

mit dem kanonischen Linienbündel  $\lambda_n = (E_{\lambda_n}, p, P_n(\mathbb{C}))$ , siehe (1.4.11).

Die im Beispiel 3, Abschnitt 2.3 angesprochene Beziehung zwischen Schnitten und äquivarianten Abbildungen ist ein Spezialfall folgender allgemeiner Situation: Es sei  $\eta = (P, \pi, B)$  ein  $G$ -Prinzipalbündel,  $X$  ein Rechts- $G$ -Raum (mit  $X^L$  als zugehörigem Links- $G$ -Raum) und  $f : P \rightarrow X$  eine  $G$ -äquivariante Abbildung. Geht man mit der  $G$ -äquivarianten Abbildung

$$\begin{aligned} P &\longrightarrow P \times X \\ w &\longmapsto (w, f(w)) \end{aligned}$$

zur induzierten Abbildung auf den Quotientenräumen über, so erhält man einen Schnitt

$$s_f : B \rightarrow (P \times X)/G = P \times_G X^L$$

im zu  $\eta$  assoziierten Faserbündel  $\eta[X^L]$ .

**Proposition 2.7.9.** Die Zuordnung  $f \mapsto s_f$  definiert eine Bijektion zwischen

$$\{f : P \rightarrow X \mid f \text{ ist } G\text{-äquivariant}\} \quad \text{und} \quad \Gamma(\eta[X^L]).$$

Zum Beweis siehe etwa [toD91].

**Beispiel.** Die Schnitte im kanonischen Linienbündel  $\lambda_n$  über  $P_n(\mathbb{R})$  werden durch stetige,  $\mathbb{Z}/2$ -äquivariante Abbildungen  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, ein Umstand, den wir in (1.1.14) zum Beweis, daß  $\lambda_n$  nicht trivial ist, bereits ausgenutzt haben.

Arbeitet man mit Vektorbündeln mit Riemannscher Metrik, so kann man anstelle der Gruppe  $GL_n(\mathbb{R})$  die dazu homotopieäquivalente orthogonale Gruppe  $O(n)$  verwenden (siehe Abschnitt 2.9). Man überträgt den Funktor  $\text{Isomet}_{\mathbb{R}}(V, V)$  der Isometrien eines Euklidischen Vektorraumes  $V$  auf Vektorbündel und setzt

$$\xi_{O(n)} := \text{ISOMET}(\underline{\mathbb{R}}^n, \xi)$$

für ein  $n$ -dimensionales Vektorbündel  $\xi$  mit Riemannscher Metrik. Dann ist  $\xi_{O(n)}$  ein  $O(n)$ -Prinzipalbündel mit

$$\xi_{O(n)}[\mathbb{R}^n] \cong \xi.$$

Übergangsfunktionen mit Werten in  $O(n)$  erhält man, indem man Vektorbündel-Karten als lokal gegebene Schnitte auffaßt und diese orthonormalisiert. Der zu (2.7.6) entsprechende Satz lautet dann (für parakompakte Räume):

$$\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^n(B) \cong \text{Prin}_{O(n)}(B). \quad (2.7.10)$$

Entsprechendes gilt im komplexen Fall mit der unitären Gruppe  $U(n)$ .

### Beispiele.

1. Es sei  $L$  ein reelles Linienbündel mit Riemannscher Metrik und  $S(L)$  das Sphärenbündel von  $L$ . Durch  $f_x \mapsto f_x(1)$  erhält man einen Isomorphismus  $\text{ISOMET}(\underline{\mathbb{R}}, L) \cong S(L)$  von  $\mathbb{Z}/2$ -Prinzipalbündeln, d.h.  $L_{O(1)} \cong S(L)$ .
2. Das  $O(n)$ -Prinzipalbündel zum Tangentialbündel  $\tau S^n = (TS^n, p, S^n)$  der  $n$ -Sphäre  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  erhält man wie folgt:  
 $TS^n = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \perp x\}$  sei mit der eingeschränkten Metrik versehen und  $\eta = (P, \pi, S^n) = \text{ISOMET}(\underline{\mathbb{R}}^n, \tau S^n)$  sei das zugehörige  $O(n)$ -Prinzipalbündel. Wir definieren eine Abbildung

$$g: \text{ISOMET}(\underline{\mathbb{R}}^n, \tau S^n) \rightarrow O(n+1) \quad (2.7.11)$$

wie folgt:  $g(f) = A$  sei die Matrix mit den Spalten  $v_1, \dots, v_n, v_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ , wobei  $v_0 := \pi(f) \in S^n$  (d.h.  $f$  liegt in der Faser über  $v_0$ ) und für  $i \geq 1$ :  $v_i := pr_2 \circ f(e_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$  (d.h.  $(v_0, v_i) \in T_{v_0} S^n$ ) gesetzt wird. Die Vektoren  $v_1, \dots, v_n, v_0$  bilden ein orthonormales  $(n+1)$ -Bein und damit eine orthogonale Matrix. Dann gilt:

- i)  $g$  ist ein Homöomorphismus
- ii)  $g$  ist  $O(n)$ -äquivariant, wobei  $O(n)$  von rechts auf  $O(n+1)$  durch Multiplikation über  $O(n) \subset O(n+1)$ ,  $B \mapsto \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  operiert.

iii) Es kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
 O(n) & \xlongequal{\quad} & O(n) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 P & \xrightarrow[\cong]{g} & O(n+1) \\
 \downarrow \pi & & \downarrow e \\
 S^n & \xrightarrow[\cong]{} & O(n+1)/O(n)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 A \\
 \downarrow \\
 A \cdot e_{n+1} = \text{letzte Spalte von } A
 \end{array}
 \quad (2.7.12)$$

d.h. wir können die beiden  $O(n)$ -Prinzipalbündel  $\eta' = (O(n+1), e, O(n+1)/O(n))$  und  $\eta = \tau S^n_{O(n)}$  identifizieren. Damit ist  $\eta'$  als  $O(n)$ -Prinzipalbündel nachgewiesen (die Karten von  $\eta$  liefern Karten von  $\eta'$ ) und wir haben eine wichtige lange exakte Homotopiesequenz

$$\longrightarrow \pi_i(O(n)) \longrightarrow \pi_i(O(n+1)) \longrightarrow \pi_i(S^n) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(O(n)) \longrightarrow \quad (2.7.13)$$

erhalten, die wir später weiter untersuchen werden.

3. Ist  $\xi = (E, p, B)$  ein  $n$ -dimensionales reelles Vektorbündel mit Metrik und  $\eta = \xi_{O(n)}$  das zugehörige  $O(n)$ -Prinzipalbündel, so erhält man das Scheibenbündel von  $\xi$  auch durch

$$D(\xi) = \eta[D^n] \quad (2.7.14)$$

mit der  $n$ -Scheibe  $D^n \subset \mathbb{R}^n$ .

### 2.7.3 Zur Klassifikation von Prinzipalbündeln

Für  $G$ -Prinzipalbündel und damit auch für deren assoziierte Faserbündel gilt die entsprechende Aussage zum Homotopiesatz (2.1.16), d.h. sind  $f, g : X \longrightarrow B$  homotop und ist  $X$  parakompakt, so sind  $f^*(\eta)$  und  $g^*(\eta)$  für ein  $G$ -Prinzipalbündel  $\eta = (P, \pi, B)$  isomorph. Ist also  $\eta$  fest und  $X$  parakompakt, so liefert  $f \mapsto f^*(\eta)$  eine wohldefinierte Abbildung

$$\Psi : [X, B] \longrightarrow \text{Prin}_G(X),$$

wobei  $[-, -]$  die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen bezeichnet.

**Definition 2.7.15.** Ein  $G$ -Prinzipalbündel  $\eta = (P, \pi, B)$  heißt universell, wenn  $\Psi$  für alle parakompakten Räume  $X$  bijektiv ist.

Es ist ein wichtiges Ergebnis, daß jede topologische Gruppe  $G$  ein universelles  $G$ -Prinzipalbündel besitzt. Ein solches wird meist mit  $(EG, p, BG)$  bezeichnet, obwohl es nur

bis auf einen geeigneten Homotopiebegriff eindeutig ist. Der Basisraum  $BG$  heißt klassifizierender Raum für die Gruppe  $G$  und dieser ist eindeutig bis auf Homotopieäquivalenz durch  $G$  bestimmt. Die resultierende Bijektion

$$\Psi : [X, BG] \cong \text{Prin}_G(X)$$

ist ein wichtiger Schritt in der Klassifikation von  $G$ -Prinzipalbündeln. Für Details siehe etwa [toD91]. Beispiele für klassifizierende Räume sind:

$$\begin{aligned} BS^1 &= P_\infty(\mathbb{C}) = \bigcup_n P_n(\mathbb{C}) & \text{und} \\ B\mathbb{Z}/2 &= P_\infty(\mathbb{R}) = \bigcup_n P_n(\mathbb{R}) & \text{(mit geeigneter Topologie, siehe Abschnitt 3.6)} \end{aligned}$$

Wir werden im nächsten Kapitel explizite Modelle für die klassifizierenden Räume  $BGL_n(\mathbb{K})$  konstruieren.

$G$ -Prinzipalbündel mit diskreter Gruppe  $G$  und reguläre Überlagerungen sind im Wesentlichen dasselbe. Aber je nach Art der getroffenen Zusammenhangsvoraussetzungen ergeben sich unterschiedliche Formulierungen. Die Situation wird übersichtlich, wenn man folgende Voraussetzungen macht:

(ZV): Der Basisraum  $B$  sei zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und der Totalraum  $P$  sei zusammenhängend.

Dann gilt, ist  $\eta = (P, \pi, B)$  ein  $G$ -Prinzipalbündel mit diskreter Gruppe  $G$ , so ist  $\pi : P \rightarrow B$  eine reguläre Überlagerung mit Decktransformationsgruppe  $D(\pi) = G$ .

Dabei heißt eine Überlagerung  $q : P \rightarrow B$  mit (ZV) regulär, wenn für ein  $x \in P$  die Untergruppe  $q_*(\pi_1(P, x))$  in  $\pi_1(B, q(x))$  ein Normalteiler ist. Umgekehrt ist jede reguläre Überlagerung  $p : P \rightarrow B$  mit (ZV) ein  $G$ -Prinzipalbündel, wobei  $G$  die (diskrete) Decktransformationsgruppe von  $p : P \rightarrow B$  ist. (Beweise: wieder [toD91] oder auch [Spa66]). Wir verwenden hier nur, daß ein  $G$ -Prinzipalbündel mit diskreter Gruppe  $G$  eine Überlagerung ist, was unmittelbar aus der lokalen Trivialität des Bündels folgt.

Die Klassifikation von Überlagerungen kann man nun verwenden, um etwa reelle Liniendbündel über einem festen Basisraum  $B$  zu klassifizieren. Wir setzen dabei voraus:

(ZVB):  $B$  sei parakompakt, zusammenhängend und lokalwegzusammenhängend.

Wir betrachten die Komposition

$$\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(B) \xrightarrow[\cong]{(1)} \text{Prin}_{O(1)}(B) \xrightarrow[\cong]{(2)} \text{Überl}_2(B) \xrightarrow{(3)} \text{Hom}(\pi_1(B, b); \mathbb{Z}/2) \quad (2.7.16)$$

Die Bijektion (2) ist der besprochene Zusammenhang zwischen  $O(1) = \{+1, -1\} \cong \mathbb{Z}/2$ -Prinzipalbündeln und doppelten Überlagerungen (diese sind automatisch regulär) und die Abbildung (3) erhält man wie folgt: Für eine doppelte Überlagerung  $p : \tilde{B} \rightarrow B$  identifizieren wir die Faser  $p^{-1}(b)$  mit  $\mathbb{Z}/2$  und ordnen  $p$  den verbindenden Homomorphismus

$$\pi_1(B, b) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, \tilde{b}) = F \cong \mathbb{Z}/2$$

aus der langen exakten Homotopiesequenz der Faserung  $p$  zu. Explizit:  $\omega$  sei ein geschlossener Weg in  $B$  mit  $\omega(0) = \omega(1) = b$ . Dann hat  $\omega$  eine wohlbestimmte Anhebung

$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{\tilde{b}} : I \longrightarrow \tilde{B}$  mit Anfangspunkt  $\tilde{b} \in p^{-1}(b)$  und  $p \circ \tilde{\omega}(1) = b$ . Ist  $\tilde{\omega}$  geschlossen, so setze  $\partial[\omega] = 1 \in \mathbb{Z}/2$ , verbindet  $\tilde{\omega}$  die beiden Punkte der Faser, so setze  $\partial[\omega] = -1$ . Dies ist unabhängig vom gewählten Anfangspunkt  $\tilde{b} = \tilde{\omega}(0)$ , wie man durch Anwendung der Decktransformation  $T \neq id$  sieht. Die Wegehochhebungseigenschaften einer Überlagerung liefern auch direkt die Homomorphie von  $\partial$ .

Unter (1) ordnen wir einem Linienbündel  $L$  sein Sphärenbündel bezüglich einer gewählten Riemannschen Metrik auf  $L$  zu. Aus den allgemeinen Sätzen folgt, daß (1) eine Bijektion ist, man kann es aber wie folgt leicht direkt herleiten: Die Umkehrabbildung zu (1) ist das Anheften von  $\mathbb{R}$  an ein  $\mathbb{Z}/2$ -Prinzipalbündel  $\eta = (\tilde{B}, p, B) \longmapsto (\tilde{B} \times_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{R}, \pi, B)$ . Wir haben schon gesehen: Für ein Linienbündel  $L$  ist  $S(L) \times_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{R}$  wieder isomorph zu  $L$  (man bildet  $(\tilde{x}, v) \in S(L) \times \mathbb{R}$  auf  $\tilde{x} \cdot v \in L$  ab). Umgekehrt: Zu  $p : \tilde{B} \rightarrow B$  sei  $\tilde{L} = \tilde{B} \times_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{R}$  das zugehörige Linienbündel. Wegen  $\tilde{B} \cong \tilde{B} \times_{\mathbb{Z}/2} \{+1, -1\}$  ist  $\tilde{B}$  ein Teilraum von  $\tilde{L}_0 = \tilde{L} - s_0(B)$ . Wählt man eine Riemannsche Metrik auf  $\tilde{L}$ , so kann man  $\tilde{L}_0$  auf  $S(\tilde{L})$  durch  $v \mapsto v / \|v\|$  "zusammenziehen". Die Zusammensetzung liefert eine  $\mathbb{Z}/2$ -äquivalente Abbildung  $\tilde{B} \longrightarrow S(\tilde{B} \times_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{R})$ , die ein Isomorphismus sein muß.

Nach dem Klassifikationssatz für Überlagerungen folgt, daß (3) unter der Voraussetzung (ZVB) injektiv ist, ein Linienbündel über  $B$  ist also durch die Komposition (3)(2)(1) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Setzt man jetzt zusätzlich voraus

(ZSZ):  $B$  sei semi-lokal-einfach zusammenhängend,

so ist (3) nach dem Klassifikationssatz für Überlagerungen auch surjektiv, also gilt:

**Satz 2.7.17.** *Erfüllt  $B$  die Voraussetzungen (ZVB) und (ZSZ), so gilt*

$$\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(B) \cong \text{Hom}(\pi_1(B, b); \mathbb{Z}/2).$$

Unter der Voraussetzung (ZVB) ist (ZSZ) äquivalent zur Existenz einer universellen Überlagerung  $p : \tilde{B} \longrightarrow B$  mit Decktransformationsgruppe  $D = \pi_1(B, b)$ . Ein vorgegebener Homomorphismus  $\psi \in \text{Hom}(\pi_1(B, b); \mathbb{Z}/2)$  liefert dann ein  $\mathbb{Z}/2$ -Prinzipalbündel

$$\tilde{B} \times_{\pi_1(B, b)} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow B,$$

das das Urbild von  $\psi$  unter (3) darstellt.

### Beispiele.

1.  $\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(S^1) \cong \text{Hom}(\pi_1(S^1, 1); \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$  mit  $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$
2.  $\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(P_n(\mathbb{R})) \cong \text{Hom}(\pi_1(P_n(\mathbb{R}), b); \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$  mit  $\pi_1(P_n(\mathbb{R}), b) \cong \mathbb{Z}/2$  für  $n > 1$
3.  $\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(S^n) = \{0\}$  mit  $\pi_1(S^n, b) = \{0\}$  für  $n > 1$

### Bemerkungen.

1. Da  $\mathbb{Z}/2$  kommutativ ist, faktorisiert jeder Homomorphismus  $\psi : \pi_1(B, b) \longrightarrow \mathbb{Z}/2$  über  $\pi_1(B, b)/K$ , wo  $K$  die Kommutator-Untergruppe von  $\pi_1(B, b)$  ist. Nun ist  $\pi_1(B, b)/K$  isomorph zur ersten singulären Homologiegruppe  $H_1(B; \mathbb{Z})$  und damit folgt

$$\text{Hom}(\pi_1(B, b); \mathbb{Z}/2) \cong \text{Hom}(H_1(B, b); \mathbb{Z}/2) \cong H^1(B; \mathbb{Z}/2).$$

Mit dieser Identifikation ist die Komposition (3)(2)(1) eine Definitionsmöglichkeit für die erste Stiefel-Whitney-Klasse  $w_1(L)$  für reelle Linienbündel.

2. Der polnische Kreis  $Y$  (siehe Abschnitt 2.9) ist ein Beispiel eines Raumes, für den (2.7.17) nicht gilt. Dieser Raum ist kompakt und wegzusammenhängend, aber nicht lokalwegzusammenhängend. Nach (2.5.14) gilt  $\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(Y) \cong \mathbb{Z}/2$  aber  $\pi_1(Y, y) = \{0\}$ . Verwendet man anstelle von singulärer jedoch Čech-Kohomologie, so bleibt  $\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(Y) \cong H^1(Y; \mathbb{Z}/2)$  richtig, wobei man natürlich (3) durch eine andere Konstruktion ersetzen muß. Interessant in diesem Zusammenhang ist auch das Beispiel des Intervalls mit doppelem Nullpunkt, siehe (3.5.15).

## 2.8 Zusätzliche Strukturen

### 2.8.1 Orientierbare Vektorbündel

Der Begriff Drehsinn im Zweidimensionalen verallgemeinert sich zur Orientierung eines Vektorraumes.

#### Definition 2.8.1.

1. Zwei geordnete Basen  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  des reellen Vektorraumes  $V$  heißen gleichorientiert, wenn die Matrix des Basiswechsels von  $a$  nach  $b$  eine positive Determinante hat. Eine Orientierung  $o_V$  wird durch eine Äquivalenzklasse gleichorientierter Basen gegeben.
2. Die Standardorientierung des  $\mathbb{R}^n$  wird durch die Standardbasis  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  induziert.
3. Ein Isomorphismus  $f : (V, o_V) \longrightarrow (W, o_W)$  zwischen orientierten Vektorräumen heißt orientierungserhaltend, wenn  $f$  eine Basis aus  $o_V$  in eine aus  $o_W$  überführt.

Die Übertragung des Orientierbarkeitsbegriffs auf Vektorbündel ist wie folgt:

**Definition 2.8.2.** Eine Orientierung eines  $n$ -dimensionalen reellen Vektorbündels  $\xi = (E, p, B)$  ist eine Funktion  $x \longmapsto o_x$  mit

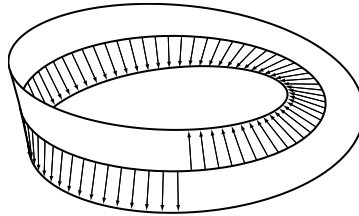
- a)  $o_x$  ist eine Orientierung von  $E_x$  für jedes  $x \in B$ .

- b)  $o_x$  ist lokal konstant, d.h. es gibt einen Atlas  $(U_i, h_i)$  von  $\xi$ , sodaß  $h_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$  faserweise orientierungserhaltend ist, wobei  $\mathbb{R}^n$  die Standardorientierung besitzt.

Es ist dann klar, wie der Begriff orientierungserhaltender Isomorphismus zwischen orientierten Vektorbündeln zu erklären ist. Die Äquivalenzklassen von  $n$ -dimensionalen orientierten Vektorbündeln über  $B$  bezüglich orientierungserhaltender Isomorphie bezeichnen wir mit

$${}^+\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^n(B).$$

Während ein Vektorraum  $V$  genau zwei Orientierungen besitzt, gibt es orientierbare und nicht orientierbare Vektorbündel. Das bekannte Bild



**Abb. 2.15.** Orientierungsversuch für das Möbius-Bündel

zeigt anschaulich, daß das Möbiusbündel nicht orientierbar ist. Allgemeiner gilt für Linienbündel:

**Lemma 2.8.3.** *Ein reelles Linienbündel  $L$  über einem parakompakten Basisraum  $B$  ist genau dann orientierbar, wenn es trivial ist.*

*Beweis.* Man wählt eine Metrik und betrachtet das zugehörige Sphärenbündel  $S(L)$  von  $L$ . Indem man zu  $b \in B$  den zur Orientierung von  $E(L)_b$  gehörenden Basisvektor in  $S(L)_b = \{c, -c\}$  auswählt, erhält man einen stetigen nullstellenfreien Schnitt von  $L$ . Damit ist  $L$  trivial.  $\square$

Beispiele (siehe etwa Abschnitt 3.5.2) zeigen, daß orientierbare Linienbündel über allgemeineren Basisräumen nicht unbedingt trivial sein müssen.

Für ein orientiertes Vektorbündel lassen sich die Übergangsfunktionen mit Werten in  $GL_n(\mathbb{R})^+ = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$  (bzw.  $SO(n)$ , wenn eine Metrik vorliegt) wählen. Orientierte  $n$ -dimensionale Vektorbündel mit Metrik sind damit assoziiert zu  $SO(n)$ -Prinzipalbündeln. Ein Beispiel hierzu ist das  $SO(n)$ -Prinzipalbündel

$$SO(n) \longrightarrow SO(n+1) \longrightarrow SO(n+1)/SO(n) \cong S^n,$$

das assoziiert zum orientierten Tangentialbündel  $\tau S^n$  der  $n$ -Sphäre ist (siehe (2.7.11)).



Die Orientierbarkeit eines  $n$ -dimensionalen Vektorbündels  $\xi$  lässt sich auf die des Lini-  
enbündels  $\Lambda^n(\xi)$  zurückführen:

**Lemma 2.8.4.** *Ein  $n$ -dimensionales Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$  ist genau dann orientierbar, wenn seine  $n$ -te äußere Potenz  $\Lambda^n(\xi)$  orientierbar ist.*

*Beweis.* Ordnet man einer orientierten Basis  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  eines  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $V$  das Basiselement  $b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n$  in  $\Lambda^n(V)$  zu, erhält man eine Bijektion zwischen den Orientierungen von  $V$  und denen von  $\Lambda^n(V)$ . Da eine orientierte Bündelkarte von  $\xi$  eine solche von  $\Lambda^n(\xi)$  induziert, ist die Übertragung von Vektorräumen auf Bündel klar.  $\square$

Wie bei Vektorräumen gilt: Setzt man die die Orientierungen definierenden Basen von  $\xi$  und  $\eta$  faserweise zusammen, erhält man eine induzierte Orientierung auf  $\xi \oplus \eta$ . Sind zwei der drei Bündel  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\xi \oplus \eta$  orientiert, so gibt es eine dazu passende Orientierung auf dem dritten.

Ist  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  eine Basis des  $n$ -dimensionalen komplexen Vektorraums  $W$ , so ist  $\alpha_{\mathbb{R}} := (a_1, ia_1, a_2, ia_2, \dots, ia_n)$  eine reelle Basis des unterliegenden reellen Vektorraums  $r(W)$ , deren Orientierungsklasse unabhängig von der Auswahl der komplexen Basis  $\alpha$  ist. Ist nämlich  $\beta$  eine weitere komplexe Basis, so lassen sich die durch  $\alpha$  und  $\beta$  definierten Matrizen  $A$  und  $B$  ( $a_i$  definiert die  $i$ -te Spalte von  $A$ ) in der wegzusammenhängenden topologischen Gruppe  $GL_n(\mathbb{C})$  durch einen Weg verbinden. Damit hängt die Orientierungsklasse von  $\alpha_{\mathbb{R}}$  stetig von  $\alpha$  ab, ist also konstant. Alternativ kann man die Determinante der Basiswechsellmatrix von  $\alpha_{\mathbb{R}}$  nach  $\beta_{\mathbb{R}}$  als positiv nachweisen. Komplexe Vektorbündelkarten sind also immer orientierungserhaltend bezüglich so definierten Orientierungen. Damit besitzt das unterliegende reelle Bündel  $r(\xi)$  eines komplexen Vektorbündels  $\xi$  immer eine kanonische Orientierung. Als Beispiel betrachten wir reelle Ebenenbündel. Ein komplexes Linienbündel  $L$  definiert also kanonisch ein orientiertes reelles Ebenenbündel. Ist der Basisraum parakompakt, so gilt auch die Umkehrung. Ein reelles orientiertes Ebenenbündel  $E$  lässt nach Wahl einer Metrik Übergangsfunktionen in  $SO(2)$  zu. Wegen  $SO(2) \cong S^1 = U(1)$  definieren diese Übergangsfunktionen ein komplexes Linienbündel  $L$  mit  $r(L) = E$ .

In (2.7.16) wurde eine Abbildung

$$u : \text{Vekt}_{\mathbb{R}}^1(B) \longrightarrow \text{Hom}(\pi_1(B, b); \mathbb{Z}/2)$$

definiert, die unter geeigneten Zusammenhangsvoraussetzungen injektiv bzw. bijektiv ist. Identifiziert man  $\text{Hom}(\pi_1(B, b); \mathbb{Z}/2)$  mit  $H^1(B; \mathbb{Z}/2)$ , so ist  $u(L)$  die erste Stiefel-Whitney-Klasse  $w_1(L)$  von  $L$ . Mit

$$w_1(\xi) := w_1(\Lambda^n \xi)$$

erweitern wir die Definition von  $w_1$  auf  $n$ -dimensionale reelle Bündel. Damit erhält man das mit dieser Definition für parakompakte, lokalwegzusammenhängende Basisräume gültige Orientierbarkeitskriterium

$$\xi \text{ ist orientierbar} \iff w_1(\xi) = 0.$$

Insbesondere folgt für solche Basisräume aus der Bedingung  $\pi_1(B; b) = 0$ , daß alle Bündel über  $B$  orientierbar sind. Daß für Linienbündel  $L_1, L_2$  die erste Stiefel-Whitney Klasse ein Homomorphismus ist, also

$$w_1(L_1 \otimes L_2) = w_1(L_1) + w_1(L_2)$$

gilt, ist nicht schwer mit der Definition (2.7.16) nachzuweisen. Mit den Eigenschaften der äußeren Potenz folgt dann auch sofort

$$w_1(\xi_1 \oplus \xi_2) = w_1(\xi_1) + w_1(\xi_2)$$

für beliebige Bündel  $\xi_1, \xi_2$ .

## 2.8.2 G-Vektorbündel, eine kurze Einführung

Wir diskutieren hier nur einige einfache Spezialfälle, einmal zum Kennenlernen der Begriffe zum anderen zur Konstruktion von Beispielen. Nur auf diese wird später zurückgegriffen.

Es sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $X$  ein  $G$ -Raum, d.h. ein Raum mit  $G$ -Operation  $G \times X \rightarrow X$  (siehe Abschnitt 2.7).

**Definition 2.8.5.** Ein Vektorbündel  $\xi = (E, p, B)$  über dem  $G$ -Raum  $X$  heißt  $G$ -Vektorbündel, wenn zusätzlich gilt:

- (1)  $E$  ist ein  $G$ -Raum und  $p : E \rightarrow X$  ist  $G$ -äquivariant
- (2) Für jedes  $g \in G$  ist die Abbildung  $g : E_x \rightarrow E_{g \cdot x}$  linear.

$G$ -Homomorphismen und  $G$ -Isomorphismen von  $G$ -Vektorbündeln werden auf nahe-liegende Weise erklärt, sie sind zusätzlich  $G$ -äquivariant.

### Beispiele.

1.  $G = S^1 \subset \mathbb{C}$ ,  $\eta = (S^{2n+1} \times \mathbb{C}, p, S^{2n+1})$ , die Gruppe  $S^1$  operiert auf  $\mathbb{C}$  und  $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  über die komplexe Skalarmultiplikation.
2.  $G = \mathbb{Z}/2 = \{id, A\}$ ,  $\omega = (S^n \times \mathbb{R}, p, S^n)$ ,  $A$  mit  $A(x) = -x$  sowohl für  $x \in \mathbb{R}$  wie auch  $x \in S^n$  (Antipodenabbildung).

$G$  sei jetzt eine endliche Gruppe, die frei auf einem Hausdorffraum  $X$  operiert. Dann ist  $q : X \rightarrow X/G$  eine  $|G|$ -fache Überlagerung (und ein  $G$ -Prinzipalbündel), denn zu jedem  $x \in X$  kann man eine offene Umgebung  $U \subset X$  finden, sodaß  $(g \cdot U) \cap U = \emptyset$  für jedes  $g \neq e$  gilt. Dann gilt  $q^{-1}(q(U)) = \bigcup g \cdot U$ .

Zu einem  $G$ -Vektorbündel  $\xi = (E, p, X)$  definiert man

$$\xi/G := (E/G, \bar{p}, X/G),$$

wobei  $\bar{p}$  die von  $p$  induzierte Abbildung auf den Orbiträumen ist.

**Proposition 2.8.6.** *Die endliche Gruppe  $G$  operiere frei auf dem Hausdorffraum  $X$  und  $\xi = (E, p, X)$  sei ein  $G$ -Vektorbündel. Dann ist  $\xi/G = (E/G, \bar{p}, X/G)$  ein Vektorbündel.*

*Beweis.* Den Orbit  $Gx$  von  $x$ , aufgefaßt als Element in  $X/G$ , bezeichnen wir mit  $[x]$ . Offensichtlich ist

$$p^{-1}([x]) = \{[v] \mid v \in E_x\} \cong G \cdot E_x = \{G \cdot v \mid v \in E_x\}$$

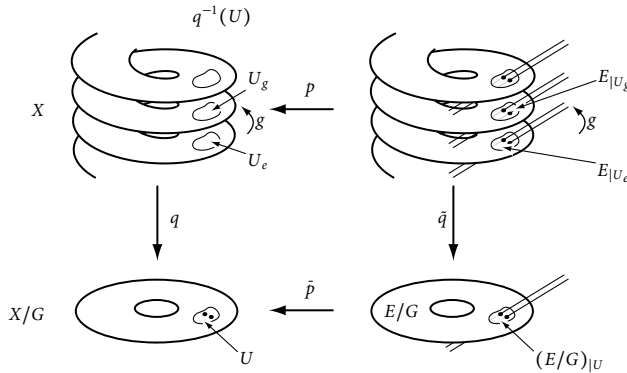
ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, sodaß VB1 erfüllt ist. Zum Nachweis von VB2 wählen wir eine offene Umgebung  $U$  von  $[x]$  in  $X/G$  über der die Überlagerung  $q : X \rightarrow X/G$  trivial ist. Wir können die Gruppe  $G$  als Indexmenge für die Blätter verwenden, d.h. es ist

$$q^{-1}(U) = \bigcup_{g \in G} U_g$$

und  $q|_{U_g} : U_g \rightarrow U$  ist ein Homöomorphismus. Die Gruppe  $G$  permutiert dann einfach die Blätter  $U_g$ . Weiterhin können wir voraussetzen, daß  $E|_{U_e}$  trivial ist, sonst wähle man ein kleineres  $U'_e$  in  $U_e$  und ersetzt  $U$  durch  $q(U'_e)$ . Die Einschränkung  $E|_{q^{-1}(U)}$  ist dann disjunkte Vereinigung der  $E|_{U_g}$ , die alle paarweise untereinander isomorph sind. Offensichtlich schränkt sich die Quotientenabbildung  $\tilde{q} : E \rightarrow E/G$  zu einer faserweise bijektiven linearen stetigen Abbildung

$$\tilde{q}|_{E|_{U_e}} : E|_{U_e} \rightarrow (E/G)|_U$$

ein. Diese ist ein Homöomorphismus, da  $\tilde{q}$  als Quotientenabbildung hier offen ist.  $\square$



### Beispiele.

1.  $\eta/S^1$  ist das Hopf-Bündel (mit  $G = S^1$  als nicht endlicher Beispielsgruppe).
2.  $\omega/(\mathbb{Z}/2)$  ist das kanonische Linienbündel  $\lambda_n^{\mathbb{R}}$  über  $P_n(\mathbb{R})$ .

Die Quotientenabbildung  $\tilde{q} : E \rightarrow E/G$  ist eine faserweise bijektive Abbildung über  $q : X \rightarrow X/G$ , damit folgt sofort

$$\xi \cong q^*(\xi/G) \quad (2.8.7)$$

und zwar zunächst einmal als Isomorphie von Vektorbündeln.

Ist  $\eta = (F, \pi, X/G)$  ein Vektorbündel, so definiert  $(x, f) \mapsto (gx, f)$  eine  $G$ -Operation auf  $q^*(F) = \{(x, f) \in X \times F \mid q(x) = \pi(f)\}$ , die  $q^*(\eta)$  zu einem  $G$ -Vektorbündel macht. Mit dieser  $G$ -Operation auf  $q^*(\xi/G)$  ist (2.8.7) sogar ein Isomorphismus von  $G$ -Vektorbündeln.

Umgekehrt ist  $q^*(\eta)/G$  auch wieder isomorph zu  $\eta$ .

Bis auf natürliche Isomorphie sind die  $G$ -Vektorbündel über dem freien  $G$ -Raum  $X$  also äquivalent zu den Vektorbündeln über  $X/G$ .

### Bemerkungen.

1.  $G$ -Vektorbündel bilden den geeigneten Rahmen um die Tangentialbündel von Quotientenmannigfaltigkeiten  $M/G$  einer differenzierbaren Operation einer endlichen (oder Lie-) Gruppe auf Mannigfaltigkeiten zu bestimmen, siehe etwa [toD91].
2. Das Anheften eines Vektorraumes  $\mathbb{K}^n$  an ein  $GL_n(\mathbb{K})$ -Prinzipalbündel ist ein Spezialfall der Quotientenkonstruktion  $\xi \mapsto \xi/G$ .

### Beispiel 2.8.8. Vektorbündel über $P_2(\mathbb{R})$

Durch Angabe von  $\mathbb{Z}/2$ -Vektorbündeln über dem  $\mathbb{Z}/2$ -Raum  $S^2$  erhält man Vektorbündel über  $P_2(\mathbb{R}) = S^2/(\mathbb{Z}/2)$  wie folgt (vergleiche [toD91]):

Die 2-Sphäre  $S^2$  ist mit der Operation von  $\mathbb{Z}/2 = \{id, A\}$ , wobei  $A$  die Antipodenabbildung ist, ein freier  $\mathbb{Z}/2$ -Raum mit Orbitraum  $P_2(\mathbb{R})$ . Identifiziert man  $S^2$  mit  $P_1(\mathbb{C}) = S^3/S^1$ , so wird die Antipodenabbildung durch die Zuordnung  $(z_1, z_2) \mapsto (\bar{z}_2, -\bar{z}_1)$  für  $(z_1, z_2) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$  auf  $S^3/S^1$  induziert, siehe Abschnitt 1.5.

Es sei  $L^k = (E^k, \pi_k, P_1(\mathbb{C}))$ ,  $E^k = (S^3 \times \mathbb{C})/\sim_k$ ,  $(x, v) \sim_k (\lambda \cdot x, \lambda^{-k} \cdot v)$  für  $\lambda \in S^1$  die in (1.4.11) hergeleitete Darstellung der  $k$ -ten Tensorpotenz  $L^{\otimes k}$  (1.1.9) des kanonischen komplexen Linienbündels  $L = \lambda_1^{\mathbb{C}}$ . Dann induziert  $(z_1, z_2, u) \mapsto (-\bar{z}_2, \bar{z}_1, \bar{u})$  einen wohldefinierten Vektorbündel-Homomorphismus  $\alpha: L^k \rightarrow L^k$  (von reellen Bündeln). Für gerades  $k = 2m$  gilt  $\alpha^2 = id$ , außerdem operiert  $\mathbb{Z}/2 = \{id, \alpha\}$  frei und macht  $L^{2m}$  zu einem  $\mathbb{Z}/2$ -Bündel über dem  $\mathbb{Z}/2$ -Raum  $S^2 = P_1(\mathbb{C})$ . Das Quotientenbündel  $(L^{2m}/(\mathbb{Z}/2), \tilde{\pi}_{2m}, P_1(\mathbb{C})/(\mathbb{Z}/2))$  bezeichnen wir mit  $F^m$ .

Die Bündel  $F^m$  und  $F^{-m}$  sind isomorph, der Isomorphismus wird durch die komplexe Konjugation induziert. Die Menge  $\{F^m \mid m = 0, 1, 2, \dots\}$  besteht aus paarweise nichtisomorphen Bündeln, denn dies bleibt so, wenn wir diese Bündel wieder unter  $S^2 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  auf  $S^2$  zurückziehen (siehe Berechnung von  $\text{Vekt}_{\mathbb{R}}^2(S^2)$  weiter unten). Die Bündel  $F^m$  sind alle nicht orientierbar: Läßt man nämlich  $\mathbb{Z}/2$  auf  $S^1$  über die Antipodenabbildung und auf  $\mathbb{C}$  durch komplexe Konjugation operieren, so erhält man ein reelles  $\mathbb{Z}/2$ -Vektorbündel  $\beta = (S^1 \times \mathbb{C}, pr, S^1)$  mit Quotientenbündel  $\mathbb{R} \oplus \lambda_1^{\mathbb{R}}$  über  $P_1(\mathbb{R})$  (siehe Beispiel 2)). Die Abbildung  $z \mapsto [z:1]/\sqrt{2}$  definiert dann eine  $\mathbb{Z}/2$ -äquivariante Abbildung  $j: S^1 \rightarrow P_1(\mathbb{C})$  mit  $j^*(L^m) = \beta$ . Die zugehörige Quotientenabbildung  $\tilde{j}: P_1(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  induziert dann aus  $F^m = L^{2m}/(\mathbb{Z}/2)$  das nicht orientierbare Bündel  $\beta/(\mathbb{Z}/2) = \mathbb{R} \oplus \lambda_1^{\mathbb{R}}$ , sodaß  $F^m$  ebenfalls nicht orientierbar sein kann.

## 2.9 Ergänzungen

### 2.9.1 Parakompakte Räume und Zerlegungen der Eins

Der Begriff parakompakt ist eine geeignete Verallgemeinerung des Begriffs kompakt, um sinnvolles Schließen von lokal auf global weiter zu ermöglichen. Dies geschieht meist über eine Zerlegung der Eins. Vorab sei an einige Bezeichnungen erinnert:

a) Für eine stetige Funktion  $t : X \longrightarrow \mathbb{R}$  heißt der Abschluß von  $t^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$  der Träger  $tr(t)$  von  $t$ .

b) Eine Überdeckung  $(V_i)_{i \in I}$  eines Raumes  $X$  heißt Verfeinerung der Überdeckung  $(U_j)_{j \in J}$ , wenn jedes  $V_i$  ganz in einem  $U_j$  enthalten ist.

c) Eine Überdeckung  $(V_i)_{i \in I}$  von  $X$  heißt lokal endlich, wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung besitzt, die nur endlich viele der  $V_i$  trifft.

d) Eine Familie  $(t_j)_{j \in J}$  von stetigen Funktionen  $t_j : X \longrightarrow \mathbb{R}$  heißt lokal endlich, wenn die zugehörige Trägerfamilie  $(tr(t_j))_{j \in J}$  lokal endlich ist.

**Definition 2.9.1.** Eine Familie  $(t_j)_{j \in J}$  von stetigen Funktionen  $t_j : X \longrightarrow \mathbb{R}$  heißt Zerlegung der Eins, wenn sie lokal endlich ist und die dann für jedes  $x \in X$  definierte Summe  $\sum_{j \in J} t_j(x)$  den Wert 1 hat.

e) Eine Zerlegung der Eins  $(t_j)_{j \in J}$  heißt zu einer gegebenen Überdeckung  $(V_i)_{i \in I}$  von  $X$  untergeordnet, wenn jeder Träger  $tr(t_j)$  ganz in einem der  $V_i$  liegt, d.h. die Trägerfamilie eine Verfeinerung von  $(V_i)_{i \in I}$  ist.

Die folgenden beiden Definitionen des Begriffs parakompakt sind äquivalent:

**Definition 2.9.2.** Ein Raum  $X$  heißt parakompakt, wenn  $X$  ein Hausdorff-Raum ist und jede offene Überdeckung  $(U_j)_{j \in J}$  von  $X$  eine offene lokal endliche Verfeinerung  $(V_i)_{i \in I}$  besitzt.

**Definition 2.9.3.** Ein Raum  $X$  heißt parakompakt, wenn  $X$  ein Hausdorff-Raum ist und jede offene Überdeckung  $(U_j)_{j \in J}$  von  $X$  eine untergeordnete Zerlegung der Eins zuläßt.

**Beispiele** (für parakompakte Räume).

1. Kompakte Räume
2. Metrische Räume
3. Ein regulärer Raum, der abzählbare Vereinigung von kompakten Teilräumen ist.

4. Ein Raum  $X$  mit der schwachen Topologie (siehe Abschnitt 3.6) bezüglich einer Folge von kompakten Unterräumen  $A_1 \subset A_2 \subset \dots A_i \subset$
5. CW-Komplexe
6. Ist  $X$  parakompakt und  $K$  kompakt, so ist  $X \times K$  parakompakt.
7. Ist  $X$  parakompakt und  $A \subset X$  abgeschlossen, so sind  $A$  und  $X/A$  parakompakt.

(Literatur: siehe etwa [Hat02].)

Folgendes nützliche technische Lemma (siehe [MiS74]) zeigt die Relevanz des Begriffs parakompakt für Bündel:

**Lemma 2.9.4.** *Für jedes Faserbündel  $\xi$  über einem parakompakten Raum  $B$  gibt es eine lokal endliche Überdeckung von  $B$  durch abzählbar viele offene Teilmengen  $U_1, U_2, \dots$ , sodaß  $\xi|_{U_i}$  trivial ist für jedes  $i$ .*

## 2.9.2 Einhängungen und Schleifenräume

Im Folgenden bezeichnen wir die Äquivalenzklasse eines Punktes  $x \in X$  in einem Quotientenraum  $X/A$  immer mit  $[x]$ .

**Unreduzierte Einhängungen und Kegel.** Identifiziert man im Produkt  $X \times [0, 1]$  jeweils den oberen Deckel  $X \times \{1\}$  und den Boden  $X \times \{0\}$  zu einem Punkt, erhält man die Einhängung des Raumes  $X$  :

$$SX = (X \times [0, 1] / X \times \{0\}) / X \times \{1\},$$

ausführlicher

**Definition 2.9.5.** Für einen topologischen Raum  $X$  wird die (unreduzierte) Einhängung oder Suspension  $SX$  definiert als Quotientenraum

$$SX := X \times [0, 1] / \sim$$

nach der durch

$$\begin{array}{ll} (x, +1) \sim (y, +1) & \text{für alle } x, y \in X \\ (x, 0) \sim (y, 0) & \text{für alle } x, y \in X \\ (x, t) \sim (y, t) & \text{nur wenn } y = x \text{ für } t \neq 0, 1 \end{array}$$

gegebenen Äquivalenzrelation.

Den unreduzierten Kegel  $CX$  eines Raumes  $X$  definiert man als Quotientenraum

$$CX := X \times [0, 1] / X \times \{0\}$$

mit kanonischer Inklusion  $i : X \hookrightarrow CX$ ,  $i(x) = [x, 1]$ . Dann gilt

$$SX = CX/X.$$

Ein Kegel  $CX$  ist zusammenziehbar und eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann nullhomotop, wenn sie eine stetige Erweiterung zu  $F : CX \rightarrow Y$  besitzt. Die Einhängung  $SX$  ist Vereinigung der Kegel

$$C_1X := \{[x, t] \mid t \geq 1/2\} \quad \text{und} \quad C_0X := \{[x, t] \mid t \leq 1/2\}$$

Es ist

$$C_0X \cup C_1X = SX \quad \text{und} \quad C_0X \cap C_1X = X \times \{1/2\} = X.$$

Zu einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  erhält man durch

$$Sf([x, t]) := [f(x), t]$$

ihre Einhängung  $Sf : SX \rightarrow SY$ .

Ist  $X$  kompakt oder parakompakt, so gilt dies auch für  $SX$ . Für kompakte Räume  $X$ ,  $A \subset X$  gilt trivialerweise  $S(X/A) \cong SX/SA$ . Die Einhängung der  $n$ -Sphäre ist homöomorph zur  $(n+1)$ -Sphäre.  $SX$  ist wegzusammenhängend ( $X \neq \emptyset$ ).

**Reduzierte Einhängungen.** Ist  $X$  ein Raum mit Basispunkt  $x_0 \in X$ , so definiert man die reduzierte Einhängung  $\Sigma X$ , indem man zusätzlich den Quotienten nach dem zusammenziehbaren Unterraum  $\{x_0\} \times [0, 1]$  bildet:

$$\Sigma X := SX / \{x_0\} \times [0, 1] = X \times I / (X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I).$$

Dabei bildet  $X \times \partial I \cup \{x_0\} \times [0, 1]$  den Basispunkt von  $\Sigma X$ . Für eine basispunkterhaltende Abbildung  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  ist dann  $\Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$  definiert und wieder basispunkterhaltend. Die reduzierte Einhängung von  $S^n$  ist ebenfalls homöomorph zu  $S^{n+1}$  ([Spa66, Ch. I, 6]).

Die Quotientenabbildung  $SX \rightarrow \Sigma X$  von unreduzierter auf die reduzierte Einhängung ist eine Homotopieäquivalenz, falls  $X$  wohlpunktiert (siehe (3.6.4)) ist. Für Vektorbündel über kompakten Räumen wird diese Voraussetzung nicht benötigt, denn mit (2.5.12) hat man  $\text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(\Sigma X) \cong \text{Vekt}_{\mathbb{K}}^n(SX)$  für einen kompakten Raum  $X$ . Den reduzierten Kegel  $C'X := CX / \{x_0\} \times I$  werden wir meist in der Notation nicht vom unreduzierten Kegel unterscheiden und auch mit  $CX$  bezeichnen.

**Einpunktvereinigung und reduziertes Produkt.** Die Einpunktvereinigung oder das “wedge”  $X \vee Y$  von zwei punktierten Räumen  $(X, x_0)$  und  $(Y, y_0)$  ist definiert als Unterraum

$X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$  des Produkts  $X \times Y$  mit Basispunkt  $(x_0, y_0)$ . Das reduzierte oder “smash”-Produkt mit Basispunkt  $[(x_0, y_0)]$  erhält man dann als Quotientenraum:

$$X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$$

Damit läßt sich die reduzierte Einhängung  $\Sigma X$  auch als  $X \wedge S^1$  schreiben. Insbesondere gilt  $S^n \cong S^1 \wedge S^1 \wedge \dots \wedge S^1$ . Beim reduzierten Produkt für beliebige Räume muß man mit der Assoziativität allerdings vorsichtig sein.

**Die Komultiplikation auf  $\Sigma X$  und Gruppenstrukturen auf  $[A, B]_0$ .** Eine kanonische Gruppenstruktur auf der Menge der basispunkterhaltenden Homotopieklassen  $[\Sigma X, Y]_0$  erhält man wie folgt:

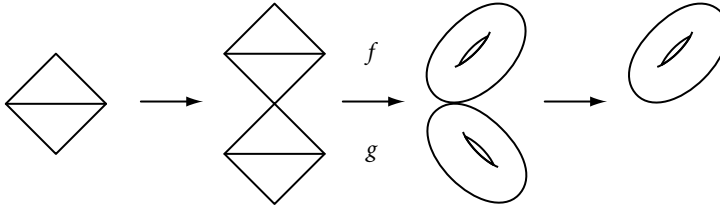
Die Abbildung  $q : \Sigma X \longrightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$  mit

$$q([z, t]) := \begin{cases} ([z, 2t], x_0) & \text{für } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (x_0, [z, 2t - 1]) & \text{für } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

het Komultiplikation von  $(\Sigma X, x_0)$ . Diese induziert zusammen mit der Faltungsabbildung  $r : Y \vee Y \longrightarrow Y$ ,  $r(y, y_0) = r(y_0, y) = y$ , durch

$$\Sigma X \xrightarrow{q} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{f \vee g} Y \vee Y \xrightarrow{r} Y \quad (2.9.6)$$

eine Multiplikation auf der Homotopiemenge  $[\Sigma X, Y]_0$ , die die übliche Multiplikation von  $\pi_n(Z) = [S^n, Z]_0$  verallgemeinert.



Ist  $(G, \mu)$  eine topologische Gruppe (mit dem neutralen Element  $e$  als Basispunkt), dann tragen die Homotopiemengen

$$[X, G] \quad \text{und} \quad [X, G]_0$$

Gruppenstrukturen, die von  $\mu$  induziert werden. Damit sind auf  $[\Sigma X, G]_0$  zwei Gruppenstrukturen erklärt. Es ist jedoch eine ganz allgemeine Tatsache, daß diese immer übereinstimmen und sogar kommutativ sind (siehe [Spa66, Sec. 6]):

**Lemma 2.9.7.** *Für eine topologische Gruppe  $G$  stimmen die durch die Komultiplikation auf  $\Sigma X$  und die durch die Multiplikation auf  $G$  in  $[\Sigma X, G]_0$  induzierte Gruppenstrukturen überein.*



Insbesondere läßt sich die übliche Addition von Homotopieklassen in  $\pi_m(G, e)$  auch durch das von der Gruppenmultiplikation  $\mu$  induzierte Produkt beschreiben.

Die Vergißabbildung  $F : [X, Y]_0 \longrightarrow [X, Y]$  ist im Allgemeinen nicht bijektiv, für  $X = S^m$  und eine wegzusammenhängende Gruppe  $G$  gilt jedoch (siehe Abschnitt 3.6)

$$[S^m, G] \cong [S^m, G]_0 \cong \pi_m(G, e) \quad (2.9.8)$$

**Schleifenräume.** Es sei  $(Y, y_0)$  ein Raum mit Basispunkt. Die Menge der Schleifen in  $y_0$

$$\Omega Y = \Omega(Y, y_0) := \{\omega : I \rightarrow Y \mid \omega(0) = \omega(1) = y_0, \omega \text{ stetig}\}$$

versehen mit der kompakt-offenen Topologie (definiert, indem man die Mengen  $\{\omega \mid \omega(K) \subset U\}$  für  $K \subset I$  kompakt und  $U \subset Y$  offen als Subbasis der Topologie verwendet) heißt Schleifenraum von  $Y$ . Verknüpfung von Wegen induziert ein Produkt

$$m : \Omega Y \times \Omega Y \longrightarrow \Omega Y,$$

das jedoch nur bis auf Homotopie assoziativ ist. Auf  $[X, \Omega Y]_0$  induziert  $m$  eine Gruppenstruktur. Fast nach Definition der Fundamentalgruppe folgt  $\pi_0(\Omega Y) = \pi_1(Y, y_0)$ . Dies verallgemeinert sich zu  $\pi_n(\Omega Y) = \pi_{n+1}(Y, y_0)$  bzw. zu

$$[X, \Omega Y]_0 \cong [\Sigma X, Y]_0, \quad (2.9.9)$$

wobei auch die von  $m$  bzw.  $q$  induzierten Gruppenstrukturen ineinander übergehen. Hierbei wird einer Abbildung  $g : \Sigma X \longrightarrow Y$  ihre Adjungierte  $\hat{g} : X \longrightarrow \Omega Y$  mit  $\hat{g}(x)(t) = g([x, t])$  zugeordnet (Literatur: [Spa66], [Hat02, Appendix]).

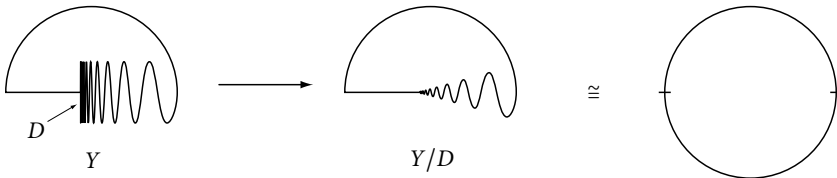
### 2.9.3 Der polnische Kreis

In der Ebene  $\mathbb{R}^2$  sei  $Y$  die Vereinigung der folgenden Teilmengen:

$$\begin{aligned} A &:= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 1\} \\ B &:= \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, y = 0\} \\ C &:= \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, y = \tfrac{1}{2} \sin(\tfrac{\pi}{x})\} \\ D &:= \{(0, y) \mid -\tfrac{1}{2} \leq y \leq \tfrac{1}{2}\} \end{aligned}$$

$$Y := A \cup B \cup C \cup D$$

$Y$  heißt polnischer- oder Pseudo-Kreis.



$Y$  hat folgende leicht zu verifizierende Eigenschaften:

1.  $Y$  ist kompakt (da beschränkt und abgeschlossen,  $\tilde{C} = C \cup D$ ).
2.  $Y$  ist wegzusammenhängend aber nicht lokal wegzusammenhängend.
3.  $Y$  ist einfach zusammenhängend, d.h.  $\pi_1(Y, y_0) = 0$ .

Definiere  $f : Y \longrightarrow S^1$  durch

$$f(x, y) := \begin{cases} (x, y) & \text{für } (x, y) \in A \subset Y \\ (x, -\sqrt{1-x^2}) & \text{für } (x, y) \in B \cup C \subset Y \\ (0, -1) & \text{für } (0, y) \in D \subset Y, \end{cases}$$

dann ist  $f$  stetig und surjektiv. Den Quotientenraum  $Y/D$  von  $Y$  nach dem zusammenziehbaren Unterraum  $D$  kann man mit  $S^1$  identifizieren, denn die Abbildung  $f$  faktorisiert über  $Y/D$  zu einer stetigen Bijektion  $\tilde{f} : Y/D \longrightarrow S^1$ , die wegen der Kompaktheit der Räume ein Homöomorphismus ist. Für die singulären Homologiegruppen gilt  $H_1(Y/D; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  aber  $H_1(Y, D; \mathbb{Z}) = 0$ , wie sofort aus  $\pi_1(Y, y_0) = 0$  folgt.

## 2.9.4 Exakte Homotopiesequenzen, Faserungen und Kofaserungen

**Exakte Folgen.** Eine Folge

$$\longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{h_i} M_i \xrightarrow{h_{i-1}} M_{i-1} \longrightarrow$$

von punktierten Mengen (d.h. Mengen mit ausgezeichneten Elementen  $m_i \in M_i$ ) und entsprechenden Abbildungen heißt exakt bei  $M_i$ , genau dann wenn

$$\text{Bild}(h_i) = (h_{i-1})^{-1}(m_{i-1})$$

gilt. Für basispunkterhaltende Abbildungen  $f_i$  ist damit der Exaktheitsbegriff für

$$\longrightarrow [X, Y_i]_0 \xrightarrow{f_{i*}} [X, Y_{i-1}]_0 \xrightarrow{f_{i-1*}} [X, Y_{i-2}]_0 \longrightarrow$$

erklärt, wobei man als ausgezeichnetes Element jeweils die Klasse der konstanten Abbildung verwendet. Bei Vorliegen von Gruppen und Gruppenhomomorphismen ist dies der übliche Exaktheitsbegriff. Man beachte jedoch, daß man - ohne Vorliegen von Gruppenstrukturen - nur Aussagen über das Urbild  $(h_{i-1})^{-1}(m_{i-1})$  des ausgezeichneten Elements  $m_{i-1}$  erhält, die anderen Urbilder  $(h_{i-1})^{-1}(m)$  können ganz anders aussehen.

**Die Homotopiehochhebungseigenschaft und Faserungen.** Ein wichtiges Hilfsmittel zur Berechnung von Homotopiegruppen sind Faserungen (Literatur: [toD91], [Whi78], [Hat02], [Bau71]).

**Definition 2.9.10.** a) Eine stetige Abbildung  $\pi : E \rightarrow B$  hat die Homotopiehochhebungseigenschaft (HHE) für den Raum  $X$ , falls zu jedem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

eine Abbildung  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$  existiert, die dieses Diagramm zu

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow \pi \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

kommutativ ergänzt.

b) Die Abbildung  $\pi$  heißt (Hurewicz-)Faserung, wenn sie die HHE für alle  $X$  besitzt.

c) die Abbildung  $\pi$  heißt punktierte Faserung, wenn man in den Definitionen a) und b) zusätzlich Basispunkterhaltung verlangt.

**Bemerkung.** Die Abbildung  $H$  ist eine Homotopie von  $\pi \circ f$  nach  $H(-, 1)$  deren Anfang  $H(-, 0)$  zu  $f$  angehoben ist. Hat  $\pi$  die HHE, so kann man die ganze Homotopie  $H$  zu  $\tilde{H}$  mit  $\tilde{H}(-, 0) = f$  anheben und das Liftungsproblem wird zu einem Homotopieproblem, d.h. hängt nur von der Homotopieklasse der Abbildung ab.

**Beispiele** (für Faserungen).

1. Überlagerungen sind Faserungen.
2. Faserbündel über einer parakompakten Basis sind Faserungen (siehe: [Spa66, Ch 2.7], [May99]), dieses Resultat werden wir zur Vereinfachung der Formulierungen ohne Beweis verwenden. Für die Anwendungen reicht aber meist die leichter zu beweisende Version aus, daß ein Faserbündel die Homotopiehochhebungseigenschaft für alle CW-Komplexe  $X$  hat (siehe etwa [Hat02, Sec 4.2]).
3. Bis auf eine Homotopieäquivalenz läßt sich jede Abbildung  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  durch eine Faserung ersetzen: Definiere den Wegeraum  $P_f$  durch

$$P_f := \{(x, \omega) \mid \omega : I \rightarrow Y \text{ ist ein Weg mit } \omega(0) = f(x)\}$$

(mit der kompakt-offenen Topologie) und die Homotopiefaser  $F_f$  durch

$$F_f := \{(x, \omega) \in P_f \mid \omega(1) = y_0, \omega(0) = f(x)\} \subset P_f.$$

Die Abbildung  $\pi : P_f \rightarrow Y$  mit  $\pi(x, \omega) = \omega(1)$  ist dann eine punktierte Faserung mit Faser  $F_f$

$$F_f \rightarrow P_f \rightarrow Y,$$

wobei  $P_f$  über die Abbildungen  $(x, \omega) \mapsto x, x \mapsto (x, c_{f(x)})$  zu  $X$  homotopieäquivalent ist. Dabei ist  $c_{f(x)}$  der konstante Weg mit  $c_{f(x)}(t) = f(x)$  (siehe etwa [Hat02, Sec 4.3]).

4. Nimmt man für  $f$  in 3) die Inklusion des Basispunktes  $\{y_0\} \subset Y$  erhält man die Faserung:

$$\Omega Y \rightarrow PY \rightarrow Y \quad (2.9.11)$$

mit dem zusammenziehbaren Wegeraum  $PY = \{\omega : I \rightarrow Y \mid \omega(0) = y_0\}$  und dem Schleifenraum von  $Y$  als Homotopiefaser.

**Iterierte Fasersequenzen und Leiterergänzungen.** Den Prozeß des Homotopiefasernehmens kann man jetzt iterieren, d.h. man bildet die Homotopiefaser  $F_i$  von  $i$  mit Inklusion  $j : F_i \rightarrow F_f$  und dann wieder  $F_j$  u.s.w. Die resultierende Sequenz hat die Eigenschaft, daß zwei aufeinander folgende Abbildungen bis auf Homotopie eine Faserung bilden. Die dabei entstehenden Räume sind nicht "neu", sondern lassen sich mit Schleifenräumen von  $F_f, X, Y$  bis auf Homotopieäquivalenz identifizieren. Man erhält folgendes bis auf Homotopie (und Vorzeichen) kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc} \rightarrow & F_k & \longrightarrow & F_j & \xrightarrow{k} & F_i & \xrightarrow{j} & F_f & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \rightarrow & \Omega F_f & \xrightarrow{\Omega i} & \Omega X & \xrightarrow{\Omega f} & \Omega Y & \longrightarrow & F_f & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad (2.9.12)$$

in der die untere Zeile die Fasersequenz von  $f$  genannt wird (ausgeführt etwa in [Nom60] oder [Hat02, 4.3]).

Ist  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  eine punktierte Faserung und  $F_f$  die Homotopiefaser von  $f$ , so gibt es eine basispunkterhaltende Homotopieäquivalenz  $k : F \rightarrow F_f$  und man kann  $F_f$  in (2.9.12) durch  $F$  ersetzen.

Hat man ein nur homotopiekommutatives Quadrat (A)

$$\begin{array}{ccccc} F_f & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \downarrow \beta & (A) & \downarrow \alpha \\ F_{f'} & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

so läßt sich die Abbildung  $\beta$  nicht ohne weiteres auf die Homotopiefasern einschränken. Folgende Konstruktion liefert zu einer gegebenen Homotopie  $H : X \times I \rightarrow Y'$  von  $H_0 = f' \circ \beta$  nach  $H_1 = \alpha \circ f$  ein homotopiekommutatives Diagramm von Fasersequenzen. Man ersetzt  $f$  und  $f'$  durch die homotopieäquivalenten Wegeraumfaserungen nach 3)

$$\begin{array}{ccccccccc} \rightarrow & \Omega Y & \longrightarrow & F_f & \longrightarrow & P_f & \longrightarrow & Y \\ & \downarrow \Omega \alpha & & \downarrow \gamma' & & \downarrow \beta' & (A') & \downarrow \alpha \\ \rightarrow & \Omega Y' & \longrightarrow & F_{f'} & \longrightarrow & P_{f'} & \longrightarrow & Y' \end{array} \quad (2.9.13)$$

und definiert  $\beta' : P_f \rightarrow P_{f'}$  für  $(x, \omega) \in P_f$  durch

$$\beta'(x, \omega) := (\beta(x), \omega'_x) \text{ mit } \omega'_x(s) := \begin{cases} H_{2s}(x) & \text{für } s \leq 1/2 \\ \alpha \circ \omega(2s-1) & \text{für } s \geq 1/2 \end{cases}.$$

Dann wird  $(A')$  strikt kommutativ, daher kann  $\beta'$  zu  $\gamma'$  eingeschränkt werden und das ganze Diagramm ist homotopiekommutativ. Sind  $f$  und  $f'$  bereits Faserungen mit Fasern  $F$  und  $F'$ , so erhält man aus (2.9.13) durch Rückübersetzung und Ersetzen der Fasern wie oben die homotopiekommutative Leiter

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & \Omega Y & \longrightarrow & F & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y \\ & \downarrow \Omega \alpha & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha \\ \rightarrow & \Omega Y' & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y' \end{array} \quad (2.9.14)$$

Die von der Auswahl der Homotopie  $H$  abhängende Abbildung  $\gamma$  heißt Leiterergänzung und das Diagramm (2.9.14) beschreibt Natürlichkeitseigenschaften der Konstruktion (2.9.12).

**Das Zurückziehen von Faserungen.** Genau wie Vektorbündel lassen sich Faserungen mittels einer Abbildung zurückziehen oder liften. Wir benötigen im Folgenden kaum mehr als die Definition und die universelle Eigenschaft: Ist  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  eine Faserung und  $f : B' \rightarrow B$  stetig, so ist - wörtlich wie im Fall von Vektorbündeln - die zurückgezogene Faserung  $f^*(p) = (E', p', B')$  durch

$$E' := \{(x, e) \in B' \times E \mid f(x) = p(e)\}$$

definiert.

Man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h_2} & E \\ & \searrow h & \nearrow \tilde{f} \\ h_1 \downarrow & E' & \downarrow p \\ & \swarrow p' & \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (2.9.15)$$

wo  $p'$  und  $\tilde{f}$  durch die Einschränkungen der Projektionen erklärt sind. Der Rest des Diagramms symbolisiert die universelle Eigenschaft (pullback-Eigenschaft) der zurückgezogenen Faserung. Zu jedem Abbildungspaar  $(h_1, h_2)$  mit  $p \circ h_2 = f \circ h_1$  gibt es genau eine kommutative Ergänzung  $h$  in diesem Diagramm. Man setzt einfach  $h(x) = (h_1(x), h_2(x))$ . Für später etwas umformuliert lautet dies:

**Lemma 2.9.16.** *Mit obigen Bezeichnungen gilt: Hat man eine Abbildung  $h_1 : X \rightarrow B'$ , sodaß die Komposition  $f \circ h_1$  einen Lift  $h_2$  über  $p$  besitzt, so hat  $h_1$  bereits einen Lift  $h$  über  $p'$ .*

Genauso sieht man, daß  $p'$  tatsächlich wieder eine Faserung ist, man muß nur diese Überlegung auf eine Homotopie  $h_1 : X \times I \rightarrow B'$  und deren Lift  $h_2$  von  $f \circ h_1$  anwenden.

**Lange exakte Fasersequenzen.** Die Homotopiehochhebungseigenschaft einer Faserung übersetzt sich fast direkt in

**Proposition 2.9.17.** *Ist  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  eine punktierte Faserung, so ist*

$$[Z, F]_0 \xrightarrow{i_*} [Z, E]_0 \xrightarrow{p_*} [Z, B]_0$$

*für einen beliebigen Raum  $Z$  eine exakte Mengensequenz.*

Liegt nur eine unpunktuierte Faserung vor, so kann man die Klasse der zugelassenen Räume  $Z$  auf die wohlpunktuierten einschränken, um die Exaktheit zu erhalten. Der Begriff "wohlpunktuiert" besagt, daß der Basispunkt  $z_0$  in einer vernünftigen Art und Weise in  $Z$  eingebettet ist. Er ist eher technischer Natur, so sind zum Beispiel differenzierbaren Mannigfaltigkeiten oder  $CW$ -Komplexen immer wohlpunktuiert. Für eine genaue Definition und Behandlung sei auf Abschnitt 3.6 verwiesen. Wir halten fest:

**Proposition 2.9.18.** *Ist  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  eine Faserung und  $Z$  wohlpunktuiert, dann ist*

$$[Z, F]_0 \xrightarrow{i_*} [Z, E]_0 \xrightarrow{p_*} [Z, B]_0$$

*exakt.*

*Beweis.* Z.B. in [Bau71] wird gezeigt, daß  $p$  für solche Räume  $Z$  die HHE hat, dann folgt die Behauptung wie im vorhergehenden Satz.  $\square$

Es gibt neben der oben in (2.9.12) angedeuteten Methode noch eine andere Möglichkeit, eine Faserung  $F \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B$  nach links zur Fasersequenz von  $p$  fortzusetzen, nämlich durch die explizite Konstruktion eines Randoperators  $r$  in:

$$\rightarrow \Omega^2 B \xrightarrow{\Omega r} \Omega F \xrightarrow{\Omega i} \Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B \xrightarrow{r} F \rightarrow E \rightarrow B \quad (2.9.19)$$

Hierbei ist  $\Omega^{i+1}(X) = \Omega(\Omega^i(X))$ ,  $\Omega f$  die von  $f$  induzierte Abbildung und  $r : \Omega B \rightarrow F$  wie folgt definiert: Es sei  $ev : \Omega B \times I \rightarrow B$  die Auswerteabbildung  $ev(\omega)(t) = \omega(t)$  (zur Stetigkeit siehe etwa [Hat02]). Deren Einschränkung auf  $\Omega B \times \{0\}$  ist konstant mit Wert  $b_0 \in B$ . Wir fassen  $ev$  als Homotopie auf und verwenden die konstante Abbildung  $c_{e_0} : \Omega B \times \{0\} \rightarrow \{e_0\} \subset E$  als Anhebung von  $ev|_{\Omega B \times \{0\}}$ . Die Homotopiehochhebungseigenschaft

für  $p$  liefert dann eine Anhebung  $\tilde{e}v : \Omega B \times I \rightarrow E$  im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega B \times \{0\} & \xrightarrow{c_{e_0}} & E \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{e}v & \downarrow p \\
 \Omega B \times I & \xrightarrow{ev} & B
 \end{array}$$

Man definiert  $r : \Omega B \rightarrow F \subset E$  durch  $r(\omega) := \tilde{e}v(\omega, 1)$ , dann gilt:

**Proposition 2.9.20.** *Ist  $Z$  wohlpunktiert und  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  eine Faserung, so ist die von (2.9.19) induzierte Sequenz*

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow [Z, \Omega^n E]_0 \rightarrow [Z, \Omega^n B]_0 \rightarrow [Z, \Omega^{n-1} F]_0 \rightarrow \dots \\
 & \rightarrow [Z, \Omega B]_0 \rightarrow [Z, F]_0 \rightarrow [Z, E]_0 \rightarrow [Z, B]_0
 \end{aligned}$$

*exakt.*

In [Bau71] wird gezeigt, daß in der Sequenz

$$\Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B \xrightarrow{r} F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$$

jeweils zwei aufeinander folgende Abbildungen bis auf Homotopieäquivalenz durch Faserungen ersetzt werden können, die Exaktheit folgt dann jeweils nach (2.9.18) und durch Verwendung der Adjunktion  $[\Sigma^i Z, X]_0 = [Z, \Omega^i X]_0$ .

Alternativ kann man auch direkt mit der iterierten Fasersequenz (2.9.12) argumentieren und die Homotopiefaser von  $p$  durch die Faser  $F$  ersetzen.

Über die Adjunktion  $[\Sigma^i Z, X]_0 \cong [Z, \Omega^i X]_0$  schreiben wir diese Sequenz um in

$$\rightarrow [\Sigma^n Z, F]_0 \xrightarrow{i_*} [\Sigma^n Z, E]_0 \xrightarrow{p_*} [\Sigma^n Z, B]_0 \xrightarrow{\partial} [\Sigma^{n-1} Z, F]_0 \xrightarrow{i_*} [\Sigma^{n-1} Z, E]_0 \rightarrow \quad (2.9.21)$$

und nennen dies die lange exakte Homotopiesequenz der Faserung  $F \rightarrow E \rightarrow B$ .

**Raumpaare und relative Homotopiegruppen.** Ein Raumpaar  $(X, A)$  besteht aus einem Raum  $X$  zusammen mit einem Unterraum  $A \subset X$  und eine Abbildung von Raumpaaren  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  ist eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  mit der zusätzlichen Eigenschaft  $A$  in  $B$  abzubilden. Bei punktierten Raumpaaren liegt der Basispunkt immer im Unterraum. Eine Homotopie  $H$  zwischen Raumpaarabbildungen erfüllt  $H_t(A) \subset B$  für alle  $t \in I$ . Dies definiert eine Äquivalenzrelation  $\approx$  zwischen Raumpaarabbildungen und die Homotopiemenge von Raumpaarabbildungen ist damit erklärt:

$$[(X, A), (Y, B)]_0 := \{f : (X, A) \rightarrow (Y, B) \mid f \text{ Raumpaarabbildung}\} / \approx$$

Für ein Raumpaar  $(X, A)$  induziert die Quotientenabbildung  $q : X \rightarrow X/A$  immer eine Bijektion

$$q^* : [X/A, Z]_0 \rightarrow [(X, A), (Z, *)]_0. \quad (2.9.22)$$

Identifiziert man die Einhängung  $\Sigma X$  mit  $CX/X$ , erhält man auf diese Weise die Bijektion  $q^* : [\Sigma X, B]_0 \cong [(CX, X), (B, *)]_0$

$$q^* : [\Sigma X, B]_0 \cong [CX/X, B]_0 \cong [(CX, X), (B, *)]_0 \quad (2.9.23)$$

Für ein punktiertes Raumpaar  $(X, A)$  mit Basispunkt  $a$  in  $A$  definiert man für  $n \geq 1$  die relativen Homotopiegruppen durch

$$\pi_n(X, A, a) := \pi_n(X, A) = [(D^n, S^{n-1}); (X, A)]_0 = [(CS^{n-1}, S^{n-1}); (X, A)]_0.$$

Alternativ arbeitet man mit Abbildungen auf dem Würfel  $I^n$  anstelle von  $D^n$ . Für  $n \geq 2$  läßt sich auf  $\pi_n(X, A)$  eine Gruppenstruktur einführen, für  $n = 1$  hat man nur eine punktierte Menge, siehe etwa [toD91, §12].

Zu einem Raum  $Y$  und einem Raumpaar  $(X, A)$  hat man dann folgende allgemeine exakte Paarsequenz

$$\rightarrow [\Sigma Y, A]_0 \xrightarrow{i_*} [\Sigma Y, X]_0 \xrightarrow{j_*} [(CY, Y), (X, A)]_0 \xrightarrow{\partial} [Y, A]_0 \xrightarrow{i_*} [Y, X] \quad (2.9.24)$$

wobei  $i_*$  von der Inklusion  $A \subset X$ , der Randoperator  $\partial$  durch Einschränkung  $\partial[f] := [f_Y]$  und  $j_*$  von  $j : (X, *) \rightarrow (X, A)$  nach Umschreiben von  $[\Sigma Y, X]_0$  in  $[(CY, Y), (X, *)]_0$  mit (2.9.23) induziert werden. Es gilt dann:

**Proposition 2.9.25.** *Die allgemeine Paarsequenz ist exakt.*

*Beweis.* Ein Beweis wird in [Mit91, BandI, IV, §1,1.25] angedeutet, mit dem weiter unten besprochenen Zugang über Kofasersequenzen findet man einen Beweis in [Bre93, VII,5] indem man anstelle der Inklusion  $f : (S^0, S^0) \hookrightarrow (D^1, S^0)$  die Abbildung  $Id_Y \wedge f$  verwendet.  $\square$

Setzt man in (2.9.24) für  $Y$  eine Sphäre  $S^n$  ein, erhält man die übliche lange exakte Homotopiesequenz eines Raumpaares:

**Proposition 2.9.26.** *Für ein punktiertes Raumpaar  $(X, A)$  hat man eine natürliche exakte Paarsequenz*

$$\rightarrow \pi_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \dots \rightarrow \pi_0(A) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X)$$

*Beweis.* Für einen direkten Beweis siehe etwa [toD91, §12]  $\square$



Eine Modifikation des Beweises ergibt als leichte Verallgemeinerung dann die lange exakte Sequenz eines Raumtripels  $(X, A, B)$  :

$$\pi_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, B) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B) \longrightarrow \quad (2.9.27)$$

Die Paarsequenz zu  $(X, A)$  läßt sich auch aus der Homotopiesequenz einer Faserung ableiten. Bezeichnet nämlich  $F_i$  die Homotopiefaser der Inklusion  $A \subset X$ , so gilt  $\pi_n(X, A) \cong \pi_{n-1}(F_i)$  ([toD91, §12]) und man erhält die Paarsequenz aus der Fasersequenz zu  $F_i \rightarrow A \rightarrow X$ . Wenn man will, lassen sich so relative Homotopiegruppen ganz umgehen. Für uns wichtiger ist die umgekehrte Richtung:

**Proposition 2.9.28.** *Ist  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  eine Faserung, so induziert die Projektion  $p$  Bijektionen*

$$p_* : [(CX, X), (E, F)]_0 \xrightarrow{\cong} [(CX, X), (B, *)]_0 \text{ und } p_* : \pi_n(E, F) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B, *).$$

Einen direkten Beweis findet man etwa in [toD91] oder [Gra75, 11.8]. Aus der exakten Paarsequenz erhält man damit die exakte Fasersequenz, ein Weg der häufig gewählt wird. Umgekehrt folgt (2.9.28) aus der Exaktheit von Paar- und Fasersequenz durch Vergleich zusammen mit dem 5er-Lemma ([Spa66, Ch 4, Sec 5, L11]).

**Beschreibung des Randoperators.** Wir benötigen noch eine leicht anzuwendende Beschreibung des Randoperators  $\partial$  in der exakten Sequenz einer Faserung  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ . Dazu gehen wir von der durch (2.9.19) gelieferten Definition für  $\partial$  aus und betrachten folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} [X, \Omega B]_0 & \xrightarrow{r_*} & [X, F]_0 \\ \cong \downarrow & & \parallel \\ [\Sigma X, B]_0 & \xrightarrow{\partial} & [X, F]_0 \\ \cong \downarrow q^* & & \\ [(CX, X), (B, *)]_0 & & \parallel \\ \uparrow p_* & & \\ [(CX, X), (E, F)]_0 & \xrightarrow{j} & [X, F]_0 \end{array} \quad (2.9.29)$$

Das obere Quadrat ist die Definition von  $\partial$  durch  $r_*$  aus (2.9.19) und damit kommutativ. Identifiziert man die Einhängung  $\Sigma X$  mit  $CX/X$  erhält man die Bijektion  $q^* : [\Sigma X, B]_0 \cong [(CX, X), (B, *)]_0$  (siehe (2.9.23)). Die Abbildung  $j$  ordnet einer Paarabbildung  $G : (CX, X) \rightarrow (E, F)$  deren Einschränkung  $j(G) = G|_X : X \rightarrow F$  zu.

Wir zeigen als nächstes die Kommutativität des unteren Quadrats. Dazu fassen wir die Abbildung  $\tilde{e}v : \Omega B \times I \rightarrow E$  als auf dem Kegel  $C\Omega B$  definiert auf:

$$\tilde{e}v : C\Omega B \rightarrow E,$$

und bezeichnen die auf  $C\Omega B/\Omega B$  durch  $p \circ \tilde{e}v$  induzierte Abbildung mit  $ev'$ . Identifiziert man  $C\Omega B/\Omega B$  mit  $\Sigma\Omega B$ , so ist  $ev'$  homotop zur üblichen Auswerteabbildung  $ev : \Sigma\Omega B \rightarrow B$ , die wiederum unter  $[\Sigma\Omega B, B]_0 \cong [\Omega B, \Omega B]_0$  adjungiert zu  $id_{\Omega B}$  ist. Damit kommutieren die unteren Quadrate (mit  $i_1(\omega) = (\omega, 1)$ ,  $CX = X \times I/X \times \{0\}$ ) in

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{i} & CX & \xrightarrow{q} & CX/X & \longrightarrow & \Sigma X \\
 \downarrow f & & \downarrow Cf & & \downarrow \Sigma f & & \downarrow \Sigma f \\
 \Omega B & \xrightarrow{i_1} & C\Omega B & \xrightarrow{q} & C\Omega B/\Omega B & \longrightarrow & \Sigma\Omega B \\
 \downarrow r & & \downarrow \tilde{e}v & & \downarrow ev' & & \downarrow ev \\
 F & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & B & \xrightarrow{id} & B
 \end{array}$$

Zu einer gegebenen Abbildung  $f : X \rightarrow \Omega B$  kommutieren die oberen Quadrate nach Definition der Abbildungen. Aus der Kommutativität dieses Diagramms folgt nun: Die Abbildung  $G := \tilde{e}v \circ Cf : (CX, X) \rightarrow (E, F)$  schränkt sich zu  $j(G) = r \circ f : X \rightarrow F$  ein und ihr Bild unter  $p_*$  ist  $q_*(ev' \circ \Sigma f) = q_*(\hat{f})$ , denn die Adjungierte  $\hat{f} : \Sigma X \rightarrow B$  von  $f$  ist gerade  $ev \circ \Sigma f$ . Damit gilt  $r_*(f) = \partial(\hat{f}) = j(G)$  und die Kommutativität von (2.9.29) ist nachgewiesen. Wir halten das Ergebnis in folgender Form fest:

**Lemma 2.9.30.** (Randlemma) Ist  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  eine Faserung und sind  $g_1, g_2$  Abbildungen, sodaß die Paarabbildung  $G : (CX, X) \rightarrow (E; F)$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{i_1} & CX & \xrightarrow{q} & \Sigma X \\
 \downarrow g_2 & & \downarrow G & & \downarrow g_1 \\
 F & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & B
 \end{array} \tag{2.9.31}$$

kommutativ ergänzt, dann gilt  $\partial(g_1) = g_2$  in der langen exakten Homotopiesequenz der Faserung  $p$ .

*Beweis.* Dies ist gerade die Aussage von (2.9.29). □

Ein instruktives Beispiel hierzu liefert die Wegeraumfaserung:

**Lemma 2.9.32.** Für die Wegefaserung  $\Omega X \rightarrow PX \rightarrow X$  ist die Randabbildung  $\partial : [\Sigma Z, X]_0 \rightarrow [Z, \Omega X]_0$  gerade die Adjunktion.

*Beweis.* Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \xrightarrow{i_1} & CZ & \xrightarrow{q} & \Sigma Z \\
 \downarrow \hat{h} & & \downarrow G & & \downarrow h \\
 \Omega X & \xrightarrow{i} & PX & \xrightarrow{ev_1} & B
 \end{array}$$

wo  $G([x, t])$  als der Weg  $g \mapsto h[x, t \cdot s]$  definiert ist. □

Für die Natürlichkeit der exakten Fasersequenz in der ersten Variablen  $X$  notieren wir noch:

**Lemma 2.9.33.** In der Fasersequenz zur Faserung  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$

$$\rightarrow [\Sigma X, F]_0 \xrightarrow{i_*} [\Sigma X, E]_0 \xrightarrow{p_*} [\Sigma X, B]_0 \xrightarrow{\partial} [X, F] \xrightarrow{i_*} [X, E]_0 \rightarrow$$

gilt für  $\alpha : \Sigma X \rightarrow B$  und  $\beta : Y \rightarrow X$

$$\partial([\alpha \circ \Sigma\beta]) = \partial([\alpha]) \circ [\beta].$$

*Beweis.* Mit dem Randlemma, indem man in (2.9.31)  $\beta$ ,  $C\beta$  und  $\Sigma\beta$  vorschaltet oder mit der Tatsache, daß der Randoperator  $\partial$  nach Anwendung der Adjunktion  $[\Sigma X, B]_0 \cong [X, \Omega B]_0$  von der stetigen Abbildung  $r$  induziert wird, folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung.** Oben wurde der reduzierte Kegel  $CX$  als  $X \times I/X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I$  mit  $X$  als Unterraum  $\{[x, 1] \mid x \in X\} \subset CX$  und Quotienten  $CX/X \simeq \Sigma X$  aufgefaßt. Damit gilt (2.9.32). Bei Klebekonstruktionen für Bündel über  $CX/X \simeq \Sigma X$  wird vielfach die Konvention  $CX = X \times I/X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I$  verwendet. Dies führt zum Teil zu unterschiedlichen Abbildungen auf  $\Sigma X$ , die aber i.A. durch Anwenden der Multiplikation mit  $-1$  in der durch Komultiplikation definierten Ko-H-Raum Struktur von  $\Sigma X$  ineinander übergehen.

**Kofaserungen.** Die Kofasersequenz (Literatur: etwa [toD91], [toD00], [Whi78]) ist die zur Fasersequenz duale Konstruktion und entsteht als Verallgemeinerung der Quotientenfolge  $A \rightarrow B \rightarrow B/A$ . Dual zur Homotopiehochhebungseigenschaft ist die folgende Erweiterungseigenschaft für Homotopien:

**Definition 2.9.34.** Ein Raumpaar  $(X, A)$  besitzt die Homotopieerweiterungseigenschaft (HEE), wenn jede Homotopie  $H : A \times I \rightarrow Z$ , deren Anfang  $H(, 0)$  zu  $f : X \rightarrow Z$  bereits erweitert ist, eine Erweiterung zu  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Z$  mit  $\tilde{H}|_{A \times I} = H$  und  $\tilde{H}(0, -) = f$  zuläßt. Eine Inklusion  $i : A \rightarrow X$  heißt dann Kofaserung, wenn das Paar  $(X, A)$  die HEE für alle Räume  $Z$  besitzt.

Zu einer basispunkterhaltenden Abbildung  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  wird die Kofaser oder der Abbildungskegel  $C_f$  definiert, indem man mittels  $f$  einen reduzierten Kegel

$$CX = X \times I / (X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I) \text{ über } X \text{ an } Y \text{ anheftet:}$$

$$C_f := Y \cup_f CX = CX \dot{\cup} Y / \sim$$

wobei  $\sim$  die Äquivalenzrelation ist, die von  $(x, 1) \sim f(x)$  erzeugt wird. Man hat dann eine kanonische Inklusion  $j : Y \subset C_f$  und das Paar  $(C_f, Y)$  hat die HEE. Ebenso hat ein CW-Paar  $(X, A)$  die HEE. Es liegen also in beiden Fällen Kofaserungen vor.

Analog zu (2.9.17) ist:

**Proposition 2.9.35.** Für eine stetige Abbildung  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  ist die Sequenz

$$[C_f, Z]_0 \xrightarrow{j^*} [Y, Z]_0 \xrightarrow{f^*} [X, Z]_0$$

exakt.

Ist die Inklusion  $i : A \hookrightarrow X$  eines Unterraums eine Kofaserung, so ist die kanonische Abbildung  $\pi : C_i = X \cup CA \rightarrow X/A$ , die den Kegel  $CA$  zu einem Punkt identifiziert, eine Homotopieäquivalenz und man hat, indem man  $C_i$  durch  $X/A$  ersetzt, eine (2.9.17) entsprechende exakte Sequenz

$$[X/A, Z]_0 \xrightarrow{\pi^*} [X, Z]_0 \xrightarrow{i^*} [A, Z]_0. \quad (2.9.36)$$

Beide Sequenzen lassen sich nach links fortsetzen. Man hat wieder zwei Optionen: Zum einen kann man den Prozeß des Kofaserbildens iterieren, also zu  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} C_f$  die Kofaser  $C_j$  von  $j$  bilden:  $C_f \rightarrow C_j$ , und dann wieder deren Kofaser u.s.w. Die resultierenden Räume sind kanonisch homotopieäquivalent zu Einhängungen von  $X$ ,  $Y$  und  $C_f$  und man erhält die Kofasersequenz von  $f$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} C_f \xrightarrow{q} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma j} \Sigma C_f \rightarrow \quad (2.9.37)$$

die nach Anwendung von  $[-, Z]_0$  eine lange exakte Sequenz liefert

$$\rightarrow [\Sigma Y, Z]_0 \xrightarrow{\Sigma f^*} [\Sigma X, Z]_0 \xrightarrow{q^*} [C_f, Z]_0 \xrightarrow{j^*} [Y, Z]_0 \xrightarrow{f^*} [X, Z]_0. \quad (2.9.38)$$

(siehe etwa [toD91]). Oder man definiert mit  $\pi : C_i \rightarrow X/A$  wie oben für eine Kofaserung  $A \hookrightarrow X$  den verbindenden Homomorphismus  $\delta$  durch

$$\delta : [\Sigma A, Z]_0 \xrightarrow{pr^*} [C_i, Z]_0 \cong [X/A, Z]_0,$$

wo  $pr : C_i \rightarrow C_i/X \simeq \Sigma A$  die Abbildung ist, die  $X$  in  $C_i$  zu einem Punkt identifiziert, und zeigt, daß die resultierende Sequenz

$$\rightarrow [\Sigma X, Z]_0 \xrightarrow{\Sigma i^*} [\Sigma A, Z]_0 \xrightarrow{\partial} [X/A, Z]_0 \rightarrow [X, Z]_0 \rightarrow [A, Z]_0 \quad (2.9.39)$$

exakt ist (siehe etwa [Mit91]).

Vektorbündel

Vom Möbius-Bündel bis zum J-Homomorphismus

Knapp, K.

2013, XIII, 595 S. 49 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-03113-8