

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vektorbündel: Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Grundlegende Definitionen . . . . .	2
1.1.1	Vektorbündel . . . . .	2
1.1.2	Vektorbündel-Homomorphismen . . . . .	10
1.1.3	Unterbündel . . . . .	14
1.1.4	Schnitte . . . . .	15
1.1.5	Isomorphieklassen von $\mathbb{K}$ -Vektorbündeln über $B$ . . . . .	18
1.2	Liften und Whitney-Summe . . . . .	19
1.2.1	Zurückziehen von Vektorbündeln . . . . .	19
1.2.2	Whitney-Summe . . . . .	23
1.2.3	Stabile Isomorphie . . . . .	26
1.3	Vektorbündel-Homomorphismen . . . . .	27
1.3.1	Bijektive Vektorbündel-Homomorphismen . . . . .	27
1.3.2	Strikte Vektorbündel-Homomorphismen . . . . .	29
1.3.3	Kern-, Bild- und Quotientenbündel . . . . .	31
1.3.4	Projektorenfamilien . . . . .	33
1.4	Operationen . . . . .	34
1.4.1	Algebraische Operationen für Vektorbündel . . . . .	34
1.4.2	Reelle und komplexe Linienbündel . . . . .	42
1.5	Ergänzungen . . . . .	45
1.5.1	Projektive Räume . . . . .	45
1.5.2	Die Spezialfälle $P_1(\mathbb{K}) \cong S^d$ . . . . .	45
1.5.3	Tangentialbündel projektiver Räume . . . . .	46
1.5.4	Homotopiegruppen . . . . .	48
<b>2</b>	<b>Umgang mit Vektorbündeln</b>	<b>51</b>
2.1	Schnitte . . . . .	52
2.1.1	Schnitte und Vektorbündel-Homomorphismen . . . . .	52
2.1.2	Beispiele . . . . .	54
2.1.3	Erweiterung und Existenz von Schnitten . . . . .	56
2.1.4	Der Homotopiesatz . . . . .	59
2.2	Riemannsche und Hermitesche Metriken . . . . .	62
2.2.1	Konstruktion und Eigenschaften . . . . .	62
2.2.2	Orthogonale Komplemente . . . . .	66
2.2.3	Einbettungen und stabile Inverse . . . . .	69

2.3	Vektorbündel-Probleme . . . . .	74
2.4	Klassifikation und Konstruktion von Vektorbündeln durch lokale Daten . .	83
2.4.1	Übergangsfunktionen . . . . .	84
2.4.2	Klassifikation mittels Übergangsfunktionen . . . . .	86
2.4.3	Konstruktionen mittels Übergangsfunktionen . . . . .	90
2.5	Kleben, Kollabieren . . . . .	93
2.5.1	Klebekonstruktionen . . . . .	93
2.5.2	Kollabieren von Bündeln über Unterräumen . . . . .	98
2.6	Exakte Sequenzen . . . . .	103
2.6.1	Die lange exakte Sequenz eines Raumpaars . . . . .	104
2.6.2	Die Puppe-Sequenz . . . . .	108
2.6.3	Gruppenstruktur . . . . .	112
2.6.4	Kooperation . . . . .	114
2.7	Prinzipalbündel und Faserbündel . . . . .	119
2.7.1	G-Prinzipalbündel . . . . .	119
2.7.2	Vektorbündel und Prinzipalbündel . . . . .	122
2.7.3	Zur Klassifikation von Prinzipalbündeln . . . . .	126
2.8	Zusätzliche Strukturen . . . . .	129
2.8.1	Orientierbare Vektorbündel . . . . .	129
2.8.2	G-Vektorbündel, eine kurze Einführung . . . . .	132
2.9	Ergänzungen . . . . .	135
2.9.1	Parakompakte Räume und Zerlegungen der Eins . . . . .	135
2.9.2	Einhängungen und Schleifenräume . . . . .	136
2.9.3	Der polnische Kreis . . . . .	139
2.9.4	Exakte Homotopiesequenzen, Faserungen und Kofaserungen . . . . .	140
<b>3</b>	<b>Klassifikation von Vektorbündeln</b>	<b>151</b>
3.1	Vektorbündel über einer Einhängung . . . . .	152
3.1.1	Komplexe Bündel über $SX$ . . . . .	153
3.1.2	Reelle Bündel über $\Sigma X$ . . . . .	159
3.1.3	Orientierte Vektorbündel . . . . .	161
3.1.4	Stabile Vektorbündel über $SX$ . . . . .	166
3.2	Die Stabilisierungssequenz I . . . . .	169
3.2.1	Die Herleitung der Stabilisierungssequenz . . . . .	170
3.2.2	Erste Beispiele zur Stabilisierungssequenz . . . . .	175
3.2.3	Stabilitätssätze . . . . .	177
3.2.4	Fasersequenzen . . . . .	181
3.2.5	Die komplexe Stabilisierungssequenz . . . . .	184
3.3	Vektorbündel über Sphären . . . . .	187
3.3.1	Das Tangentialbündel der Sphäre in der Stabilisierungssequenz . . . . .	188
3.3.2	Einschub: Das Vektorfeld-Problem auf $S^{4m+1}$ . . . . .	193
3.3.3	Stabile Bündel und Bott-Periodizität . . . . .	196
3.3.4	Die ersten instabilen Homotopiegruppen von $SO(n)$ . . . . .	198
3.3.5	Bündel unendlicher Ordnung . . . . .	201

3.3.6 Komplexe Bündel . . . . .	203
3.4 Die Klassifikationssätze . . . . .	208
3.4.1 Graßmann-Mannigfaltigkeiten und universelle Bündel . . . . .	208
3.4.2 Klassifizierende Abbildungen . . . . .	212
3.4.3 Die Klassifikationssätze für reelle und komplexe Bündel . . . . .	216
3.4.4 Klassifikation stabiler Vektorbündel . . . . .	220
3.4.5 Vektorbündel über einer Einhängung II . . . . .	224
3.5 Das Arbeiten mit den Klassifikationssätzen . . . . .	227
3.5.1 Basispunkte und exakte Sequenzen . . . . .	228
3.5.2 Intervall mit doppeltem Nullpunkt . . . . .	235
3.5.3 Nicht-Kommutativität in $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma X)$ . . . . .	238
3.6 Ergänzungen . . . . .	242
3.6.1 Schwache Topologie . . . . .	242
3.6.2 Basispunkte . . . . .	244
3.6.3 Lie-Gruppen . . . . .	245
3.6.4 Homotopiemengen und $CW$ -Komplexe . . . . .	246
3.6.5 Ausschneidung für relative Homotopiegruppen . . . . .	248
3.6.6 Thom-Räume . . . . .	250
3.6.7 Anheftende Abbildungen in projektiven Räumen und Berechnung von $[P_n(\mathbb{R}), S^n]_0$ . . . . .	251
<b>4 Charakteristische Klassen für Vektorbündel . . . . .</b>	<b>255</b>
4.1 Kohomologie . . . . .	256
4.1.1 Eilenberg-MacLane Räume . . . . .	256
4.1.2 Linienbündel . . . . .	258
4.2 Charakteristische Klassen . . . . .	260
4.2.1 Die Euler-Klasse . . . . .	260
4.2.2 Stiefel-Whitney und Chern-Klassen . . . . .	262
4.3 Vektorbündel über $CW$ -Komplexen kleiner Dimension . . . . .	267
4.4 K-Theorie und Bott-Periodizität . . . . .	269
4.4.1 Definition der K-Gruppen . . . . .	269
4.4.2 Das reduzierte Produkt in $\text{SVekt}_{\mathbb{K}}$ . . . . .	272
4.4.3 Die Bott-Periodizitäts Abbildungen . . . . .	273
4.4.4 Die Gruppen $\text{SVekt}_{\mathbb{R}}(\Sigma^i P_2(\mathbb{C}))$ . . . . .	276
4.4.5 Die Bott-Sequenz . . . . .	278
4.5 Bott-Periodizität und charakteristische Klassen . . . . .	280
4.5.1 Spaltungsprinzip und Newton-Polynome . . . . .	280
4.5.2 Stiefel-Whitney-Klassen für Bündel über Sphären . . . . .	283
4.6 Vektorbündel und Kohomologie . . . . .	285
4.6.1 Adams-Filtrierung . . . . .	285
4.6.2 Bündel über $X$ . . . . .	286
4.6.3 Bündel über einer Einhängung . . . . .	288
4.7 Zum Beweis des Periodizitätssatzes . . . . .	292
4.7.1 Der Morse-Theorie-Beweis . . . . .	294

4.7.2	Der Homologie-Beweis . . . . .	296
4.7.3	Der elementare Beweis . . . . .	300
<b>5</b>	<b>Stabile und nicht stabile Vektorbündel</b>	<b>307</b>
5.1	Die Stabilisierungssequenz II . . . . .	308
5.1.1	Herleitung der Stabilisierungssequenz . . . . .	308
5.1.2	Schnitte in Vielfachen von Bündeln . . . . .	315
5.2	Die Euler-Klasse in der Stabilisierungssequenz . . . . .	318
5.2.1	Hurewicz-Abbildung und der Satz von Hopf . . . . .	318
5.2.2	Die Euler-Klasse in der Stabilisierungssequenz . . . . .	319
5.2.3	Die Euler-Klasse eines $n$ -dimensionalen Bündels über einem $n$ -dimensionalen Komplex . . . . .	325
5.3	Stabil triviale Vektorbündel . . . . .	326
5.3.1	Gauß-Abbildungen I . . . . .	327
5.3.2	Klassifikation stabil trivialer Vektorbündel: der einfachste Fall . . . . .	328
5.3.3	Beispiele . . . . .	332
5.3.4	$n$ -dimensionale Bündel über einem $n$ -dimensionalen Komplex . . . . .	334
5.4	Niedrigdimensionale Beispiele . . . . .	338
5.4.1	Vektorbündel über $P_2(\mathbb{R})$ . . . . .	338
5.4.2	Ebenenbündel über $P_n(\mathbb{R})$ , $n \geq 3$ . . . . .	343
5.5	Stabile Bündel über projektiven Räumen . . . . .	344
<b>6</b>	<b>Vektorbündel und stabile Homotopie</b>	<b>351</b>
6.1	Stabile Homotopie . . . . .	353
6.1.1	Einhängungssätze . . . . .	353
6.1.2	Stabile Abbildungen . . . . .	357
6.1.3	S-Dualität . . . . .	361
6.1.4	Der Chern-Charakter . . . . .	365
6.2	Die allgemeine Stabilisierungssequenz . . . . .	371
6.2.1	Stiefel-Mannigfaltigkeiten . . . . .	372
6.2.2	Herleitung der allgemeinen Stabilisierungssequenz . . . . .	373
6.2.3	Gauß-Abbildungen II . . . . .	374
6.2.4	Schnitte in $\gamma_{k,n}$ und in stabil trivialen Vektorbündeln . . . . .	377
6.2.5	Stabilitätseigenschaften . . . . .	379
6.3	Vektorbündel bis auf Faserhomotopieäquivalenz . . . . .	383
6.3.1	Die Gruppe $J(X)$ . . . . .	383
6.3.2	Orientierbarkeit in stabiler Homotopie . . . . .	385
6.3.3	Funktionenräume . . . . .	389
6.3.4	$J$ -Homomorphismus I . . . . .	391
6.4	Sphärische Faserungen . . . . .	398
6.4.1	Klassifizierende Räume für sphärische Faserungen, ein Überblick . . . . .	398
6.4.2	Bündelreduktion und sphärische Faserungen . . . . .	400
6.4.3	Reduktion auf stabile Abbildungen . . . . .	407

<b>7</b>	<b>Adams-Vermutung und Berechnung von <math>J(X)</math></b>	<b>409</b>
7.1	Adams-Operationen . . . . .	409
7.1.1	Adams-Operationen . . . . .	409
7.1.2	K-Theorie Hindernisse für Faserhomotopietrivialität . . . . .	413
7.1.3	Berechnung von $J(P_n(\mathbb{R}))$ . . . . .	418
7.2	Adams-Vermutung . . . . .	422
7.2.1	Die Adams-Vermutung und der Kograd von Vektorbündeln . . . . .	423
7.2.2	Die klassifizierende Raum Version der Adams-Vermutung . . . . .	428
7.2.3	Bild( $J$ )-Theorie und $e$ -Invariante, ein Ausblick . . . . .	431
7.3	Anwendungen der Adams-Vermutung . . . . .	435
7.3.1	Der Vektorfeldsatz . . . . .	435
7.3.2	Fast-parallelisierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	438
7.3.3	Periodizitätsoperatoren . . . . .	439
7.3.4	Aushängen von Bild( $J$ )-Klassen . . . . .	441
7.4	Ergänzungen . . . . .	448
7.4.1	Die stabile Einhängungsordnung von $P_{2n}(\mathbb{R})$ . . . . .	448
7.4.2	Periodizitätsoperatoren auf Quotienten projektiver Räume . . . . .	452
<b>8</b>	<b>J-Homomorphismus und EHP-Sequenz</b>	<b>457</b>
8.1	Der klassische J-Homomorphismus . . . . .	458
8.1.1	Der Verbund zweier Räume und die Hopf-Konstruktion . . . . .	458
8.1.2	Der $J$ -Homomorphismus II . . . . .	462
8.1.3	Der Thom-Raum für Bündel über einer Einhängung . . . . .	464
8.2	EHP-Sequenz, Hopf-Invariante und Whitehead-Produkt . . . . .	466
8.2.1	Die klassische EHP-Sequenz . . . . .	466
8.2.2	Die EHP-Faserung . . . . .	468
8.2.3	Aufspaltungen und James-Modell . . . . .	471
8.2.4	Das Whitehead-Produkt und die Abbildung $P$ . . . . .	477
8.2.5	Hopf-Invarianten . . . . .	482
8.2.6	Distributivgesetze . . . . .	487
8.3	EHP-Sequenz und Stabilisierungssequenz . . . . .	490
8.3.1	Klassische EHP-Sequenz und Stabilisierungssequenz . . . . .	490
8.3.2	Die Hopf-Invariante einer Hopf-Konstruktion . . . . .	493
8.3.3	EHP-Faserung und Stabilisierungssequenz . . . . .	498
8.4	Die iterierte Einhängungssequenz von James . . . . .	500
8.4.1	Die iterierte Einhängungssequenz und das Aushängungsproblem . . . . .	500
8.4.2	Anwendungen . . . . .	505
8.5	Ergänzungen . . . . .	507
8.5.1	Ergänzungen zum Verbund, zur Hopf-Konstruktion und zum $J$ -Homomorphismus . . . . .	507
8.5.2	Der Thom-Raum des Tangentialbündels der Sphäre . . . . .	514

<b>9</b>	<b>Vektorbündel im metastabilen Bereich</b>	<b>517</b>
9.1	Metastabile Homotopiegruppen von $SO(n)$	518
9.1.1	Der Satz von Barratt-Mahowald	518
9.1.2	Die Homotopie-Euler-Klasse eines Barratt-Mahowald-Bündels und das Samelson Produkt $\langle c_{\tau S^{2k}}, c_{\tau S^{2k}} \rangle$	524
9.2	Schnittthindernisse und stabil triviale Bündel	530
9.2.1	Stabil triviale Bündel	530
9.2.2	Die Hindernisabbildung $p_*$	531
9.3	James-Periodizität	533
9.4	Vektorfelder auf Sphären und stabil parallelisierbaren Mannigfaltigkeiten	538
9.4.1	Vektorfelder auf Sphären	540
9.4.2	Das Vektorfeld-Problem für $\pi$ -Mannigfaltigkeiten	545
9.4.3	Die Stabilisierungssequenz für stabil triviale Bündel	549
9.4.4	Die Homotopie-Euler-Klasse einer Vektorfeld-Bündelreduktion von $\tau S^{n-1}$	555
9.5	Gauß-Abbildungen in K-Theorie	559
9.5.1	Adams-Filtrierung-0- und $bo$ -primäre Bündel	560
9.5.2	Die Ordnung der Bündelreduktion $(\tau S^n)^{(-k)}$	570
9.5.3	Der Vektorfeldsatz nach Toda	574
9.5.4	Anwendungen	576
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>580</b>
	<b>Index</b>	<b>588</b>

Vektorbündel

Vom Möbius-Bündel bis zum J-Homomorphismus

Knapp, K.

2013, XIII, 595 S. 49 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-03113-8