1
Die ersten Zahlen

„Alles ist Zahl“, sagte vor über 2500 Jahren Pythagoras. Damit meinte er, dass die Natur in ihren Grundlagen von mathematischem Charakter ist und sich durch Zahlen und Zahlenverhältnisse beschreiben lässt. Hatte er Recht? Die knappe Antwort lautet „Nein“, wie er angeblich selbst herausgefunden haben soll.

Tatsächlich haben die Anhänger von Pythagoras entdeckt, wie sich bestimmte Aspekte der Welt durch Zahlen beschreiben lassen. Pythagoras ist am ehesten wegen seines berühmten Satzes bekannt, der die Seitenlängen eines rechteckigen Dreiecks zueinander in Beziehung setzt. In moderner Sprechweise würde man sagen, dass sich die genaue Distanz zwischen zwei Punkten aus ihren Koordinaten berechnen lässt. Diese Entdeckung machte es möglich, den räumlichen Abstand aus anderen Messgrößen exakt zu bestimmen, und war damit ein wichtiger Fortschritt. Etwas weniger bekannt ist vielleicht, dass Pythagoras auch angeblich die einfachen Zahlenverhältnisse gefunden hat, die reinen musikalischen Akkorden zugrunde liegen. Von ihrem Erfolg geblendet muss es den Pythagoräern so vorgekommen sein, als ob sich jeder Aspekt der Welt durch Zahlen beschreiben ließe, denn ihre Entdeckungen waren wirklich erstaunlich. Die Klarheit und Einfachheit, die in den pythagoräischen Gesetzen zum Ausdruck kamen, waren von einer noch nie zuvor gekannten Form.

Daher muss es wie ein Schock gewesen sein, als Phythagoras herausfand, dass sich die Zahlen selbst seiner Regel widersetzten, denn ihm wird auch die Entdeckung zugeschrieben, dass sich bestimmte Längen in seiner Geometrie nicht durch einfache Zahlenverhältnisse ausdrücken lassen, wie es von seiner Philosophie gefordert wurde. Insbesondere fand er heraus, dass sich die Diagonale eines Quadrats nicht mit denselben Einheiten messen lässt, mit denen man die Seiten messen kann. Egal wie fein man die Skala auch unterteilt, die Spitze der Diagonale liegt immer zwischen zwei solchen Markierungen. Das hängt mit einer fundamentalen Eigenschaft der Zahlen zusammen und hat nichts mit irgendwelchen Einschränkungen zu tun, die sich vielleicht aus der Genauigkeit des Lineals oder der Schärfe der Augen ergeben. Es handelt sich um eine mathematische Tatsache. Doch was für uns vielleicht eine ärgerliche Besonderheit ist, wurde von den Pythagoräern als eine Katastrophe empfunden. Es untergrub ihre gesamte Weltanschauung, mit der sie die Natur durch einfache Zahlenverhältnisse erklären wollten. Schon in diesen klassischen Zeiten gab es also Probleme mit der Vorstellung, es ließe sich alles auf Zahlen zurückführen.

Trotz dieser Einschränkungen haben die Zahlen nichts an Bedeutung verloren, im Gegenteil, sie sind immer weiter in unser Leben vorgedrungen. Schon zu Beginn des 17. Jahrhunderts vertrat Galileo die Meinung, man solle alles vermessen, was sich ausmessen lässt, und man sollte lernen auch solche Dinge zu messen, die bislang noch nicht vermessen wurden. Diese Einstellung führte zu einer Fülle an neuen Erkenntnissen, und durch die Forderung nach Messung sind wir gezwungen, mit einer Zahl aufzuwarten.

Wird diese Einstellung zu weit getrieben, regt sich aber auch ein natürlicher Widerstand. Versuche, die Erfahrung von Musik oder Dichtung durch Zahlen zu erfassen, treffen oft auf Ablehnung und Spott. Schon allein die Vorstellung zerstört den Zauber, und da ist es nur natürlich, dass man sich darüber lustig macht und auf ein Scheitern hofft. Diese Einstellung scheint auch immer noch gerechtfertigt, denn im künstlerischen Bereich verlieren Zahlen schnell ihre Autorität. Um nicht missverstanden zu werden: Die Musik hat eine mathematische Seite, wie Pythagoras entdeckt hat, und es lohnt sich, diesen Aspekt genauer zu verstehen. Doch ein rein analytischer Zugang zu den Künsten führt nur zu schwachen Ergebnissen. Gute Musik ist nicht das Ergebnis von Berechnungen, und je mehr dieser Weg beschritten wird, umso erbärmlicher sind die Resultate.

Missverständnisse in dieser Richtung sind aber alles andere als neu. Quer durch die Geschichte und unterschiedliche Kulturen stoßen wir immer wieder auf Beispiele, wo numerische Vorstellungen in unangebrachter Form angewandt wurden und schließlich scheiterten. Einfache Behauptungen der Art, die geraden Zahlen seien weiblich und die ungeraden Zahlen männlich oder auch das Umgekehrte, führen zu nichts. Künstliche Versuche, die Naturgesetze abzuleiten, haben noch nie gefruchtet. Sie sagen meist mehr über die menschliche Psyche aus als über die Welt: Einfache Ideen, die in erster Linie unserer Vorstellungskraft genehm sind, mögen etwas Beruhigendes und vielleicht sogar Amüsantes haben, doch in den seltensten Fällen sind sie wahr.

Als Gegenreaktion auf den unablässigen Ruf nach Zahlen und Prozenten beobachtet man heute auf künstlerischem Gebiet eine oft aggressive Tendenz, jedes systematische oder wissenschaftliche Denken abzulehnen. Einige der größten Künstler, beispielsweise Leonardo da Vinci, hätten diese Einstellung sicherlich sehr befremdlich gefunden. Ich frage mich manchmal, ob diese Sehnsucht, sich der Zwangsjacke des logischen Denkens entziehen zu wollen, nicht vielleicht ein Zeichen von Frustration ist und eigentlich auf fehlender Kreativität beruht, für die man die Zahlen gerne verantwortlich machen möchte, die in unserem heutigen Leben eine so vorherrschende Rolle zu spielen scheinen. Das ständige Ausmessen von Dingen scheint der Spontaneität entgegenzustehen und führt zu einer Abneigung gegen die Zahlen, die als langweilig und einschränkende Last empfunden werden. Vielleicht wurden unsere Art zu denken, unsere Gedankenfreiheit und die Freiheit des Geistes schon zu sehr von den Gesetzen der Zahlen eingeengt und limitiert.

Ich möchte Ihnen jedoch versichern, dass die Zahlen für sich nichts Schlechtes an sich haben, sondern im Gegenteil in natürlicher Weise interessant sind. Die Probleme, die wir mit ihnen haben, und die zerstörerischen Anwendungen, für die wir sie nutzen, sind von Menschen gemacht. Auf der einen Seite sollte man anerkennen, dass es berechtigte Grenzen für den Einsatz von Zahlen gibt, andererseits müssen wir aber auch eingestehen, diese Grenzen nicht immer von vorneherein klar erkennen zu können. Eine überraschende Seite der Zahlen ist ihre Eigenschaft, manchmal vollkommen plötzlich und unabsehbar in andere Bereiche der Mathematik und der Wissenschaften vorzudringen. Beispielsweise hätte vor 30 Jahren niemand geglaubt, dass die sogenannten Falltürfunktionen, auf denen heute die Sicherheitscodes im Internet beruhen, der Theorie der natürlichen Zahlen entspringen könnten, doch davon später mehr.

Galileo (1564–1642) hatte Recht, wenn er auf die Bedeutung von Experimenten hinwies.[1] Gleichzeitig sollten wir jedoch den modernen Einwand hinzufügen, dass wir der verbreiteten Versuchung widerstehen sollten vorzugeben, wir hätten etwas gemessen, wenn es in Wirklichkeit nicht stimmt. Wie oft hört man beispielsweise von einem Experten, er sei sich zu 90 % eines gewissen Ergebnisses sicher – nicht 92 % und auch nicht 88 %, sondern 90 %. Diese Zahl ist vollkommen bedeutungslos, wenn es keine Möglichkeit gibt, sie zu berechnen. Trotzdem haben wir oft das Bedürfnis eine Zahl anzugeben, selbst wenn wir gar keine haben, und dann denken wir uns einfach eine aus, nur um mehr Eindruck zu hinterlassen. Ohne fundierte Informationen wäre eine vage Aussage häufig richtiger, und eine sehr präzise,

[1] Allerdings hatte schon zwei Jahrhunderte zuvor der vergleichsweise unbekannte Nikolaus von Kues (1401–1464) betont, dass Wissen auf Experimenten beruhen muss.

durch eine Zahl untermauerte Behauptung beruht oft lediglich auf einem Wunschdenken, um in Anbetracht der Unsicherheit überzeugender und informierter klingen zu können.

Wenn wir es mit Zahlen zu tun haben, müssen wir sie im Allgemeinen in einem bestimmten Zusammenhang interpretieren, dabei kann es sich um Geld, Personen oder auch um den Gasdruck handeln. Der Gegenstand dieses Buches sind jedoch die Zahlen selbst und wie sich unser Verständnis von den Zahlen weiterentwickelt. Daher erscheint es angemessen, uns zunächst einmal zu überlegen, was eigentlich in unserem Kopf vor sich geht, wenn wir auf diese geheimnisvollen Dinge stoßen, die wir Zahlen nennen.

Wie sollen wir von Zahlen denken?

Wenn wir von einer bestimmten Zahl sprechen, beispielsweise sechzehn, haben wir meist ein mentales Bild der beiden Ziffern 16 vor unseren Augen. Eigentlich ist es gegenüber dieser Zahl etwas unfair, wenn wir sie gleich als $10 + 6$ einstufen. Weshalb sollten wir Sechzehn gerade als $10 + 6$ denken? Dieselbe Zahl kann ebensogut als $9 + 7$ oder auch symmetrischer als $8 + 8$ ausgedrückt werden. Diese Gewohnheit beruht natürlich auf unserer uneingeschränkten Verwendung der Zahl Zehn als Basis für unser Zahlensystem: Wir bezeichnen eine Zahl stillschweigend immer durch eine Summe von Potenzen der Zahl Zehn. Schreiben wir beispielsweise 2013, so meinen wir $2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 1$. Wie Sie vermutlich wissen, könnten wir auch eine andere Zahl als Basis für unser Zahlensystem verwenden, zum Beispiel die Zahl Zwölf, und in verschiedenen Kulturen wurden in der Vergangenheit tatsächlich andere Basiszahlen eingesetzt: Die Mayas verwendeten früher die Zahl Zwanzig, die Babylonier rechneten mit der Basiszahl Sechzig, und moderne Rechensysteme beruhen auf der Zahl Zwei oder aber kleinen Potenzen von zwei, wie vier oder acht, und manchmal verwendet man auch die Basis Sechzehn und spricht dann vom *Hexadezimalsystem* (allerdings müssen wir in diesem Fall zusätzliche Symbole für die sechs Zahlen einführen, die wir gewöhnlich mit 10, 11, 12, 13, 14 und 15 bezeichnen). Im Hexadezimalsystem kann man mit lediglich zwei Ziffern jede Zahl zwischen 0 und einschließlich 255 ausdrücken. Dieser Zahlenbereich tritt häufig auf und wird beispielsweise zur Festlegung von Farben verwendet. Wie wir in einem späteren Kapitel noch sehen werden, kann man durch den Vergleich von Zahlen in verschiedenen Basissystemen auch etwas darüber lernen, wie die Zahlen entlang einer Geraden angeordnet sind.

Wir werden an gegebener Stelle mehr dazu sagen, doch zunächst sollten wir uns die fundamentale Frage stellen: Weshalb führen wir überhaupt eine Basis ein, wenn wir mit Zahlen umgehen möchten? Zunächst könnte man meinen, beim Umgang mit Zahlen muss man sich auf irgendeine Basis beziehen. Doch im Alltag machen wir oft etwas anderes. Denken wir zum Beispiel an einen Kindergeburtstag, bei dem wir jedem Kind ein Spielzeug mitgeben möchten. Wichtig ist lediglich, dass mindestens so viele Spielzeuge vorhanden sind wie Kinder, und das können wir nachprüfen ohne zu zählen: Wir schreiben einfach auf jedes Spielzeug den Namen eines Kindes, und solange genügend Spielzeuge vorhanden sind, sodass jedes Kind seinen Namen auf einem Spielzeug wiederfindet, geht niemand enttäuscht nach Hause. Auf diese Weise stellen wir fest, ob die Anzahl der Spielzeuge mindestens so groß ist wie die Anzahl der Kinder, und dazu müssen wir weder die Spielzeuge noch die Kinder zählen. Wir müssen überhaupt nicht wissen, wie viele Kinder oder wie viele Spielzeuge da sind, und trotzdem können wir nachweisen, dass es ausreichend viele Spielzeuge gibt. Wir können dieses Zahlenproblem daher lösen, ohne die Basis Zehn oder irgendeine andere Basis für eine Berechnung verwenden zu müssen. Dieses Beispiel zeigt auch deutlich, dass Zahlen etwas mit der paarweisen Zuordnung von den Elementen einer Menge zu den Elementen einer anderen Menge zu tun haben – eine sehr grundlegende Idee.

Mit einer Basis können wir allerdings Zahlen sehr effizient und in gleichartiger Weise ausdrücken. Dadurch können wir eine Zahl leicht mit einer anderen vergleichen und auch Berechnungen durchführen, die im Zusammenhang mit unseren Zahlen auftreten. Eine Basis für ein Zahlensystem lässt sich mit dem Maßstab auf einer Landkarte vergleichen. Es handelt sich nicht um eine Eigenschaft, die dem Gegenstand innewohnt, aber es ist wie ein Koordinatensystem, das als Vergleichsinstrument noch obendrauf gelegt wird. Die Wahl der Basis ist vollkommen willkürlich, und die ausschließliche Verwendung der Basis Zehn macht es uns wesentlich schwerer, die Zahlen 1, 2, . . . unvoreingenommen zu betrachten. Erst wenn wir diesen Vorhang heben, können wir die Zahlen so sehen, wie sie wirklich sind.

Einige Kulturen entwickelten oft auch verschiedene Zahlensysteme, doch sie alle verwendeten eine Einteilung in Mengen gleicher Größe, oft in Einheiten von zehn. Der Vorteil einer Basis zeigt sich beim Rechnen erst dann in voller Deutlichkeit, wenn man ein *Stellenwertsystem* zur Darstellung der Zahlen verwendet, bei dem der Wert einer Ziffer von ihrem Platz bzw. ihrer Stelle innerhalb der Zahlenfolge abhängt. Keine antike Kultur, nicht einmal die ansonsten sehr fortschrittlichen Griechen, hat ein vollständiges Stellenwertsystem entwickelt, das mit dem unsrigen vergleichbar wäre, bei dem der Wert einer Ziffer von ihrer Position innerhalb der Zahl abhängt und das auch von dem Symbol für die Null Gebrauch macht, um anzudeuten, dass eine bestimmte Potenz der Basis nicht vorhanden ist (erinnern Sie sich an unser Beispiel 2013). Erst in den frühen Jahrhunderten des ersten Jahrtausends entstand in Indien ein vollständiges Zahlensystem dieser Art, wobei das Symbol für 0 *sunya* genannt wurde, dem Hindi-Wort für „leer“. Über die arabischen Länder gelangte es schließlich nach Europa, sodass wir unser Zahlensystem heute als indo-arabisch bezeichnen.

Ohne ein geeignetes Stellenwertsystem fallen sogar alltägliche Berechnungen schwer. Auf der anderen Seite hatte es durchaus seine Vorteile, nicht gleich in einer Zehnerbasis gefangen zu sein, da man so die Zahlen selbst leichter untersuchen konnte. Wir können die Freiheiten der antiken Denker, die sie in Ermangelung anderer Verfahren noch auskosten mussten, wiedergewinnen, indem wir uns einfach für den Augenblick der Zwangsjacke der Zehnerbasis entledigen und uns die Zahlen nur durch ihre intrinsischen Eigenschaften denken – Eigenschaften, die sie haben oder nicht haben.

Nach diesem befreienden Schritt erkennen wir, dass es weitaus natürlicher ist, sich auf bestimmte Faktorisierungseigenschaften einer Zahl zu konzentrieren, da sich diese auch in geometrischer Form veranschaulichen lassen. Beispielsweise ist die Zahl Sechzehn eine vollkommene Quadratzahl, die sich in natürlicher Weise durch ein Quadrat mit vier mal vier Punkten darstellen lässt. Und da die Zahl Vier selbst wieder eine Quadratzahl ist, sehen wir, dass Sechzehn die vierte Potenz von gleichen Zahlen ist, denn Sechzehn ist gleich $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Tatsächlich ist Sechzehn die erste Zahl nach der 1, die in diesem Sinne eine vollkommene vierte Potenz ist, und das macht sie in der Tat sehr besonders. Dies ist einer der Gründe, weshalb sie im Gegensatz zur Zehn oft als Basis für Rechensysteme verwendet wird. Die Zahl Zehn ist die traditionelle Basis, die wir aus dem rein zufälligen Grund verwenden, weil wir an unseren beiden Händen insgesamt zehn Finger haben.

Denken wir bei Zahlen einmal nicht nur an ein Hilfsmittel der experimentellen Wissenschaften, sondern nehmen wir uns etwas Zeit, sie ohne Bezug auf irgendetwas anderes zu untersuchen, dann können wir viel entdecken, was andernfalls verborgen bliebe. Es gibt Zahlen, deren mathematische Eigenschaften sich in der Natur in Form regelmäßiger Muster zeigen, wie zum Beispiel die spiralförmige Blüte einer Sonnenblume (deren Form mit den sogenannten Fibonacci-Zahlen zusammenhängt). Schon allein aus diesem Grund ist es sinnvoll, diese Eigenschaften von Zahlen zu untersuchen. Manchmal sind es einfache Fragestellungen, beispielsweise wie sie sich als Summen von Quadratzahlen schreiben lassen, die zu mathematischen Strukturen von erstaunlicher Schönheit und Komplexität geführt haben. Instinktiv folgt der Mathematiker solchen Wegweisern, denn oft führen sie zu unerwarteten Einsichten, zu denen man auf andere Weise kaum gelangt wäre.

Der Einfachheit halber schreibe ich die einzelnen Zahlen, auf die ich Sie aufmerksam machen möchte, immer noch in der vertrauten Zehnerbasis, aber ich werde diese besondere Darstellung nicht betonen: Sie dient einfach als Name für die Zahl, mit der wir uns gerade beschäftigen.

Der Aufbau der Zahlen

Einer der angenehmen Vorzüge von Zahlen ist so offensichtlich, dass man ihn leicht übersieht – Zahlen sind alle verschieden. Jede Zahl besitzt ihre eigene Struktur, in gewisser Hinsicht ihren eigenen Charakter, und dieser perönliche Zug einzelner Zahlen ist von großer Bedeutung. Betrachten wir als Beispiel die Zahl Sechs. Sechs ist ein Produkt aus zwei kleineren Zahlen, nämlich Zwei und Drei, und sie ist damit eine sogenannte *Rechteckzahl*, also eine Zahl, die sich als rechteckige Anordnung von Punkten darstellen lässt. Jede Zahl n, die als Produkt von zwei kleineren Zahlen, $n = a \cdot b$, geschrieben werden kann, lässt sich als ein $a \cdot b$-Rechteck von Punkten zeichnen. (Gewöhnlich sparen wir Zeit und Platz, indem wir das Produkt $a \cdot b$ von zwei beliebigen Zahlen a und b einfach als ab schreiben.) Rechteckzahlen bezeichnet man meist als *zusammengesetzte Zahlen*, da sie aus kleineren Faktoren zusammengesetzt sind. Zahlen, die in diesem Sinne keine Rechteckzahlen sind, heißen *Primzahlen*. Primzahlen wie 2, 7 und 101 lassen sich nicht als richtiges Rechteck zeichnen, sondern lediglich als einfache Punktlinie. In Worten: Eine Zahl ist eine Primzahl, wenn sie *nicht* als das Produkt von zwei kleineren Faktoren geschrieben werden kann. (Diese Definition schließt die 1 aus der Liste der Primzahlen aus: Die erste Primzahl ist 2.) Primzahlen sind von besonderer struktureller Bedeutung, denn sie bilden die multiplikativen Bausteine, aus denen sich alle anderen Zahlen zusammensetzen lassen: Zum Beispiel ist 60 eine zusammengesetzte Zahl, die sich als Produkt von Primzahlen schreiben lässt: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Jede zusammengesetzte Zahl lässt sich in ein Produkt von Faktoren zerlegen, die selbst wiederum, sofern sie keine Primzahlen sind, in weitere Faktoren zerlegt werden können, bis wir schließlich für unsere Zahl die *Primzahlzerlegung* gefunden haben. Es zeigt sich, dass diese Zerlegung in Faktoren eindeutig ist – es gibt nur eine Möglichkeit, eine Zahl als Produkt von Primzahlen zu schreiben. Egal, wie man mit der Faktorisierung einer Zahl beginnt, wenn man die Faktoren selbst wieder in Faktoren zerlegt, gelangt man schließlich immer zu derselben Gruppe von Primfaktoren. Das ist eine wesentliche Eigenschaft der Zahlen, die in unzähligen Anwendungen von der Codierung von Schriften bis hin zur Logik eingesetzt wird. Das vielleicht größte bisher noch ungelöste Problem in der Mathematik ist die Riemann'sche Vermutung, und sie hängt eng zusammen mit dem sogenannten Fundamentalsatz der Arithmetik, der besagt, dass die Primzahlzerlegung einer Zahl immer eindeutig ist.*

Die Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung lässt sich kaum hoch genug bewerten. Das Ganze erscheint Ihnen vielleicht übertrieben, doch um es nochmals zu betonen: Wäre die Primzahlzerlegung nicht eindeutig, hätte das weitreichende Konsequenzen. Das folgende Beispiel soll deutlich machen, dass diese mittlerweile vertraute Eigenschaft der Zahlen alles andere als selbstverständlich ist. Betrachten wir als Beispiel die Zahlenfolge 1, 5, 9, 13, 17, 21, . . .: Es handelt sich um die Zahlen der Form $1 + 4n$, wobei n nacheinander die Werte 0, 1, 2, 3, 4, 5, . . . annimmt. Die Menge dieser Zahlen bildet ein abgeschlossenes Zahlensystem für sich, d. h., wenn wir zwei beliebige Zahlen dieser Art miteinander multiplizieren, ist das Ergebnis wieder eine Zahl dieser Art: Beispielsweise ist $9 \cdot 17 = 153 = 1 + (4 \cdot 38)$. Manche Zahlen, dazu zählt 153, lassen sich in ein Produkt von anderen Zahlen aus dieser Zahlenfolge zerlegen. Für andere Zahlen gilt das jedoch nicht, und diese Zahlen bezeichnen wir als *primär*. Gewöhnliche Primzahlen, die in dieser Folge auftreten, beispielsweise 5 oder 13, sind auch primär, doch auch 9 ist eine Primärzahl, denn sie lässt sich nicht in Zahlen aus der Folge zerlegen ($9 = 3 \cdot 3$, doch 3 gehört nicht zu unserer Menge).

Offensichtlich kann jede Zahl dieser Zahlenfolge in ein Produkt aus Primärzahlen zerlegt werden. Der Grund ist derselbe wie bei den Primzahlen: Entweder ist eine gegebene Zahl bereits eine Primärzahl, oder sie ist es nicht, und dann können wir sie in kleinere Faktoren aus unserer Menge zerlegen. Diese Zerlegung können wir so lange fortsetzen, bis nur noch ein Produkt von Primärzahlen vorliegt. Doch die Primärzahlenzerlegung ist nicht immer eindeutig: $693 = 21 \cdot 33 = 9 \cdot 77$. Damit erhalten wir zwei verschiedene Primärzahlenzerlegungen für $693 = 1 + (4 \cdot 173)$.

Die Moral der Geschichte ist, dass die Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung etwas Besonderes ist und trotz ihrer Vertrautheit alles andere als selbstverständlich, denn wir haben gerade ein ähnliches Zahlensystem kennengelernt, für das diese Eigenschaft nicht gilt.

Kehren wir nun zu unsere Zahl 6 zurück. Zunächst können wir feststellen, dass ihre Eigenschaft, eine Rechteckzahl zu sein, kaum besonders bemerkenswert ist. Allerdings ist 6 auch eine *Dreieckszahl*: Da $6 = 1 + 2 + 3$, können wir sie in natürlicher Weise als eine Dreiecksanordnung von sechs Punkten ansehen, wobei ein Punkt in der ersten Reihe, zwei in der zweiten und drei Punkte in der dritten Reihe liegen. Die nächst kleinere Dreieckszahl ist $3 = 1+2$ und die nächst größere $10 = 1+2+3+4$. Gewöhnlich zählen wir die 1 zu den Dreieckszahlen, sodass die ersten fünf Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10 und 15 sind. Das Dreieck aus 10 Punkten kennt man zum Beispiel aus der anfänglichen Anordnung der Pins (Kegel) beim Bowling, und das Dreieck aus 15 Punkten aus der Eröffnungsanordnung der roten Billardkugeln beim Snooker. Die Dreieckszahlen sind im Vergleich zu den gewöhnlichen Rechteckzahlen schon etwas Besonderes.

Die Zahl 6 gehört noch zu einer weiteren Zahlenklasse, die wir als „Auswahlzahlen" bezeichnen könnten: Es gibt insgesamt sechs Möglichkeiten, zwei Kinder aus einer Gruppe von vier Kindern auszuwählen. Nennen wir die Kinder Alex, Bert, Caroline und Daniel, dann können wir die sechs möglichen Paare durch AB, AC, AD, BC, BD und CD kennzeichnen. Hierbei spielt die Reihenfolge, in der wir die Kinder innerhalb eines Paares aufzählen, keine Rolle, sodass zum Beispiel AB und BA dasselbe Paar darstellen. Es zeigt sich, dass jede Dreieckszahl gleichzeitig auch eine Auswahlzahl ist: Die n-te Dreieckszahl ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Gruppe von $n + 1$ Gegenständen zwei Gegenstände auszuwählen. Auch auf diesen Punkt werden wir in Kap. 4 noch genauer eingehen.

Die Zerlegung $6 = 1 + 2 + 3$ erlaubt noch eine zweite Deutung, die in der Unendlichkeit des Zahlensystems weitaus seltener auftaucht: Die Zahl 6 ist auch gleich der Summe all ihrer kleineren Faktoren. Die Pythagoräer nannten solche Zahlen *vollkommen*. Man sollte mit derart verführerischen Namen vorsichtig umgehen, doch in diesem Fall ist er durchaus nicht unangebracht: Damit eine Zahl gleich der *Summe* all ihrer Faktoren ist, muss ein besonderes inneres Gleichgewicht vorliegen, und diese Form von Gleichgewicht ist in der Tat sehr selten. Die nächsten vier vollkommenen Zahlen sind 28, 496, 8128 und 33 550 336. Man weiß vergleichsweise viel über die geraden vollkommenen Zahlen, doch obwohl es eine Beziehung zwischen diesen Zahlen und einer bestimmten Klasse von Primzahlen gibt, ist eine der grundlegenden Fragen der antiken Mathematiker auch heute noch unbeantwortet, nämlich ob es unendlich viele dieser speziellen Zahlen gibt. Noch erstaunlicher ist aber, dass noch niemand eine ungerade vollkommene Zahl gefunden hat oder beweisen konnte, dass es keine ungeraden vollkommenen Zahlen geben kann. Ob wir es jemals erfahren werden?

Schließlich hat 6 als einzige Zahl die Eigenschaft, dass sie sowohl gleich der Summe als auch gleich dem Produkt all ihrer kleineren Faktoren ist: $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$. Außerdem ist sie gleich der Summe und dem Produkt einer Folge von aufeinanderfolgenden Zahlen. Es gibt mit Sicherheit keine andere Zahl dieser Art. Natürlich ist es oft leicht, für die kleinen Zahlen besondere Eigenschaften zu finden, die einzigartig sind – beispielsweise ist 3 die einzige Zahl, die gleich der Summe aller vorherigen Zahlen ist, und 2 ist die einzige gerade Primzahl.

Wir erhalten die n-te Dreieckszahl, indem wir alle Zahlen von 1 bis n addieren. Ersetzen wir die Addition durch eine Multiplikation, erhalten wir die sogenannten *Fakultätszahlen*. Die erste Fakultätszahl ist 1, die zweite ist $2 \cdot 1 = 2$, und die dritte haben wir bereits kennengelernt: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Fakultätszahlen treten vielfach im Zusammenhang mit Problemen auf, bei denen es um das Abzählen oder die Aufzählung von Möglichkeiten geht, beispielsweise zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Kartenblatt in einem Spiel wie Poker zu haben. Wegen ihrer Bedeutung gibt es für sie eine eigene Schreibweise: Die n-te Fakultätszahl schreibt man als $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Die Dreieckszahlen wachsen schon vergleichsweise schnell an, ungefähr mit der Hälfte der Rate der Quadratzahlen, doch die Fakultätszahlen wachsen wesentlich schneller und erreichen sehr rasch die Millionen und Milliarden. Beispielsweise ist $10! = 3\,628\,800$. Das Ausrufezeichen wurde von Christian Krempe im Jahr 1808 zur Kennzeichnung dieser Zahlen eingeführt, und es scheint uns immer an diese äußerst alarmierende Wachstumsrate zu erinnern.

Es ist durchaus gerechtfertigt zu behaupten, dass die kleinen Zahlen häufig speziellere Eigenschaften haben als die großen – je näher eine Zahl dem Anfang der Zahlengeraden ist, umso wahrscheinlicher besitzt sie irgendein einzigartiges und besonderes Merkmal. Hierbei handelt es sich jedoch um eine grobe Faustregel, denn es gibt auch einige sehr große Zahlen mit ganz besonderen Eigenschaften. Die Zahl 12 bezeichnet man als *abundante* Zahl, was bedeuten soll, dass sie kleiner ist als die Summe aller ihrer Faktoren (hierbei zählen natürlich nur die Faktoren, die kleiner sind als die Zahl selbst): $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$. Ungerade Zahlen sind nur selten abundant, und es gibt auch keine kleinen ungeraden Zahlen dieser Art – das erste Beispiel ist die Zahl 945. Der eine oder andere Leser wird sich selbst davon überzeugen wollen, dass die Summe aller Faktoren von 945 auf die größere Zahl 975 führt. Mit etwas Erfahrung sieht man es schnell: Aus der Primfaktorzerlegung $945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ kann man leicht eine Formel ableiten, welche die Summe der Faktoren *einschließlich der Zahl selbst* liefert: $(1 + 3 + 9 + 27)(1 + 5)(1 + 7)$. Zieht man davon 945 ab, erhält man das Ergebnis 975.*

Für Mathematiker mit einem engen Bezug zur Zahlentheorie werden die einzelnen Zahlen zu alten Freunden. Eine berühmt gewordene Unterhaltung zwischen Hardy und Ramanujan bezog sich auf die Nummer 1729 eines Taxis. Als Hardy etwas oberflächlich meinte, es handele sich dabei um eine langweilige Zahl, belehrte ihn das kleine indische Genie sofort eines Besseren und wies darauf hin, dass 1729 die kleinste Zahl sei, die sich auf zwei verschiedene Weisen als Summe von zwei dritten Potenzen schreiben lässt: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.

Manche Zahlen haben sogar irritierende Eigenschaften, zum Beispiel die Zahl 561. Sie verhält sich in vielerlei Hinsicht wie eine Primzahl, ohne jedoch eine zu sein. Primzahlen haben eine besondere Eigenschaft, die unter anderem auch für die Codierung von Nachrichten wichtig ist: Sie erfüllen das Fermat'sche Lemma, wonach für jede Zahl a und jede Primzahl p der Ausdruck a^p denselben Rest bei einer Division durch p ergibt wie die Zahl a selbst. Betrachten wir als Beispiel die Primzahl $p = 5$ und setzen $a = 8$, dann können wir leicht überprüfen, dass sowohl die Zahl 8 als auch $8^5 = 32\,768$ bei einer Division durch 5 denselben Rest 3 ergeben. Im Allgemeinen gilt diese Eigenschaft für zusammengesetzte Zahlen nicht mehr: Ersetzen wir zum Beispiel die Primzahl 5 durch die zusammengesetzte Zahl $p = 4$ und wählen $a = 7$, so sehen wir sofort, dass die Divison von 7 durch 4 den Rest 3 liefert, wohingegen die Division von $7^4 = 2401$ durch 4 den Rest 1 ergibt. Es wäre schön, wenn diese Eigenschaft einen Test darstellte, ob eine Zahl p eine Primzahl ist oder nicht. Leider ist das nicht der Fall. Die zusammengesetzten Zahlen p, die diesen Test immer bestehen, bezeichnet man als *Carmichael-Zahlen*, und $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ ist die kleinste von ihnen. Diese Zahlen sind selten, doch zufälligerweise ist die Ramanujan-Zahl 1729 eine weitere, ebenso wie 2821. Im Jahr 1992 konnten Alford, Granville und Pomerance beweisen, dass es unendlich viele Carmichael-Zahlen gibt, und damit führt kein Weg an ihnen vorbei.

Im Gegensatz zu vielen anderen Zahlen sind Primzahlen in gewisser Hinsicht schwer zu fassen. Benötigen wir beispielsweise eine sehr große Quadratzahl, nehmen wir einfach eine große Zahl, multiplizieren diese mit sich selbst, und schon haben wir das Gewünschte. Schon vor Euklid (300 v. Chr.) war bekannt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt*, doch im Gegensatz zu den Quadratzahlen sind diese nicht so leicht zu finden, und es hat den Anschein, dass die Jagd nach ihnen nicht einfach ist. Wir können Primzahlen nicht einfach wie Quadratzahlen herstellen, sondern müssen uns darauf beschränken, eine ungerade Zahl nach der anderen zu überprüfen. Es gibt allerdings verschiedene Tricks, die diese endlose Suche erleichtern. Auf der einen Seite hat noch niemand beweisen können, dass es unmöglich ist, einen direkten Weg zur Erzeugung beliebiger Primzahlen zu finden, auf der anderen Seite kann auch niemand behaupten, einen solchen Weg bereits gefunden zu haben.

Unter den ersten paar Tausend Zahlen sind Primzahlen noch häufig vertreten, doch sie werden immer seltener, je weiter wir in den Bereich der sehr großen Zahlen kommen. Das überrascht kaum, denn eine große Zahl hat potenziell weitaus mehr mögliche Faktoren als eine kleine. Zu jeder Zeit in der Geschichte der Mathematik gab es eine größte bekannte Primzahl. Der gegenwärtige Spitzenreiter hat viele Millionen Stellen, und es würde einen guten Monat dauern, diese Zahl einfach nur in der gewöhnlichen Notation der Basis 10 aufzuschreiben. Allerdings kann man sie einfacher als eine bestimmte Potenz von zwei minus eins darstellen: $2^{43\,112\,609} - 1$. Da es immer wieder größere Primzahlen gibt, die auf ihre Entdeckung warten, ist der herausragende Status dieser Zahl nur vorübergehend.[2] Ein Beispiel für eine sehr große Zahl, die ihren besonderen Status nie verlieren wird, ist

$$8080\;17424\;79451\;28758\;86459\;90496\;17107\\57005\;75436\;80000\;00000\,.$$

Bei dieser Zahl handelt es sich um die Anzahl der Elemente der sogenannten *sporadischen Monstergruppe*. Hier ist sicherlich eine kurze Erklärung vonnöten. Unter einer *Gruppe* können wir uns für unsere Zwecke die Menge aller Symmetrien eines Gegenstands vorstellen, Veränderungen, wie Spiegelungen und Drehungen, die ein strukturiertes Objekt, wie beispielsweise ein Quadrat oder ein Tapetenmuster, in seinem Erscheinungsbild unverändert lassen. Die Untersuchung mathematischer Gruppen begann zu Beginn des 19. Jahrhunderts und geht auf die Suche

---

[2] Diese Primzahl wurde 2008 gefunden und ist vermutlich die 47. Mersenne-Primzahl. Dank des GIMPS-Projekts, an dem viele Zehntausende Enthusiasten mit ihren Computern teilnehmen, wird der jeweilige Rekord in regelmäßigen Abständen gebrochen. Siehe http://primes.utm.edu/largest.html.

nach Lösungen von bestimmten Gleichungen zurück, bei denen höhere Potenzen als zwei in der unbekannten Größe auftreten. Dieses Gebiet erwies sich jedoch in der Folgezeit als nahezu allgegenwärtig, und Gruppen spielen fast in der gesamten Mathematik und Physik eine wichtige Rolle: Kristallografie und Nachrichtencodierung sind nur zwei dieser Gebiete. Vereinfacht kann man sagen, dass der Grund für ihre Bedeutung die Eigenschaft ist, der geometrischen Vorstellung von einer Symmetrie eine algebraische Formulierung zu geben. Auf diese Weise können wir zu diesem eher abstrakten Konzept sogar Berechnungen durchführen. Die Mathematik versucht immer zu verstehen, wie komplizierte Objekte aus kleineren und einfacheren Teilen zusammengesetzt sind. Eine *einfache Gruppe* hat unter den Gruppen eine ähnliche Bedeutung wie eine Primzahl für die Zahlen. Diese Aussage lässt sich zwar präziser fassen, das ist hier jedoch nicht notwendig. Es gibt vier Hauptklassen einfacher Gruppen, doch zusätzlich, außerhalb der regulären Klassen, gibt es noch genau 26 sogenannte sporadische einfache Gruppen. Man weiß heute, dass es nicht mehr als diese 26 Ausnahmegruppen geben kann. „Einfach" sind sie nur in der technischen Bedeutung dieses Wortes, im Allgemeinen sind sie sehr groß und komplex, und die Monstergruppe ist die größte unter ihnen. Sie wurde 1982 von Robert Greiss als Gruppe von Drehungen in einem 196 883-dimensionalen Raum konstruiert. Die Größe der Monstergruppe ist die oben angegebene 54-stellige Zahl. Diese Zahl ist daher speziell, und sie wird es auch für alle Zeiten bleiben. Sie gehört zu den unsterblichen Sehenswürdigkeiten der mathematischen Landschaft. Das volle Ausmaß ihrer Bedeutung wird sich erst mit den Jahren zeigen, wenn die Zahlen nach und nach ihre Geheimnisse preisgeben.

http://www.springer.com/978-3-8274-3015-1

Das kleine Buch der Zahlen
Vom Abzählen bis zur Kryptographie
Higgins, P.M.
2013, XII, 354 S. 34 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-8274-3015-1