2 Die Entdeckung der Zahlen

Auch wenn uns Zahlen sehr vertraut sind, sollte man sich immer vor Augen halten, dass sie keine physikalische Existenz haben, sondern dass es sich eher um Abstraktionen handelt, die aus der wirklichen Welt gewonnen wurden. Von zwei Mengen sagt man, sie haben dieselbe Anzahl von Elementen, wenn die Elemente der Mengen paarweise einander zugeordnet werden können, wie in dem Film „Seven Brides for Seven Brothers" („Eine Braut für sieben Brüder"). Die Zahl der Elemente in einer endlichen Menge gilt als kleiner als die Zahl der Elemente in einer anderen, wenn die Elemente dieser ersten Menge mit nur einem Teil der zweiten Menge gepaart werden können. So war es bei unserem Beispiel mit den Spielzeugen für die Kinder bei einer Geburtstagsfeier. Dadurch erhält die Menge der Zahlen eine natürlich ansteigende Ordnung. Da wir in der Kindheit alle gelernt haben zu zählen, können wir nur mit Mühe nachvollziehen, weshalb das Zählen eigentlich etwas Schwieriges ist. Es war sicherlich nicht leicht, bis man erkannt und in Worte gefasst hatte, dass ein Kaninchenpaar und zwei Tage etwas Gemeinsames haben. Letztendlich wichtig ist natürlich, dass der Mann mit den Kaninchen für jeden der nächsten beiden Tage etwas zu essen hat.

War das Konzept einer Zahl einmal erkannt, war es nur natürlich, den ersten Zahlen eigene Namen zu geben: Eins, zwei, drei, vier usw. sind die von uns verwendeten Bezeichnungen. Bis zu diesem Punkt unterscheidet sich die ganze Sache jedoch nur wenig von dem geordneten Aufzählen der Buchstaben eines Alphabets. Ein kleiner Unterschied besteht allerdings: Die ers-

M. M. Higgins, *Das kleine Buch der Zahlen*, DOI 10.1007/978-3-8274-3016-8_2,

ten sechsundzwanzig Zahlen besitzen die oben erwähnte natürliche Ordnung, wohingegen die Ordnung der Buchstaben eines Alphabets willkürlich ist. Obwohl die *Bezeichnungen* für unsere Zahlen vollkommen beliebig sind, ist ihre natürliche Ordnung etwas ihnen Eigenes und nichts, das wir willkürlich festgelegt haben. Gerade die willkürliche Ordnung, die wir dem Alphabet gegeben haben, macht es Kindern oft so schwer, wenn es darum geht, sich die Reihenfolge der Buchstaben in einem Wörterbuch zu merken.

Was für das Alphabet noch angemessen sein mag, würde bei den natürlichen Zahlen nicht funktionieren: Es gibt nur endlich viele Buchstaben, und nachdem wir sechundzwanzig Namen erfunden haben, erreichen wir das Ende. Es gibt aber unendlich viele Zahlen, und sie erstrecken sich endlos. Außerdem brauchen wir sogar im Alltag viele dieser Zahlen – jede Zivilisation muss in der Lage sein, bei Bedarf bis in die Hunderte oder Tausende zählen zu können. Es besteht daher die Notwendigkeit, irgendeine Bezeichnungsform für Zahlen zu erfinden, die über den naiven Weg einer immer größeren Liste verschiedener Namen für verschiedene Zahlen hinausgeht.

Wir können dieses Problem etwas entschärfen, indem wir bestimmte Zahlen durch bestimmte Symbole darstellen: Bei den römischen Ziffern steht das X beispielsweise für die Zehn und das V für die Fünf. Das grundlegende Problem bleibt jedoch: Es ist unpraktisch, ja sogar unmöglich, für jede Zahl ein eigenes einzelnes Symbol zu haben. Früher oder später sind wir gezwungen, das *Prinzip der Addition* auszunutzen, wonach sich einige Zahlen als die Summe von zwei kleineren Zahlen darstellen lassen. Beispielsweise gibt es bei den römischen Zahlen kein eigenes Symbol für die Zahl Fünfzehn – wir schreiben einfach XV, um damit die Zahl anzudeuten, die man aus einer Menge von zehn Gegenständen erhält, wenn man noch eine Menge von fünf weiteren Gegenständen hinzufügt.

Anscheinend handelt es sich bei der Entdeckung dieses Additionprinzips um etwas Natürliches, denn wir finden es in allen antiken Zivilisationen im Nahen Osten, in Europa und in Asien. Auch die Addition auf der Basis Zehn ist häufig. Wie schon erwähnt, haben die Babylonier sowohl von der Basis Zwölf als auch von der Basis Sechzig Gebrauch gemacht, worauf die heute weltweite Praxis der Unterteilung eines Tages in vierundzwanzig Stunden und die Unterteilung des Vollkreises in 360 Grad zurückgeht. Ein weiteres Überbleibsel der Basis Sechzig finden wir im Französischen, wo es keine eigenen Bezeichnungen für die Zahlen zwischen 60 und 100 gibt: 70 heißt soixante-dix (60 und 10), 80 ist quatre-vingt (vier Zwanziger), 90 ist quatre-vingt-dix usw. Die französisch sprechende belgische Bevölkerung wurde dessen allerdings müde und führte für diese Zahlen die neuen Namen septante, octante und nonante ein. Die meisten Zahlensysteme beruhen allerdings auf einer Einteilung der Zahlen in Zehnergruppen, wodurch man in der Praxis vergleichsweise große Zahlen durch eine kurze Liste von Symbolen kennzeichnen kann. Leider übernahm man dabei den „Gerade-gut-genug"-Standpunkt: Nachdem ein für die Anforderungen des Alltags taugliches Verfahren zum Aufschreiben von Zahlen entwickelt worden war, festigte es sich, und es wurde anscheinend nichts unternommen, um dieses System zu verbessern oder es gar durch ein besseres zu ersetzen.

Selbst die mathematisch sehr fortschrittlichen Griechen nahmen die Grundrechenarten nicht so ernst, als dass sie sich von einer ziemlich primitiven Schreibweise hätten lösen können. Eine mögliche Erklärung könnte sein, dass Buchhaltung eher von Sklaven ausgeführt wurde und einer vertiefenden Untersuchung nicht würdig erschien. Was auch immer die Gründe waren, die Art des Rechnens war bei den Griechen kaum fortgeschrittener als in anderen antiken Kulturen. (Tatsächlich war im Grunde genommen das babylonische System sogar überlegen, wie wir noch erläutern werden.) Es ist durchaus möglich, dass die antiken

Buchhalter für ihre Berechnungen eine Fülle praktischer Tricks kannten, und mit Sicherheit nutzten sie einfache Rechengeräte wie den Abakus (ein Rechenbrett). Sie hatten auch zweifelsohne ihre spezifischen Verfahren der mentalen Arithmetik, die sie den folgenden Generationen mündlich und anhand von Beispielen übermittelten. Dieser Teil der Geschichte der Mathematik ist größtenteils verloren, und den heutigen Gelehrten sind nur wenige zufällige Einblicke verblieben.

Die Griechen stellten die Zahlen 1 bis 9 durch die ersten neun Buchstaben ihres Alphabets dar und verwendeten eine ähnliche Folge von Symbolen für die Vielfachen von 10 bis 90 sowie einen weiteren Satz von Symbolen für die Hunderterzahlen 100 bis 900. Beispielsweise stand λ für die Zahl 30 und β für die Zahl 2, sodass die Zahl 32 in der Form $\lambda\beta$ geschrieben wurde. Auf den ersten Blick erscheint dieses Verfahren ebenso effizient wie unsere heutige Schreibweise, doch der Schein trügt. Das Additionsprinzip wird zwar verwendet, aber die Stelle, an der ein Symbol steht, wird nicht wirklich ausgenutzt. Vertauschen wir die Ziffern von 32 erhalten wir 23, also eine andere Zahl. Das gilt jedoch nicht für $\beta\lambda$, das ebenfalls nur $2+30 = 32$ bedeuten konnte. Die griechische Form von 23 entsprach der Buchstabenfolge $\kappa\gamma$, denn κ stand für 20 und γ für 3. Auf diese Weise lassen sich alle Zahlen bis Tausend als Buchstabenfolgen mit einer Länge von maximal drei Ziffern aufschreiben. Anfänglich mag das noch gereicht haben, doch es dauerte nicht lange, bis man auch Zahlen im Tausenderbereich handhaben musste. Statt nochmals ganz von vorne anzufangen, wurde das alte System in willkürlicher Form etwas abgeändert, damit man auch mit diesen Anforderungen zurechtkam. Man einigte sich darauf, dass ein Komma vor einem Symbol die Bedeutung hatte, dass dieses Symbol mit 1000 multipliziert wurde, sodass beispielsweise, α der Zahl 1000 entsprach. Für praktische Zwecke schien das auszureichen.

Gelegentlich gab es Versuche, das System zu verbessern. Im dritten nachchristlichen Jahrhundert ging der griechische Mathematiker Diophantos von Alexandria einen Schritt weiter und verwendete einen Punkt, um anzudeuten, dass die vorangehende Zahl mit einer Myriade (10 000) zu multiplizieren sei. Er gab das Beispiel, $\alpha\tau\lambda\alpha., \epsilon\sigma\iota\delta$, das wir entsprechend als 13 315 214 übersetzen würden. Die erste Gruppe aus vier Symbolen, $1000 + 300 + 30 + 1$ muss mit Zehntausend multipliziert werden, da ihr ein Punkt folgt, während die zweite Gruppe für $5000 + 200 + 10 + 4$ steht. Offenbar ist es auf diese Weise nicht allzu schwierig, ein zunächst umständliches System so anzupassen, dass man damit Zahlen bis weit in die Millionen ausdrücken kann. Tatsächlich rühmte sich Archimedes im dritten vorchristlichen Jahrhundert in seinem Buch *Sandrechner* damit, eine Zahl darstellen zu können, die größer war als die notwendige Anzahl an Sandkörnern, um unser Universum auszufüllen (zumindest das Universum des griechischen Weltbildes).

Wir können immer noch einwerfen, dass sich diese Schreibweise der Zahlen nicht für „Papier und Bleistift“-Rechnungen eignet. Dieser Einwand ist allerdings sehr modern, denn in der Antike gab es noch kein billiges Papier. Schwierige Berechnungen wurden auf Zählrahmen durchgeführt, somit diente ihr Verfahren zum Aufschreiben der Zahlen nur dazu, die Ergebnisse und die Ausgangszahlen festzuhalten. Zur Notation von Zahlen reichte eine Kurzschrift, mit der man die Zahlen in Worten ausdrückte, und so wurde dieses Verfahren auch nie wesentlich verbessert.

Der Ursprung des römischen Zahlensystems liegt für uns im Dunkeln, geht aber vermutlich auf die Zivilisation der Etrusker zurück, die in vorrömischer Zeit auf der heutigen italienischen Halbinsel lebten. Die römischen Ziffern wurden von den Römern auch tatsächlich verwendet und hielten sich bis ins Mittelalter. Auch heute noch begegnen wir ihnen hauptsächlich zu dekorativen Zwecken in der europäischen Kultur. Neben den schon erwähnten Symbolen für Eins, Fünf und Zehn gab es weitere Symbole für Fünfzig (L), Einhundert (C), Fünfhundert (D) und Eintausend (M). Wurde ein Film im Jahre 2003 gedreht, so sieht man am Ende des Abspanns die römischen Ziffern MMIII, und das Jahr 1673 wurde in der Form MDCLXXIII geschrieben. Ähnlich wie im griechischen System verzierten die Römer ihre Zahlensymbole, wenn sie eine Multiplikation mit einer großen Potenz von Zehn andeuten wollten. Beispielsweise wurden die Zahlen Zweihunderttausend oder eine Million dadurch gekennzeichnet, dass man ein Quadrat um die Symbole II bzw. X zeichnete, um damit anzudeuten, dass diese Zahlen mit einem Faktor von Einhunderttausend zu multiplizieren sind.

Im griechischen System hatte ein Symbol eine feste Bedeutung, die nicht davon abhing, an welcher Stelle das Symbol in einer Symbolfolge stand. Das römische System nutzte jedoch in einem eingeschränkten Sinn die Position eines Symbols aus, indem es manchmal ein *Subtraktionsprinzip* anwandte. Zur Erklärung: Die römischen Ziffernfolgen in den beiden obigen Beispielen wurden gewöhnlich so angeordnet, dass der Zahlenwert der Symbole abnahm, ebenso wie im griechischen System. Bei den römischen Ziffern wurde jedoch manchmal ein Symbol mit einem kleineren Zahlenwert vor eines mit einem größeren Wert gestellt, wie zum Beispiel in der Zahl IV. Diese Umstellung hat die Bedeutung, dass der Wert des kleineren Symbols von dem des größeren Symbols *subtrahiert* wird. Damit erhält man eine alternative Schreibweise für die Zahl Vier, die man auch einfach als IIII schreiben konnte. Ganz entsprechend kann man die Zahlen Neun als IX und Vierzig als XL schreiben. Anscheinend haben die Römer jedoch von dem Subtraktionsprinzip nicht viel Gebrauch gemacht, denn es verbreitete sich in Europa erst nach der Erfindung der Druckerpresse.

Obwohl sich das römische System durchaus hätte verbessern lassen, erwies sich der tatsächlich eingeschlagene Weg als Sackgasse. Für ein praktikables modernes Rechensystem mussten diese antiken Systeme vollständig verworfen und durch ein Stellenwertsystem für Zahlen ersetzt werden. In dieser Hinsicht ist das babylonische System mit der Basis Sechzig bemerkenswert, denn es machte von der Stellung der Ziffern Gebrauch: Ihr Keilschriftzeichen für 1 konnte sowohl 1 als auch 60 oder $60 \cdot 60$ bedeuten, je nach seiner Stellung innerhalb der Symbolfolge. Leider war diese großartige Idee noch nicht wirklich von Nutzen, da es das Nullsymbol als Platzhalter noch nicht gab, obwohl man anscheinend zu diesem Zweck gelegentlich etwas leeren Raum ließ. Dieser Leerplatz wurde jedoch nur für Stellen innerhalb der Ziffernfolge verwendet, nie am Ende, wie wir es beispielsweise bei der Zahl 70 tun. Insgesamt war diese Schreibweise aufgrund ihrer Mehrdeutigkeiten immer noch verwirrend.

Es bedeutete eine enorme psychologische Hürde, die Zahl 0 ebenso zu verwenden, wie die positiven ganzen Zahlen 1, 2 usw. Um die endlosen Möglichkeiten der Arithmetik und der Algebra in vollem Umfang erkennen zu können, bedurfte es anderer Zahlen als nur der positiven Zählzahlen. Arithmetische Rechenschritte führen uns aus dem Bereich der natürlichen Zahlen heraus in den Bereich anderer Zahlenarten. Solange wir unsere Mathematik an bestimmte Interpretationen knüpfen, besteht die Gefahr einer Verzettelung in unwichtige Einzelheiten. Selbst heute noch haben manche Menschen Probleme mit negativen Zahlen, und die imaginären Zahlen, die sich aus den Quadratwurzeln der negativen Zahlen ergeben, gelten als vollkommen abwegig und unverständlich. Nichts davon ist wahr, aber wenn wir uns in solche Vorstellungen hineinversetzen, fällt es uns vielleicht leichter, die immer noch vorhandenen Bedenken gegen eine gleichberechtigte Verwendung der 0 nachzuvollziehen. Möglicherweise wurde die uneingeschränkte Verwendung eines Nullsymbols auch einfach nur als hässlich und überflüssig angesehen. Diese Einstellung finden wir teilweise noch heute, beispielsweise wenn wir Vordrucke ausfüllen, die automatisch verarbeitet werden. Oftmals sollten für die Angabe eines Datums jeweils immer zwei Ziffern verwendet werden. Wurden Sie also am 8. Februar 1964 geboren, sollen Sie Ihr Geburtsdatum in der Form 08.02.64 angeben. Viele scheuen sich, der von Computersystemen geforderten

Gleichförmigkeit nachzugeben und weigern sich, ein 0-Symbol vor eine Zahl zu setzen. Sie schreiben einfach 2.8.64. Auch wenn es sich um etwas Belangloses handelt, können sich manche in diesen Dingen sehr dickköpfig anstellen.

Zählen und was daraus werden kann

Es hat den Anschein, dass das Zählen bzw. Abzählen von Dingen für den Menschen etwas Natürliches ist und diese Fertigkeit auch entwickelt wird, sobald die Notwendigkeit dafür gegeben ist. Bis vor nicht allzu langer Zeit gab es einen Volksstamm in der Arktis, dessen Mitglieder kein Zahlensystem kannten. Nachdem sie mit der westlichen Zivilisation in Kontakt gekommen und plötzlich von Gegenständen umgeben waren, die auch gezählt werden mussten, entwickelten sie ein solches System sehr rasch.[1] Müssen wir auch bis zu größeren Zahlen zählen, ist es vollkommen natürlich, diese Aufgabe in zwei oder mehr Schritte zu unterteilen, und dann ist es nur noch ein kleiner Schritt bis zum Additionsprinzip. Die Schnittstelle entspricht der Idee eines verallgemeinerten Zählens, bei der wir nicht immer mit der Zahl 1 beginnen. Wenn wir am Gesamtbestand zweier Lager interessiert sind, die jeweils getrennt gezählt wurden, müssen wir die Einzelergebnisse nur addieren. In diesem Sinne ist das reine Abzählen eine besondere Form der Addition, bei der in jedem Schritt lediglich eine 1 hinzugezählt wird.

Die Addition ergibt sich also in natürlicher Weise aus dem Zählen, und über die Addition gelangen wir dann zu den anderen drei Rechenarten: der Subtraktion, Multiplikation und Division. Historisch ist nicht gesichert, ob im nächsten Schritt die Subtraktion oder die Multiplikation entwickelt wurde. Intuitiv erscheint die Subtraktion natürlicher, da sie das Gegenteil der Addition

[1] Siehe das Buch von Stephen Pinker *The Blank Slate*.

ist, und im Allgemeinen ist es auch die zweite Rechenart, die den Kindern in der Schule beigebracht wird.[2] Die Subtraktion nimmt Dinge weg bzw. macht eine Addition (die in der Praxis vielleicht nie wirklich ausgeführt wurde) rückgängig, sodass am Ende weniger Gegenstände vorhanden sind als vorher. Obwohl die Subtraktion sehr einfach erscheint, ist sie mathematisch teilweise heikel und nicht so unkompliziert wie die Addition – bei zwei gekoppelten Subtraktionen hängt das Ergebnis davon ab, wie man die Klammern setzt.[3] Um diese Dinge muss man sich bei Summen nicht kümmern. Schlimmer noch ist, dass man manche Subtraktionen gar nicht ausführen kann, denn es hat den Anschein, als ob man eine größere Zahl nicht von einer kleineren abziehen kann, wohingegen man zwei beliebige Zahlen immer addieren kann. Das ist irgendwie befremdlich, und gerade Kinder haben manchmal das Gefühl, dass da irgendetwas faul ist. Fragen sie nach, greifen wir zu Erklärungen der Art, dass wir von drei Enten, die auf einem Teich schwimmen, nicht vier Enten wegnehmen können, weil einfach nicht genug Enten vorhanden sind. So ganz zufriedenstellend ist das immer noch nicht, denn die natürliche Symmetrie zwischen Addition und Subtraktion scheint gebrochen, und zur Rechtfertigung reden wir plötzlich über Enten. Obwohl Kinder ihre Zweifel nicht in dieser Form ausdrücken können, verbleibt ein ungutes Gefühl im Hinterkopf, dass hier irgendetwas nicht so ganz in Ordnung ist und da noch mehr dahintersteckt.

Im Gegensatz dazu bereitet die Multiplikation keine solchen Schwierigkeiten, da es sich nur um eine besondere Form der

[2] Das älteste Buch, in dem die uns vertrauten Plus- und Minuszeichen („+“ und „−“) im Druck erscheinen, ist ein Rechenbuch für kommerzielle Zwecke: *Rechenung auff allen Kauffmannschafft* von Johann Widman aus Leipzig, das im Jahr 1489 veröffentlicht wurde. Das Gleichheitszeichen stammt aus späterer Zeit und ist eine englische Erfindung von Robert Recorde im Jahr 1557.

[3] $(8-4)-2=4-2=2$, aber $8-(4-2)=8-2=6$: Die Subtraktion ist nicht *assoziativ*.

wiederholten Addition handelt: $4 \cdot 3$ bedeutet $4 + 4 + 4$. Es verbleibt lediglich die Frage, weshalb sie so wichtig ist. Falls Sie nicht schon einmal auf diese Frage gestoßen sind, erscheint sie zunächst überraschend, denn die Multiplikation ist uns so vertraut. Die Antwort beruht auf der Erfahrung, die einfach gezeigt hat, dass diese besondere Form der Addition immer wieder und in sehr vielen verschiedenen Zusammenhängen auftritt – zum Beispiel auch bei der Bestimmung der Fläche eines rechteckigen Feldes.

Ein Großteil der Mathematik ergab sich aus Überlegungen, erfolgreiche Ideen noch einen Schritt weiter zu treiben. Die wiederholte Addition derselben Zahl führt auf die Multiplikation. Vielleicht führt ja die wiederholte Multiplikation derselben Zahl ebenfalls zu einem wichtigen Konzept.

Ersetzen wir in der obigen Summe das Pluszeichen durch ein Multiplikationszeichen, erhalten wir $4 \cdot 4 \cdot 4$, was wir gewöhnlich als 4^3 schreiben. Tatsächlich ist auch diese Art der wiederholten Multiplikation von großer Bedeutung: In diesem Fall entspricht die Antwort dem Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge 4. Diese Rechenoperation bezeichnet man als *Potenzierung*.[4] Für sie gelten jedoch nicht mehr alle vertrauten Eigenschaften. Die Potenzierung ist nicht *kommutativ*: $3^4 = 81 \neq 64 = 4^3$. Anders als die Multiplikation und die Addition spielt die Reihenfolge, in der wir die Zahlen bei der Rechenoperation einführen, eine Rolle.

Es gibt auch eine mathematische Operation, die auf der wiederholten Potenzierung beruht. Eine andere Schreibweise für 4^3, die besonders bei Computertastaturen Verwendung findet, ist der nach oben gerichtete Pfeil: $4 \uparrow 3$. Das Symbol $\uparrow\uparrow$ bedeutet nun

[4] Die Schreibweise für die Potenzierung erscheint das erste Mal in *Triparty en la science des nombres* von Nicolas Chuquet um 1500. Er betrachtete positive und negative Potenzen sowie auch die Potenz Null von einer unbekannten Größe. Die Interpretation von Wurzeln als gebrochenzahlige Potenzen von Brüchen wurde bereits im 14. Jahrhundert von Nicole Oresme aus Paris verwendet.

Springer
http://www.springer.com/978-3-8274-3016-8

Das kleine Buch der Zahlen
Vom Abzählen bis zur Kryptographie
Higgins, P.M.
2013, XII, 354 S. 34 Abb.,
ISBN: 978-3-8274-3016-8