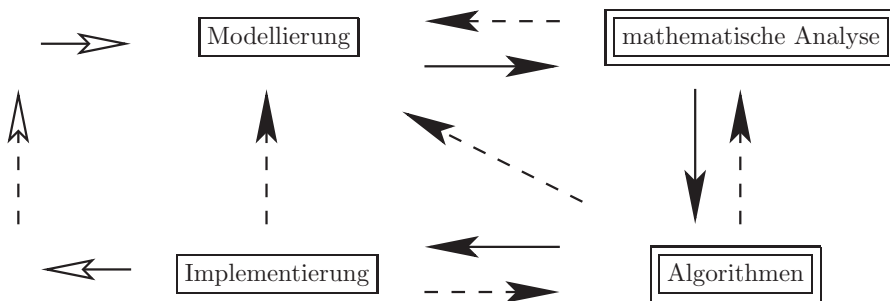


Vorwort

Das vorliegende Buch ist der erste Teil eines auf drei Bände konzipierten Lehrwerks zur Optimierung in endlich-dimensionalen reellen Vektorräumen. Es richtet sich an alle Leser, die über die üblicherweise in den Vorlesungen zur Analysis und Linearen Algebra vermittelten Grundlagen verfügen.

Der Ausgangspunkt des ‘Innovationszyklus der mathematischen Optimierung’ ist meistens eine konkrete Klasse relevanter Praxisprobleme, für die Softwaretools benötigt werden. Bereits die geeignete mathematische Modellierung von realen Problemen ist eine wichtige Aufgabe, die von Mathematikern in enger Zusammenarbeit mit Anwendern zu leisten ist, und deren Qualität wesentlich zur späteren Lösung des Problems und der Effizienz der entwickelten Tools beiträgt. Tatsächlich liegt bei der Behandlung praxisrelevanter Probleme typischerweise folgender Prozess zugrunde:



0.1 Abbildung. Innovationszyklus der mathematischen Optimierung.

Die ‘weißen’ Pfeile deuten die Schnittstelle zu dem gegebenen praktischen Problem an. Die schwarzen Pfeile zeigen den Ablauf der einzelnen Phasen der umfassenden mathematischen Behandlung. Sie werden meistens in Teilen oder als Ganzes mehrmals ‘rückgekoppelt’ durchlaufen (gestrichelte Pfeile), bis alle Komponenten hinreichend kongruent sind. Mathematiker sind in allen diesen Phasen involviert, wobei natürlich bei der Modellierung und den Tests der entwickelten Implementierung die Kooperation mit den Anwendern besonders wichtig ist. Vorliegender Text stellt den doppelt umrahmten Teil des Innovationszyklus in den Vordergrund, die mathematische Analyse und die darauf aufbauende Entwicklung und anschließende Analyse von zentralen algorithmischen Paradigmen.

Es gibt viele erfolgreiche, deduktiv aufgebaute Bücher über Optimierung, die gegenüber dem hier verfolgten Ansatz den Vorteil haben, Algorithmen sehr schnell bereitzustellen. Ziel dieses Lehrwerks ist es hingegen nicht, möglichst schnell möglichst viele Algorithmen für ‘alle Lebenslagen der Optimierung’ anzugeben. Vielmehr wird der (bisweilen deutlich aufwendigere) Weg der konstruktiven Entwicklung von zentralen algorithmischen Ansätzen vorgezogen. Das vorliegende Buch ist somit in weiten Teilen induktiv, konstruktiv herleitend konzipiert, um so Problemlösungs- und Theoriebildungskompetenz

auf der Basis mathematischer Kreativität zu vermitteln. Dabei wird durchaus ein gewisses Maß an Redundanz zugelassen, wenn diese der leichteren Erfassbarkeit wesentlicher Ideen dient. Die erfolgte Feinjustierung der Schwerpunktsetzung bezüglich Breite und Tiefe der Darstellung mag bisweilen durchaus ungewohnt anmuten. Dem hier gewählten Ansatz liegt die Erfahrung zugrunde, dass es in der Anwendungspraxis viele Praktiker gibt, die sich Algorithmen (und noch lieber gleich die passende Software) ‘herbeigooglen’ können. Mathematiker werden erst (und in der Regel höchstens dann) konsultiert, wenn sich die aktuellen Probleme gerade nicht mittels Standardmethoden lösen lassen. Um in diesem Umfeld erfolgreich arbeiten zu können, ist einerseits ein guter genereller Überblick über das gesamte Gebiet erforderlich. Andererseits spielt der kreativ-weiterentwickelnde Ansatz eine entscheidende Rolle für den konkreten Erfolg in der praktischen Anwendung (von der Grundlagenarbeit natürlich ganz zu schweigen).

Methodisch zentral ist in fast allen Teilen der drei Bände der geometrische Zugang. Die meisten strukturellen Aussagen und algorithmischen Ideen der linearen und diskreten Optimierung lassen sich angemessen in der ‘Welt der Polyeder’ beschreiben. In der nichtlinearen Optimierung ist ebenfalls ein geometrisches Konzept zentral, nämlich das der Konvexität von Mengen und Funktionen. Obwohl das nicht immer offensichtlich ist, basieren viele Ergebnisse in fast allen Teilen der nichtlinearen Optimierung letztendlich auf strukturellen und methodischen Entwürfen der konvexen Optimierung. Somit wird die Konvexitätstheorie zur beherrschenden Grundlage der Optimierung.

Die entsprechenden geometrischen Vorstellungen werden daher detailliert entwickelt, und es wird versucht, die für den selbständig kreativ-forschenden Umgang mit der Materie notwendige Intuition zu vermitteln. Man sollte sich dabei von dem Begriff ‘forschend’ nicht abschrecken lassen. Hier ist er aus der Perspektive des Lernenden gemeint und bezieht es sich auf den Umgang mit dem Stoff.¹ Zur Visualisierung der Ideen und Konzepte dienen insbesondere auch die zahlreichen Abbildungen.

Tatsächlich liefert der geometrische Zugang konzeptionell aber erheblich mehr: Viele Sätze und Methoden haben eine *darstellungsfreie* geometrische Formulierung, die ihren eigentlichen strukturellen Kern offenlegt. Will man sie jedoch praktisch anwenden, so muss man mit *spezifischen Darstellungen* arbeiten. Da sich verschiedene Klassen von Darstellungen in sehr unterschiedlicher Weise für verschiedene algorithmische Zwecke eignen und Darstellungen einer Klasse in der Regel nicht eindeutig sind, treten hierbei zusätzliche Schwierigkeiten auf. Eine zentrale und immer wiederkehrende Herausforderung besteht etwa darin, die konvexe Hülle des zulässigen Bereichs einer gegebenen Optimierungsaufgabe wenigstens partiell oder approximativ operational adäquat, d.h. so zu beschreiben, dass sie in algorithmisch passender Weise ausgewertet werden kann.

Die behandelten Probleme sind sämtlich durch reale praktische Anwendungen motiviert. Hierfür werden zahlreiche Beispiele angeführt, ohne jedoch systematisch auf Fragen von Datenstrukturen, Aspekte des Software-Engineering oder numerische Schwierigkeiten einzugehen.² Es wird insbesondere nicht angestrebt, für jedes behandelte Problem den (in der Regel einer geringen Halbwertszeit unterworfenen) ‘aktuell besten Code’ zu

¹ In diesem Sinn hat etwa die selbständige Bearbeitung von Übungsaufgaben durch diejenigen, denen die Thematik noch neu ist, natürlich forschenden Charakter.

² Natürlich sind solche Fragen von großer Bedeutung, um von mathematischen Methoden zu praktisch schnellen und stabilen Implementierungen zu kommen. Auch spielen bei den hierauf aufbauenden kommerziellen Softwaretools die Benutzerfreundlichkeit und -führung eine wichtige Rolle.

besprechen. Hingegen wird der Methodenreichtum des Gebietes durch eine Vielzahl von Querverbindungen zu anderen mathematischen Gebieten betont.

Das Buch ist in Teilen modular aufgebaut und eignet sich als Grundlage für verschiedene Lehrveranstaltungen, aber auch zum Selbststudium der Optimierung oder eines ihrer Teilgebiete. Da verschiedene mögliche Vorlesungen auf ganz unterschiedlichem Kenntnisstand der Hörer aufbauen und unterschiedliche Zielrichtungen haben können, werden in den Kapiteln 2 und 3 des vorliegenden ‘Grundlagen-Bandes’ verschiedene Einstiege angeboten, die je nach Wunsch umfassend, sektionsweise oder auch nur in Teilen vorgestellt oder zur Auffrischung im Selbststudium benutzt werden können. Die einzelnen Teile sind dabei weitgehend unabhängig. Lediglich die Sektionen 3.1 und 3.3 über Algorithmen und Komplexität sind (nahezu) alternativ konzipiert. Hierdurch soll eine Auswahl ermöglicht werden, auf einer für viele Zwecke ausreichenden informellen Grundlage der Bewertung von Algorithmen schnell zu Kernparadigmen der Optimierung zu gelangen, oder formalen Details der Komplexitätstheorie größeren Raum zu geben.

Von zentraler Bedeutung für die meisten Teile aller drei Bände ist Kapitel 4. Es entwickelt die Grundlagen der Konvexitätstheorie, die in fast allen Bereichen der Optimierung von fundamentaler Bedeutung sind. Natürlich reicht es für viele Belange der linearen und diskreten Optimierung, die Konvexitätstheorie auf die dafür erforderliche Polyedertheorie einzuschränken; die konvexe Optimierung benötigt hingegen Aussagen über allgemeinere konvexe Mengen. Da in vielen Fällen Formulierungen und Beweise der entsprechenden Aussagen für allgemeinere konvexe Mengen kaum aufwendiger sind als für Polyeder und bisweilen sogar einen klareren Blick auf die zugrunde liegenden Konzepte ermöglichen, wird hier ein einheitlicher Ansatz gewählt. Um jedoch das grundlegende Kapitel 4 nicht zu überfrachten, werden konvexe Funktionen, die natürlich (aber nicht nur) in der konvexen Optimierung zentral sind, erst in Kapitel III.1 studiert. Band I enthält darüber hinaus ein Kapitel zum Simplex-Algorithmus, führt LP-Dualität sowie darauf aufbauende primal-duale Algorithmen ein und zeigt ihre Bedeutung in vielfältiger Weise u.a. in ökonomischen Modellen und anderen Anwendungsfeldern auf.

Band II behandelt zunächst verschiedene Grundlagen der ganzzahligen Optimierung. Insbesondere widmen wir uns dabei dem Studium linearer diophantischer Gleichungen und der Analyse ganzzahliger Hüllen und ganzzahliger Polyeder. Danach behandeln wir die Optimierung in Netzwerken. Ein zentraler Schwerpunkt von Band II liegt auf Algorithmen für die allgemeine ganzzahlige Optimierung. Hierzu gehören insbesondere Schnittebenen-, Partitions- und Testmengenverfahren. Anschließend werden an verschiedenen Problemklassen der diskreten Optimierung zentrale Paradigmen für approximative Algorithmen entwickelt. (Da manche sehr erfolgreiche Approximationsverfahren auf Methoden der nichtlinearen Optimierung beruhen, werden wir auf approximative Algorithmen der diskreten Optimierung noch einmal in Band III zurückkommen.) Schließlich wird die polyedrische Kombinatorik als Grundlage vieler moderner Verfahren der diskreten Optimierung anhand verschiedener prototypischer Problemklassen entwickelt.

Band III beginnt mit grundlegenden Konzepten und Algorithmen der nichtlinearen unrestringierten und restringierten Optimierung, wobei sich die konvexe Optimierung als Schlüssel erweisen wird. Dabei werden einerseits lokale Optimierungsverfahren betrachtet, andererseits aber auch Fragen der globalen Optimierung besprochen. Der Ellipsoid-Algorithmus sowie Innere-Punkte-Verfahren werden eingeführt und zu polynomiellen Algorithmen der linearen Optimierung ausgebaut. Ferner sind diese auch zentrale Bausteine

weitreichender approximativer Algorithmen der Computational Convexity, aber auch der diskreten Optimierung.

Als Beispiel für die dem Buch zugrunde liegende Philosophie soll kurz die Konzeption von Kapitel 5 erläutert werden. Zunächst wird die darstellungsinvariante Grundstruktur des Simplex-Algorithmus in seiner geometrischen Form dargestellt. Hierfür werden lineare Programme mit (allgemeinen) Ungleichungsrestriktionen zugrunde gelegt, (auch, aber keineswegs nur) um aussagekräftige Beispiele in niedrigen Dimensionen zur Verfügung zu haben. Erst danach wird der von der gegebenen Darstellung abhängige Begriff der Basis eingeführt. Bekanntlich handelt man sich hierdurch das grundsätzliche Problem eines möglichen Zykelns ein. Unsere Darstellung erlaubt es, Beispiele hierfür in kleinen Dimensionen zu entwickeln und zu visualisieren, um so das Phänomen nicht nur konzeptionell, sondern auch intuitiv verstehbar werden zu lassen. Tatsächlich erfolgt eine so weitgehende ‘Trivialisierung’, dass auch eine Vertiefung in den Übungen ermöglicht wird. Danach wird die lexikographische Methode über das Konzept des Störens der rechten Seite eingeführt und operationalisiert. Schließlich wird die Beispielserie von Klee und Minty geometrisch hergeleitet, um das worst-case Verhalten des Simplex-Algorithmus zu thematisieren. Selbstverständlich wird auch (kurz) auf die neuesten Entwicklungen zur Hirsch-Vermutung eingegangen sowie als (ausführliche) Ergänzung die subexponentielle obere Schranke für monotone Kantentpfade von Kalai und Kleitman hergeleitet. Das Kapitel enthält keine Tableauform des Simplex-Algorithmus. Diese wird erst in Sektion 6.4 nach Einführung der Dualität hergeleitet, gleich in der für die Schnittebenenverfahren der ganzzahligen Optimierung adäquaten Form.

Zahlreiche größere, ausführliche Beispiele zeigen, wie die hergeleiteten Methoden in der aktuellen Optimierungspraxis wirken. Hierzu gehören unter anderem eine detaillierte Analyse eines Problems der Platzierung von Verbindungsdrähten auf Halbleiterchips sowie die Herleitung neuer Methoden des Clustering, wie sie etwa in den Finanz- und Lebenswissenschaften gebraucht werden.

Ihrem Aufbau gemäß eignen sich die drei Bände als Grundlage für eigenständige einführende und vertiefende Module zu einer Reihe von Teilgebieten, die unter anderem die folgenden umfassen:

<i>Gebiet</i>	<i>Kapitel</i>
Lineare Optimierung	2.1, 4, 5, 6.1
Polynomielle Algorithmen der Linearen Optimierung:	III.4, III.5
Diskrete Optimierung:	II.1, II.2, II.3, II.4, II.5
Nichtlineare Optimierung:	III.1, III.2, III.3, III.6
Algorithmische Diskrete Mathematik:	2.2, 2.3, 3, Teile von II.1, II.2
(Algorithmische) Konvexgeometrie:	2.1, 4, III.4
Konvexe Analysis:	4, III.1.

Neben verschiedenen Spezialvorlesungen zur Optimierung sind auf der Basis der vorliegenden Bücher insbesondere die vierstündigen Zyklusvorlesungen

- Optimierung 1: 1.1, 1.2, 2.1, 4, 5, 6.1, 6.3
- Optimierung 2: 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, Teile von 3.3, II.1, II.2, II.3, II.4
- Optimierung 3: III.1, III.2, III.3, III.6

gehalten worden.³ Die Anwendbarkeit des Textes als Grundlage für Vorlesungen wird durch die Aufnahme von zahlreichen (zum Teil ‘offen formulierten’) Übungsaufgaben unterstützt. Die Aufgaben haben durchaus unterschiedliche Schwierigkeitsgrade, von einfachen Rechen- oder Verständnisaufgaben bis hin zu recht anspruchsvollen Herausforderungen, sind aber sämtlich ‘echte’ Übungsaufgaben. Noch ungelöste wissenschaftliche Probleme finden sich hingegen in den einzelnen Sektionen und sind als *Forschungsprobleme* gekennzeichnet.

Selbstverständlich profitiert der vorliegende Text in hohem Maße von anderen Werken, die in der Regel selbst durch Ergebnisse, Beweisideen, Darstellungen etc. wieder anderer Quellen inspiriert sind.⁴ In der ausführlichen Literaturliste⁵ werden daher neben anderen Lehrbüchern auch Monographien und Übersichtsartikel zur weiteren Vertiefung angegeben, deren Bibliographien für ein genaueres Quellenstudium konsultiert werden können.⁶ Zu Beginn eines neuen Kapitels wird ergänzend auf einige besonders relevante Literaturstellen, vor allem aber auch andere Lehrbücher hingewiesen. Ferner werden zur leichteren Orientierung in der internationalen Literatur zentrale Begriffe auch in Englisch angegeben, wenn sich ihre englische Entsprechungen nicht ohnehin ‘kanonisch’ ergeben.

Zahlreiche historische Kommentare sollen die Einordnung der Resultate in die faszinierenden Ideengeschichte der Optimierung erleichtern, und viele Hauptergebnisse werden namentlich Personen zugeordnet.⁷ Eine umfangreiche bibliographische Würdigung von Einzelbeiträgen mit Einzelreferenzen würde jedoch den Rahmen des Lehrbuchs sprengen. Wir beschränken uns bei der Angabe von Originalquellen daher vorrangig auf solche, die noch nicht in zitierten Büchern oder Übersichtsartikeln besprochen sind. Sie werden im Text direkt in Fußnoten angegeben. Für alle anderen Quellen sei auf die angegebene umfangreiche Vertiefungsliteratur verwiesen.

Natürlich gibt es auch eine Vielzahl von hervorragenden Internetseiten, die über die neuesten Entwicklungen informieren, Vorlesungsskripte, Software und Testbeispiele zur Verfügung stellen und viele Anwendungsprobleme darstellen. Die Quellen sind dabei durchaus unterschiedlich in ihrer Intention, ihrer Qualität, ihrer Verfügbarkeit und sicherlich auch in ihrer ‘Lebensdauer’. Wir beschränken uns hier auf wenige Beispiele:

<http://www.neos-server.org> bzw. <http://www.neos-guide.org>

enthält vielfältige Informationen zu vielen Aspekten der Optimierung. Die von *Robert Fourer*, Northwestern University, Evanston, USA, gepflegte Unterseite

http://www.neos-guide.org/NEOS/index.php/Linear_Programming_FAQ

³ Das Lehrwerk ist aus mehrsemestrigen Vorlesungszyklen entstanden, die der Verfasser an den Universitäten Trier und Augsburg und an der Technischen Universität München gehalten hat.

⁴ Der ‘mentale Verarbeitungsprozess’ von Jahrzehnten ist beim besten Willen im Detail nicht mehr nachzuvollziehen. Vorsorglich sei daher betont: Dieses Buch erhebt ausdrücklich keinerlei Prioritäten für dargestellte Ergebnisse und Erkenntnisse.

⁵ Diese legt einen besonderen Fokus auf den Inhalt des ersten Teils, gibt aber bereits zahlreiche Quellen für die Inhalte der Bände 2 und 3.

⁶ Eine besondere Darstellung von ‘50 Years of Integer Programming’ findet sich etwa in [50], und [40] enthält interessante ‘Optimization Stories’.

⁷ Hin und wieder wird man dabei mit Boyd’s Principle konfrontiert, wonach Resultate niemals denjenigen zugeordnet werden, die sie erbracht haben. Natürlich stammt auch Boyd’s Principle nicht von Boyd . . . und ist in dieser Radikalität auch falsch. Da es wesentlich mehr Personen gibt, die eine Aussage *nicht* gefunden haben als solche, die an der Erkenntnis beteiligt waren, ist es nicht verwunderlich, dass Boyd’s Principle auch unter verschiedenen anderen Namen bekannt ist.

beschäftigt sich ausführlich mit der linearen Programmierung. Auf

<http://mathworld.wolfram.com>

findet man eine große Vielfalt von Materialien zur Mathematik und auf der Unterseite

<http://mathworld.wolfram.com/topics/Optimization.html>

speziell zur Optimierung. Über

<http://www.optimization-online.org>

kann man auf mehrere Tausend Arbeiten zur Optimierung zugreifen. Und dann ist da natürlich noch das Zentralblatt für Mathematik

<http://www.zentralblatt-math.org>,

das mehr als drei Millionen Einträge (zur gesamten Mathematik, aber natürlich auch zur Optimierung) enthält.

Abschließend möchte ich allen danken, die mich bei der Erstellung des vorliegenden Buches unterstützt haben, Kollegen und Freunden, Mitarbeitern und Studierenden, Koautoren und Familienmitgliedern, viel zu viele, um alle namentlich aufzuzählen.

Besonders, namentlich und zu allererst bedanken möchte ich mich bei den Menschen, die am meisten von diesem Buchprojekt betroffen waren: bei meiner Frau Gitta und unserem Sohn Simon. Beide brauchten (und hatten) nur zu oft viel Verständnis für die knappe Zeit des Verfassers. Ihnen ist dieses Buch gewidmet.

Für ihr Verständnis möchte ich mich aber auch bei allen Mitarbeitern und Koautoren bedanken, die bisweilen mit viel Geduld auf Teile meines Inputs für gemeinsame Projekte warten mussten, weil immer wieder Kapitel dieses Buches ‘dazwischen kamen’.

Besonders bedanken möchte ich mich bei drei hervorragenden Wissenschaftlern und Freunden, die mich sehr früh und in unterschiedlicher Weise unterstützt, gefördert und meinen wissenschaftlichen Weg nachhaltig beeinflusst haben. Mit meinem Doktorvater Jörg M. Wills verbindet mich bis heute ein enger wissenschaftlicher und menschlicher Austausch. Martin Grötschel hat mich in vielfältiger Weise unterstützt, und ich verdanke ihm insbesondere eine wissenschaftlich und persönlich prägende Zeit als junger Professor in Augsburg. Unvergessen ist Victor Klee, mein enger Kooperationspartner und Freund. Sein Einfluss in fast zwanzigjähriger Zusammenarbeit auf meine eigene wissenschaftliche Entwicklung im Bereich der Optimierung (und nicht nur dort) wirkt auch nach seinem Tod unvermindert fort und findet in diesem Buch seinen deutlichen Widerhall.

Herzlich bedanken möchte ich mich auch bei allen früheren und jetzigen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern, die in der Vergangenheit Übungen zu meinen Vorlesungen betreut haben. Auf sie direkt oder wenigstens auf die intensive Diskussion mit ihnen gehen insbesondere so manche Übungsaufgaben zurück. Besonders erwähnt seien hier (in alphabetischer Reihenfolge) Andreas Alpers, Steffen Borgwardt, Rene Brandenburg, Andreas Brieden, Barbara Langfeld, Michael Ritter, Thorsten Theobald und Sven de Vries.

Sehr dankbar bin ich auch Martin Aigner für seine vielfältigen Anregungen zu diesem Buchprojekt.

Mit großer Dankbarkeit möchte ich ferner erwähnen, dass Andreas Alpers, Steffen Borgwardt, Rene Brandenburg, Melanie Herzog, Stefan König, Wolfgang Riedl, Michael Ritter, Felix Schmiedl und Anusch Taraz jeweils Teile des vorliegenden Buches Korrektur gelesen haben. Selbstverständlich trägt aber der Verfasser die alleinige Verantwortung für alle noch auftretenden Fehler.⁸

Abschließend gilt mein besonderer Dank ‘meiner Verlegerin’ Ulrike Schmickler-Hirzbruch, die nicht nur nie die Hoffnung aufgegeben hat, dass das ‘große Optimierungsbuch’ je fertig werden würde, sondern durch ihre unaufdringliche, aber beharrliche Art der Erinnerung auch wesentlich dazu beigetragen hat, dass jetzt ‘wenigstens schon mal’ die ‘Grundlagen’ vorliegen.

München, September 2012

Peter Gritzmann
TU München

⁸ Der in diesem Werk gewählte Zugang ist bisweilen ‘unorthodox’, so dass es nicht unwahrscheinlich ist, dass sich trotz großer Sorgfalt hier und da ein Lapsus eingeschlichen hat. Ich bitte daher herzlich darum, mir jeden Fehler mitzuteilen; Email: gritzmann@tum.de.

Grundlagen der Mathematischen Optimierung

Diskrete Strukturen, Komplexitätstheorie,

Konvexitätstheorie, Lineare Optimierung,

Simplex-Algorithmus, Dualität

Gritzmann, P.

2013, XVII, 525 S. 160 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-528-07290-2