

2 n-Tor-Theorie

2.1 Einführung

Die n-Tor-Theorie [2.1] ist die Verallgemeinerung der Vierpol- oder eigentlich Zweitor-Theorie:

- Beliebige viele Tore, worunter wir Klemmenpaare verstehen wollen, sind zugelassen.
- Jedes Tor kann Eingang, Ausgang oder beides zugleich sein.

Beschreiben wollen wir die n-Tore durch die in der Leitungstheorie eingeführten Wellen. Dies bietet:

- einfache und anschauliche Rechenregeln,
- eine einheitliche Beschreibung von Netzwerken aus konzentrierten und verteilten Elementen und
- die Übertragbarkeit auf z. B. Hohlleiter oder optische Wellenleiter, wo das Arbeiten mit Spannungen und Strömen unzumutbar wäre.

Komplexe Größen wie z. B. U_i , I_i , Z_{ik} , S_{ik} werden wir auch weiterhin nicht durch Unterstreichen besonders kennzeichnen. Stattdessen soll das Unterstreichen zur Kennzeichnung von Vektoren und Matrizen dienen, z. B.:

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \underline{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}.$$

2.1.1 Vierpole als Zweitore

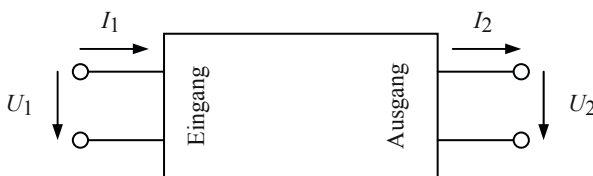


Bild 2-1 Vierpol als Zweitor

Wir wollen voraussetzen, dass die Ströme für jeweils ein Paar von zwei Polen gleich sind. Solche Paare von Polen heißen Tore. Bild 2-1 zeigt ein derartiges Zweitor. Es sei darauf hingewiesen, dass die Orientierung der Strompfeile hier in der sogenannten Kettenform erfolgt ist.

Später werden wir aus Symmetriegründen für alle Tore die Strompfeile in das Tor hinein gerichtet zeichnen.

Zweitore können wie in Bild 2-2 gezeigt in Reihen-, Parallel- oder Kettenschaltung verbunden werden. Bei der Reihenschaltung werden die \underline{Z} -Matrizen addiert:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2, \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

bei der Parallelschaltung die \underline{Y} -Matrizen addiert:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \quad , \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

und bei der Kettenschaltung die \underline{K} -Matrizen multipliziert:

$$\underline{K} = \underline{K}_1 \cdot \underline{K}_2 \quad , \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

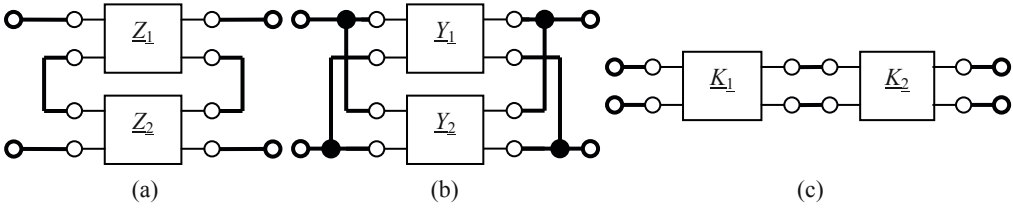


Bild 2-2 Reihen- (a), Parallel- (b) und Kettenschaltung (c) von Zweitoren

Für passive Vierpole gilt, wieder bei der in Bild 2-1 gewählten Richtung der Strompfeile:

$$Z_{12} = -Z_{21} \quad (2.4)$$

$$Y_{12} = -Y_{21} \quad (2.5)$$

$$\det \underline{K} = 1 \quad (2.6)$$

Bei symmetrischen Strompfeilen wären also $Z_{12} = Z_{21}$ und $Y_{12} = Y_{21}$.

Für die Umrechnung von Z , Y und K -Matrizen stellen zahlreiche Tabellenbücher die erforderlichen Formeln bereit. So ist z. B.

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \underline{Y}} \cdot \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{K_{21}} \cdot \begin{bmatrix} K_{11} & -\det K \\ 1 & -K_{22} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

wobei in der Kettenmatrix das untere positive Vorzeichen wieder für symmetrische Strompfeile gilt.

2.1.2 n-Tore

Die Einteilung der Tore in Ein- und Ausgänge, wie in Bild 2-1 noch geschehen, kann aus verschiedenen Gründen unzuweckmäßig sein. Einige dieser Gründe können z. B. sein:

- Die Funktion eines Tores ist nicht festgelegt.
- Die Funktion eines Tores wechselt während des Betriebs.

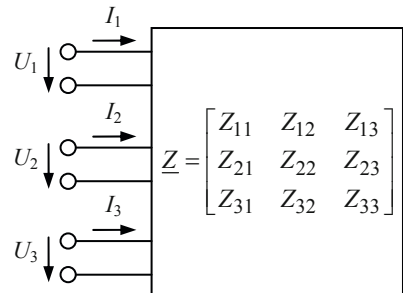


Bild 2-3 Dreitor mit symmetrischen Strompfeilen

- Von einem Eingang zurücklaufende Reflexionen machen diesen Eingang zum Ausgang.

Wir wollen daher künftig die in Bild 2-3 anhand eines 3-Tores gezeigte allgemeinere Darstellung wählen.

2.2 Beschreibung von n-Toren mit Hilfe von Wellen

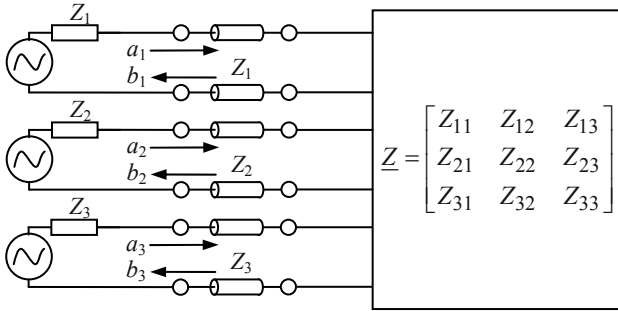


Bild 2-4 Dreitor mit fiktiven Leitungen sowie ein- und auslaufenden Wellen

Um zunächst die in Kapitel 1 eingeführten Betrachtungen von Spannungs- und Stromwellen auch auf n-Tore übertragen zu können [2.1], beschalten wir jedes Tor mit einer fiktiven verlustlosen Leitung, die den Wellenwiderstand Z_i und die Länge 0 haben möge. Jedes der Tore schließen wir dann über diese fiktive Leitung an einen Generator mit einem angepassten reellen Innenwiderstand

an, wie in Bild 2-4 gezeigt. Für jedes Tor wollen wir nun im Unterschied zu den bisher verwendeten Spannungs- und Stromwellen eine hinlaufende Welle

$$a_i = \frac{u_{i\ h}}{\sqrt{Z_i}} = i_{i\ h} \cdot \sqrt{Z_i} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u_i}{\sqrt{Z_i}} + i_i \cdot \sqrt{Z_i} \right) \quad (2.8)$$

und eine rücklaufende Welle

$$b_i = \frac{u_{i\ r}}{\sqrt{Z_i}} = i_{i\ r} \cdot \sqrt{Z_i} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u_i}{\sqrt{Z_i}} - i_i \cdot \sqrt{Z_i} \right) \quad (2.9)$$

eingeführen. Mit Hilfe dieser Wellen können wir die Spannungen und Ströme an den Toren wie folgt ausdrücken:

$$u_i = u_{i\ h} + u_{i\ r} = (a_i + b_i) \cdot \sqrt{Z_i} \quad (2.10)$$

$$i_i = i_{i\ h} - i_{i\ r} = (a_i - b_i) / \sqrt{Z_i} \quad (2.11)$$

Um die Zweckmäßigkeit dieser Wellendefinition zu belegen, stellen wir nun eine Leistungsbetrachtung an: Mit der Wirkleistung P und der Blindleistung Q ergibt sich die komplexe Leistung S als

$$S = P + j Q = \frac{1}{2} \cdot u \cdot i^* \quad (2.12)$$

wobei bekanntlich der Faktor $\frac{1}{2}$ entfallen kann, wenn bei der Darstellung von Spannung und Strom statt der Amplituden die Effektivwerte verwendet werden. Ersetzen wir nun Spannung und Strom durch die Wellengrößen entsprechend den Gleichungen 2.10 und 2.11

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{Z}{Z^*}} \cdot (a+b) \cdot (a^* - b^*) \quad (2.13)$$

und führen den Reflexionsfaktor $\Gamma = b/a$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{Z}{Z^*}} \cdot a \cdot (1+\Gamma) \cdot a^* \cdot (1-\Gamma^*) \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{j \cdot \arg(Z)} \cdot |a|^2 \cdot (1-|\Gamma|^2 + j \cdot 2 \cdot \text{Im}[\Gamma]) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Der Realteil der komplexen Leistung S , also die Wirkleistung P , ist dann

$$P = \frac{1}{2} \cdot |a|^2 \cdot \left(\cos(\arg(Z)) \cdot (1-|\Gamma|^2) - \sin(\arg(Z)) \cdot 2 \cdot \text{Im}[\Gamma] \right) \quad (2.15)$$

Da der Wellenwiderstand jedoch reell und damit $\arg(Z) = 0$ ist, vereinfacht sich Gleichung 2.15 zu

$$P = \frac{1}{2} \cdot |a|^2 \cdot (1-|\Gamma|^2) = \frac{1}{2} \cdot (|a|^2 - |b|^2) \quad (2.16)$$

Die hin- und rücklaufenden Wellen transportieren also die Wirkleistungen $\frac{1}{2} \cdot |a|^2$ bzw. $\frac{1}{2} \cdot |b|^2$ und werden daher als Leistungswellen bezeichnet.

Wird die Impedanz des Generators Z_i komplex, so muss für den Wellenwiderstand der fiktiven Leitung $Z = \text{Re}[Z_i]$ gewählt werden.

Für eine vom Wellenwiderstand Z der fiktiven Leitung abweichende Generatorimpedanz Z_i erhalten wir die primäre hinlaufende Spannungswelle

$$u_{h0} = \frac{Z}{Z + Z_i} \cdot u_0 \quad (2.17)$$

und damit die primäre Leistungswelle

$$a_0 = \frac{u_{h0}}{\sqrt{Z}} = \frac{\sqrt{Z}}{Z + Z_i} \cdot u_0 \quad (2.18)$$

Diese Welle wird nun am Ein- und Ausgang der Leitung fortwährend reflektiert, wobei wegen der verschwindenden Leitungslänge keine Verzögerungen auftreten und wir erhalten als Überlagerung

$$a = a_0 \cdot (1 + \Gamma_a \cdot \Gamma_i + \Gamma_a^2 \cdot \Gamma_i^2 + \dots) = a_0 \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_a \cdot \Gamma_i} \quad (2.19)$$

$$\text{mit } \Gamma_i = \frac{Z_i - Z}{Z_i + Z}, \quad \Gamma_a = \frac{Z_a - Z}{Z_a + Z}.$$

Die Spannung am Tor ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned}
u &= u_0 \cdot \frac{\sqrt{Z}}{Z + Z_i} \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_a \cdot \Gamma_i} \cdot (1 + \Gamma_a) \cdot \sqrt{Z} \\
&= u_0 \cdot \frac{Z}{Z + Z_i} \cdot \frac{(Z_a + Z) \cdot (Z_i + Z)}{(Z_a + Z) \cdot (Z_i + Z) - (Z_a - Z) \cdot (Z_i - Z)} \cdot \left(1 + \frac{Z_a - Z}{Z_a + Z}\right) \\
&= u_0 \cdot Z \cdot \frac{(Z_a + Z)}{2 \cdot Z_a \cdot Z + 2 \cdot Z_i \cdot Z} \cdot \left(\frac{2 \cdot Z_a}{Z_a + Z}\right) = u_0 \cdot \frac{Z_a}{Z_a + Z_i}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

wohinter sich im Resultat natürlich nichts anderes als die Spannungsteilerregel verbirgt.

2.3 Streumatrix

Für die Spannungen und Ströme an einem n-Tor gilt

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

oder umgeformt in die Wellendarstellung entsprechend Gleichungen 2.8 bis 2.11

$$\begin{bmatrix} \frac{u_1}{\sqrt{Z_{N1}}} \\ \frac{u_2}{\sqrt{Z_{N2}}} \\ \vdots \\ \frac{u_n}{\sqrt{Z_{Nn}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{\sqrt{Z_{N1}} \cdot Z_{N1}} & \frac{Z_{12}}{\sqrt{Z_{N1}} \cdot Z_{N2}} & \cdots & \frac{Z_{1n}}{\sqrt{Z_{N1}} \cdot Z_{Nn}} \\ \frac{Z_{21}}{\sqrt{Z_{N2}} \cdot Z_{N1}} & \frac{Z_{22}}{\sqrt{Z_{N2}} \cdot Z_{N2}} & \cdots & \frac{Z_{2n}}{\sqrt{Z_{N2}} \cdot Z_{Nn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{Z_{n1}}{\sqrt{Z_{Nn}} \cdot Z_{N1}} & \frac{Z_{n2}}{\sqrt{Z_{Nn}} \cdot Z_{N2}} & \cdots & \frac{Z_{nn}}{\sqrt{Z_{Nn}} \cdot Z_{Nn}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \cdot \sqrt{Z_{N1}} \\ i_2 \cdot \sqrt{Z_{N2}} \\ \vdots \\ i_n \cdot \sqrt{Z_{Nn}} \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

was wir durch

$$\underline{u}_N = \underline{Z}_N \cdot \underline{i}_N \tag{2.23}$$

abkürzen wollen. \underline{Z}_N heißt normierte Z-Matrix. Somit können wir die Vektoren ein- und auslaufender Wellen durch

$$\underline{a} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{u}_N + \underline{i}_N) = \frac{1}{2} \cdot (\underline{Z}_N + \underline{E}) \cdot \underline{i}_N \tag{2.24}$$

$$\underline{b} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{u}_N - \underline{i}_N) = \frac{1}{2} \cdot (\underline{Z}_N - \underline{E}) \cdot \underline{i}_N \tag{2.25}$$

ausdrücken, wobei \underline{E} selbstverständlich die Einheitsmatrix bezeichnet.

Wir stellen nun Gleichung 2.24 nach dem Stromvektor um

$$\underline{i}_N = 2 \cdot (\underline{Z}_N + \underline{E})^{-1} \cdot \underline{a} \quad (2.26)$$

und setzen das Ergebnis in Gleichung 2.25 ein

$$\underline{b} = (\underline{Z}_N - \underline{E}) \cdot (\underline{Z}_N + \underline{E})^{-1} \cdot \underline{a} = \underline{S} \cdot \underline{a} \quad (2.27)$$

Die Matrix \underline{S} wird als **Streumatrix** bezeichnet, da sie offenbar für jedes Tor beschreibt, wie die jeweils einlaufende Welle auf alle Tore gestreut wird und dort als auslaufende Welle in Erscheinung tritt. Doch der Interpretation wollen wir uns im folgenden Abschnitt ausführlicher widmen.

Um eine numerisch günstiger zu berechnende Form der Darstellung der Streumatrix abzuleiten, wollen wir Gleichung 2.25 von Gleichung 2.24 subtrahieren

$$\underline{a} - \underline{b} = \underline{i}_N \quad (2.28)$$

den Stromvektor durch der Ausdruck von Gleichung 2.26 ersetzen und nach dem Vektor \underline{b} umstellen:

$$\underline{b} = \left[\underline{E} - 2 \cdot (\underline{Z}_N + \underline{E})^{-1} \right] \cdot \underline{a} \quad (2.29)$$

Auf diese Weise kann also eine Matrizenmultiplikation eingespart werden.

2.3.1 Interpretation

Bereits festgestellt wurde, dass der Streuparameter s_{ki} die Streuung einer Welle vom Tor i zum Tor k beschreibt. Die am Tor k auslaufende Welle ergibt sich also aus der Summe

$$b_k = s_{k1} \cdot a_1 + s_{k2} \cdot a_2 + \dots + s_{kn} \cdot a_n \quad (2.30)$$

Eine besondere Bedeutung kommt offenbar den Hauptdiagonalelementen s_{kk} zu: Für $a_j = 0$ falls $j \neq k$, d. h. wenn abgesehen von Tor k alle anderen Tore reflexionsfrei abgeschlossen und nicht an weitere Quellen angeschlossen sind, ist s_{kk} der Reflexionsfaktor des Tores k

$$s_{kk} = \frac{b_k}{a_k} = \frac{\frac{u_k}{\sqrt{Z_{Nk}}} - i_k \cdot \sqrt{Z_{Nk}}}{\frac{u_k}{\sqrt{Z_{Nk}}} + i_k \cdot \sqrt{Z_{Nk}}} = \frac{u_k - i_k \cdot Z_{Nk}}{u_k + i_k \cdot Z_{Nk}} = \frac{Z_k - Z_{Nk}}{Z_k + Z_{Nk}} = \Gamma_k \quad (2.31)$$

wobei

$$Z_k = \frac{u_k}{i_k} \quad (2.32)$$

die aus der Vierpoltheorie bekannte Impedanz am Tor k ist und nicht mit dem Wellenwiderstand Z_{Nk} der an diesem Tor angeschlossenen fiktiven Leitung verwechselt werden darf.

Die übrigen Elemente der Streumatrix ergeben sich zu

$$s_{ki} = \frac{b_k}{a_i} \quad (2.33)$$

für $a_j = 0$ falls $j \neq i$, d. h. wenn abgesehen von Tor i alle anderen Tore reflexionsfrei abgeschlossen und nicht an weitere Quellen angeschlossen sind.

2.3.2 Transformation auf einen anderen Bezugswiderstand

Wir wollen davon ausgehen, dass die Streumatrix \underline{S} für die Normierungswiderstände Z_{Nk} mit $k=1,2,\dots,n$ bekannt ist. Gesucht sei nun die Matrix \underline{S}' für die Normierungswiderstände Z_{Nk}' .

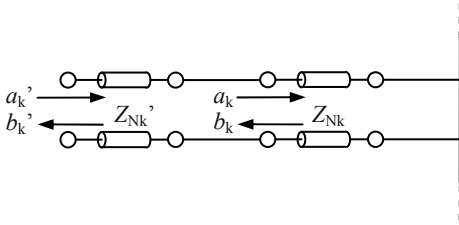


Bild 2-5 Tor mit zwei fiktiven Leitungen sowie ein- und auslaufenden Wellen

Zur Lösung dieses Problems stellen wir uns wie in Bild 2-5 dargestellt vor, die fiktiven Anschlussleitungen mit den Wellenwiderständen Z_{Nk} seien durch fiktive Anschlussleitungen mit den Wellenwiderständen Z_{Nk}' verlängert

worden, die natürlich ebenso die Länge 0 haben. An den Stoßstellen der beiden fiktiven Leitungen entstehen damit die Reflexionsfaktoren

$$\Gamma_k = \frac{Z_{Nk}' - Z_{Nk}}{Z_{Nk}' + Z_{Nk}} \quad (2.34)$$

Da die Leistung jedoch konstant bleiben muss, folgt für den **Wellenübergangsfaktor**

$$\ddot{u}_k = \sqrt{1 - \Gamma_k^2} = \sqrt{\frac{(Z_{Nk}' + Z_{Nk})^2 - (Z_{Nk}' - Z_{Nk})^2}{(Z_{Nk}' + Z_{Nk})^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{Z_{Nk}' \cdot Z_{Nk}}}{Z_{Nk}' + Z_{Nk}} \quad (2.35)$$

Zur Vermeidung von Irritationen sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass sich der Wellenübergangsfaktor von dem Spannungsübergangsfaktor gemäß Gleichung 1.92 aus Kapitel 1.5.5 natürlich unterscheidet, da die weiterlaufende Spannungswelle ja gerade die Summe der hinlaufenden und der reflektierten Spannungswelle sein muss, was bei Leistungswellen aus Gründen der Energieerhaltung nicht möglich ist !

Betrachten wir nochmals das in Bild 2-5 exemplarisch dargestellte Tor k eines n -Tores. Die einlaufende Welle a_k setzt sich zusammen aus einem ersten Teil, der vom Übergang der einlaufenden Welle a_k' herrührt, und einem zweiten Teil, der durch die Reflexion der auslaufenden Welle b_k entsteht, so dass wir also schreiben können

$$\begin{bmatrix} a_k \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \ddot{u}_{k-1} & 0 & \vdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \ddot{u}_k & 0 & \cdots \\ \cdots & \vdots & 0 & \ddot{u}_{k+1} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k' \\ \vdots \\ a_k' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \Gamma_{k-1} & 0 & \vdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \Gamma_k & 0 & \cdots \\ \cdots & \vdots & 0 & \Gamma_{k+1} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_k \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Für die auslaufende Welle b_k' gilt entsprechend

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ b_k' \\ \vdots \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \Gamma_{k-1} & 0 & \vdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \Gamma_k & 0 & \cdots \\ \cdots & \vdots & 0 & \Gamma_{k+1} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ a_k' \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \ddot{u}_{k-1} & 0 & \vdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \ddot{u}_k & 0 & \cdots \\ \cdots & \vdots & 0 & \ddot{u}_{k+1} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ b_k \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Mit Hilfe der Transformationsmatrizen

$$\underline{T}_{\ddot{u}} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \ddot{u}_{k-1} & 0 & \vdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \ddot{u}_k & 0 & \cdots \\ \cdots & \vdots & 0 & \ddot{u}_{k+1} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \underline{T}_{\Gamma} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \Gamma_{k-1} & 0 & \vdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \Gamma_k & 0 & \cdots \\ \cdots & \vdots & 0 & \Gamma_{k+1} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

können wir also verkürzt schreiben

$$\underline{a} = \underline{T}_{\ddot{u}} \cdot \underline{a}' + \underline{T}_{\Gamma} \cdot \underline{b} = \underline{T}_{\ddot{u}} \cdot \underline{a}' + \underline{T}_{\Gamma} \cdot \underline{S} \cdot \underline{a} \quad (2.38)$$

$$\underline{b}' = -\underline{T}_{\Gamma} \cdot \underline{a}' + \underline{T}_{\ddot{u}} \cdot \underline{b} = -\underline{T}_{\Gamma} \cdot \underline{a}' + \underline{T}_{\ddot{u}} \cdot \underline{S} \cdot \underline{a} \quad (2.39)$$

und erhalten durch Umstellung von Gleichung 2.38 nach der einlaufenden Welle

$$\underline{a} = (\underline{E} - \underline{T}_{\Gamma} \cdot \underline{S})^{-1} \cdot \underline{T}_{\ddot{u}} \cdot \underline{a}' \quad (2.40)$$

Das Einsetzen von Gleichung 2.40 in Gleichung 2.39 liefert schließlich

$$\underline{b}' = \left[-\underline{T}_{\Gamma} + \underline{T}_{\ddot{u}} \cdot \underline{S} \cdot (\underline{E} - \underline{T}_{\Gamma} \cdot \underline{S})^{-1} \cdot \underline{T}_{\ddot{u}} \right] \cdot \underline{a}' \quad (2.41)$$

so dass die für den neuen Bezugswiderstand gültige Streumatrix also wie folgt lautet:

$$\underline{S}' = -\underline{T}_{\Gamma} + \underline{T}_{\ddot{u}} \cdot \underline{S} \cdot (\underline{E} - \underline{T}_{\Gamma} \cdot \underline{S})^{-1} \cdot \underline{T}_{\ddot{u}} \quad (2.42)$$

2.3.3 Zusammenschaltung von n-Toren

Schaltet man zwei torzahlsymmetrische n-Tore so zusammen, dass jeweils die Hälfte der Tore für die Verbindungen genutzt werden, so können die an diesen verbundenen Toren ein- und auslaufenden Wellen zu den Vektoren \underline{a}_V bzw. \underline{b}_V sowie die an den jeweils noch offenen Toren ein- und auslaufenden Wellen zu den Vektoren \underline{a}_O bzw. \underline{b}_O zusammengefasst werden. Damit ergibt sich die in Bild 2-6 dargestellte Konfiguration. Die **Wellenkettentrizen** $\underline{K}_W^{(i)}$

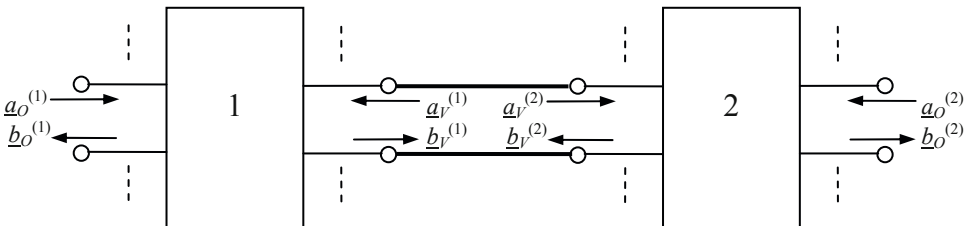


Bild 2-6 Zusammengeschaltete n-Tore

verknüpfen nun jeweils die offenen und verbundenen Tore

$$\begin{bmatrix} \underline{b}_O^{(1)} \\ \underline{a}_O^{(1)} \end{bmatrix} = \underline{K}_W^{(1)} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_V^{(1)} \\ \underline{b}_V^{(1)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \underline{b}_V^{(2)} \\ \underline{a}_V^{(2)} \end{bmatrix} = \underline{K}_W^{(2)} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_O^{(2)} \\ \underline{b}_O^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Die vier Elemente jeder Wellenkettensmatrix sind dabei ihrerseits wiederum Matrizen. Sind jeweils die Normierungswiderstände verbundener Tore gleich, so gilt wegen

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_V^{(1)} \\ \underline{b}_V^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_V^{(2)} \\ \underline{a}_V^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{b}_O^{(1)} \\ \underline{a}_O^{(1)} \end{bmatrix} = \underline{K}_W^{(1)} \cdot \underline{K}_W^{(2)} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_O^{(2)} \\ \underline{b}_O^{(2)} \end{bmatrix} = \underline{K}_W^{(1,2)} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_O^{(2)} \\ \underline{b}_O^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Außerdem können wir natürlich für beide n-Tore auch weiterhin die an den offenen- und verbundenen Toren ein- und auslaufenden Wellen über die entsprechenden Streuparameter in Beziehung setzen. Zuvor werden jedoch die Tore so umsortiert, dass die offenen von den verbundenen Tore separiert sind und die Streumatrizen in vier Teilmatrizen \underline{S}_{ij} zerfallen:

$$\begin{bmatrix} \underline{b}_O^{(1)} \\ \underline{b}_V^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{OO}^{(1)} & \underline{S}_{OV}^{(1)} \\ \underline{S}_{VO}^{(1)} & \underline{S}_{VV}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_O^{(1)} \\ \underline{a}_V^{(1)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \underline{b}_V^{(2)} \\ \underline{b}_O^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{VV}^{(2)} & \underline{S}_{VO}^{(2)} \\ \underline{S}_{OV}^{(2)} & \underline{S}_{OO}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_V^{(2)} \\ \underline{a}_O^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Aus den durch jede der Matrixgleichungen 2.46 jeweils gegebenen zwei Matrixgleichungen

$$\begin{aligned} \underline{b}_O^{(1)} &= \underline{S}_{OO}^{(1)} \cdot \underline{a}_O^{(1)} + \underline{S}_{OV}^{(1)} \cdot \underline{a}_V^{(1)} & \underline{b}_V^{(2)} &= \underline{S}_{VV}^{(2)} \cdot \underline{a}_V^{(2)} + \underline{S}_{VO}^{(2)} \cdot \underline{a}_O^{(2)} \\ \underline{b}_V^{(1)} &= \underline{S}_{VO}^{(1)} \cdot \underline{a}_O^{(1)} + \underline{S}_{VV}^{(1)} \cdot \underline{a}_V^{(1)} & \underline{b}_O^{(2)} &= \underline{S}_{OV}^{(2)} \cdot \underline{a}_V^{(2)} + \underline{S}_{OO}^{(2)} \cdot \underline{a}_O^{(2)} \end{aligned} \quad (2.47)$$

gewinnen wir durch Umstellen zunächst

$$\begin{aligned} \underline{b}_O^{(1)} &= \left(-\underline{S}_{OO}^{(1)} \cdot \underline{S}_{VO}^{(1)-1} \cdot \underline{S}_{VV}^{(1)} + \underline{S}_{OV}^{(1)} \right) \cdot \underline{a}_V^{(1)} + \underline{S}_{OO}^{(1)} \cdot \underline{S}_{VO}^{(1)-1} \cdot \underline{b}_V^{(1)} \\ \underline{a}_O^{(1)} &= -\underline{S}_{VO}^{(1)-1} \cdot \underline{S}_{VV}^{(1)} \cdot \underline{a}_V^{(1)} + \underline{S}_{VO}^{(1)-1} \cdot \underline{b}_V^{(1)} \\ \underline{b}_V^{(2)} &= \left(-\underline{S}_{VV}^{(2)} \cdot \underline{S}_{OV}^{(2)-1} \cdot \underline{S}_{OO}^{(2)} + \underline{S}_{VO}^{(2)} \right) \cdot \underline{a}_O^{(2)} + \underline{S}_{VV}^{(2)} \cdot \underline{S}_{OV}^{(2)-1} \cdot \underline{b}_O^{(2)} \\ \underline{a}_V^{(2)} &= -\underline{S}_{OV}^{(2)-1} \cdot \underline{S}_{OO}^{(2)} \cdot \underline{a}_O^{(2)} + \underline{S}_{OV}^{(2)-1} \cdot \underline{b}_O^{(2)} \end{aligned} \quad (2.48)$$

und durch Vergleich mit den beiden Matrixgleichungen 2.43 schließlich

$$\begin{aligned} \underline{K}_W^{(1)} &= \begin{bmatrix} \underline{S}_{OV}^{(1)} - \underline{S}_{OO}^{(1)} \cdot \underline{S}_{VO}^{(1)-1} \cdot \underline{S}_{VV}^{(1)} & \underline{S}_{OO}^{(1)} \cdot \underline{S}_{VO}^{(1)-1} \\ -\underline{S}_{VO}^{(1)-1} \cdot \underline{S}_{VV}^{(1)} & \underline{S}_{VO}^{(1)-1} \end{bmatrix} \\ \underline{K}_W^{(2)} &= \begin{bmatrix} \underline{S}_{VO}^{(2)} - \underline{S}_{VV}^{(2)} \cdot \underline{S}_{OV}^{(2)-1} \cdot \underline{S}_{OO}^{(2)} & \underline{S}_{VV}^{(2)} \cdot \underline{S}_{OV}^{(2)-1} \\ -\underline{S}_{OV}^{(2)-1} \cdot \underline{S}_{OO}^{(2)} & \underline{S}_{OV}^{(2)-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Dieses Ergebnis gibt also für beide n-Tore an, wie aus den Streumatrizen die Wellenkettensmatrizen zu berechnen sind. Die Wellenkettensmatrix der zusammengeschalteten n-Tore ergibt sich dann gemäß Gleichung 2.45 als Produkt der Wellenkettensmatrizen der beiden n-Tore:

$$\underline{K}_W^{(1,2)} = \underline{K}_W^{(1)} \cdot \underline{K}_W^{(2)} \quad (2.50)$$

Die Invertierbarkeit der Matrizen $\underline{S}_{VO}^{(1)}$ und $\underline{S}_{OV}^{(2)}$ setzt jedoch deren quadratische Form und somit die eingangs geforderte jeweils gleiche Zahl offener und verbundener Tore sowie die identische Torzahl beider n-Tore voraus.

Diese für einige praktische Anwendungen harte Einschränkung kann entfallen, wenn man für die Beschreibung der Kettenschaltung auf die Kettenmatrizen verzichtet und lediglich die Streumatrizen nutzt [2.2]. Dazu gehen wir wieder von Bild 2-6 aus, vereinen diesmal jedoch in jeweils einem Vektor die einlaufenden und die auslaufenden Wellen an den Toren beider zu verbindender n-Tore, wiederum sortiert nach offenen und verbundenen Toren. Diese Vektoren werden dann in bekannter Weise über eine gemeinsame Streumatrix in Verbindung gesetzt, wobei deren Elemente aus den Streumatrizen $\underline{S}^{(1)}$ und $\underline{S}^{(2)}$ der beiden n-Tore abzulesen und fehlende Elemente 0 zu setzen sind:

$$\begin{bmatrix} \underline{b}_O \\ \underline{b}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{OO} & \underline{S}_{OV} \\ \underline{S}_{VO} & \underline{S}_{VV} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_O \\ \underline{a}_V \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} \underline{b}_O \\ \underline{b}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_O^{(1)} \\ \underline{b}_O^{(2)} \\ \underline{b}_V^{(1)} \\ \underline{b}_V^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \underline{a}_O \\ \underline{a}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_O^{(1)} \\ \underline{a}_O^{(2)} \\ \underline{a}_V^{(1)} \\ \underline{a}_V^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Auch die so entstehende Streumatrix besteht, wie aus Gleichung 2.51 ersichtlich, wiederum aus vier Teilmatrizen.

Eine weitere Matrix \underline{V} beschreibt, in welcher Weise die verbundenen Tore miteinander verschaltet sind, wobei das jeweilige Matrixelement 1 zu setzen ist, wenn eine externe Verbindung zwischen den betreffenden Toren existiert und folglich die an dem einen Tor auslaufende Welle gleich der an dem anderen Tor einlaufenden Welle ist, und andernfalls den Wert 0 erhält:

$$\underline{b}_V = \underline{V} \cdot \underline{a}_V \quad (2.52)$$

Voraussetzung hierfür ist wiederum, dass die Normierungswiderstände verbundener Tore gleich sein müssen.

Unser Ziel ist es nun, die Streumatrix $\underline{S}^{(1,2)}$ zu bestimmen, welche die an den offenen Toren der Gesamtschaltung ein- und auslaufenden Wellen miteinander in Beziehung setzt:

$$\underline{b}_O = \underline{S}^{(1,2)} \cdot \underline{a}_O \quad (2.53)$$

Dazu gehen wir von Matrixgleichung 2.51 aus und lesen für den Vektor \underline{b}_O ab

$$\underline{b}_O = \underline{S}_{OO} \cdot \underline{a}_O + \underline{S}_{OV} \cdot \underline{a}_V \quad (2.54)$$

Für den Vektor \underline{b}_V erhalten wir jeweils einen Ausdruck aus Gleichung 2.51 und Gleichung 2.52

$$\underline{b}_V = \underline{S}_{VO} \cdot \underline{a}_O + \underline{S}_{VV} \cdot \underline{a}_V = \underline{V} \cdot \underline{a}_V \quad (2.55)$$

Durch Umstellen von Gleichung 2.55 gewinnen wir für den Vektor \underline{a}_V den Ausdruck

Integrierte Hochfrequenzschaltkreise
Grundlagen des computergestützten Entwurfs
Thiede, A.
2013, XI, 239 S. 173 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-8348-1246-9