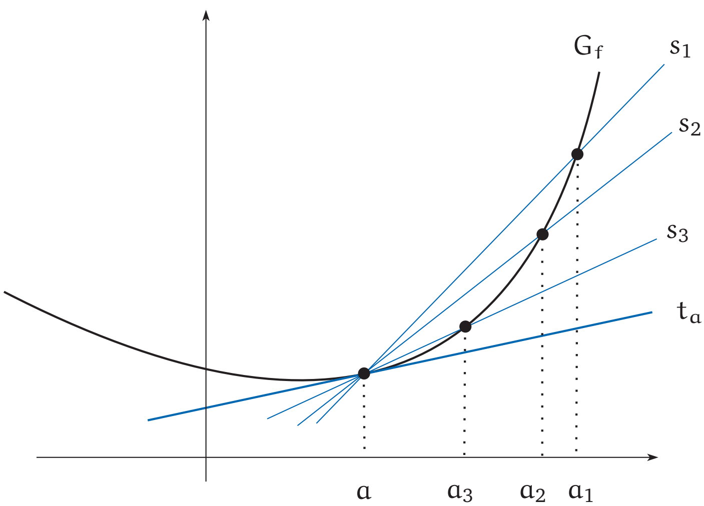
2

Differenzierbare Funktionen



T. Bauer, *Analysis - Arbeitsbuch*, DOI 10.1007/978-3-8348-2312-0_2,

Zur Orientierung

■ **Differenzierbare Funktionen.** Differenzierbarkeit ist ein zentraler Begriff der Analysis. Er entsteht aus dem Anliegen, das Änderungsverhalten einer Funktion *lokal* zu beschreiben: Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und zwei Stellen $a, b \in \mathbb{R}$ gibt die Differenz

$$f(b) - f(a)$$

die *Änderung* des Funktionswerts beim Übergang von a zu b an. Der Quotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ist die *relative Änderung*: Wenn f beispielsweise die Abhängigkeit einer skalaren Größe von der Zeit beschreibt, dann ist dies die »Änderung pro Zeitabschnitt«. Der entscheidende Schritt der Analysis liegt nun darin, vom Vergleich der Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ an *zwei* Stellen zur Betrachtung an *einem einzigen* Punkt überzugehen: Ausgehend von der relativen Änderung von a nach b fragt man nach der *lokalen Änderungsrate* an der Stelle a, d. h. nach dem Grenzwert

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \,.$$

Nicht für alle Funktionen gelingt dieser Übergang, da der Grenzwert nicht immer existiert – diejenigen Funktionen, bei denen er existiert, werden *differenzierbar in* a genannt. In geometrischer Deutung entspricht dies der Bedingung, dass die durch a und x bestimmten Sekantensteigungen für $x \to a$ einen Grenzwert besitzen. Die Gerade durch $(a, f(a))$ mit der zugehörigen Grenzsteigung wird dann als *Tangente* bezeichnet. Kurz: Die relativen Änderungen sind die Sekantensteigungen, die lokale Änderungsrate ist die Tangentensteigung.

Neben der soeben beschriebenen Vorstellung der Ableitung als lokaler Änderungsrate ist auch die Vorstellung der *lokalen Linearisierung* von Bedeutung: Sie entspricht der Bedingung, dass die Funktion lokal bei a durch eine lineare Funktion »gut« approximiert werden kann – anschaulich bedeutet dies, dass der Graph der Funktion unter einem stark vergrößernden Mikroskop in einer Umgebung des Punkts $(a, f(a))$ kaum noch von einer Geraden (der Tangente) zu unterscheiden ist. Den Aspekt der lokalen Linearisierung kann man beispielsweise nutzen, um den Differenzierbarkeitsbegriff auf Funktionen mehrerer Veränderlicher zu verallgemeinern (siehe hierzu Aufgabe 5.6).

■ **Arbeiten mit differenzierbaren Funktionen.** Um den Differenzierbarkeitsbegriff effektiv verwenden zu können, sind – wie bei allen mathematischen Begriffen und Inhalten – zwei Ebenen des Verstehens entscheidend:

- Man benötigt *adäquate Vorstellungen* zum Begriff (wie die Vorstellung der lokalen Änderungsrate, die Tangentenvorstellung, die Vorstellung der lokalen Linearisierbarkeit), die sowohl bei der inner- als auch bei außermathematischen Verwendung des Begriffs aktiviert werden können.
- Es ist wichtig, die *Eigenschaften* des Differenzierbarkeitsbegriffs zu kennen und auch zu verstehen, wie diese zustande kommen und zusammenhängen. Beispiele hierfür sind: der Bezug zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit, die Erhaltung der Differenzierbarkeit bei der Bildung neuer Funktionen aus vorhandenen Funktionen (Produktregel, Kettenregel, Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion).

2.1 Ableitungen als Tangentensteigungen: Vorstellungen und Fehlvorstellungen

Was sollten Sie schon kennen?

den Ableitungsbegriff und die Grundvorstellung der Ableitung als Tangentensteigung

Was lernen Sie hier?

Sie schärfen Ihre Vorstellungen zur Interpretation der Ableitung mittels Sekanten und Tangenten.

▶ Aufgabe

Welche der folgenden Vorstellungen zum Ableitungsbegriff sind zutreffend, bei welchen handelt es sich um Fehlvorstellungen? Erläutern Sie jeweils, warum die Vorstellung zutreffend ist bzw. worin die Fehlvorstellung besteht.

a) Die Ableitung $f'(a)$ einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ gibt die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$ an.

b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für Punkte $a \neq b$ aus $\mathbb{R}$ bezeichne $S_{f,a,b}$ die Gerade in $\mathbb{R}^2$, die durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ geht (*Sekante*). Die Funktion f ist genau dann differenzierbar in a, wenn sich für jede Folge (a_n), die gegen a konvergiert, die Folge der Sekanten S_{f,a,a_n} einer Grenzgerade annähert, die endliche Steigung hat (d. h. nicht parallel zur y-Achse ist). Ist dies der Fall, so nennen wir diese Gerade die Tangente an f in a.

c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann schneidet die Tangente an f in a den Graphen von f nur im Punkt $(a, f(a))$.

d) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ differenzierbar. Die Tangente an f in x werde mit t_x bezeichnet. Es ist f genau dann in $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar, wenn sich t_x für $x \to a$ einer Grenzgerade annähert.

* * *

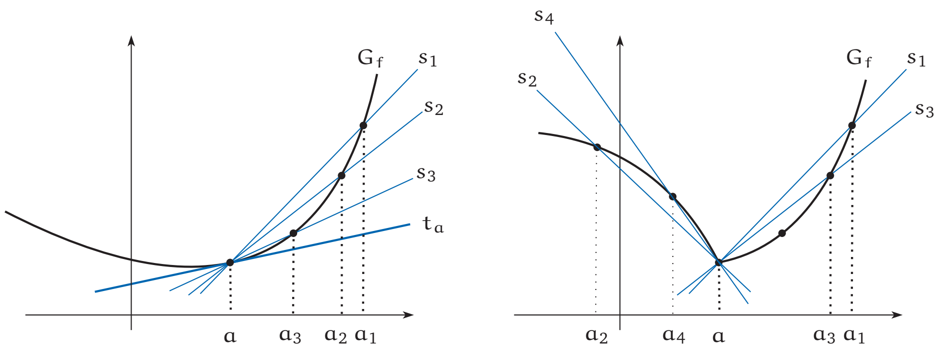


Abb. 2.1: Links: Eine Folge von Sekanten $s_1, s_2, s_3, \ldots$ nähert sich der Tangente t_a an. — Rechts: Falls f in a nicht differenzierbar ist, dann kann man eine Folge (a_n) finden, deren zugehörige Sekantenfolge nicht konvergiert.

▶ Kommentierter Lösungsvorschlag

a) Wahr – das ist eine der Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff.
Hinweis zur Warnung: Die Formulierung in (a) drückt korrekt aus, dass die Ableitung als Tangentensteigung interpretiert werden kann. Es ist aber nicht so, dass die Ableitung $f'(a)$ als Steigung einer Tangente *definiert* wird! Man müsste dazu nämlich schon vorab den Begriff *Tangente* definiert haben. In Wahrheit wird umgekehrt ein Schuh daraus – es wird der Begriff *Tangente* unter Rückgriff auf den Ableitungsbegriff definiert:

> *Ist f in a differenzierbar, so ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$ definiert als diejenige Gerade durch den Punkt $(a, f(a))$, deren Steigung gleich $f'(a)$ ist.*

b) Wahr – wenn man das genannte »Sich-Annähern« der Sekanten so versteht, dass ihre Steigungen einen Grenzwert besitzen. Denn in der Tat sind die Sekantensteigungen genau die Differenzenquotienten, deren Limes in der Definition der Differenzierbarkeit betrachtet wird.

Zwei Hinweise:

- Um auf Differenzierbarkeit schließen zu können, genügt es nicht, dass eine Folge (a_n) mit $a_n \to a$ *existiert*, für die sich die zugehörige Folge der Sekanten einer Grenzgerade annähert. Vielmehr muss diese Eigenschaft für *alle* solchen Folgen (a_n) erfüllt sein (siehe Abb. 2.1).
- Dass sich die Sekanten einer Grenzgerade annähern, die parallel zur y-Achse

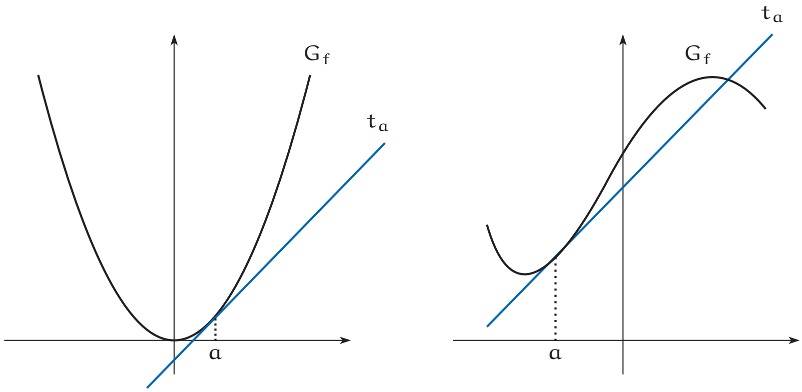


Abb. 2.2: Dass eine Tangente t_a den Graphen G_f nur in einem einzigen Punkt schneidet, kann im ersten Augenblick plausibel klingen, wenn man an quadratische Funktionen wie in der linken Abbildung denkt. — Dass die Behauptung aber im Allgemeinen falsch ist, wird durch das rechte Bild deutlich.

ist, kommt durchaus vor, z. B. bei der Funktion

$$\begin{aligned} f : [0, \infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

im Nullpunkt: Die Sekanten $S_{f,0,b}$ nähern sich für $b \to 0$ der y-Achse an, die Funktion ist daher im Nullpunkt nicht differenzierbar.

c) Falsch – eine Tangente kann mehrere Schnittpunkte mit dem Graphen haben. Abbildung 2.2 zeigt dies an einem Beispiel.
Hinweis: Diese Fehlvorstellung kann auftreten, wenn man beim Begriff *Tangente* an das aus der Mittelstufe bekannte Beispiel eines Kreises denkt: Dort sind die Sekanten diejenigen Geraden, die *zwei* Schnittpunkte mit dem Kreis haben, während die Tangenten diejenigen Geraden sind, die nur *einen* Schnittpunkt mit dem Kreis haben. Die Tangenten an einen Kreis sind also durch die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit dem Kreis charakterisiert. Dies gilt auch für die Parabel $x \mapsto x^2$, wenn man Geraden parallel zur y-Achse von der Betrachtung ausschließt.

d) Falsch – die angegebene Formulierung, dass sich die Tangenten einer Geraden annähern, drückt die *stetige Differenzierbarkeit* aus. Diese Eigenschaft ist aber echt stärker als die Differenzierbarkeit.
Hinweis: Das Standardbeispiel einer differenzierbaren, aber nicht *stetig* diffe-

renzierbaren Funktion ist

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Sie ist differenzierbar, aber ihre Ableitung ist im Nullpunkt nicht stetig. (Diese Funktion wird in Aufgabe 5.12(b)ii näher betrachtet.)

Zum Weiterarbeiten

- **Lokal nur ein Schnittpunkt?** Die rechte Skizze in Abb. 2.2 verdeutlicht, dass eine Tangente durchaus mehrere Schnittpunkte mit dem Funktionsgraphen haben kann. Man könnte vermuten, dass immerhin folgende *lokale* Aussage richtig ist: »Es gibt eine Umgebung von $(a, f(a))$, in der G_f und t_a nur einen einzigen Schnittpunkt haben.« Aber auch dies ist nicht richtig. Finden Sie ein Beispiel, das diese Vermutung widerlegt.

- **Sekanten parallel zur Tangente.** In Unterrichtswerken wird der Zusammenhang zwischen Sekanten und Tangenten häufig am Beispiel von quadratischen Polynomen $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ eingeführt (mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $\alpha \neq 0$). Diese Funktionen können folgende Vorstellung nahelegen: »Die Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist parallel zur Tangente im »mittleren« Punkt $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$.«

  - Überprüfen Sie, dass diese Aussage für quadratische Funktionen in der Tat richtig ist.
  - Geben Sie ein Beispiel einer Funktion, bei der diese Aussage nicht richtig ist.
  - Warum gibt es aber immer eine Stelle c zwischen a und b, so dass die Sekante zur Tangente in c parallel ist?

2.2 Die Ableitung der Umkehrfunktion

Was sollten Sie schon kennen?

- differenzierbare Funktionen, die Interpretation der Ableitung als Tangentensteigung
- umkehrbare Funktionen und die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion

Was lernen Sie hier?

eine Plausibilitätsbetrachtung, die bei einer umkehrbaren Funktion f den Zusammenhang zwischen ihrer Ableitung f' und der Ableitung $(f^{-1})'$ ihrer Umkehrfunktion verdeutlicht

▶ Aufgabe

Wir betrachten eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Es sei vorausgesetzt, dass f umkehrbar ist und dass $f'(a) \neq 0$ für einen Punkt $a \in I$ gilt. Sie wissen, dass dann f^{-1} im Bildpunkt $b = f(a)$ differenzierbar ist und dass gilt

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \,. \tag{$*$}$$

In dieser Aufgabe geht es darum, diese Aussagen durch geometrische Überlegungen plausibel zu machen.

a) Wie ändert sich die Steigung einer Geraden in $\mathbb{R}^2$, wenn sie an der Winkelhalbierenden $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = y\right\}$ gespiegelt wird?

b) Zwischen den Graphen von f und f^{-1} gibt es einen einfachen geometrischen Zusammenhang (siehe Aufgabe 1.1). Nutzen Sie diesen, um plausibel zu machen, dass f^{-1} in b differenzierbar ist. Begründen Sie dann – die Differenzierbarkeit von f' voraussetzend – die Formel $(*)$.
Hinweis: Überlegen Sie sich dazu, welchen Zusammenhang es zwischen Sekanten zu f und Sekanten zu f^{-1} gibt.

* * *

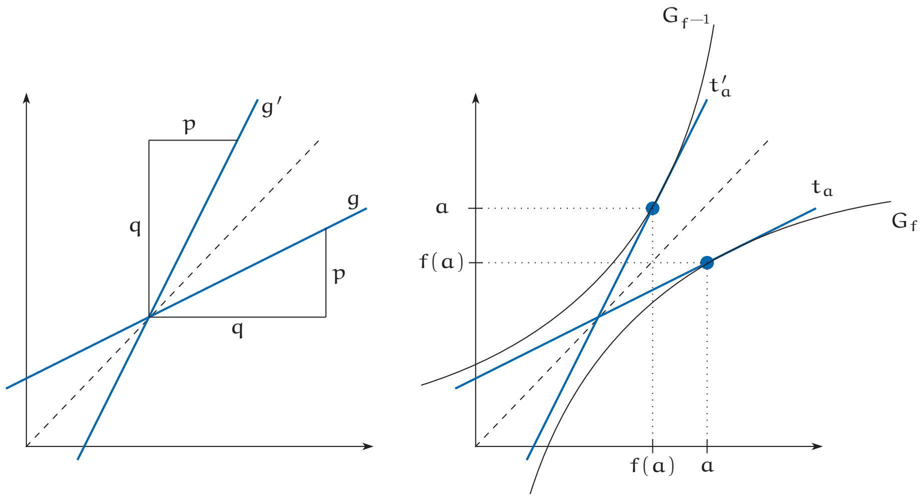


Abb. 2.3: Links: Gerade und gespiegelte Gerade haben reziproke Steigungen. — Rechts: Funktion und Umkehrfunktion haben reziproke Ableitungen.

▶ Kommentierter Lösungsvorschlag

a) Man sieht dies anhand von Abb. 2.3: Dort ist eine Gerade g und die an der Winkelhalbierenden gespiegelte Gerade g' eingezeichnet. Zu g ist ein Steigungsdreieck angegeben (mit Seitenlängen p und q), aus dem sich durch Spiegeln ein Steigungsdreieck für g' ergibt. Damit wird klar: Die Gerade g hat die Steigung p/q und g' hat die Steigung q/p. Wenn wir Geraden ausschließen, die parallel zu einer der Achsen sind, dann gilt also:

> *Eine Gerade in* $\mathbb{R}^2$ *mit Steigung* $c \neq 0$ *geht durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden in eine Gerade mit Steigung* $1/c$ *über.*

b) Der Graph von f^{-1} geht aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden hervor, denn es ist

$$G_f \quad = \quad \{\,(x,y) \mid y = f(x)\,\}$$

und

$$\begin{aligned} G_{f^{-1}} \quad &= \quad \left\{\,(x,y) \,\middle|\, y = f^{-1}(x)\,\right\} \\ &= \quad \{\,(x,y) \mid x = f(y)\,\}\,. \end{aligned}$$

Ist f an der Stelle a differenzierbar, so konvergieren die in der Definition der Differenzierbarkeit betrachteten Sekanten gegen eine Gerade durch a, die per Definition die Tangente in a ist. Wir bezeichnen diese Tangente im Folgenden mit t_a. Die Ableitung $f'(a)$ ist die Steigung von t_a. Ist $f'(a) \neq 0$, so liegt t_a nicht parallel zur x-Achse. Spiegelt man die gerade betrachteten Sekanten und auch die Tangente t_a, so erhält man Sekanten und Tangente an den Graphen von f^{-1}. Wir sehen also: Die gespiegelte Gerade t'_a ist die Tangente an den Graphen von f^{-1} im Punkt $f(a)$. Nun benutzen wir das in Teil (a) Gezeigte: Die Steigung von t'_a ist der reziproke Wert der Steigung von t_a, also gleich $\frac{1}{f'(a)}$.

2.3 Wasserstand im Edersee – Die Kettenregel

Was sollten Sie schon kennen?

differenzierbare Funktionen einer Veränderlichen, die Kettenregel

Was lernen Sie hier?

Sie aktivieren unterschiedliche Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff und sehen, wie der Wechsel zwischen ihnen in einer Anwendungssituation genutzt werden kann.

► Aufgabe

Wir behandeln hier eine Fragestellung aus dem Aufsatz [G]:

»Wie viel Wasser hat der Edersee am 15. August 2003 verloren?«

Hintergrund dieser Frage ist, dass im Laufe des Jahres 2003 fast das gesamte Wasser der Edertalsperre abgelassen wurde. Zur Beantwortung stehen die zwei Diagramme in Abb. 2.4 zur Verfügung. Das eine gibt den Pegelstand des Edersees abhängig von der Zeit an – diese Größe wird regelmäßig gemessen und ist im Diagramm für die Zeit vom 1. November 2002 bis 31. Oktober 2003 dargestellt. Das andere gibt den Inhalt des Edersees abhängig vom Pegel an – ein funktionaler Zusammenhang, der durch die Geometrie des Sees festgelegt ist.

a) Ermitteln Sie einen Näherungswert für die Tangentensteigung der Funktion

$$\mathrm{f} : \text{Zeit} \longrightarrow \text{Wassermenge}$$

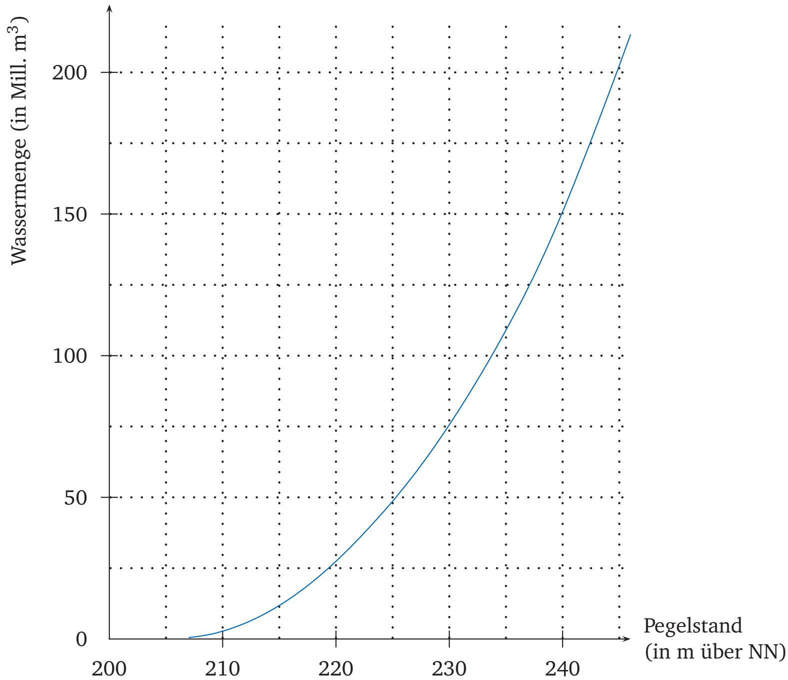
an der zum (Tagesanfang des) 15. August 2003 gehörigen Stelle, indem Sie aus den Diagrammen an geeigneten Stellen (Näherungswerte für) die Tangentensteigungen der zwei Funktionen

$$\mathrm{g} : \text{Zeit} \longrightarrow \text{Pegelstand} \quad \text{und} \quad \mathrm{k} : \text{Pegelstand} \longrightarrow \text{Wassermenge}$$

entnehmen.

b) Begründen Sie, wie und warum Sie mit der in (a) ermittelten Tangentensteigung einen Näherungswert für die eingangs gesuchte Wassermenge erhalten können.

* * *



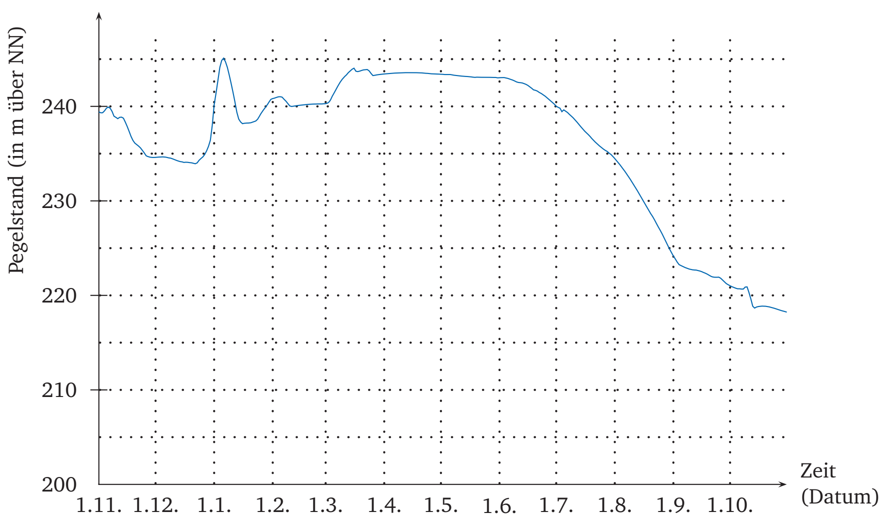


Abb. 2.4: Abhängigkeit der Wassermenge des Edersees vom Pegelstand (oben) und Abhängigkeit des Pegelstands von der Zeit (unten) für den Zeitraum vom 1. November 2002 bis 31. Oktober 2003. Das Zahlenmaterial, das den beiden Diagrammen zugrunde liegt, entstammt der Seite `http://www.edersee.de/wasserstand/`. Wir danken für die freundliche Genehmigung zur Verwendung der Daten.

▶ Kommentierter Lösungsvorschlag

a) Tangentensteigung der zusammengesetzten Funktion. Es geht hier darum, die Tangentensteigung der Funktion

$$f : \text{Zeit} \longrightarrow \text{Wassermenge}$$

im Punkt $(t, f(t))$ zu ermitteln, wobei der Zeitpunkt t der Tagesanfang des 15. August 2003 ist. Nicht die Funktion f ist allerdings in den zwei Diagrammen dargestellt, sondern die beiden Funktionen

$$g : \text{Zeit} \longrightarrow \text{Pegelstand} \quad \text{und} \quad k : \text{Pegelstand} \longrightarrow \text{Wassermenge}\,.$$

Wir nutzen nun, dass $f = k \circ g$ ist, und verwenden die Kettenregel

$$f'(t) = (k \circ g)'(t) = k'(g(t))g'(t)\,.$$

Die Werte $g'(t)$ und $k'(g(t))$ können wir den Diagrammen als Tangentensteigungen näherungsweise entnehmen: Es ist

$$g'(t) \approx -\frac{10\,\text{m}}{30\,\text{Tage}}, \qquad g(t) \approx 230\,\text{m}$$

$$k'(g(t)) \approx k'(230\,\text{m}) \approx \frac{50 \cdot 10^6\,\text{m}^3}{10\,\text{m}}$$

und daher

$$f'(t) \approx -\frac{50 \cdot 10^6\,\text{m}^3}{10\,\text{m}} \cdot \frac{10\,\text{m}}{30\,\text{Tage}} = -\frac{5}{3} \cdot 10^6\,\frac{\text{m}^3}{\text{Tag}} \approx -1{,}7 \cdot 10^6\,\frac{\text{m}^3}{\text{Tag}}\,.$$

b) Von der Tangentensteigung zur Approximation. Die Aufgabenstellung fragt nach der Wassermengendifferenz

$$f(\text{Tagesende des 15.08.2003}) - f(\text{Tagesanfang des 15.08.2003})\,.$$

Das Ergebnis von Teilaufgabe (a) legt es nahe, unmittelbar zu antworten: Der Edersee hat am 15. August 2003 circa

$$1{,}7 \cdot 10^6\,\text{m}^3$$

Wasser verloren. Wir begründen nun genauer, inwiefern diese Näherung sinnvoll und berechtigt ist: Die in (a) betrachtete Tangentensteigung ist eine der *Grundvorstellungen* zum Ableitungsbegriff. Die Erklärung, warum Tangentensteigungen bei der Approximation eine Rolle spielen, kann von zwei alternativen Sichtweisen aus erfolgen – diese entsprechen zwei weiteren Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff:

Sichtweise 1 – Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate
Die Ableitung $f'(t)$ ist der Grenzwert der *relativen Änderungen*

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

für $h \to 0$ und wird daher als *(lokale) Änderungsrate* an der Stelle t interpretiert. Wir nutzen nun für kleine h die Approximation

$$\boxed{\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \approx f'(t)} \qquad (*)$$

und erhalten so als Näherung für die *totale Änderung* $f(t+h)-f(t)$ den Wert $f'(t) \cdot h$.

Sichtweise 2 – Grundvorstellung der lokalen Linearisierung
Die Differenzierbarkeit der Funktion f an der Stelle t ist äquivalent dazu, dass gilt

$$f(t+h) = f(t) + f'(t) \cdot h + r(h)$$

mit

$$\frac{r(h)}{h} \to 0\,.$$

Die Funktion f wird also an der Stelle t durch die lineare Funktion

$$\boxed{h \mapsto \ell(h) := f(t) + f'(t) \cdot h}$$

lokal linearisiert mit einer Fehlerfunktion r, die für $h \to 0$ »stärker als linear« gegen 0 konvergiert. Als Näherung ersetzen wir nun f in der Nähe von t durch die angegebene Linearisierung und erhalten so den Näherungswert

$$f(t+h) - f(t) \approx \ell(h) - \ell(0) = f'(t) \cdot h\,.$$

Bemerkung: In der Aufgabe wurden Näherungswerte für Tangentensteigungen aus Diagrammen entnommen, z. B. für die Pegelstandsfunktion am 15. August. Dabei sind zwei Aspekte zu bedenken:

(1) *Ablesegenauigkeit:* Wie zuverlässig die entnommenen Werte sind, ist zum einen eine Frage der erreichbaren Ablesegenauigkeit. Ginge es nicht um den 15. August, sondern etwa um einen der Tage am Beginn des März, so bräuchte man ein Diagramm in größerer Auflösung (stärkere Vergrößerung).

(2) *Modellierung:* Bei der Erstellung der Diagramme wurde aus diskreten Werten (Pegelständen, die in gewissen Zeitabständen gemessen wurden) eine differenzierbare Kurve gebildet, deren Tangentensteigungen für die Zwecke der Aufgabe verwendet werden. Die Zuverlässigkeit der weiteren Rechnung hängt davon ab, ob diese Modellierung angemessen ist – es ist beispielsweise denkbar, dass bei weiteren Zwischenmessungen Schwankungen auftreten, die zu einer veränderten Kurve führen könnten.

Zum Weiterarbeiten

- **Mehr über den Edersee.** Sie finden in [HJK] eine Aufgabe, in der weitergehende Überlegungen zum Edersee angestellt werden – bis hin zur Untersuchung einer Differentialgleichung, mit der das Abfließen des Wassers beschrieben werden kann.

2.4 Eine Charakterisierung der Differenzierbarkeit durch eine Lage-Bedingung

Was sollten Sie schon kennen?

den Ableitungsbegriff und seine Interpretation als Tangentensteigung

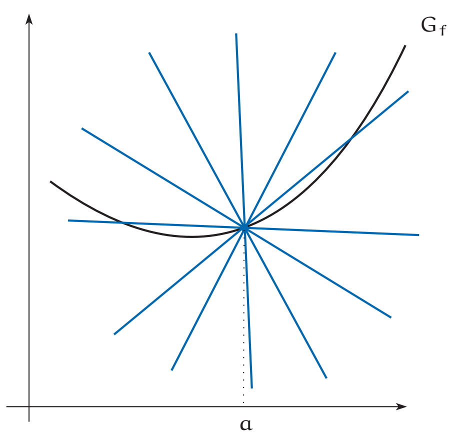
Was lernen Sie hier?

Sie lernen eine Möglichkeit kennen, die Differenzierbarkeit und den Tangentenbegriff durch eine geometrische »Lage-Bedingung« zu charakterisieren.

▶ Aufgabe

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem reellen Intervall I und es sei $a \in I$ ein innerer Punkt von I. In dieser Aufgabe geht es darum, die Differenzierbarkeit von f in a und die zugehörige Tangente in geometrischer Weise zu charakterisieren. Wir betrachten dazu in $\mathbb{R}^2$ alle Geraden, die durch den Punkt $(a, f(a))$ gehen und eine beliebige Steigung $c \in \mathbb{R}$ haben. (Geraden, die parallel zur y-Achse sind, betrachten wir also nicht.) Sie sind die Graphen der linearen Funktionen

$$\begin{aligned} g_c : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(a) + c \cdot (x - a)\,. \end{aligned}$$



a) Untersuchung einer Lage-Bedingung. Nehmen Sie an, dass f in a differenzierbar ist. Eine der Geraden g_c ist dann die Tangente an f in a, und zwar diejenige, bei der $c = f'(a)$ ist. Für $\varepsilon > 0$ entsteht die Gerade $g_{c+\varepsilon}$ durch eine Linksdrehung von g_c um den Punkt $(a, f(a))$. Wie ist die gegenseitige Lage von f und $g_{c+\varepsilon}$ in der Nähe von a? Wie ist die Lage von f und $g_{c-\varepsilon}$? (Mit »gegenseitige Lage« ist dabei gemeint: Welche Funktion liegt wo unterhalb/überhalb der anderen?) Experimentieren Sie zunächst anhand von Skizzen, formulieren Sie dann eine Behauptung und beweisen Sie diese.

b) Die Umkehrung. Beweisen Sie nun die umgekehrte Aussage: Wenn es unter den Geraden g_c eine gibt, so dass für beliebiges $\varepsilon > 0$ die gedrehten Geraden $g_{c+\varepsilon}$ bzw. $g_{c-\varepsilon}$ die Lage-Bedingung erfüllen, die Sie in der vorigen Aufgabe formuliert haben, dann ist f in a differenzierbar und die Gerade g_c ist die Tangente in a.

* * *

▶ Kommentierter Lösungsvorschlag

a) Untersuchung einer Lage-Bedingung. Durch Experimentieren anhand einiger Beispiele wie in Abb. 2.5 kann man zu einer Vermutung gelangen. (Probieren Sie mehrere Varianten bei f aus: monoton steigend, monoton fallend, mit Maximum bei a, mit Minimum bei a.)

Wir behaupten: Sei f differenzierbar in a und sei $c = f'(a)$. Dann gilt:

$(*)$ *Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Umgebung von a, auf der die Gerade $g_{c+\varepsilon}$ folgende Lage-Bedingung erfüllt: Sie liegt links von a unterhalb von f und rechts von a oberhalb von f. Bei $g_{c-\varepsilon}$ ist es umgekehrt.*

Beweis: Die Differenzierbarkeit von f in a lässt sich durch folgende Bedingung ausdrücken: Es gilt für alle $x \in I$

$$f(x) = f(a) + c(x - a) + r(x)(x - a)$$

mit einer Funktion $r : I \to \mathbb{R}$, die für $x \to a$ gegen 0 geht. Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Durch Einsetzen finden wir

$$g_{c+\varepsilon}(x) - f(x) = (\varepsilon - r(x))(x - a)\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ ist und r für $x \to a$ gegen 0 geht, ist $\varepsilon - r(x)$ in einer Umgebung von a positiv. Da $x - a$ bei a das Vorzeichen von Minus nach Plus wechselt, gilt dies also auch für $g_{c+\varepsilon}(x) - f(x)$. Daraus folgt die Behauptung für $g_{c+\varepsilon}$. Für $g_{c-\varepsilon}$ geht es analog.

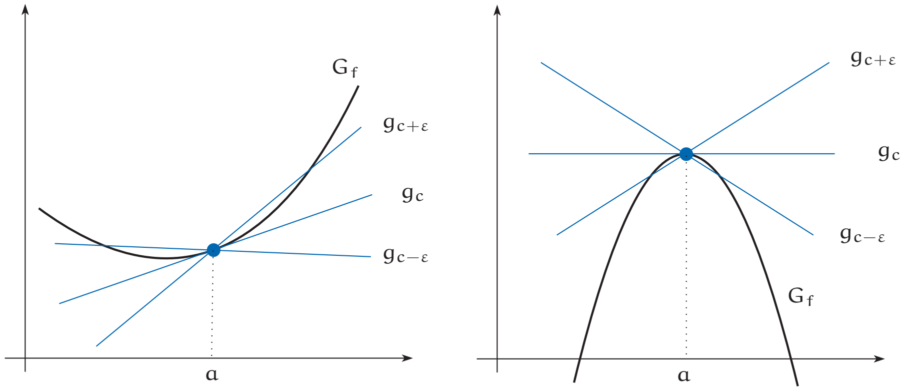


Abb. 2.5: Geraden $g_{c+\varepsilon}$ bzw. $g_{c-\varepsilon}$, die durch Links- bzw. Rechtsdrehung der Tangente g_c entstehen, und ihre Lage zum Graphen G_f in der Nähe von a. Die Lageverhältnisse hängen nicht davon ab, ob die Funktion in einer Umgebung von a monoton ist (linkes Bild) oder ob sie in a ihr Monotonieverhalten ändert (rechtes Bild).

b) Die Umkehrung. Nun sei angenommen, dass die Gerade g_c die in (a) formulierte Lage-Bedingung $(*)$ erfüllt. Wir behaupten, dass f dann in a differenzierbar ist und dass $f'(a) = c$ gilt.

Beweis: Wir definieren die Funktion r durch die Gleichung $f(x) = f(a) + c(x - a) + r(x)(x - a)$ und haben zu zeigen, dass r für $x \to 0$ gegen 0 geht. Nach Voraussetzung $(*)$ gibt es für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Umgebung von a, auf der für $x > a$ gilt

$$(\varepsilon - r(x))(x - a) = g_{c+\varepsilon}(x) - f(x) > 0\,.$$

Dies impliziert $r(x) < \varepsilon$. Durch Betrachtung von $g_{c-\varepsilon}$ erhält man analog die Ungleichung $r(x) > -\varepsilon$, also insgesamt

$$|r(x)| < \varepsilon\,.$$

Diese für $x > a$ gezeigte Ungleichung lässt sich in gleicher Weise auch für $x < a$ zeigen. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die zu zeigende Behauptung über r.

Beachten Sie: Die hier erarbeitete, in $(*)$ formulierte Charakterisierung kommt zwar ohne explizite Verwendung des Grenzwertbegriffs aus, jedoch ist dieser in der Formulierung »Für jedes $\varepsilon >$ gibt es eine Umgebung ...« dennoch implizit enthalten. Trotz dieser Einschränkung kann die hier besprochene Charakterisierung nützlich sein, um die geometrische Vorstellung vom Tangentenbegriff zu vertiefen.

Zum Weiterarbeiten

- **Vorstellungen zur Lage von Tangenten.** Wir betrachten eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und einen inneren Punkt $a \in I$. Mit t_a bezeichnen wir die Tangente an G_f in a. Untersuchen Sie, ob die folgende geometrische Vorstellung richtig ist:

  > Der Graph G_f liegt lokal (d. h. in einer Umgebung des Punkts $(a, f(a))$) vollständig unterhalb oder vollständig oberhalb von t_a. (Dabei sind *unterhalb* und *oberhalb* im Sinne einer $\leqslant$- bzw. $\geqslant$-Beziehung gemeint.)

  Untersuchen Sie auch, ob die Vorstellung in umgekehrter Richtung zutreffend ist: Wenn eine durch $(a, f(a))$ gehende Gerade die angegebene Eigenschaft hat, ist sie dann die Tangente t_a?

2.5 Differenzierbarkeit von abschnittsweise definierten Funktionen

Was sollten Sie schon kennen?

den Differenzierbarkeitsbegriff, den Mittelwertsatz und die Regel von de l'Hospital

Was lernen Sie hier?

Sie lernen zwei Strategien kennen, um die Differenzierbarkeit von abschnittsweise definierten Funktionen nachzuweisen, und Sie vergleichen deren Reichweite.

► Aufgabe

Wir betrachten hier Aufgabenstellungen von folgender Art:

»Überprüfen Sie, ob die durch

$$x \mapsto \begin{cases} \sin x, & \text{falls } x < 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ x^2 + x, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.«

Anstelle der Sinusfunktion und der Funktion $x \mapsto x^2 + x$ könnten hier andere differenzierbare Funktionen stehen, und anstelle des Nullpunkts könnte eine andere Stelle als Verbindungspunkt der beiden Teilintervalle gegeben sein.

Jemand schlägt Ihnen zur Lösung zwei alternative Strategien vor:

(A) »Die Differenzierbarkeit von f auf der Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ liegt auf der Hand, da sowohl die Sinusfunktion als auch die Funktion $x \mapsto x^2 + x$ auf den angegebenen Teilintervallen differenzierbar sind. Um die Differenzierbarkeit im Nullpunkt zu überprüfen, gehe ich aus von der Definition der Ableitung und betrachte zu beliebigem $x \neq 0$ den Differenzenquotienten von f zu x und 0,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} .$$

Je nachdem, ob dieser für $x \to 0$ konvergiert oder nicht, ist f im Nullpunkt differenzierbar oder nicht.«

(B) »Die Funktion f ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sicherlich differenzierbar, ich kann dort also die Ableitungsfunktion f' bilden. Wenn ich nun zeigen kann, dass f im Nullpunkt stetig ist und der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x)$$

existiert, dann ist f auch im Nullpunkt differenzierbar und $f'(0)$ stimmt mit dem gefundenen Grenzwert überein.«

Nun zu Ihrem Arbeitsauftrag:

a) Lösen Sie die Aufgabe mit Strategie (A).

b) Lösen Sie die Aufgabe mit Strategie (B), unter der Annahme, dass diese Vorgehensweise korrekt ist.

c) In Strategie (B) wird die Differenzierbarkeit von f im Nullpunkt nicht direkt bewiesen, sondern aus gewissen Grenzwertaussagen gefolgert. Formulieren Sie einen Satz, der diese Schlussweise sichert, und beweisen Sie ihn.
Tipp: Für den Beweis des Satzes kann Ihnen der Mittelwertsatz von Nutzen sein.

d) An welcher Stelle geht bei Ihrem Beweis die Stetigkeit von f ein? Geben Sie ein Beispiel, das zeigt, dass Strategie (B) ohne die Stetigkeitsaussage für f falsch ist.

e) Erklären Sie, warum in folgendem Beispiel die Differenzierbarkeit zwar mit Strategie (A), aber nicht mit Strategie (B) gezeigt werden kann:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

f) Geben Sie einen alternativen Beweis Ihres in Teil (c) gezeigten Satzes, der anstelle des Mittelwertsatzes die Regel von de l'Hospital benutzt.

g) Überlegen Sie, ob im vorigen Aufgabenteil der Beweis durch die Verwendung der Regel von de l'Hospital vereinfacht wurde, und zwar einerseits
- hinsichtlich der Beweisführung und andererseits
- hinsichtlich der für die eingesetzten Argumentationsmittel notwendigen Vorarbeiten im Theorieaufbau.

* * *

▶ Kommentierter Lösungsvorschlag

a) Lösung mit Strategie (A). Der fragliche Differenzenquotient ist für $x < 0$ gleich

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}$$

und konvergiert daher für $x \nearrow 0$ gegen 1. Für $x > 0$ ist er gleich

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(x^2 + x) - 0}{x - 0} = x + 1$$

und konvergiert daher für $x \searrow 0$ ebenfalls gegen 1. Damit ist gezeigt, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

gilt und somit f in 0 differenzierbar ist.

b) Lösung mit Strategie (B). In Punkten $x \neq 0$ ist f differenzierbar mit

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{falls } x < 0, \\ 2x + 1, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Da $\cos x \to 1$ und $2x + 1 \to 1$ für $x \nearrow 0$ bzw. $x \searrow 0$, ist damit gezeigt, dass gilt

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = 1$$

und damit $f'(0) = 1$.

c) Absicherung von Strategie (B). Wir behaupten, dass folgender Satz gilt:

$(*)$ *Es sei f in einer Umgebung des Nullpunkts stetig und in einer punktierten Umgebung des Nullpunkts differenzierbar. Falls der Grenzwert*

$$b := \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x)$$

existiert, dann ist f auch im Nullpunkt differenzierbar mit $f'(0) = b$.

Zum *Beweis* betrachten wir für $x \neq 0$ den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Der Mittelwertsatz besagt, dass es einen Punkt ξ zwischen x und 0 gibt, so dass der obige Differenzenquotient gleich $f'(\xi)$ ist. Für $x \to 0$ geht auch $\xi \to 0$ und daher nach Voraussetzung $f'(\xi) \to b$. Insgesamt sehen wir also, dass für $x \to 0$ gilt

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) \to b\,,$$

und dies zeigt, dass f in 0 differenzierbar ist mit $f'(0) = b$.

d) Wo geht die Stetigkeit ein? Die Stetigkeit von f im Nullpunkt wird bei der Anwendung des Mittelwertsatzes benutzt: Dort wird als Voraussetzung die Stetigkeit am Rand des betrachteten Intervalls benötigt.

Ohne die Stetigkeitsvoraussetzung wird Behauptung $(*)$ falsch: Dies sieht man bereits an einfachen Beispielen wie

$$x \mapsto \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

e) Ein Beispiel. Mit Strategie (A) kann man leicht nachweisen, dass f differenzierbar ist. Mit Strategie (B) gelingt dies nicht: Die Ableitung von f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist durch

$$f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$$

gegeben. Ihr Grenzwert für $x \to 0$ existiert aber nicht! Man kann daher nicht folgern, dass f im Nullpunkt differenzierbar ist. Beachten Sie:

> Die Funktion f ist im Nullpunkt durchaus differenzierbar – dies lässt sich nur eben nicht mit Strategie (B) zeigen. Diese stellt ein *hinreichendes*, aber nicht *notwendiges* Kriterium für Differenzierbarkeit bereit.

Bemerkung: In Strategie (B) wird nicht nur auf die Differenzierbarkeit von f geschlossen, sondern sogar auf die Stetigkeit der Ableitung (im Nullpunkt). Strategie (B) versagt daher immer dann, wenn die betrachtete Funktion f zwar differenzierbar, aber nicht *stetig differenzierbar* ist (d. h. wenn ihre Ableitung nicht stetig ist). So wurde das obige Beispiel gerade gewählt: Es ist ein Standardbeispiel einer differenzierbaren, nicht stetig differenzierbaren Funktion (siehe Aufgabe 5.12).

f) Alternative mit der Regel von l'Hospital. Wir geben einen alternativen *Beweis* für den Satz $(*)$ aus Teil (c): Dazu betrachten wir für $x \neq 0$ den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\,. \tag{$**$}$$

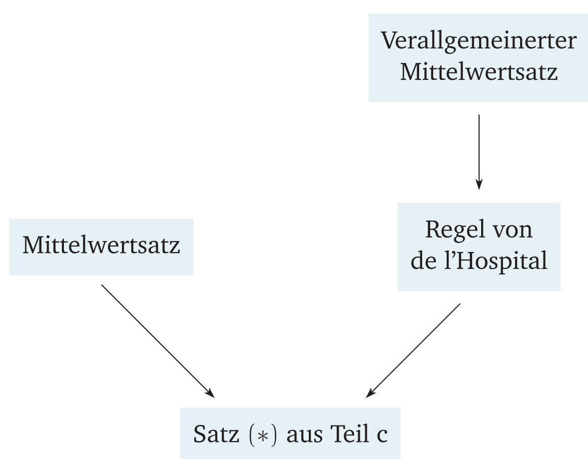
Ist f in 0 stetig, so gehen dessen Zähler und Nenner für $x \to 0$ gegen 0. Da nach Voraussetzung der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f'(x)}{1} \tag{$***$}$$

existiert, so existiert nach der Regel von de l'Hospital auch der Grenzwert von $(**)$ für $x \to 0$ und beide sind gleich. Also ist f in 0 differenzierbar und $f'(0)$ ist gleich dem Grenzwert in $(***)$.

g) Eine Vereinfachung? In der Beweisführung kann man leichte Vorteile bei Verwendung der Regel von de l'Hospital sehen, da man die von x abhängige Zwischenstelle ξ beim Grenzübergang nicht mitverfolgen muss. (In diesem Punkt kann man selbstverständlich geteilter Meinung sein.)

Hinsichtlich des Theorieaufbaus erfordert die Regel von de l'Hospital mehr Vorarbeit als der Mittelwertsatz. Geht man beispielsweise beim Beweis der Regel von de l'Hospital vor wie in [H1, Abschn. 50], dann wird hierfür der verallgemeinerte Mittelwertsatz [H1, 49.9] vorab benötigt – der folgende *Argumentationsgraph* drückt dies aus:



Zum Weiterarbeiten

- **Ein realistischeres Beispiel.** Das eingangs der Aufgabe angegebene Beispiel ist so einfach gehalten, dass es eher eine »Laborsituation« darstellt. Arbeiten Sie daher zur Übung auch mit der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & \text{falls } x < 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0, \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

- **Abschreckend?** Die folgende Problemstellung wird in [A, Abschn. 10] zu Recht als Beispiel für eine Situation genannt, in der sich Anfängerinnen und Anfänger aufgrund der äußeren Form der Darstellung abgeschreckt fühlen können:

  »Untersuchen Sie die Funktion $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x^2), & \text{falls } -1 < x < 0 \\ \sin(x^5)\sqrt{1 - x^2}, & \text{falls } 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

  auf Differenzierbarkeit.«

  Da Sie sich jedoch in der vorliegenden Aufgabe wirksame Strategien zu solchen Aufgabenstellungen erarbeitet haben, bin ich sicher, dass Ihnen die Lösung nicht mehr schwerfällt.

- **Weitere Beispiele für Strategie (A)?** Versuchen Sie, über das in (e) gegebene Beispiel hinaus weitere Aufgaben zu konstruieren, die mit Strategie (A) gelöst werden können, bei denen jedoch Strategie (B) nicht zum Erfolg führt. Wo liegt die Schwierigkeit bei der Herstellung solcher Aufgaben?

- **Funktionen glatt verbinden.** Die beiden konstanten Funktionen

$$f :]-\infty, -1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto -1$$
$$g : [1, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 1$$

  sollen durch eine Funktion $h :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ so verbunden werden, dass insgesamt eine differenzierbare Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

  entsteht. Stellen Sie eine solche Verbindung mittels einer kubischen Polynomfunktion $h : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ her – und zwar so, dass F möglichst oft differenzierbar wird.
  Ausblick: Man kann mit geeigneten (komplizierteren) Verbindungsfunktionen sogar erreichen, dass F unendlich oft differenzierbar wird.

2.6 Differenzierbarkeit der Sinusfunktion

Was sollten Sie schon kennen?

- die Sinusfunktion
- den Ableitungsbegriff
- das Arbeiten mit Grenzwerten

Was lernen Sie hier?

- Sie lernen einen Weg kennen, auf dem die Differenzierbarkeit der Sinusfunktion mit Mitteln der Schulmathematik gezeigt werden kann – als Alternative zu einem Zugang, der auf Potenzreihenüberlegungen basiert.
- Sie erleben, dass die Wahl eines Zugangs weitreichende Konsequenzen für den Theorieaufbau haben kann, und Sie lernen, dies mit Hilfe eines Argumentationsgraphen zu veranschaulichen.

▶ Aufgabe

In dieser Aufgabe geht es um den folgenden Satz:

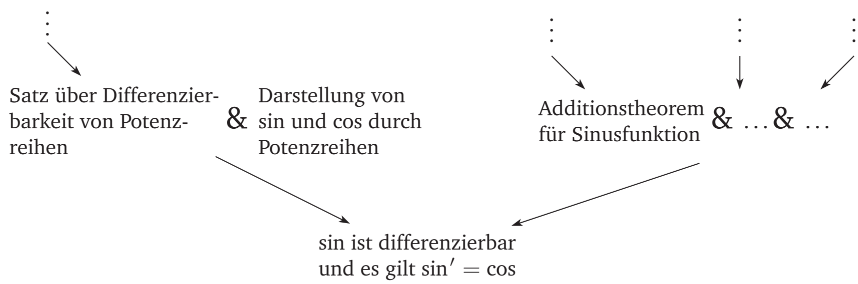
> *Die Sinusfunktion* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist differenzierbar und ihre Ableitung ist die Kosinusfunktion* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Eine Möglichkeit, diesen Satz im Rahmen einer Analysis-Vorlesung zu beweisen, besteht darin, die Darstellung der Sinus- und der Kosinusfunktion durch Potenzreihen zu verwenden und auf Grundlage einschlägiger Sätze mit gliedweiser Differentiation zu argumentieren.

a) Eine alternative Argumentation. Wir betrachten nun eine alternative Argumentation, die in mehreren Varianten auch in Unterrichtswerken der 11. Jahrgangsstufe genutzt wird. Gehen Sie dazu für gegebene $x \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$ vom Differenzenquotienten der Sinusfunktion zu den Stellen x und $x + h$ aus. Nutzen Sie das Additionstheorem der Sinusfunktion und die Gleichung $1 - \cos h = 2(\sin \frac{h}{2})^2$ für algebraische Umformungen. Verwenden Sie dann die Grenzwertaussage $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$, um zu zeigen, dass der betrachtete Differenzenquotient für $h \to 0$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

b) Benötigte Vorkenntnisse. Die in (a) erarbeitete Argumentation greift auf gewisse Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion zu. Stellen Sie diese Eigenschaften zusammen und überlegen (oder recherchieren) Sie, mit welchen (z. B. geometrischen) Argumentationen man zu diesen gelangen könnte, ohne die Potenzreihendarstellungen von Sinus- und Kosinusfunktion (oder deren Zusammenhang mit der komplexen Exponentialfunktion) zu nutzen.

c) Argumentationsgraph. Erstellen Sie nun einen Begriffs-/Argumentationsgraphen, der sowohl den obigen Zugang als auch den eingangs erwähnten Zugang über Potenzreihen beinhaltet. Das »untere Ende« des Graphen könnte folgendermaßen aussehen:



Zur Erläuterung: Im Argumentationsgraph werden Sätze und Begriffe in ihrer logischen Abhängigkeit voneinander dargestellt. Verschiedene Pfade im Graphen entsprechen dabei verschiedenen möglichen Zugängen zu einem Satz oder Begriff.

* * *

▶ Kommentierter Lösungsvorschlag

a) Eine alternative Argumentation. Um die Differenzierbarkeit der Sinusfunktion an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ zu zeigen und die Ableitung $\sin'(x)$ zu ermitteln, betrachten wir für $h \neq 0$ den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&= \frac{\cos(x)\sin(h)+\sin(x)\cos(h)-\sin(x)}{h} && \text{(Additionstheorem des Sinus)} \\
&= \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}+\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} && \text{(Algebraische Umformung)} \\
&= \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}-\sin(x)\frac{\sin(\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}\,. && (*)
\end{aligned}$$

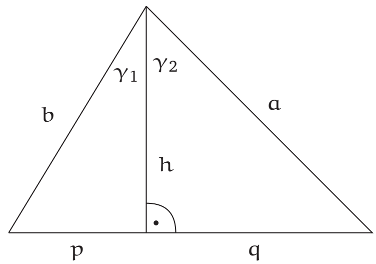


Abb. 2.6: Das Additionstheorem der Sinusfunktion lässt sich mit einer Flächenbetrachtung bei Dreiecken beweisen.

Im letzten Schritt dieser Gleichungskette haben wir die vorgegebene trigonometrische Identität $1 - \cos h = 2(\sin \frac{h}{2})^2$ benutzt. Wir verwenden nun die Grenzwertaussage

$$\frac{\sin(h)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$$

zweimal: Sie zeigt zum einen, dass der erste Summand in $(*)$ gegen $\cos(x)$ konvergiert, und zum anderen, dass der zweite Summand gegen Null geht. Damit folgt

$$\sin'(x) = \cos(x)\,.$$

b) Benötigte Vorkenntnisse. Bei der Argumentation in (a) wurden folgende Aussagen genutzt:

(i) Additionstheorem der Sinusfunktion
(ii) $1 - \cos h = 2(\sin \frac{h}{2})^2$ für alle $h \in \mathbb{R}$
(iii) $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

Wir besprechen nun Möglichkeiten, wie sich diese ohne Einsatz von Potenzreihen (oder Verwendung der komplexen Exponentialfunktion) begründen lassen.

Zu (i): Für den Beweis des Additionstheorems gibt es mehrere Wege, darunter die folgenden:

- über Flächeninhalte von Dreiecken wie in Abb. 2.6
- aus dem Sinussatz wie in [FD]
- aus Überlegungen am Einheitskreis wie in [LS10]

Wir erläutern exemplarisch den erstgenannten Weg, der auf der Flächeninhaltsformel für Dreiecke beruht: Dazu berechnen wir in der durch Abb. 2.6 dargestellten Situation den Flächeninhalt des Gesamtdreiecks zunächst durch Be-

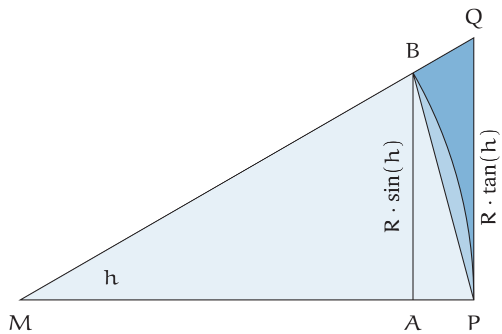


Abb. 2.7: Mit einer geometrischen Flächenüberlegung lässt sich zeigen, dass $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ gilt.

trachtung der beiden Teildreiecke: Das linke Teildreieck hat den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}ph = \frac{1}{2}(b\sin\gamma_1)(a\cos\gamma_2)$$

und das rechte den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}qh = \frac{1}{2}(a\sin\gamma_2)(b\cos\gamma_1)\,.$$

Andererseits können wir den Flächeninhalt des Gesamtdreiecks auch ausgehend von der Seite a berechnen: Die zugehörige Höhe hat die Länge $b\sin(\gamma_1+\gamma_2)$, so dass wir als Flächeninhalt den Wert

$$\frac{1}{2}a(b\sin(\gamma_1+\gamma_2))$$

erhalten. Setzt man nun die Werte gleich, die die beiden Berechnungsweisen ergeben, so erhält man das Additionstheorem. (Die geometrische Argumentation liefert dies zunächst nur für Winkel γ_1 und γ_2 zwischen $0°$ und $90°$, woraus man dann auch den allgemeinen Fall ableiten kann.)

Zu (ii): Diese trigonometrische Gleichung lässt sich aus dem Additionstheorem der Kosinusfunktion (das man ihrerseits aus dem Additionstheorem des Sinusfunktion folgern kann) und der Gleichung $\sin(\frac{h}{2})^2+\cos(\frac{h}{2})^2 = 1$ (die man geometrisch aus dem Satz des Pythagoras folgern kann) erhalten: Es gilt

$$\cos(h) = \cos(\tfrac{h}{2}+\tfrac{h}{2}) = \cos(\tfrac{h}{2})^2 - \sin(\tfrac{h}{2})^2 = 1-2\sin(\tfrac{h}{2})^2\,,$$

woraus man durch Umstellen unmittelbar die Gleichung (ii) erhält.

Zu (iii): Wir beschreiben hier einen elementargeometrischen Zugang, der sich auch in gymnasialen Unterrichtswerken findet (siehe z. B. [LS]). Dazu vergleichen wir für $h > 0$ (da die sin-Funktion ungerade ist, genügt es, diesen Fall

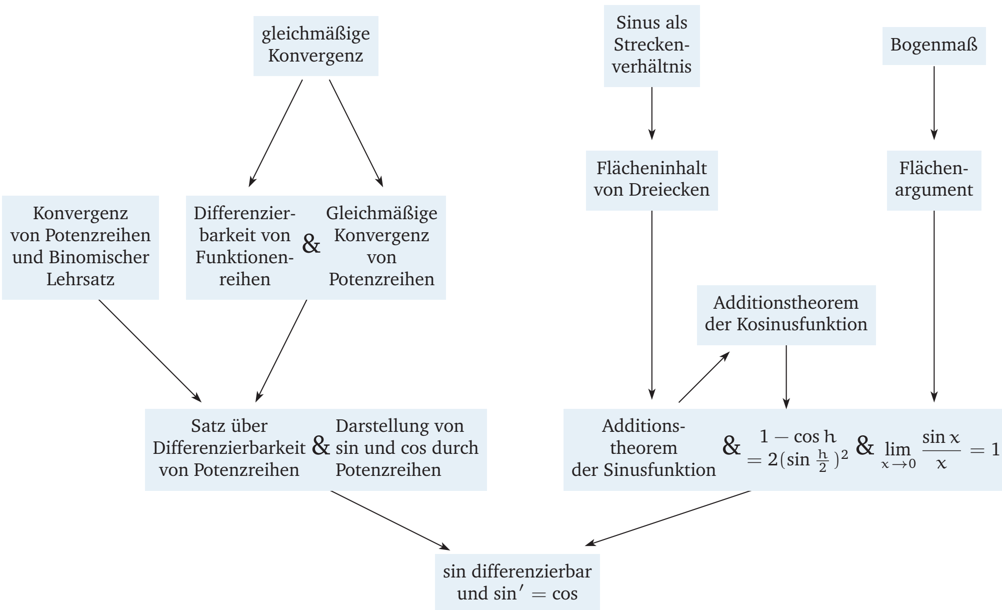


Abb. 2.8: Ein möglicher Argumentationsgraph zu Aufgabenteil (c). Er stellt alternative Argumentationswege dar.

zu betrachten) und $R > 0$ in Abb. 2.7 die Flächeninhalte A_{MPB} und A_{MPQ} der Dreiecke MPB bzw. MPQ mit dem Flächeninhalt $A_{M\widehat{PB}}$ des Kreissektors $M\widehat{PB}$ (der zu einem Kreis vom Radius R gehört): Es gilt

$$A_{MPB} \leqslant A_{M\widehat{PB}} \leqslant A_{MPQ}\,,$$

also

$$\frac{1}{2}R \cdot R\sin(h) \leqslant \frac{1}{2}R \cdot Rh \leqslant \frac{1}{2}R \cdot R\tan(h)\,.$$

Durch Kürzen und Umstellen erhalten wir hieraus die Ungleichungskette

$$1 \geqslant \frac{\sin(h)}{h} \geqslant \cos(h)\,,$$

und daraus folgt die Behauptung.

c) Argumentationsgraph. Das erarbeitete Argumentationsgefüge lässt sich in einem Graphen darstellen, der Übersicht über die logischen Abhängigkeiten und die alternativen Argumentationswege schafft. Abbildung 2.8 stellt einen möglichen Argumentationsgraphen dar – andere Darstellungsweisen sind selbstverständlich denkbar, insbesondere kann man den Graphen nach oben fortsetzen, indem man immer weiter zurückfragt, worauf die jeweiligen Sätze oder Begriffe basieren.

Der linke Teilgraph stellt den Zugang über Potenzreihen dar: Man benötigt die Darstellungen von Sinus und Kosinus durch Potenzreihen sowie den Differenzierbarkeitssatz, der die Zulässigkeit des gliedweisen Ableitens sichert. Dieser kann seinerseits entweder aus allgemeinen Sätzen über die Differentiation von Funktionenfolgen und -reihen gewonnen werden (rechter Ast) oder mit einem direkten Potenzreihenbeweis wie in [J, Abschn. 1.2] bewiesen werden, der letztlich auf der Anwendung des binomischen Lehrsatzes beruht (linker Ast).

Im rechten Teilgraph ist der in dieser Aufgabe verfolgte geometrische Zugang dargestellt: Der in (i) gezeigte Beweis des Additionstheorems über Flächeninhalte von Dreiecken setzt voraus, dass die Sinusfunktion über Streckenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken definiert ist. Die trigonometrische Identität in (ii) kann aus dem Additionstheorem des Kosinus gefolgert werden, welches aus dem des Sinus abgeleitet werden kann. Das in (iii) gezeigte Flächenargument zur Bestimmung des Grenzwerts von $\frac{\sin h}{h}$ beruht wesentlich darauf, dass Winkel als Bogenlängen verstanden werden.

Zum Weiterarbeiten

- **Weitere Alternativen.** Zu der in Aufgabenteil (a) vorgestellten Argumentation gibt es mehrere Varianten. Untersuchen Sie zum Beispiel, in welcher Hinsicht die in [Fo1, §15] durchgeführte und auch im Unterrichtswerk [LS] verwendete Version von der hier dargestellten Version abweicht. Stellen Sie dies im Argumentationsgraphen dar (neue Verzweigung im rechten Teilgraphen).
- **Der Winkelbegriff.** Der Argumentationsgraph aus Aufgabenteil (c) zeigt insbesondere, dass es im rechten Teilgraphen wesentlich ist, Winkelgrößen als Bogenlängen aufzufassen. In der Elementargeometrie werden dagegen Winkel zunächst oft als »Anteile am Vollwinkel 360°« eingeführt. Entwickeln Sie hierzu einen Argumentations- und Begriffsgraphen. Sie können dazu auch die Überlegungen aus Aufgabe 4.4 einbeziehen, die die unterschiedliche Auffassung des Bogenmaßes in Elementargeometrie und Analysis beleuchtet.

http://www.springer.com/978-3-8348-1914-7

Analysis - Arbeitsbuch
Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik – sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten Lösungen
Bauer, Th.
2013, X, 206 S. 25 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-8348-1914-7