Vorwort

■ **Schulmathematik und universitäre Mathematik – zwei getrennte Welten?** Der Eindruck, dass Schulmathematik und universitäre Mathematik in zwei getrennten Welten liegen, kann bei Studienanfängern schnell entstehen – die Unterschiede, die schon in den ersten Wochen des Studiums sichtbar werden, sind in der Tat beträchtlich. Im Gebiet Analysis wird dies sehr deutlich: Beim Vergleich von Oberstufenanalysis und Hochschulanalysis finden sich auf den ersten Blick zwar viele inhaltliche Übereinstimmungen (Differenzieren, Integrieren), jedoch liegen gravierende Unterschiede darin, *wie* diese Inhalte behandelt werden. Die Unterschiede rühren gar nicht etwa daher, dass Schule und Universität sich bewusst gegenseitig voneinander abgrenzen wollen – oder gar daher, dass die Universität es den Studienanfängern absichtlich schwer machen wollte. Vielmehr sind sie eine Folge davon, dass Mathematik an Schule und Universität mit sehr verschiedenen Zielsetzungen betrieben wird. Ein markanter Aspekt, an dem dies deutlich wird, ist der folgende: Für die wissenschaftliche Arbeit mit Mathematik ist es von zentraler Bedeutung, ein konsistentes und lückenlos schlüssiges Gedankengebäude aufzubauen – jeder Schritt in diesem Aufbau soll dabei für alle Beteiligten mit einer vollständigen Begründung sichtbar werden. In der Schulmathematik ist die Lage ganz anders: Zum einen muss die Argumentationstiefe an die jeweilige Alters- und Lernstufe der Schüler angepasst werden, und zum anderen werden in der Schulmathematik andere Ziele mit höherer Priorität verfolgt, zum Beispiel der Einsatz von Mathematik zur Beschreibung von Phänomenen der uns umgebenden Welt. Die Setzung der Prioritäten steht natürlich auch im Zusammenhang mit dem Verhältnis zwischen Allgemeinbildung und fachspezifischer Bildung.

■ **Die Bruchstellen.** Der Übergang von der Schul- zur universitären Mathematik stellt daher für die meisten Studienanfänger eine Bruchstelle dar, deren Überwindung intensive gedankliche Auseinandersetzung und viel Arbeit erfordert. Für Lehramtsstudierende kommt ein weiterer Aspekt hinzu: Sie werden sich nach Abschluss ihres Studiums – dann als Lehrende – erneut der Schulmathematik zuwenden, und bei diesem Schritt kann eine zweite Bruchstelle auftreten. Felix Klein hat dieses Problem bereits 1924 in der Einleitung zu [Kl] formuliert und dabei den Begriff *Doppelte Diskontinuität* geprägt:

> »Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; natürlich vergißt er daher alle diese Sachen rasch und gründlich. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit der Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluss hat.«

Die von Felix Klein beschriebene Gefahr, dass das im Lehramtsstudium erworbene Wissen über Mathematik in der späteren Berufstätigkeit zu wenig nutzbar gemacht wird, ist umso bedauerlicher, als das mathematische Fachwissen als wesentliche Komponente des Professionswissens von Lehrkräften durchaus erkannt und auch empirisch bestätigt ist (siehe etwa [S], sowie [Br+] zur COACTIV-Studie).

In neuester Zeit hat das Bewusstsein um die Bruchstellen stark zugenommen und es wurden verstärkt Aktivitäten unternommen, um sich diesem Problem zu stellen (siehe [Bp+] und [AH]). Nachfolgend wird beschrieben, welchen spezifischen Beitrag das vorliegende Buch leisten möchte.

■ **Was will dieses Buch erreichen?** Trotz der vorhandenen Unterschiede müssen Schul- und universitäre Mathematik keineswegs unverbunden nebeneinanderstehen – es gibt viele Bezüge, die sich nutzbar machen lassen, um Unterschiede zu verstehen und Bruchstellen zu überwinden. Das vorliegende Buch möchte die Studierenden im Gebiet Analysis dabei unterstützen. Es will dazu beitragen, stabile Verknüpfungen zwischen den Vorkenntnissen und Vorerfahrungen aus der Schulmathematik und den neu erarbeiteten Inhalten und Denkweisen der Hochschulmathematik zu bilden. Dies bedeutet einerseits, dass die in der Schulmathematik aufgebauten Vorstellungen genutzt werden, um Begriffsbildungen und Inhalte der Hochschulmathematik besser zu verstehen (Wirkrichtung *Schulmathematik* $\rightarrow$ *universitäre Mathematik*). Umgekehrt öffnet die Hochschulmathematik eine Perspektive, die dabei hilft, die Schulmathematik tiefer zu durchdringen und sie auch dort zu erklären, wo auf früherer Stufe Plausibilitätsbetrachtungen genügen müssen (Wirkrichtung *universitäre Mathematik* $\rightarrow$ *Schulmathematik*). Für diesen höheren Standpunkt und das vertiefte Durchdringen benötigt die Hochschulmathematik Arbeitsweisen, die in der Schulmathematik in der benötigten Intensität nicht gelernt werden können. Deshalb gehört zu einer stabilen Verknüpfung der Ebenen auch das Bewusstsein für die methodischen Unterschiede.

Im Laufe der Arbeit des Autors an dem Schnittstellenprojekt, aus dem dieser Text entstanden ist, haben sich zur Bearbeitung der beiden Wirkrichtungen

$$\begin{aligned} &\textit{Schulmathematik} \longrightarrow \textit{universitäre Mathematik} \\ &\textit{universitäre Mathematik} \longrightarrow \textit{Schulmathematik} \end{aligned}$$

vier Teilziele herausgebildet, in denen Schulmathematik und Hochschulmathematik als *aufeinander bezogen* und *füreinander nützlich* gesehen werden sollen (siehe [Ba] und auch [BP]):

A. Grundvorstellungen aufbauen und festigen
B. Unterschiedliche Zugänge verstehen und analysieren
C. Mit hochschulmathematischen Werkzeugen Fragestellungen der Schulmathematik vertieft verstehen
D. Mathematische Arbeitsweisen üben und reflektieren

Zu jedem dieser Teilziele enthält dieses Buch Aufgaben mit kommentierten Lösungsvorschlägen. Sie finden ab Seite 1 eine Erläuterung der Teilziele und eine Übersicht der zugehörigen Aufgaben.

■ **Zur Konzeption des Buchs.** Dieses Buch ist als *Arbeitsbuch* konzipiert, das neben einem Lehrbuch zur Analysis genutzt werden kann. Von einem Lehrbuch unterscheidet es sich insbesondere durch zwei Charakteristika:

- Nicht »alle« Lerninhalte der Analysis sind hier abgehandelt – vielmehr wurden zu jedem der großen Themenbereiche aus der Anfangsausbildung in der Analysis (Folgen, Grenzwerte, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit) *exemplarische* Fragestellungen gewählt, an denen sich entscheidende Grundvorstellungen aufbauen und wesentliche mathematische Arbeitsweisen üben lassen.

- Die behandelten Themen werden bewusst in Form von *Aufgaben mit Lösungsvorschlägen* angeboten. Eine seit Langem bekannte Erkenntnis über das Lernen von Mathematik wurde in den letzten Jahren an Schule und Universität mit neuer Intensität in den Vordergrund gestellt: Der Erwerb mathematischen Wissens vollzieht sich nicht einfach durch eine Art von »Übertragung« vom Lehrenden auf den Lernenden, sondern ist ein höchst aktiver Prozess, bei dem die Eigentätigkeit des Lernenden eine entscheidende Rolle spielt. Die Aufgaben in diesem Buch sollen diesen Prozess unterstützen. Sie sind in keiner Weise als *Testaufgaben* gemeint, deren richtige Beantwortung man mittels der Lösungsvorschläge überprüfen solle, sondern es sind ausgesprochene *Lernaufgaben*: Die eigene Arbeit an den

Aufgaben und – erst nach intensiven eigenen Überlegungen – die Auseinandersetzung mit den kommentierten Lösungsvorschlägen sind die zentralen Lernaktivitäten, auf die es hier ankommt.

Viele der Aufgaben aus diesem Buch sind praktisch erprobt: Sie wurden in Lehrveranstaltungen zur Analysis im Rahmen der Übungen als spezielle *Schnittstellenaufgaben* eingesetzt, um die Studierenden auf diese Weise anzuregen, Bezüge zur Schulmathematik gezielt zu bearbeiten.

Das Buch ist wie folgt organisiert: In den Kapiteln 1 bis 4 sind die Aufgaben nach inhaltlichen Kategorien geordnet, die auch in Vorlesungen und Lehrbüchern zur Analysis verwendet werden. Das abschließende Kapitel 5 betont übergreifende Aspekte – es geht darin um die Reflexion von mathematischen Arbeitsweisen: Begriffe bilden, Definitionen aussprechen, Beispiele konstruieren, Vermutungen finden, Begründen und Beweisen. Hinweise zum praktischen Umgang mit diesem Buch finden Sie auf Seite 4 (für Studierende) und auf Seite 6 (für Lehrende).

■ **Danksagungen.** Ich danke Frau Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker für die Ermunterung zum Schreiben dieses Buchs und für wertvolle Anregungen.

Mein besonderer Dank gilt meinem Kollegen Ulrich Partheil: Ihm danke ich herzlich für die mehrjährige Zusammenarbeit in dem Schnittstellenprojekt zur Analysis (siehe [BP] und [Ba]), aus dem dieser Text hervorgegangen ist. Viele der Aufgaben sind aus den immer angenehmen und produktiven Diskussionen mit ihm hervorgegangen oder wurden durch sie ganz entscheidend verbessert.

Mein Kollege Prof. Dr. Wolfgang Gromes hat das Manuskript vorab kritisch gelesen und mich mit vielen wertvollen Kommentaren und mit zahlreichen Anregungen zu Ergänzungen sehr unterstützt.

Den Mitarbeitern und Tutoren danke ich für ihr großes Engagement bei der Durchführung der Schnittstellenübungen, die auf Grundlage von Schnittstellenaufgaben angeboten wurden. Die Tutoren haben mir konstruktive Rückmeldungen zu den Aufgaben gegeben, die ich bei der Vorbereitung des Buchtexts berücksichtigen konnte. In chronologischer Reihenfolge nenne ich: Christina Böhr, Dr. Michael Funke, David Schmitz, Hendrik Baumbach, Malvin Gattinger, Thorsten Herrig und Michael Schmidt.

Ich danke Frau Schmickler-Hirzebruch von Springer Spektrum für die ausgesprochen angenehme Zusammenarbeit.

Marburg, Mai 2012 *Thomas Bauer*

http://www.springer.com/978-3-8348-1914-7

Analysis - Arbeitsbuch
Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik –
sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten
Lösungen
Bauer, Th.
2013, X, 206 S. 25 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-8348-1914-7