

Um die Funktionsweise elektrischer Antriebssysteme zu verstehen, sind spezielle Kenntnisse aus den Bereichen der Mechanik und Elektrotechnik notwendig. In diesem Abschnitt werden die notwendigen Grundlagen in konzentrierter Form zusammengestellt und für die elektrische Antriebstechnik aufbereitet. Dabei wird vorausgesetzt, dass die grundlegenden physikalischen Größen und Zusammenhänge bereits bekannt sind. Eine grundlegende Einführung in die Mechanik ist beispielsweise in [5] zu finden. Die Grundlagen der Elektrotechnik sind z. B. in [4] ausgeführt.

---

## 2.1 Mechanische Grundlagen

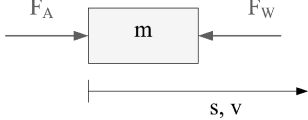
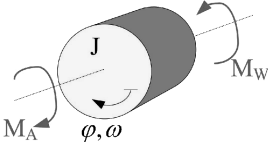
Eine elektrische Maschine tauscht mechanische Energie mit einer angekoppelten Arbeitsmaschine aus. Damit die Arbeitsmaschine die Anforderungen des Arbeitsprozesses erfüllt, müssen vorgegebene mechanische Größen, wie z. B. Drehmoment- und Drehzahlwerte realisiert werden. Die möglichen Arbeitspunkte in einem Antriebssystem können bei rotierenden Antrieben übersichtlich in der Drehzahl-Drehmoment-Ebene oder bei linearen Antrieben in der Kraft-Geschwindigkeits-Ebene entsprechend Abb. 2.1 dargestellt werden.

Bei motorischem Betrieb gibt die elektrische Maschine mechanische Energie an die Arbeitsmaschine ab, dann befindet sich der Arbeitspunkt im ersten oder im dritten Betriebsquadranten. Bei umgekehrtem Energiefluss arbeitet die elektrische Maschine als Generator, dabei liegen die Arbeitspunkte im zweiten und vierten Quadranten. Ein Antriebssystem wird nach der Anzahl der beherrschten Betriebsquadranten bezeichnet. Für Lüfter- oder Pumpenantriebe ist ein Ein-Quadrant Antrieb ausreichend, da diese Arbeitsmaschinen nur angetrieben werden müssen. Traktionsantriebe, die Fahrzeuge in eine Richtung beschleunigen und abbremesen, müssen zwei Betriebsquadranten beherrschen. Sollen Fahrzeuge vorwärts und rückwärts fahren sowie beim Bremsen die kinetische Energie der bewegten

**Abb. 2.1** Betriebsquadranten eines Antriebs

$F_A, M_A \uparrow$	
Generatorischer Betrieb	Motorischer Betrieb
II	I
III	IV
Motorischer Betrieb	Generatorischer Betrieb
$v, \omega$	

**Tab. 2.1** Größen bei Bewegungsvorgängen

	Translation	Rotation
		
Bewegungsgleichung	$F_B = F_A - F_W = ma$ mit $a = \dot{v} = \ddot{s}$	$M_B = M_A - M_W = J\alpha$ mit $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$
Antriebsleistung	$P_A = F_A \cdot v$	$P_A = M_A \cdot \omega$
Kinetische Energie	$W_T = \frac{1}{2}mv^2$	$W_R = \frac{1}{2}J\omega^2$

Massen zurückgewinnen, sind Antriebe erforderlich, die in allen vier Quadranten arbeiten können. Die Rückgewinnung der Bremsenergie wird als Rekuperation bezeichnet.

Häufig erfordern Arbeitsprozesse einen definierten zeitlichen Verlauf der mechanischen Größen. Mit Kenntnis der geforderten mechanischen Größen an der Arbeitsmaschine, können die Anforderungen an die mechanischen Übertragungselemente sowie an die elektrische Maschine bestimmt werden. Um die Geschwindigkeit eines Körpers zu ändern, sind Beschleunigungskräfte notwendig. Mithilfe der Gleichung  $\vec{F}_B = m \cdot \vec{a}$  können Bewegungsvorgänge analysiert und die zur Auslegung notwendigen Antriebskräfte berechnet werden. Für die Spezialfälle der translatorischen und der rotatorischen Bewegung kann die Analyse von Bewegungsvorgängen mit skalaren Größen erfolgen. Die dazu notwendigen Gleichungen sind in der Tab. 2.1 zusammengestellt.

### 2.1.1 Energieeffiziente Bewegungssteuerung

Bewegungsabläufe können mit geregelten elektrischen Maschinen nach unterschiedlichen Kriterien optimiert werden. Dabei müssen aber die systemeigenen Begrenzungen, wie Maximaldrehzahl, Strombegrenzung und die Begrenzung des Rucks berücksichtigt werden.

Periodische Bewegungsabläufe können über das Verhältnis der in der Periodendauer  $T_S$  abgegebenen Energie  $W_{ab}$  zur zugeführten Energie  $W_{zu}$  charakterisiert werden. Diese

Kenngröße wird Energieeffizienz  $\epsilon$  genannt.

$$\epsilon = \frac{W_{ab}}{W_{zu}} = \frac{\int_{T_s} p_{ab}(t) dt}{\int_{T_s} p_{zu}(t) dt} \quad (2.1)$$

Im Gegensatz zum Wirkungsgrad  $\eta = P_{ab}/P_{zu}$ , der einen stationären Arbeitspunkt beschreibt, kennzeichnet die Energieeffizienz  $\epsilon$  die energetische Gesamtbilanz eines periodischen Bewegungsablaufes. Die Energieeffizienz ist dabei von den unterschiedlichen Arbeitspunkten, die in einem Zyklus angefahren werden, abhängig.

Anhand einer transversalen Bewegung soll der Einfluss unterschiedlicher Bewegungsprofile auf die Energieeffizienz dargestellt werden.

Ein so genannter zeitoptimaler Verlauf für eine transversale Bewegung ist in Abb. 2.2a dargestellt. Hier soll bei begrenzter Beschleunigung  $a_0$  innerhalb der Zeit  $T_s$  die neue Position erreicht werden. In der ersten Hälfte wird mit  $a_0$  beschleunigt und in der zweiten Hälfte mit  $-a_0$  verzögert. Dadurch verläuft die Geschwindigkeit  $v(t)$  dreiecksförmig. Entsprechend ist die Position  $s(t)$  eine Funktion von  $t^2$ . Bei elektrischen Maschinen sind häufig die ohmschen Verluste ( $p = i^2 \cdot R$ ) dominierend. Weiterhin ist der Strom in erster Näherung proportional zu der vom Motor entwickelten Kraft ( $F \sim i$ ) bzw. zum Drehmoment ( $M \sim i$ ). Damit kann die Verlustenergie  $W_V$ , die bei einem Positionierungsvorgang anfällt, berechnet werden:

$$W_V = k \int_0^{T_s} i^2 dt \sim \int_0^{T_s} F(t)^2 dt \sim \int_0^{T_s} a(t)^2 dt \quad (2.2)$$

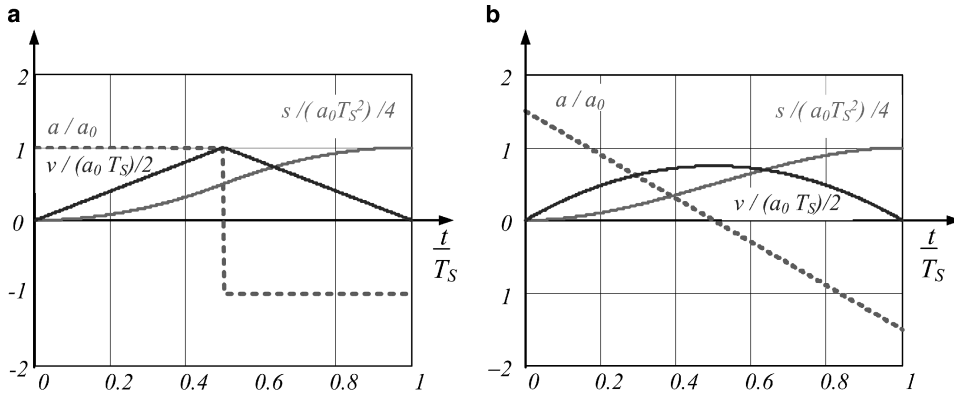
Bei einfachen translatorischen Beschleunigungsvorgängen ohne Gegenkraft ist die Motor­kraft – entsprechend der Bewegungsgleichung – proportional zur Beschleunigung. Somit sind die Verluste des Motors für einen Positionierungsvorgang proportional zum Effektivwert der Beschleunigung.

$$W_{Va} \sim a_{eff}^2 = a_0^2 \quad (2.3)$$

Bei einem energieeffizienten Bewegungsablauf werden die Größen entsprechenden Abb. 2.2b geführt. Um bei diesem Bewegungsvorgang die gleiche Positionsänderung in der Zeit  $T_s$  wie bei der zeitoptimalen Steuerung zu erreichen, muss die Anfangsbeschleunigung um den Faktor 1,5 vergrößert werden. Die Verluste der energieoptimierten Bewegung bezogen auf die Verluste bei der zeitoptimierten Bewegung ergeben:

$$\frac{W_{Vb}}{W_{Va}} \sim \frac{a_{effb}^2}{a_{effa}^2} = \frac{(1.5 a_0 / \sqrt{3})^2}{a_0^2} = 0,75 \quad (2.4)$$

Die Verlustberechnung zeigt den Einfluss des Bewegungsprofils auf die Verluste im Antrieb. Die Berechnung in diesem Beispiel zeigt eine Verlusteinsparung von 25 % auf. Um den Bewegungsvorgang energieoptimal gestalten zu können, muss allerdings der Spitzenwert der Beschleunigung und damit der Spitzenstrom im Motor angehoben werden.



**Abb. 2.2** Zeitverläufe bei **a** zeitoptimaler und **b** energieeffizienter Bewegungssteuerung

## 2.1.2 Getriebe im Antriebsstrang

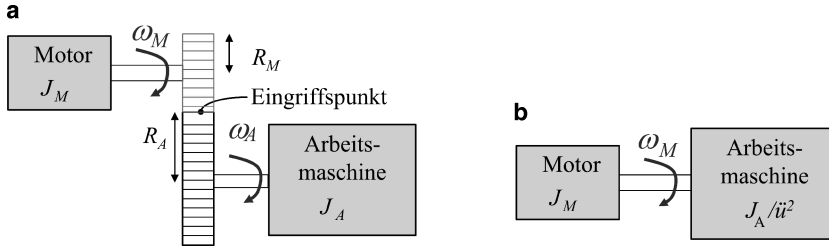
Drehfeldmaschinen besitzen bei Netzspeisung mit 50 Hz je nach Polpaarzahl Drehzahlen zwischen  $750 \text{ min}^{-1}$  und  $3000 \text{ min}^{-1}$ . Für viele Antriebsaufgaben werden aber wesentlich geringere Drehzahlen im Bereich von  $15 \text{ min}^{-1}$  bis  $400 \text{ min}^{-1}$  benötigt. In diesen Anwendungen können schnelllaufende Motoren mit nachgeschalteten Getrieben zur Drehzahlanpassung eingesetzt werden. Vorteilhaft können auch Getriebemotoren verwendet werden, bei denen Motor und Getriebe eine kompakte Baueinheit bilden. Je nach mechanischen Einbaubedingungen und Einsatzgebiet werden unterschiedliche Getriebearten eingesetzt. Grundsätzlich wird zwischen Stirnrad-, Kegelrad- und Schneckengetriebe unterschieden. Im Getriebe entstehen Verluste durch die Verzahnung, die Lagerreibung und durch Planschverluste. Beispielsweise kann für ein einstufiges Stirnradgetriebe ein Wirkungsgrad von ca. 98 % angesetzt werden. Mit Schneckengetrieben können große Übersetzungen von maximal 50 : 1 erreicht werden, diese besitzen aber relativ hohe Verluste.

Die Kraftübertragung zwischen Motor und Arbeitsmaschine kann auch über Riemen oder Ketten erfolgen. Hierbei ist der Wirkungsgrad der Kraftübertragung besonders stark vom Wartungszustand abhängig.

Das Prinzip einer Drehzahlanpassung von Motor und Arbeitsmaschine über ein Getriebe ist in Abb. 2.3a dargestellt. Das Drehmoment des Motors wird über zwei Zahnräder an die Arbeitsmaschine übertragen. Am Eingriffspunkt erfolgt die Kraftübertragung zwischen den beiden Zahnrädern. Dabei muss die Umfangsgeschwindigkeit  $v$  beider Zahnräder gleich groß sein.

$$v = \omega_M \cdot R_M = \omega_A \cdot R_A \Rightarrow \ddot{u} = \frac{\omega_M}{\omega_A} = \frac{R_A}{R_M} \quad (2.5)$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Motors  $\omega_M$  und die Winkelgeschwindigkeit der Arbeitsmaschine  $\omega_A$  stehen in einem festen Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$ , welches über die Radian



**Abb. 2.3** Getriebe im Antriebsstrang **a** mit verteilten Massenträgheitsmomenten **b** mit umgerechnetem Massenträgheitsmoment

( $R_A$ ,  $R_M$ ) der Zahnräder bestimmt ist. Am Eingriffspunkt der Zahnräder müssen sich Kraft und Gegenkraft gegenseitig aufheben. Werden die Kräfte durch die zugehörigen Drehmomente und durch entsprechende Radien beschrieben, kann das Verhältnis der Drehmomente angegeben werden:

$$\frac{M_M}{R_M} = \frac{M_A}{R_A} \Rightarrow \frac{1}{\ddot{u}} = \frac{M_M}{M_A} = \frac{R_M}{R_A} \quad (2.6)$$

Auch hier wird das Verhältnis der Drehmomente über das Übersetzungsverhältnis des Getriebes vorgegeben. Zum gleichen Ergebnis führt die Anwendung des Energieerhaltungssatzes. Da hier das Getriebe als verlustfrei betrachtet wird, ist die zugeführte Motorleistung  $P_M = \omega_M \cdot M_M$  gleich der von der Arbeitsmaschine aufgenommenen Leistung  $P_A = \omega_A \cdot M_A$ . Wird dabei noch das Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u} = \omega_M / \omega_A$  berücksichtigt, bestätigt sich Gl. 2.6.

Die Trägheitsmomente der Antriebs Elemente, die mit unterschiedlichen Drehzahlen rotieren, können auf eine Welle des Antriebsstranges umgerechnet werden. Greift ein Beschleunigungsmoment an der Arbeitsmaschine an, so führt dies zu einer Drehzahländerung:

$$M_B = J_A \frac{d\omega_A}{dt} \quad (2.7)$$

Werden Drehzahl und Drehmoment entsprechend den Gleichungen 2.5 und 2.6 auf die Motorwelle umgerechnet, so ergibt sich die Bewegungsgleichung mit motorseitigen Größen:

$$M_B^* = \frac{1}{\ddot{u}} M_B = \frac{1}{\ddot{u}} J_A \frac{d\omega_A}{dt} = \frac{1}{\ddot{u}} J_A \frac{d\omega_M / \ddot{u}}{dt} = \frac{1}{\ddot{u}^2} J_A \frac{d\omega_M}{dt} \quad (2.8)$$

Wie diese Gleichung zeigt, wirkt das Massenträgheitsmoment  $J_A$  der Arbeitsmaschine auf der Motorseite entsprechend  $J_A / \ddot{u}^2$ . Damit kann für den gesamten Antriebsstrang eine einfache Ersatzanordnung entsprechend Abb. 2.3b angegeben werden.

Um bei Antrieben kurze Positionierzeiten zu erreichen, sind hohe Beschleunigungswerte notwendig. Damit die erforderlichen Beschleunigungswerte an der Arbeitsmaschine

bei minimalen Motormomenten erreicht werden können, muss das Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$  des Getriebes optimiert werden. Das optimierte Übersetzungsverhältnis berechnet sich aus den Massenträgheitsmomenten der Arbeitsmaschine  $J_A$  und des Motors  $J_M$ :

$$\ddot{u}_{opt} = \sqrt{\frac{J_A}{J_M}} \quad (2.9)$$

Mit dieser Getriebeübersetzung  $\ddot{u}_{opt}$  ergibt sich das minimale Beschleunigungsmoment, welches der Motor liefern muss, um die vorgegebene Beschleunigung  $d\omega_A/dt$  an der Arbeitsmaschine zu reichen.

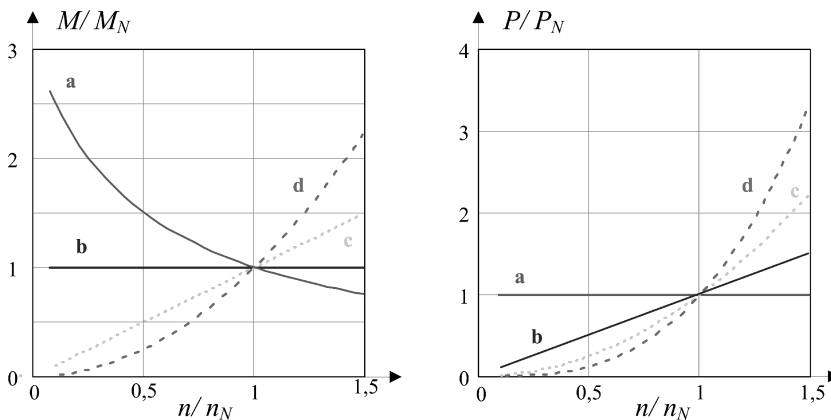
$$M_{B_{opt}} = 2J_M \ddot{u}_{opt} \frac{d\omega_A}{dt} \quad (2.10)$$

Bei der Wahl des Übersetzungsverhältnisses können diese theoretischen Überlegungen meist nur eingeschränkt umgesetzt werden. Da in der praktischen Anwendung weitere Betriebsbedingungen, wie z. B. die maximal erreichbare Drehzahl, bei der Wahl der Getriebeübersetzung zu berücksichtigen sind.

### 2.1.3 Stationäre Kennlinien von Arbeitsmaschinen

Um die Komponenten in einem Antriebsstrang auslegen zu können, sind die Leistungs- und die Drehmomentanforderungen der Arbeitsmaschine unbedingt erforderlich. Obwohl elektrische Antriebe vielfältige Arbeitsmaschinen antreiben, können deren stationäre Eigenschaften häufig mit einer der vier Kennlinien aus der Abb. 2.4 beschrieben werden. In der praktischen Anwendung werden diese Kennlinien nicht so idealisiert auftreten, sondern es sind weitere Effekte, wie z. B. Losbrechmomente und Beschleunigungsmomente, zu beachten.

- a) **Konstante Antriebsleistung:** Bei diesen Antrieben ist die erforderliche Antriebsleistung unabhängig von der Drehzahl. Aus  $P = 2\pi \cdot n \cdot M$  kann das Drehmoment der Arbeitsmaschine berechnet werden. Das erforderliche Drehmoment ist umgekehrt proportional zur Drehzahl  $M \sim 1/n$ . Arbeitsmaschinen mit konstanter Leistung sind z. B. Aufwickelmaschinen, die mit konstanter Bahngeschwindigkeit  $v$  und konstanter Zugkraft  $F$  arbeiten, oder Drehmaschinen mit konstantem Spanquerschnitt.
- b) **Konstantes Drehmoment:** Bei Fördermaschinen oder Hebezeugen wird das Drehmoment  $M = R \cdot F$  von der Gewichtskraft  $F = m \cdot g$  bestimmt. Wenn der Hebelarm  $R$  konstant ist, benötigen diese Arbeitsmaschinen ein von der Drehzahl unabhängiges Moment. Entsprechend  $P = 2\pi \cdot n \cdot M$  steigt die erforderliche Leistung linear mit der Drehzahl an ( $P \sim n$ ).
- c) **Linear ansteigendes Drehmoment:** Wenn das Lastmoment linear mit der Drehzahl zunimmt ( $M \sim n$ ), so steigt die Leistung quadratisch mit der Drehzahl an ( $P \sim n^2$ ). Dieses Verhalten weisen Arbeitsmaschinen mit geschwindigkeitsproportionaler Reibarbeit auf. Diese so genannte viskose Reibung tritt auf, wenn ein Körper durch ein zähes



**Abb. 2.4** Typische Drehmoment- und Leistungskennlinien von Arbeitsmaschinen

Medium bewegt wird. Diese Reibkräfte sind besonders bei Papier- und Textilmaschinen sowie Kalandern zu berücksichtigen.

- d) Quadratisch ansteigendes Drehmoment:** Lüfter, Gebläse, Kreiselpumpen sowie Fahr- antrieben, bei denen Strömungswiderstände zu überwinden sind, weisen eine quadratische Abhängigkeit des Drehmoments von der Drehzahl auf ( $M \sim n^2$ ). Deshalb wächst bei diesen Arbeitsmaschinen der Leistungsbedarf kubisch mit der Drehzahl an ( $P \sim n^3$ ).

### Zusammenfassung

Die mechanischen Größen bilden die Grundlagen für die Dimensionierung eines Antriebes. Die Arbeitspunkte eines Antriebes können anschaulich in der Drehmoment-Drehzahl-Ebene dargestellt werden. Die Bewegungssteuerung durch einen Antrieb kann nach unterschiedlichen Kriterien optimiert werden. Bei einer energieeffizienten Bewegungssteuerung können ca. 25 % der Verluste gegenüber einer zeitoptimalen Bewegungssteuerung vermieden werden.

## 2.1.4 Übungsaufgaben

### Übung 2.1

Berechnen Sie den Verlauf der Geschwindigkeit  $v(t)$  und der Strecke  $s(t)$  bei zeit- und energieoptimaler Bewegungssteuerung entsprechend der Abb. 2.2.

**Übung 2.2**

Leiten Sie die Gl. 2.9 ab. Diese Gleichung berechnet das optimale Übersetzungsverhältnis eines Getriebes, um mit einem möglichst geringen Motormoment eine vorgegebene Beschleunigung der Arbeitsmaschine zu erreichen.

**Übung 2.3**

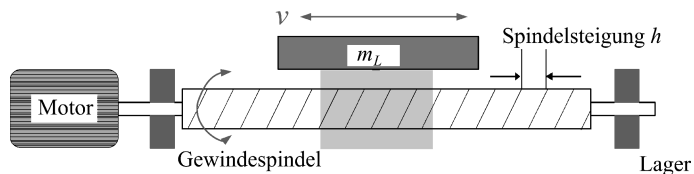
Von einem Spindelantrieb sind folgende Daten gegeben:

Motor:  $n_{max} = 1500 \text{ min}^{-1}$ ,  $J_M = 21 \text{ kg cm}^2$ ,  $M_{max} = 24 \text{ N m}$

Spindel:  $h = 5 \text{ mm}$  (Spindelsteigung)  $J_{Sp} = 0,007 \text{ kg m}^2$ ;

Lasttisch:  $m_L = 150 \text{ kg}$

Berechnen Sie die maximale Verfahrgeschwindigkeit  $v_{max}$  des Lasttisches. Wie lange dauert ein Beschleunigungsvorgang, um aus dem Stillstand die maximale Geschwindigkeit  $v_{max}$  zu erreichen?

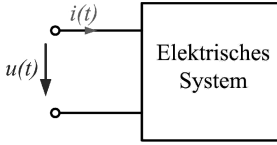
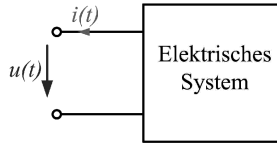
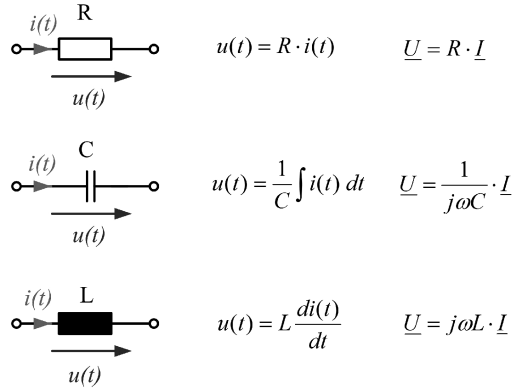
**2.2 Drehstromtechnik**

Die Drehstromtechnik ist für die Erzeugung, den Transport und die Verteilung elektrischer Energie von großer Bedeutung. Denn mit Hilfe der Drehstromtechnik können Generatoren, Energieverteilungsnetze, Transformatoren und Motoren mit geringem Aufwand realisiert werden. In diesem Abschnitt werden die Grundlagen zur Berechnung von Drehstromschaltungen zusammengestellt und erläutert.

**2.2.1 Komplexe Wechselstromrechnung**

Um die Arbeitsweise eines elektrischen Systems in der Energietechnik beurteilen zu können, müssen die Bezugsrichtungen für den Strom  $i(t)$  und der Spannung  $u(t)$  an den Klemmen festgelegt werden. Diese Festlegungen sind willkürlich, dabei wird zwischen zwei Varianten unterschieden.

Das Verbraucherzählpfeilsystem ist in Abb. 2.5a dargestellt. Hierbei zeigen die Zählpfeile in die gleiche Richtung. Der Strom wird positiv gezählt, wenn dieser in die obere Klemme hinein fließt. Die elektrische Leistung  $p(t) = u(t) \cdot i(t)$  ist positiv, wenn das elektrische System als Verbraucher arbeitet. Wirkt das System als Erzeuger (Generator), so ist bei dem Verbraucherzählpfeilsystem  $p(t) < 0$ . Beim Verbraucherzählpfeilsystem wird eine aufgenommene Leistung positiv gezählt.

**a** Verbraucherzählfeilsystem**b** Erzeugerzählfeilsystem**c** passive Bauelemente**Abb. 2.5** Zählfeilsysteme und Beschreibung der passiven Bauelemente

Beim Erzeugerzählfeilsystem wird entsprechend Abb. 2.5b der aus der oberen Klemme hinaus fließende Strom positiv gezählt. Bei der Leistungsberechnung  $p(t)$  bedeutet nun ein positiver Wert ( $p(t) > 0$ ), dass das elektrische System als Erzeuger arbeitet und somit eine elektrische Leistung abgibt.

Um die Methoden der komplexen Wechselstromrechnung anzuwenden, muss das elektrische System durch eine Schaltung mit konzentrierten Bauelementen beschrieben werden können. Das sind Bauelemente, deren geometrischen Abmessungen wesentlich kleiner als die Wellenlänge der anregenden elektrischen Größe sind. Mit dieser Voraussetzung können Laufzeiteffekte innerhalb des Systems vernachlässigt werden. Die Schaltsymbole und die Gleichungen zur Beschreibung der passiven Bauelemente: Ohmscher Widerstand  $R$ , Induktivität  $L$  und Kondensator  $C$  sind in Abb. 2.5c angegeben.

In der elektrischen Energietechnik wird häufig mit sinusförmigen Größen gleicher Frequenz gearbeitet, da hier bei der Addition oder bei der Differentiation der Signalgrößen das Ergebnis wiederum eine sinusförmige Größe mit der gleichen Frequenz ist. Weiterhin lässt sich jede periodische Funktion als Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen darstellen, womit sich dann die Berechnungsmethoden der komplexen Wechselstromberechnung auf beliebige periodische Größen übertragen lassen.

Sinusförmige Größen können als reelle Zeitfunktionen mit den Parametern Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$ , Amplitude und dem Phasenverschiebungswinkel  $\varphi$  beschrieben werden. Ebenso können diese Funktionen durch einen drehenden komplexen Zeiger  $e^{j\omega t}$ , dessen Zeigerlänge der Amplitude entspricht, mathematisch dargestellt werden.

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} \right\} \quad \leftrightarrow \quad \underline{U} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_u} \\
 i(t) &= \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} \right\} \quad \leftrightarrow \quad \underline{I} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_i}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Da nun in der Wechselstromtechnik alle Zeiger mit der selben bekannten Kreisfrequenz rotieren, kann auf diese Angabe ohne Informationsverlust verzichtet werden. Die sinusförmigen Größen können deshalb durch ruhende Zeiger dargestellt werden, aus denen die Phasenverschiebung zwischen den verschiedenen Größen und deren Amplituden hervorgehen. Da in der Energietechnik vorrangig die Leistungsumsetzung betrachtet wird, wählt man als Länge für den Zeiger den Effektivwert der sinusförmigen Größe. Hier werden komplexe Effektivwertzeiger durch einen Unterstrich gekennzeichnet. Mit der Verwendung komplexen Zeiger können bei der Wechselstromrechnung dieselben Gesetze wie im Gleichstromkreis angewendet werden. Das Ohmsche Gesetz bei der komplexen Wechselstromrechnung lautet:

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad \text{mit} \quad \underline{Z} = R + jX \quad (2.12)$$

Wobei  $\underline{Z}$  die komplexe Impedanz ist. Der Realteil der Impedanz entspricht dem Ohmschen Widerstand  $R = \text{Re}\{\underline{Z}\}$  und der Imaginärteil  $X = \text{Im}\{\underline{Z}\}$  wird Blindwiderstand oder Reaktanz genannt. Die Beschreibung der passiven Bauelemente mithilfe der komplexen Wechselstromrechnung ist in Abb. 2.5c angegeben. Weiterhin gelten auch bei der komplexen Wechselstromrechnung die beiden Kirchhoffschen Sätze.

$$\text{Knotenpunktsatz: } \sum_{i=1}^N I_i = 0 \quad \text{Maschensatz: } \sum_{i=1}^N \underline{U}_i = 0 \quad (2.13)$$

Die Augenblicksleistung  $p(t)$  im Wechselstromkreis kann aus dem Produkt von Spannung  $u(t)$  und Strom  $i(t)$  berechnet werden.

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (2.14)$$

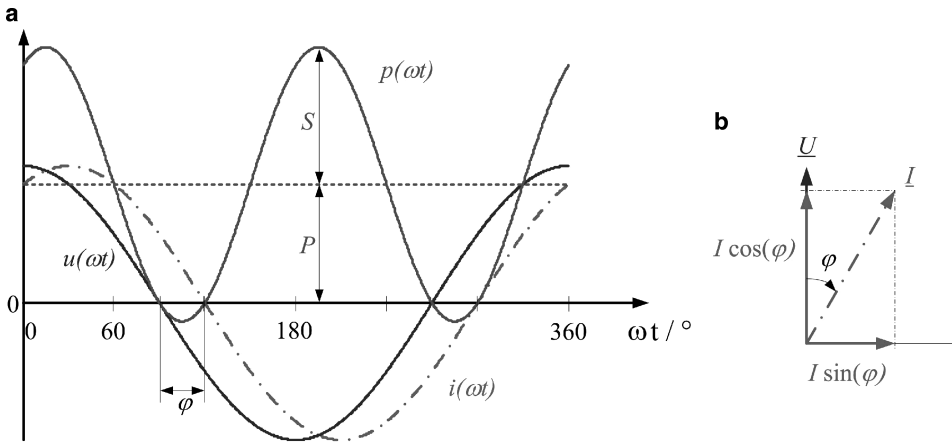
Mit dem Additionstheorem  $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$  ergibt sich für die Augenblicksleistung folgender Zusammenhang:

$$p(t) = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} \cdot (\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2 \cdot \omega t + \varphi_i + \varphi_u)) \quad (2.15)$$

Der Verlauf der Augenblicksleistung  $p(t)$  ist in Abb. 2.6 dargestellt. Die Leistung  $p(t)$  schwingt mit der doppelten Kreisfrequenz  $2\omega$  um ihren Mittelwert. Diesen Mittelwert der Augenblicksleistung während der Periodendauer  $T$  nennt man Wirkleistung  $P$ .

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} \cdot \cos \varphi = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad \text{mit} \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad (2.16)$$

Die Wirkleistung im Wechselstromkreis ist demnach sowohl von den Effektivwerten der Spannung  $U$  und dem Strom  $I$  als auch vom Phasenverschiebungswinkel  $\varphi$  abhängig. Die Wirkleistung wird in Watt angegeben ( $[P] = W$ ).



**Abb. 2.6** Zeitverläufe und Zeigerdiagramm zur Wechselstromleistung

Bei einer ohmschen Last sind Spannung und Strom in Phase, d. h.  $\varphi = 0$ . Dann ist die Wirkleistung  $P = UI$ . Bei einer idealen Induktivität oder bei einer idealen Kapazität sind Spannung und Strom um  $|\varphi| = 90^\circ$  phasenverschoben. Damit ist die Wirkleistung bei reaktiven Bauelementen unabhängig von den Effektivwerten der Wechselgrößen gleich Null.

Der Zeitverlauf der Augenblicksleistung kann auch mit der Wirkleistung  $P = UI \cos \varphi$  und der Scheinleistung  $S = UI$  beschrieben werden. Diese beiden Größen können, wie in Abb. 2.6 dargestellt, aus dem Zeitverlauf  $p(t)$  abgelesen werden.

$$p(t) = P + S \cos(2\omega t + \varphi_i + \varphi_u) \quad (2.17)$$

Die Wirkleistung  $P$  kann mithilfe der komplexen Zeigern veranschaulicht werden. Man erkennt an Abb. 2.6b, dass nur die Stromkomponente, die parallel zum Spannungszeiger gerichtet ist, zur Wirkleistung beiträgt. Die Stromkomponente, die senkrecht auf den Spannungszeiger steht trägt nicht zur Wirkleistung bei. Die Leistung welche die senkrechte Stromkomponente  $I \sin \varphi$  bildet, wird Blindleistung  $Q$  genannt.

$$Q = UI \sin \varphi \quad (2.18)$$

Die Blindleistung wird in  $[Q] = \text{var}$  angegeben, um schon an der Einheit klarzustellen, welche Leistungsgröße gemeint ist. Der Zusammenhang zwischen den drei Leistungsgrößen wird über

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (2.19)$$

beschrieben. Die Scheinleistung dient in der Starkstromtechnik als Anhaltsgröße zur Auslegung von elektrischen Maschinen. Für die Dimensionierung der Wicklungsquerschnitte

muss der Strom  $I$  bekannt sein, während für die Dimensionierung des magnetischen Kreises die Spannung maßgebend ist. Zur Unterscheidung von den anderen Leistungsgrößen wird die Scheinleistung in  $[S] = \text{V A}$  angegeben.

Die Wirkleistung kann als Realteil und die Blindleistung als Imaginärteil der komplexen Scheinleistung aufgefasst werden.

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{U} \cdot \underline{I}^* \quad (2.20)$$

Mit dieser Definition der komplexen Scheinleistung  $\underline{S}$  wird die Blindleistung bei einem induktiven Verbraucher positiv gezählt.

Um aus dem Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung den Betrag der Wirkleistung zu erhalten, muss zusätzlich mit dem Korrekturfaktor  $\lambda$  multipliziert werden.

$$P = \lambda \cdot UI = \lambda \cdot S \quad (2.21)$$

Dieser Korrekturfaktor, mit dem man die Scheinleistung multiplizieren muss, um die Wirkleistung zu erhalten, wird Leistungsfaktor genannt. Bei sinusförmigen Größen, die mit gleicher Frequenz schwingen, ist der Leistungsfaktor gleich dem Cosinus des Phasenwinkels zwischen Strom und Spannung.

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi \quad (2.22)$$

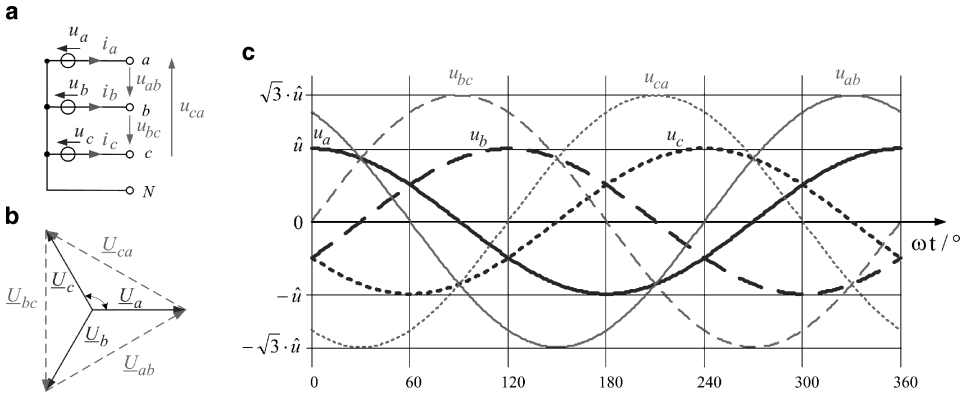
Der  $\cos \varphi$  wird als Verschiebungsfaktor bezeichnet.

## 2.2.2 Drehspannungssysteme

Energietechnische Einrichtungen werden in der Regel von einem dreiphasigen Drehspannungssystem gespeist. Hierzu werden jeweils drei um  $120^\circ$  phasenverschobene Wechselspannungsquellen mit gleicher Frequenz und Amplitude zu einem System zusammengeschaltet. Die Abb. 2.7a zeigt die Verschaltung der drei Wechselspannungsquellen.

Da die Quellen sternförmig am N-Leiter zusammengeschaltet sind, werden deren Spannungen als Sternspannungen bezeichnet. Der mit dem Sternpunkt verbundene Leiter wird Neutralleiter genannt. Die Sternspannungen können als zeitabhängige Funktion oder als Zeiger dargestellt werden. Dazu muss der Zusammenhang zwischen der Amplitude und dem Effektivwert beachtet werden ( $\hat{u} = \sqrt{2}U$ ).

$$\begin{aligned} u_a &= \hat{u} \cdot \cos(\omega t) & \leftrightarrow & \underline{U}_a = U \cdot e^{j0^\circ} \\ u_b &= \hat{u} \cdot \cos(\omega t - 120^\circ) & \leftrightarrow & \underline{U}_b = U \cdot e^{-j120^\circ} \\ u_c &= \hat{u} \cdot \cos(\omega t - 240^\circ) & \leftrightarrow & \underline{U}_c = U \cdot e^{-j240^\circ} \end{aligned} \quad (2.23)$$



**Abb. 2.7** Drehspannungssystem: **a** Ersatzschaltung, **b** Zeigerdiagramm und **c** Liniendiagramme

Die Außenleiterspannungen ergeben sich nach dem Maschensatz aus der Differenz zweier Sternspannungen:

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{ab} &= \underline{U}_a - \underline{U}_b \Rightarrow \underline{U}_{ab} = \sqrt{3} \cdot U \cdot e^{j30^\circ} \\
 \underline{U}_{bc} &= \underline{U}_b - \underline{U}_c \Rightarrow \underline{U}_{bc} = \sqrt{3} \cdot U \cdot e^{-j90^\circ} \\
 \underline{U}_{ca} &= \underline{U}_c - \underline{U}_a \Rightarrow \underline{U}_{ca} = \sqrt{3} \cdot U \cdot e^{j150^\circ}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Die Außenleiterspannung  $U_L$  ist um den Faktor  $\sqrt{3}$  größer als die Sternspannung  $U$ . Ebenso wie die Sternspannungen sind auch die Außenleiterspannungen jeweils um  $120^\circ$  phasenverschoben. Die Sternspannungen können nur direkt gemessen werden, wenn der Sternpunkt  $N$  herausgeführt ist.

In Deutschland wird üblicherweise zur Energieverteilung ein Drehspannungsnetz mit 4 Leitern verwendet. Dabei werden die Außenleiter mit  $L_1, L_2$  und  $L_3$  und der Neutralleiter mit  $N$  bezeichnet. So stehen im Niederspannungsnetz neben den Außenleiterspannungen ( $3 \times 400 \text{ V}$ ) auch die Sternspannungen ( $3 \times 230 \text{ V}$ ) zur Verfügung.

### Leistung bei symmetrischer Belastung

Besitzen die drei Spannungsquellen eines Drehspannungssystems gleiche Amplituden, gleiche Frequenz sowie eine Phasenverschiebung von jeweils  $120^\circ$ , stellen sich bei symmetrischer Belastung drei Ströme mit  $i_a(t) = \hat{i} \cos(\omega t - \varphi)$ ,  $i_b(t) = \hat{i} \cos(\omega t - 120^\circ - \varphi)$  und  $i_c(t) = \hat{i} \cos(\omega t - 240^\circ - \varphi)$  in einem Drehstromverbraucher ein. Die gesamte Augenblicksleistung  $p(t)$  des Drehstromverbraucher kann aus der Summe der drei Einzelleistungen berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 p(t) &= u_a(t) \cdot i_a(t) + u_b(t) \cdot i_b(t) + u_c(t) \cdot i_c(t) \\
 &= \hat{u} \cdot \hat{i} \cdot (\cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \varphi) + \cos(\omega t - 120^\circ) \cdot \cos(\omega t - 120^\circ - \varphi) \\
 &\quad + \cos(\omega t - 240^\circ) \cdot \cos(\omega t - 240^\circ - \varphi))
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Die Anwendung des Additionstheorems  $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$  und die Umrechnung der Amplituden in Effektivwerte, ergibt folgenden Ausdruck für die Augenblicksleistung:

$$p(t) = UI \left( 3 \cos \varphi + \underbrace{\cos(2\omega t - \varphi) + \cos(2\omega t - 120^\circ - \varphi) + \cos(2\omega t - 240^\circ - \varphi)}_{=0} \right) \quad (2.26)$$

Da sich die zeitabhängigen Terme bei der Berechnung zu Null addieren, ist die Leistung  $p(t)$  konstant und entspricht somit der mittleren Leistung, die als Wirkleistung  $P$  definiert wurde.

$$P = 3UI \cos \varphi \quad (2.27)$$

Bei symmetrischer Belastung liefert ein Drehspannungssystem eine zeitlich konstante Leistung an den Verbraucher. Da jede der drei Spannungsquellen, wie im Wechselstromsystem auch, eine Blindleistung  $Q$  liefern muss, wird bei Drehspannungssystemen die Gesamtblindleistung durch die Summe der Teilblindleistungen gebildet. Bei symmetrischen Verbrauchern wird die Blindleistung über

$$Q = 3UI \sin \varphi \quad (2.28)$$

gebildet. Entsprechend kann die Scheinleistung  $S$  von symmetrischen Drehstromverbrauchern angegeben werden:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3UI \quad (2.29)$$

Drehstromverbraucher können auf unterschiedliche Arten verschaltet werden. Die Stern- und die Dreieckschaltung werden in den nächsten Abschnitten erläutert.

### Sternschaltung

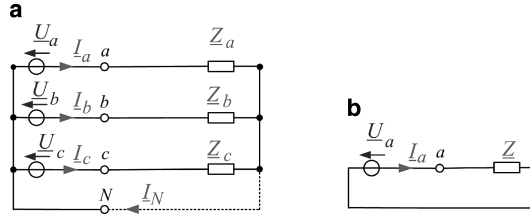
In Abb. 2.8 ist der Verbraucher als Stern verschaltet. Dabei soll der Sternpunkt der Drehspannungsquellen und der Sternpunkt des Drehstromverbrauchers miteinander verbunden sein. Dann sind die Spannungen an den Verbraucherimpedanzen gleich der Quellspannung im jeweiligen Strang. Somit können die Leiterströme über:

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a}, \quad \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b} \quad \text{und} \quad \underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c} \quad (2.30)$$

berechnet werden. Der Strom im Neutraleiter kann mithilfe der Knotengleichung berechnet werden:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a} + \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b} + \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c} \quad (2.31)$$

Bei einem symmetrischen Drehstromverbraucher sind alle drei Impedanzen in den drei Strängen gleich, es gilt:  $\underline{Z} = \underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c$ . Weiterhin ist bei einer symmetrischen Quelle



**Abb. 2.8** a Sternschaltung und b einphasige Ersatzschaltung für eine symmetrische Sternschaltung mit  $\underline{Z} = \underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c$

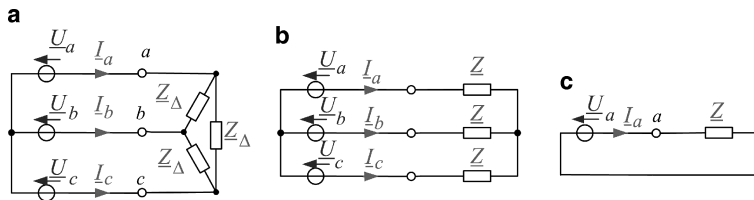
die Summe der drei Spannungen gleich Null ( $\underline{U}_a + \underline{U}_b + \underline{U}_c = 0$ ). Unter diesen Voraussetzungen ist der Strom  $\underline{I}_N = 0$ . Da kein Strom im Neutralleiter fließt, kann auf diesen Leiter verzichtet werden, ohne dass die Funktionsweise der Schaltung beeinflusst wird. Deshalb wird bei symmetrischen Verbrauchern häufig kein Neutralleiter angeschlossen. Symmetrische Sternschaltungen mit und ohne angeschlossenem Neutralleiter können mit einer einphasigen Ersatzschaltung nach Abb. 2.8b analysiert werden. Die Ströme in den anderen beiden Strängen erhält durch eine Drehung des Stromzeigers  $\underline{I}_a$ .

$$\underline{I}_b = \underline{I}_a e^{-j120^\circ} \quad \text{und} \quad \underline{I}_c = \underline{I}_a e^{-j240^\circ} \quad (2.32)$$

### Dreieckschaltung

Bei der Dreieckschaltung werden die drei Impedanzen zwischen den Leitern geschaltet. Entsprechend Abb. 2.9a bilden die Impedanzen  $\underline{Z}_\Delta$  ein Dreieck. Die Spannung an den Impedanzen ist gleich der Außenleiterspannung. Zur Berechnung der Leiterströme, kann die symmetrische Dreieckschaltung zunächst in eine äquivalente Sternschaltung umgerechnet werden. Die zugehörigen Sternwiderstände können über

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_\Delta}{3} \quad (2.33)$$



**Abb. 2.9** a Dreieckschaltung, b äquivalente Sternschaltung  $\underline{Z} = \underline{Z}_\Delta/3$  und c einphasige Ersatzschaltung

berechnet werden. Die so erhaltene symmetrische Sternschaltung kann wie in Abb. 2.9c mit einer einphasigen Ersatzschaltung analysiert werden.

### Zusammenfassung

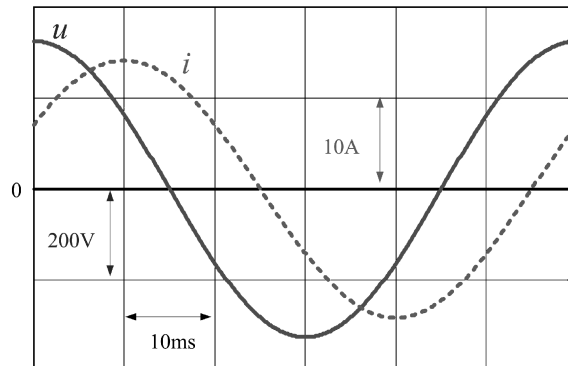
Ein Drehspannungssystem wird aus drei Wechselspannungsquelle, die um  $120^\circ$  gegeneinander phasenverschoben sind, gebildet. Einem Drehstromverbraucher stehen die drei Stern- und Dreieckspannungen, die sich um den Faktor  $\sqrt{3}$  unterscheiden, zur Verfügung. Der Leistungsfluss zwischen einem Drehspannungsgenerator und einem symmetrischen Verbraucher ist zeitlich konstant ( $p(t) = \text{konst.}$ ). Symmetrische Drehstromschaltungen können mithilfe einphasiger Ersatzschaltungen analysiert werden.

## 2.2.3 Übungsaufgaben

### Übung 2.4

Im folgenden Bild ist der Strom- und der Spannungsverlauf von einem Wechselstromverbraucher dargestellt.

- Lesen Sie aus dem Oszillogramm folgende Werte ab:  $f, \hat{i}, \hat{u}$  und die Phasenverschiebung  $\varphi$ .
- Berechnen Sie die Wirk-, die Blind- sowie die Scheinleistung des Verbrauchers.
- Geben Sie eine einfache Ersatzschaltung für den Wechselstromverbraucher an.



### Übung 2.5

Ein symmetrisches Drehspannungssystem (400 V/50 Hz) speist einen symmetrischen Drehstromverbraucher. Der Drehstromverbraucher nimmt dabei eine Wirkleistung von 7,5 kW bei einem  $\cos \varphi = 0,7$  (induktiv) auf.

- Berechnen Sie die Scheinleistung  $S$ , die Blindleistung  $Q$  und den Netzstrom  $I$ .
- Berechnen Sie die Kapazität, die in Stern parallel zum Verbraucher geschaltet werden muss, um den Verschiebungsfaktor auf  $\cos \varphi^* = 0,95$  anzuheben.

## 2.3 Elektromagnetische Grundlagen

In der Umgebung bewegter elektrischer Ladung – also bei Stromfluß – sind Kraftwirkungen zu beobachten, die dem Magnetfeld zugeschrieben werden. Diese physikalischen Phänomene werden in elektrischen Maschinen zur Energieumwandlung genutzt. In diesem Abschnitt werden wichtige elektromagnetische Zusammenhänge erläutert, die für das Verständnis und für die Berechnung von elektrischen Maschinen notwendig sind.

### 2.3.1 Magnetischer Kreis in elektrischen Maschinen

Die Auslegung des magnetischen Kreises in elektrischen Maschinen ist entscheidend für deren Betriebseigenschaften. Da elektrische Maschinen in der Realität komplizierte Geometrien besitzen, werden grundlegende Überlegungen an einfachen Ersatzanordnungen vorgenommen, wie in Abb. 2.10 dargestellt. Der Strom  $I$  in der Wicklung mit  $w$  Windungen erzeugt ein magnetisches Feld, welches weitgehend durch den Eisenkern aufgrund seiner hohen Permeabilität  $\mu_{Fe}$  geführt wird. Dieses magnetische Feld durchsetzt den Luftspalt mit der Dicke  $\delta$ . Bei der Berechnung eines magnetischen Kreises geht man vom Durchflutungsgesetz aus:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \vec{S} d\vec{A} \quad (2.34)$$

Dabei ergibt das Integral entlang einer geschlossenen Linie über die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  den eingeschlossenen Strom, der hier über das Flächenintegral der Stromdichte  $\vec{S}$  berechnet wird. Wird sowohl im Eisenkern als auch im Luftspalt ein homogenes Feld vorausgesetzt, so kann das Linienintegral durch eine Multiplikation der Feldstärke  $H$  mit der entsprechenden mittleren Feldlinienlänge ersetzt werden. Das Linienintegral umfasst  $w$  mal den Strom  $I$ . Das Produkt  $wI$  wird als Durchflutung  $\Theta$  bezeichnet.

$$H_L \delta + H_{Fe} l_{Fe} = wI = \Theta \quad (2.35)$$

Unter Vernachlässigung der magnetischen Streuung ist der magnetische Fluss  $\Phi$  im gesamten Kreis konstant.

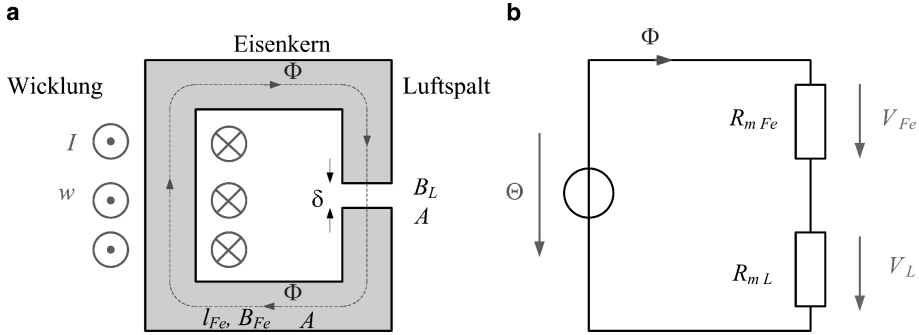
$$\Phi = B_{Fe} A = B_L A \rightarrow B = B_{Fe} = B_L \quad (2.36)$$

Die magnetische Leitfähigkeit der Luft wird durch die Permeabilität des Vakuums  $\mu_0$  berücksichtigt. Somit kann der Zusammenhang zwischen der magnetischen Flussdichte  $B_L$  und der Feldstärke  $H_L$  im Luftspalt über die Materialgleichung

$$B_L = \mu_0 H_L \quad \text{mit} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (2.37)$$

beschrieben werden. Die Eigenschaften des Eisens im magnetischen Kreis sollen zunächst durch eine konstante Permeabilität  $\mu_{Fe}$  berücksichtigt werden.

$$B_{Fe} = \mu_{Fe} H_{Fe} \quad \text{mit} \quad \mu_{Fe} \gg \mu_0 \quad (2.38)$$



**Abb. 2.10** Magnetischer Kreis: **a** Skizze und **b** Ersatzschaltung

Werden diese Beziehungen im Durchflutungssatz (2.35) berücksichtigt, kann der magnetische Fluss  $\Phi$  berechnet werden:

$$\Phi = \frac{\Theta}{\frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe} A} + \frac{\delta}{\mu_0 A}} \quad (2.39)$$

Hierbei können die geometrischen und die magnetischen Eigenschaften des Eisenkerns und des Luftspaltes mit den so genannten magnetischen Widerständen beschrieben werden:

$$R_{m_{Fe}} = \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe} A} \quad \text{und} \quad R_{m_L} = \frac{\delta}{\mu_0 A} \quad (2.40)$$

Mithilfe dieser magnetischen Widerstände kann der magnetische Kreis ähnlich wie ein elektrischer Stromkreis berechnet

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_{m_{Fe}} + R_{m_L}} \quad (2.41)$$

und wie Abb. 2.10b zeigt, mit einem Schaltplan dargestellt werden. In Analogie zum elektrischen Stromkreis wird auch ein magnetischer Spannungsabfall eingeführt:

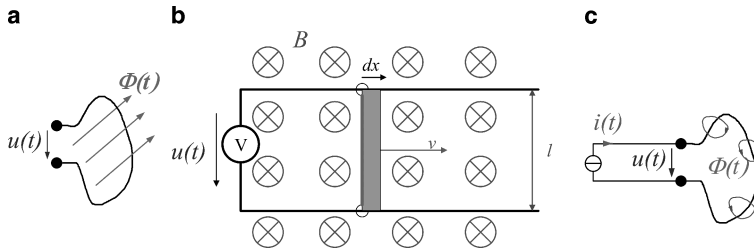
$$V = R_m \Phi \quad (2.42)$$

Der magnetische Fluss  $\Phi$  durchsetzt die  $w$  Windungen der Spule, deshalb ist es sinnvoll die Wirkung des magnetischen Feldes durch den verketteten Fluss  $\psi$  zu beschreiben. Der verkettete Fluss ist proportional zum Strom  $I$ . Der Proportionalitätsfaktor wird dabei Induktivität genannt.

$$\psi = w \cdot \Phi = L \cdot I \quad (2.43)$$

Wird in dieser Definitionsgleichung für die Induktivität die Gl. 2.41 eingesetzt, kann die Induktivität eines magnetischen Kreises einfach berechnet werden:

$$L = \frac{w^2}{R_{m_L} + R_{m_{Fe}}} \quad (2.44)$$



**Abb. 2.11** Induktion: **a** Transformatorisch induzierte Spannung, **b** Bewegungsinduktion und **c** Selbstinduktion

Die Induktivität ist bei konstanter Permeabilität des Eisens unabhängig vom Strom und steigt mit dem Quadrat der Windungszahl an. Die Materialeigenschaften und die Geometrie des magnetischen Kreises werden durch die magnetischen Widerstände berücksichtigt.

### 2.3.2 Induktion

Die Erzeugung einer Spannung mithilfe des magnetischen Feldes wird Induktion genannt. Dieser Vorgang wird durch das Induktionsgesetz beschrieben:

$$u = w \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \quad (2.45)$$

Es gibt drei verschiedenen Möglichkeiten um Spannungen zu induzieren:

**Transformatorisch induzierte Spannung:** Hierbei durchsetzt ein äußeres Magnetfeld eine Leiterschleife (siehe Abb. 2.11a). Wenn dieses Magnetfeld sich zeitlich ändert, wird eine Spannung induziert.

**Bewegungsspannung:** Wenn sich ein Leiter im Magnetfeld – wie in Abb. 2.11b dargestellt – mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, wird eine Spannung entsprechend  $u = d\Phi/dt$  mit  $d\Phi = BdA = Bl dx$  und  $v = dx/dt$  induziert:

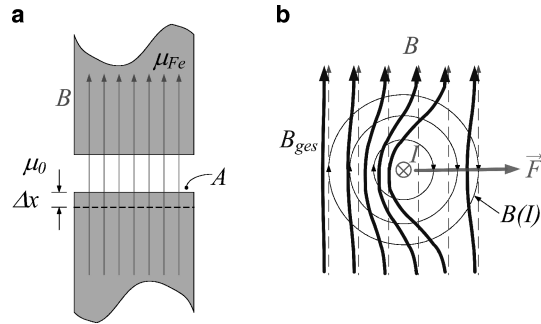
$$u = Blv \quad (2.46)$$

**Selbstinduktion:** Wird in einer Leiterschleife mit der Induktivität  $L$  ein zeitlich veränderlicher Strom  $i(t)$  eingepreßt, so kann die notwendige Spannung mit  $\Psi(t) = L \cdot i(t)$  über das Induktionsgesetz

$$u = \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (2.47)$$

berechnet werden.

**Abb. 2.12** Kraftwirkungen im Magnetfeld



Alle drei Möglichkeiten zur Spannungsinduktion sind für die Funktionsweise elektrischer Maschinen wichtig. Häufig finden in Maschinen alle drei Induktionsvorgänge gleichzeitig statt.

### 2.3.3 Kräfte im Magnetfeld

Für die Umwandlung elektrischer Energie in mechanische Energie sind die Kraftwirkungen auf ferromagnetischen Oberflächen oder auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld verantwortlich. Insbesondere wenn die Baugröße eines Motors minimiert werden soll, ist bei der Auslegung eine große Kraftdichte anzustreben.

**Kräfte auf Grenzflächen:** Abbildung 2.12a zeigt den Ausschnitt eines magnetischen Kreises. Das Magnetfeld wird vom Eisen geführt und durchsetzt den Luftspalt. Zwischen den Eisenteilen entsteht eine anziehende Kraft, die mithilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebung berechnet werden kann. Um den Luftspalt um  $\Delta x$  zu vergrößern, ist die mechanische Energie  $\Delta W_M = F \Delta x$  notwendig. Gleichzeitig wird dadurch die im Luftspalt gespeicherte magnetische Energie  $\Delta W = \frac{B^2 A}{2\mu_0} \Delta x$  vergrößert. Wenn die Änderung der Luftspaltlänge klein ist, wird sich die magnetische Flussdichte  $B$  dabei nicht ändern. Nach dem Energieerhaltungssatz können beide Energien gleichgesetzt und die Kraft an den Grenzflächen berechnet werden:

$$F = \frac{1}{2\mu_0} AB^2 \quad (2.48)$$

**Kräfte auf stromdurchflossene Leiter:** Ein Leiter, wie in Abb. 2.12b dargestellt, befindet sich in einem homogenen Magnetfeld mit der Flussdichte  $B$ . Fließt nun ein Strom  $I$  durch diesen Leiter, so baut sich zusätzlich ein Wirbelfeld um diesen Leiter auf. Die beiden Felder überlagern sich und es entsteht das resultierende, stark inhomogene Magnetfeld  $B_{ges}$ . Auf der linken Seite des Leiters wird das resultierende Magnetfeld verstärkt, weil die Richtung des äußeren Magnetfeldes und das Magnetfeld des stromdurchflossenen Leiters übereinstimmen. Auf der rechten Seite sind beide Magnetfelder entgegengesetzt und schwächen

sich somit. Die Kraftwirkungen im Magnetfeld sind immer so gerichtet, dass die Feldlinien möglichst kurz werden. Entsprechend wirkt auf den Leiter eine Kraft nach rechts.

Die Vektorgleichung für die auf einen stromdurchflossenen Leiter wirkende Kraft im Magnetfeld lautet:

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B}) \quad (2.49)$$

Wobei  $\vec{l}$  die Leiterlänge im Magnetfeld ist. Dabei zeigt der Vektor  $\vec{l}$  in Stromrichtung. Die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  beschreibt das ursprüngliche Magnetfeld ohne das Magnetfeld des Stroms.

### 2.3.4 Elektrobleche und Eisenverluste

Der Zusammenhang zwischen der magnetischen Flussdichte  $B$  und der magnetischen Feldstärke  $H$  wird über die Materialgleichung  $B = \mu \cdot H$  beschrieben. Die Permeabilität  $\mu$  ist dabei das Produkt aus der relativen Permeabilität  $\mu_r$  und der magnetischen Feldkonstante  $\mu_0$ :

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 \quad (2.50)$$

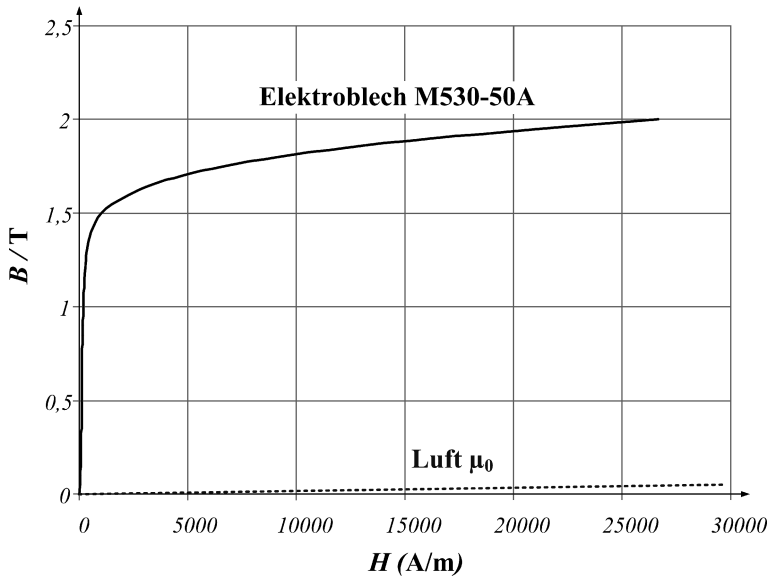
Die Permeabilität ist eine Materialeigenschaft und hängt vom atomaren Aufbau der Materie ab. Bei diamagnetischen Stoffen ist  $\mu_r < 1$ , z. B. Cu. Bei paramagnetischen Stoffen ist  $\mu_r > 1$ . Für die praktische Berechnung kann für diese Materialien  $\mu_r \approx 1$  gesetzt werden.

Bei einigen Materialien treten besonders starke Wechselwirkungen mit den Elementardipolen auf, die durch die Bewegung der Elektronen um die Atomkerne entstehen. Diese Materialien werden ferromagnetische Materialien genannt. Zu diesen Materialien gehören Eisen, was auch namensgebend war, sowie Kobalt und Nickel. Durch ein äußeres Feld können ganze Bezirke im Material ausgerichtet werden und somit das magnetische Feld verstärken. Bei ferromagnetischen Materialien ist der Zusammenhang zwischen der Flussdichte  $B$  und der Feldstärke  $H$  nicht linear und kann anschaulich nur noch grafisch dargestellt werden. Abbildung 2.13 zeigt die Magnetisierungskennlinie eines Elektrobleches im Vergleich zur linearen Kennlinie der Luft.

Das Eisen, welches das Magnetfeld führt, wird bei elektrischen Maschinen mit mittlerer und großer Leistung stets aus Elektroblechen geschichtet und zu einem Blechpaket gepresst. Die magnetischen Eigenschaften von Elektroblechen werden in den Normen DIN EN 10106 und DIN EN 10207 beschrieben [27, 28]. Diese Bleche besitzen eine Dicke von 0,25 bis 1 mm. Die Bleche werden durch eine Silikatschicht oder wasserlösliche Lacke einseitig isoliert. In der normgerechten Kennzeichnung der Bleche sind die Verluste bei  $B = 1,5 \text{ T}$  und  $f = 50 \text{ Hz}$  und die Blechstärke ersichtlich. Dazu folgendes Beispiel:

**M530-50A:** Dieses Blech besitzt die spezifischen Verluste  $5,3 \text{ W/kg}$  bei  $B = 1,5 \text{ T}$  und  $f = 50 \text{ Hz}$ . Die Blechstärke ist  $0,5 \text{ mm}$ .

Bei rotierenden Maschinen, bei denen die räumliche Lage des Magnetfeldes ständig geändert wird, müssen die magnetischen Eigenschaften richtungsunabhängig sein. Bei Trans-



**Abb. 2.13** Magnetisierungskennlinie von Elektroblech und von Luft

formatoren kann hingegen kornorientiertes Blech eingesetzt werden, welches für eine Vorzugsrichtung bessere Eigenschaften besitzt.

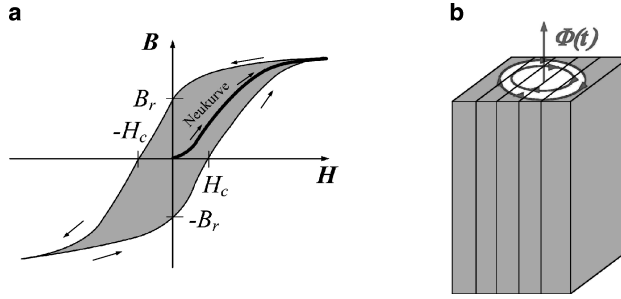
Die in der Kennzeichnung der Bleche angegebenen Verluste sind die sogenannten Eisenverluste. Diese Verluste entstehen im Eisenblech durch Hystereseeffekte bei der Ummagnetisierung und durch Wirbelströme.

**Hystereseverluste:** Diese Verluste entstehen durch die periodische Ummagnetisierung der Elementarmagnete (Bloche-Bezirke) im Eisen infolge eines magnetischen Wechselfeldes. Die Verluste im Eisen sind proportional zur eingeschlossenen Fläche der Hysteresekurve, die im magnetischen Wechselfeld durchlaufen wird (siehe Abb. 2.14). Für eine Berechnung der Hystereseverluste kann folgender Ansatz gewählt werden:

$$P_H = m_{Fe} \cdot c_H \cdot f \cdot B^2 \quad (2.51)$$

Wobei  $m_{Fe}$  die Masse des Eisen ist, welches den magnetischen Fluss mit der Frequenz  $f$  führt. Die Proportionalitätskonstante  $c_H$  ist eine materialabhängige Größe, welche proportional zum Flächeninhalt der Hysteresekurve ist.

**Wirbelstromverluste:** Ein magnetisches Wechselfeld induziert nach dem Induktionsgesetz 2.45 eine Spannung im Eisenkern. Diese Spannung findet innerhalb des Eisenkerns einen geschlossenen Stromkreis vor (siehe Abb. 2.14). Aufgrund der elektrischen Leitfähigkeit des Eisens fließen Ströme, welche die sogenannten Wirbelstromverluste verursachen.



**Abb. 2.14** a Hysteresekurve eines Elektrobleches und b ein geschichteter Eisenkern mit eingezeichneten Wirbelströmen

$$u \sim \frac{d\phi}{dt} \sim f \cdot B \quad (2.52)$$

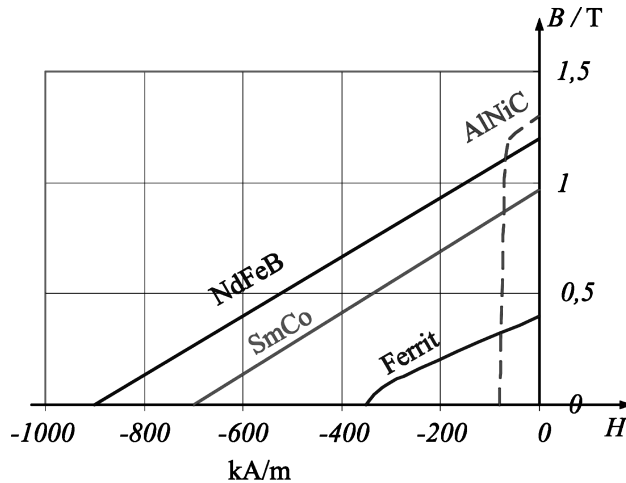
$$P_W = \frac{u^2}{R} = m_{Fe} \cdot c_W \cdot f^2 \cdot B^2 \quad (2.53)$$

Um die Wirbelstromverluste möglichst klein zu halten, muss der ohmsche Widerstand im Eisen möglichst groß werden. Dazu wird der flussführende Eisenkern aus Blechen geschichtet, die durch eine dünne Schicht voneinander isoliert sind. Je dünner die Blechstärke gewählt wird, desto kleiner werden die Wirbelstromverluste. Aber dadurch steigen der Arbeitsaufwand und somit auch die Herstellungskosten. Deshalb wird bei der Konstruktion von elektrischen Maschinen immer nach einem Kompromiss zwischen den Herstellungskosten und den Verlusten gesucht.

Die gesamten Eisenverluste in der Maschine ergeben sich aus der Summe von Hysterese- und Wirbelstromverlusten. Zur Berechnung der gesamten Eisenverluste wird häufig folgende Näherung angesetzt:

$$P_{Fe} = m_{Fe} \cdot \nu_{Fe,15} \cdot \left( \frac{B}{1,5 \text{ T}} \right)^2 \cdot \left( \frac{f}{50 \text{ Hz}} \right)^{1,6} \cdot k_B \quad (2.54)$$

Dabei ist  $m_{Fe}$  die Masse des Blechpaketes. Der Exponent 1.6 soll die unterschiedliche Frequenzabhängigkeit der beiden Verlustanteile berücksichtigen. Mit  $k_B$  wird der Bearbeitungszuschlag bezeichnet [8]. Dadurch werden die Bearbeitungseinflüsse der Eisenbleche, wie z. B. durch Stanzen, berücksichtigt. Bei mittleren und großen Maschinen kann für den Bearbeitungszuschlag  $k_B = 1,3$  gesetzt werden. Die genaue Vorausberechnung der Eisenverluste ist schwierig. In Anwendungsfällen, bei denen die genaue Kenntnis der Eisenverluste notwendig ist, sind neben diesem vorgestellten Berechnungsansatz vergleichende Messungen am Prüfstand unbedingt notwendig.



**Abb. 2.15** Entmagnetisierungskennlinien verschiedener Werkstoffe für Permanentmagnete

### 2.3.5 Magnetische Kreise mit Permanentmagnete

In elektrischen Maschinen können zur verlustlosen Erregung Permanentmagnete eingesetzt werden. Als Dauermagnete oder Permanentmagnete werden Werkstoffe bezeichnet, bei denen nach Einwirkung eines starken Magnetfeldes ein hoher Anteil von Restmagnetismus verbleibt. Diese Eigenschaft ist in der Hysteresekurve nach Abb. 2.14a durch eine hohe Remanenzflussdichte  $B_r$  und eine große Koerzitivfeldstärke  $H_c$  ersichtlich. Kennzeichnend für Dauermagnetmaterialien ist die Entmagnetisierungskurve im 2. Quadranten der Hysteresekurve. Für verschiedene Materialien sind in Abb. 2.15 die Entmagnetisierungskurven dargestellt.

Bei elektrischen Maschinen mit hoher Kraftdichte und gutem Wirkungsgrad werden Permanentmagnete aus „Seltenen Erden“ mit hoher Remanenzflussdichte und hoher Koerzitivfeldstärke eingesetzt. Insbesondere die Neodym-Eisen-Bor (NdFeB)-Verbindungen zeichnen sich durch eine hohe Energiedichte, gute Temperaturstabilität sowie eine Korrosionsbeständigkeit aus. Diese Materialien sind trotz der Bezeichnung „Seltenen Erden“ am Markt verfügbar und werden in hochwertigen Servomotoren und Torquemotoren eingesetzt. Permanentmagnete aus AlNiCo sind preiswerte Materialien mit geringen Energiedichten. Daher werden diese Magnete in Großserien mit geringeren Ansprüchen bezüglich Leistungsdichte und Wirkungsgrad eingesetzt.

Ein magnetischer Kreis mit Permanentmagnet wird über den Durchflutungssatz berechnet. Dabei soll die Anordnung in Abb. 2.16 betrachtet werden.

$$\underbrace{H_{Fe} l_{Fe} + H_m l_m + H_L \delta}_{\approx 0} = I w \quad (2.55)$$

$H_m$  ist dabei die Feldstärke im Magnet und  $l_m$  ist dessen Länge. Da die Permeabilität des Eisens groß ist, kann der magnetische Spannungsabfall  $H_{Fe} l_{Fe}$  im Durchflutungsgesetz vernachlässigt werden. Weiterhin ist der Fluss im Magnet und im Luftspalt gleich:

$$\Phi = A_m B_m = A_L B_L \Rightarrow B_L = \frac{A_m}{A_L} B_m \quad (2.56)$$

Wird diese Beziehung in Gl. 2.55 verwendet, ergibt sich die so genannte Scherungsgerade:

$$B_m = \frac{\mu_0 A_L}{A_m \delta} (I w - H_m l_m) \quad (2.57)$$

Diese Scherungsgeraden sind für unterschiedliche Betriebsbedingungen in Abb. 2.16b eingezeichnet. Ist dabei der Strom  $I = 0$ , so verlaufen die Scherungsgeraden durch den Ursprung. Die Steigung der Geraden ist dabei von der Länge  $l_m$  des Permanentmagneten abhängig. Ist der Strom  $I > 0$ , so bauen der Permanentmagnet und die Spule ein Feld in gleicher Richtung auf. Dadurch verschiebt sich die Scherungsgerade aus dem Ursprung nach rechts. Bei einem negativen Strom erzeugt die Spule ein Gegenfeld und schwächt somit den Permanentmagneten. Die magnetischen Größen, die sich im Magnetkreis einstellen, können am Schnittpunkt der Entmagnetisierungskurve mit der zugehörigen Scherungsgerade abgelesen werden.

Die Lage des Arbeitspunktes kann so gewählt werden, dass für eine gewünschte Flussdichte im Luftspalt, möglichst wenig Magnetmaterial eingesetzt wird. Diese Optimierung ist notwendig, um den Materialeinsatz und damit die Herstellungskosten von permanent-erregten Maschinen zu minimieren. Wird der Durchflutungssatz nach Gl. 2.55 bei  $I = 0$

$$H_m l_m = -H_L \delta$$

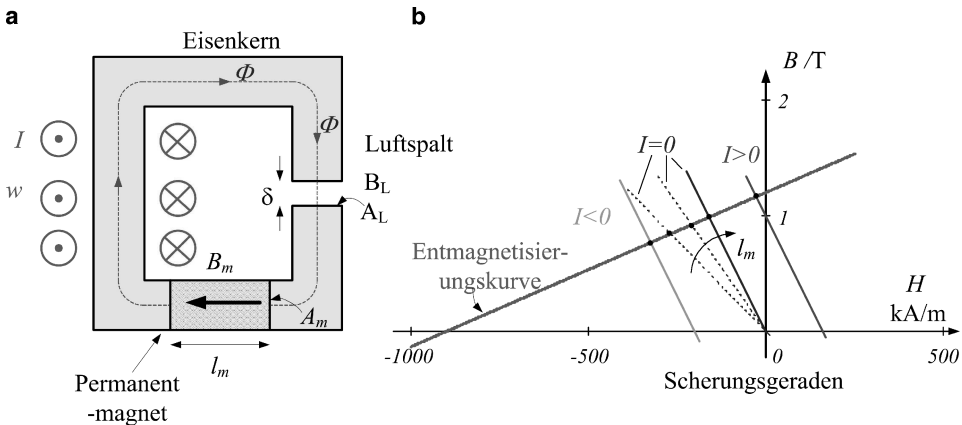
mit der Kontinuitätsgleichung des magnetischen Flusses

$$\Phi = B_m A_m = B_L A_L$$

multipliziert, kann das Volumen  $V_m$  der Permanentmagnete berechnet werden:

$$V_m = A_m l_m = A_L \delta \frac{B_L^2 / \mu_0}{B_m H_m} \quad (2.58)$$

Um die gewünschte Flussdichte  $B_L$  mit möglichst wenig Material zu realisieren, sollte der Arbeitspunkt so gewählt werden, dass das Produkt  $B_m H_m$  maximal wird. Bei einem linearen Verlauf der Entmagnetisierungskennlinie wird dieser optimierte Arbeitspunkt bei  $B_m = 0,5 \cdot B_R$  erzielt [8]. Gegenüber dieser optimierten Auslegung wird meist bei der praktischen Auslegung von Magnetkreisen der Materialeinsatz erhöht, um die Gefahr einer Entmagnetisierung der Permanentmagnete durch ein Gegenfeld zu reduzieren.



**Abb. 2.16** Magnetischer Kreis mit Permanentmagnet mit zugehöriger Entmagnetisierungskennlinie und den Scherungsgeraden

### Zusammenfassung

Das Durchflutungsgesetz bildet die Grundlage zur Berechnung magnetischer Kreise von elektrischen Maschinen. Kräfte im magnetischen Feld entstehen an Grenzflächen oder an stromdurchflossenen Leitern. Der magnetische Kreis von Maschinen wird aus geschichteten Elektroblechen hergestellt. Die Verluste in den Elektroblechen setzen sich aus den Hysterse- und den Wirbelstromverlusten zusammen. Permanentmagnete können in elektrischen Maschinen praktisch verlustfrei Magnetfelder aufbauen.

## 2.3.6 Übungsaufgaben

### Übung 2.6

Bei einem magnetischen Kreis nach Abb. 2.10 mit dem Querschnitt  $A = 900 \text{ mm}^2$  beträgt die mittlere Eisenweglänge  $l_{Fe} = 560 \text{ mm}$ . Auf dem Kern ist eine Wicklung mit  $w = 500$  Windungen aufgebracht. Als Kernmaterial wird das Elektroblech M530-50A mit einer Magnetisierungskennlinie entsprechend Abb. 2.13 verwendet. Im Luftspalt soll eine Flussdichte von  $B = 1,5 \text{ T}$  herrschen.

- Welcher Strom  $I_a$  ist erforderlich, um die gewünschte Flussdichte bei einem Luftspalt von  $\delta = 1 \text{ mm}$  einzustellen?
- Welcher Strom  $I_b$  ist erforderlich, wenn der Luftspalt auf  $\delta = 5 \text{ mm}$  vergrößert wird?

### Übung 2.7

Der in Abb. 2.16a dargestellte magnetische Kreis soll mit einem NdFeB-Magneten aufgebaut sein, dessen Kennlinie in Abb. 2.15 dargestellt ist. Die Fläche des Permanentmagneten  $A_m$  und der Fläche des Luftspaltes  $A_L$  sind gleich groß. Die Magnetlänge

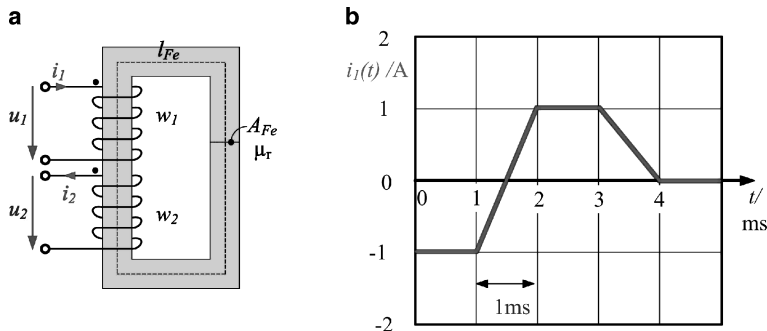
beträgt  $l_m = 5 \text{ mm}$  und der Luftspalt besitzt eine Länge von  $\delta = 1 \text{ mm}$ . Die Windungszahl der Spule ist mit  $w = 100$  angegeben. Die Permeabilität des Eisens soll sehr groß sein ( $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$ ).

- Bestimmen Sie den Strom  $I_a$ , bei dem der Arbeitspunkt im Remanenzpunkt des Permanentmagneten liegt.
- Bestimmen Sie den Strom  $I_b$ , bei dem der Arbeitspunkt im Koerzitivpunkt vom Magnetmaterial liegt.
- Welche Flussdichte  $B_c$  stellt sich im Luftspalt bei  $I = 0$  ein?

### Übung 2.8

Im folgenden Bild ist ein magnetischer Kreis mit zwei gekoppelten Spulen dargestellt. Das verwendete Eisen besitzt eine relative Permeabilität von  $\mu_r = 1500$ . Der Eisenkern hat eine Querschnittsfläche  $A_{Fe} = 1 \text{ cm}^2$  und einem mittleren Eisenweg von  $l_{Fe} = 15 \text{ cm}$ . Die Windungszahl der Primärspule beträgt  $w_1 = 400$ . Die Sekundärspule hat  $w_2 = 200$  Windungen. Die Spulen sind ideal gekoppelt ( $k = 1$ ). Alle Verluste können vernachlässigt werden.

- Berechnen Sie den magnetischen Widerstand  $R_m$  der Anordnung.
- Berechnen Sie die Selbstinduktivitäten  $L_1$  der Wicklung 1.
- Berechnen und Skizzieren Sie den Verlauf des magnetischen Flusses  $\Phi(t)$ .
- Berechnen und Skizzieren Sie den Verlauf der Spannung  $u_1(t)$ .
- Berechnen und Skizzieren Sie den Verlauf der Spannung  $u_2(t)$ .
- Wie groß ist das Verhältnis  $u_1 : u_2$ ?



Energieeffiziente elektrische Antriebe  
Grundlagen, Leistungselektronik, Betriebsverhalten und  
Regelung von Drehstrommotoren  
Teigelkötter, J.  
2013, XIV, 185 S. 139 Abb., Softcover  
ISBN: 978-3-8348-1938-3