

Lösungen ausgewählter Übungsaufgaben
zum Buch „Elementare Stochastik“
(Springer Spektrum, 2012)
Teil 5: Aufgaben zu den Kapiteln 9 bis 12

Aufgaben zu Kapitel 9

Zu Abschnitt 9.3

Ü9.3.1 Es sei $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. ψ' sei streng monoton steigend und bei 0 gleich Null; 0 ist also das eindeutig bestimmte Minimum von ψ . (Beispiele: x^{2k} , e^{x^4} , ...) Für eine Stichprobe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$\phi(x) := \sum_{i=1}^n a_i \psi(x - x_i)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$; dabei seien $a_1, \dots, a_n > 0$.

Beweisen Sie, dass es ein eindeutig bestimmtes x_0 zwischen $\min x_i$ und $\max x_i$ gibt, bei dem ϕ minimiert wird.

(Neben der minimalen quadratischen Abweichung könnte man also auch allgemeiner mit einer gewichteten ψ -Abweichung arbeiten.)

Ü9.3.2 Es sei $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ eine Stichprobe. Für welche x wird $\max_i |x - x_i|$ minimal?

Lösung Es bezeichne $M(x) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x - x_i|$. Zudem seien o.B.d.A. die x_i der Größe nach sortiert, d.h. $x_1 = \min x_i$, $x_n = \max x_i$. Es soll gezeigt werden, dass die Funktion $M(x)$ für $\tilde{x} = \frac{x_1 + x_n}{2}$ ihr Minimum annimmt. Sei $x \leq \tilde{x}$. Dann gilt

$$M(x) \geq |x - x_n| \geq |x_n - \tilde{x}| = \frac{|x_n - x_1|}{2} = M(\tilde{x}).$$

Sei nun $x \geq \tilde{x}$. Dann gilt

$$M(x) \geq |x - x_1| \geq |\tilde{x} - x_1| = \frac{|x_n - x_1|}{2} = M(\tilde{x}).$$

Somit ist gezeigt, dass $M(x) \geq M(\tilde{x}) = \frac{x_n - x_1}{2}$ für beliebiges x . Beachte noch, dass das Minimum bei \tilde{x} angenommen wird.

Ü9.3.3 Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussagen.

- a) Entfernt man aus einer Stichprobe x_1, \dots, x_n ein x_i mit $x_i = \max_j x_j$, so wird das Stichprobenmittel kleiner.
- b) Das Stichprobenmittel von x_1, \dots, x_n ist genau dann Null, wenn (im euklidischen Raum \mathbb{R}^n) (x_1, \dots, x_n) senkrecht auf $(1, \dots, 1)$ steht.

- c) Das Stichprobenmittel ist immer ein Median.
- d) Sei x_1, \dots, x_n eine Stichprobe, in der jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ genauso oft wie $-\alpha$ auftritt. Dann ist das Stichprobenmittel ein Median.
- e) Ist in einer Stichprobe das Stichprobenmittel enthalten, so ist das Stichprobenmittel ein Median.

Lösung

- (a) Im Falle der Gleichheit $x_1 = \dots = x_n$ ändert sich das Stichprobenmittel nicht.
- (b) Das ergibt sich schnell mit den folgenden Äquivalenzen.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i \cdot 1 = 0 \iff \langle (x_1, \dots, x_n), (1, \dots, 1) \rangle = 0$$

- (c) Das lässt sich z.B. durch das folgende Gegenbeispiel widerlegen: Seien $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 100$. Da alle x_i verschieden sind und ihre Anzahl ungerade, ist der Median eindeutig bestimmt, er ist gleich $x_2 = 2$. Das Stichprobenmittel ist jedoch gleich 51.5 und somit kein Median.
- (d) Ja, denn das Stichprobenmittel ist Null und somit ein Median der vorgegebenen Stichprobe.
- (e) Erneut kann man ein Gegenbeispiel angeben: Seien $x_1 = x_2 = -2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 5$. Der eindeutig bestimmte Median ist hier $x_3 = -1$; das Stichprobenmittel ist $x_4 = 0$ und in der Stichprobe enthalten, jedoch kein Median.

Zu Abschnitt 9.4

Ü9.4.1 Die $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$ seien eine zweidimensionale Stichprobe. Sind die nachstehenden Aussagen richtig oder falsch (mit Begründung)?

- a) Wenn der Korrelationskoeffizient r_{xy} verschwindet, so gibt es keine Regressionsgerade.
- b) Wenn der Korrelationskoeffizient r_{xy} positiv ist, so hat die Regressionsgerade eine positive Steigung.
- c) Sind $\alpha, \beta > 0$, so ist der Korrelationskoeffizient für die Stichprobe $(\alpha x_i, \beta y_i)$ der gleiche wie für $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$.
- d) Ist $\alpha > 0$, so ist der Korrelationskoeffizient für die Stichprobe $(\alpha x_i, \alpha y_i)$ der gleiche wie für $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$.

Ü9.4.2 Es sei $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n+m}$ eine zweidimensionale Stichprobe. Die Stichprobenvarianz der $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ und die Stichprobenvarianz der $(x_i)_{i=n+1, \dots, n+m}$ seien von Null verschieden. Die Regressionsgeraden von $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$ und von $(x_i, y_i)_{i=n+1, \dots, n+m}$ seien identisch.

Beweisen oder widerlegen Sie: Dann ist diese Gerade auch die Regressionsgerade zu $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n+m}$.

(Tipp: Erinnern Sie sich an die Definition der Regressionsgeraden als Lösung eines Optimierungsproblems.)

Ü9.4.3 Geben Sie ein Beispiel für eine Stichprobe $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$ an, bei dem sich die Regressionsgerade ändert, wenn man die x_i mit den y_i vertauscht.

Ü9.4.4 Die Parabel $x \mapsto ax^2 + bx + c$ heißt Regressionsparabel der Stichprobe $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$, falls

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2$$

minimal ist. Zeigen Sie die Existenz und die Eindeutigkeit der Regressionsparabel und finden Sie ein Gleichungssystem, mit dem man a, b, c bestimmen kann.

Ü9.4.5 Für $k = 1, 2, \dots$ sei $(x_i, y_i^{(k)})_{i=1, \dots, n}$ eine zweidimensionale Stichprobe. Die Stichprobenvarianz der x_i sei von Null verschieden. Die zur k -ten Stichprobe gehörige Regressionsgerade sei als $a^{(k)} + b^{(k)}x$ geschrieben.

Es wird vorausgesetzt, dass für $i = 1, \dots, n$ die Folge der $(y_i^{(k)})_k$ konvergiert, der Limes werde mit y_i bezeichnet.

Man zeige: Ist $a + bx$ die Regressionsgerade zu $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$, so gilt $a^{(k)} \rightarrow a$ sowie $b^{(k)} \rightarrow b$.

(Anders ausgedrückt: Die Regressionsgerade hängt stetig von den y_i ab.)

Aufgaben zu Kapitel 10

Zu Abschnitt 10.2

Ü10.2.1 Wir betrachten das statistische Modell aller Gleichverteilungen auf allen Intervallen der Form $[a, b]$ mit $a < b$. Es wird n Mal abgefragt. Beweisen oder widerlegen Sie:

- x_1 ist ein erwartungstreuer Schätzer für $(a + b)/2$.
- Das Stichprobenmittel ist ein erwartungstreuer Schätzer für $(a + b)/2$.

Ü10.2.2 Prüfen Sie nach, in welchen der folgenden Beispiele der Schätzer d erwartungstreu ist:

- Das statistische Modell bestehe aus allen Poisson-Verteilungen zu Parametern $\lambda > 0$ auf \mathbb{R} , zu schätzen sei λ^2 . d ist durch $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^2$ gegeben.
- Wie eben, aber d wird durch $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 x_2$ ersetzt.

Ü10.2.3 Gegeben seien ein statistisches Modell $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$, eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (für die zu allen \mathbb{P}_θ der Erwartungswert existiert) und die Abbildung $\gamma : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(\theta) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\theta}(X)$. Welche der folgenden Abbildungen $d : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind erwartungstreue Schätzer für γ ?

- a) $d(x_1, \dots, x_n) = x_1$.
 b) $d(x_1, \dots, x_n) = x_1 - x_2$.
 c) $d(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2$.

Ü10.2.4 In einem statistischen Modell $(\Omega, \mathcal{E}, (WP_\theta))_{\theta \in \Theta}$ seien d und d' zwei gleichmäßig beste erwartungstreue Schätzer für $\gamma : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für alle $\theta \in \Theta$ ist $\mathbb{P}_\theta(d = d') = 1$.

Zu Abschnitt 10.3

Ü10.3.1 Sei $T : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine suffiziente und vollständige Statistik.

- a) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist cT suffizient?
 b) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist cT vollständig?

Ü10.3.2 Die *geometrische Verteilung* ist bekanntlich durch die Wahrscheinlichkeiten $q^{k-1}(1-q)$ (für $k \in \mathbb{N}$) definiert, wobei $q \in [0, 1]$. Sie werde n -mal abgefragt, die Ergebnisse seien k_1, \dots, k_n .

Finden Sie eine maximum-likelihood-Schätzung für q aus den k_1, \dots, k_n .

Ü10.3.3 Es sei das statistische Modell der Gleichverteilungen auf $\{a, \dots, 100\}$ gegeben, wobei $a \in \{1, \dots, 100\}$. Zeigen Sie, dass das Minimum der Abfragen ein maximum-likelihood-Schätzer für a ist, wenn n Mal abgefragt wird.

Zu Abschnitt 10.4

Ü10.4.1 Für jedes $c \geq 0$ sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}_c auf $[0, 1]$ durch die Dichtefunktion $f_c(x) = (c+1)x^c$ gegeben. Bestimmen Sie nach einmaliger Abfrage ein Konfidenzintervall für c mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$. Verwenden Sie dabei das in Satz 10.4.1 beschriebene Verfahren.

Lösung Sei $c \geq 0$. Wähle ein möglichst kleines Intervall $I_{c,0.05}$ in $[0, 1]$, so dass eine Abfrage mit mindestens Wahrscheinlichkeit 0.95 in $I_{c,0.05}$ liegt. Nun suchen wir hierfür $k'_p, k''_p \in [0, 1]$, so dass $\mathbb{P}_c([0, k'_p]) = \mathbb{P}_c([k''_p, 1]) = 0.025$. Die Rechnung dazu:

$$\mathbb{P}_c([0, k'_p]) = k'^{c+1}_p = 0.025 \rightarrow k'_p = 0.025^{\frac{1}{c+1}} \text{ und}$$

$$\mathbb{P}_c([k''_p, 1]) = 1 - k''^{c+1}_p = 0.025 \rightarrow k''_p = 0.975^{\frac{1}{c+1}}.$$

Demnach kann z.B. $I_{c,0.05} = [0.025^{\frac{1}{c+1}}, 0.975^{\frac{1}{c+1}}]$ gewählt werden (ohne auf die Ränder achten zu müssen, da die Verteilung stetig ist). Nun ist nach der Menge aller $c \geq 0$ gesucht, für die eine einmalige Abfrage x_0 in $I_{c,0.05}$ liegt. Die Rechnung dazu:

$$x_0 \in I_{c,0.05} \rightarrow 0.025^{\frac{1}{c+1}} \leq x_0 \rightarrow \ln(0.025) \leq (c+1) \ln(x_0) \rightarrow c \leq \frac{\ln(0.025)}{\ln(x_0)} - 1 \text{ und}$$

$$x_0 \in I_{c,0.05} \rightarrow x_0 \leq 0.975^{\frac{1}{c+1}} \rightarrow (c+1) \ln(x_0) \leq \ln(0.975) \rightarrow \frac{\ln(0.975)}{\ln(x_0)} - 1 \leq c.$$

Wir haben unser Konfidenzintervall somit gefunden, es ist

$$\Lambda_{x_0} = \left[\frac{\ln(0.975)}{\ln(x_0)} - 1, \frac{\ln(0.025)}{\ln(x_0)} - 1 \right].$$

Ü10.4.2 Das statistische Modell bestehe aus den Poissonverteilungen zu den Parametern $\lambda > 0$. Es wird einmal abgefragt, das Ergebnis sei k . Geben Sie ein Verfahren an, mit dem man ein möglichst kleines Konfidenzintervall zum Irrtumsniveau α berechnen kann.

Ü10.4.3 Finden Sie ein Beispiel für ein statistisches Modell, in dem die Konfidenzbereiche als einpunktige Mengen gewählt werden können.

Zu Abschnitt 10.5

Ü10.5.1 Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable, so dass \mathbb{P}_X eine Dichtefunktion f hat. Definiert man dann Y als $|X|$, so hat Y die auf $[0, +\infty[$ definierte Dichtefunktion $x \mapsto f(x) + f(-x)$. (Dieses Ergebnis wird in Abschnitt 10.5 benötigt.)

Ü10.5.2 Es sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ normalverteilt, wobei weder der Erwartungswert noch die Varianz bekannt sind. Es soll ein Konfidenzintervall I zum Niveau $1 - \alpha = 0.95$ für den Erwartungswert von X bestimmt werden. Wie oft muss X abgefragt werden, damit die Länge von I höchstens 0.04 ist?

Ü10.5.3 In einem Versuch soll eine Federkonstante a bestimmt werden. Dazu werden 1000 Messungen durchgeführt, die unabhängige $N(a, 0.2)$ -verteilte Werte liefern. Wir erhalten $\bar{x} = 10.2$. Bestimmen Sie Konfidenzintervalle mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ und $\alpha = 0.01$ für a .

Lösung Wie beim dritten Beispiel auf Seite 304 rechnen wir wie folgt:

$\alpha = 5\%$:

Wir ermitteln mit Hilfe der Normalverteilungstafel ein Intervall $[-r, r]$, so dass $\mathbb{P}([-r, r]) = 1 - \alpha = 0.95$ ist. Dies ist für $r = 1.96$ der Fall. Dann liegt $\frac{(\bar{x}-a)\sqrt{n}}{\sigma}$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ im Intervall $[-1.96; 1.96]$. Darum liegt a mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ im Intervall

$$\left[\bar{x} - \frac{r\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{r\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[10.2 - \frac{1.96\sqrt{0.2}}{\sqrt{1000}}, 10.2 + \frac{1.96\sqrt{0.2}}{\sqrt{1000}} \right] \\ \approx [10.172; 10.228]$$

$\alpha = 1\%$:

Da die Normalverteilungstabelle kein r enthält, sodass die Wahrscheinlichkeit exakt $\mathbb{P}([-r, r]) = 1 - \alpha = 0.99$ ist, sondern der Wert für $r = 2.57$ zu

klein und für $r = 2,58$ zu groß ist, wählen wir $r = 2,575$ und erhalten folgendes Intervall

$$\left[\bar{x} - \frac{r\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{r\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[10,2 - \frac{2,575\sqrt{0,2}}{\sqrt{1000}}, 10,2 + \frac{2,575\sqrt{0,2}}{\sqrt{1000}} \right] \\ \approx [10,164; 10,236]$$

Aufgaben zu Kapitel 11

Zu Abschnitt 11.1

Ü11.1.1 Was sind die Fehler erster und zweiter Art bei der Nullhypothese „Im nächsten Winter kommt keine Grippewelle. Ich brauche mich also nicht impfen zu lassen.“?

Ü11.1.2 Es geht um die Hypothese „Am Freitag um Mitternacht kann man in Paris gefahrlos mit der Metro fahren.“ Sollte man sie als Nullhypothese oder als Alternativhypothese betrachten, um in Übereinstimmung mit der üblichen Konvention (der Fehler erster Art ist der schwerwiegendere) zu sein?

Lösung Die Hypothese „Am Freitag um Mitternacht kann man in Paris gefahrlos mit der Metro fahren“ sollte man als Alternativhypothese betrachten. Der Fehler erster Art wäre dann die Fehleinschätzung „es ist gefahrlos“, obwohl dem nicht so ist. Dies ist schwerwiegender als die Fehleinschätzung „es ist gefährlich“, obwohl alles in Ordnung ist. Lieber annehmen, dass es gefährlich ist und damit unnötig auf der Hut sein, als sich sicher zu schätzen und dann in Gefahr zu geraten.

Ü11.1.3 Finden Sie ein Beispiel aus den letzten 24 Stunden Ihres Lebens, bei dem Sie im Zusammenhang mit einer speziellen Nullhypothese abwägen mussten, ob der Fehler erster Art oder zweiter Art die unangenehmeren Konsequenzen hat.

Zu Abschnitt 11.2

Ü11.2.1 Es sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$, und Wahrscheinlichkeitsmaße \mathbb{P}_0 und \mathbb{P}_1 auf Ω seien durch die folgende Tabelle gegeben.

k	1	2	3
$\mathbb{P}_0(k)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbb{P}_1(k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Weiter sei die Verlustmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

vorgelegt.

- Skizzieren Sie die Punkte $(R_d(0), R_d(1))$ für alle Tests $d : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$.
- Bestimmen Sie die Minimax-Lösung für das Testproblem.
- Bestimmen Sie die Bayes-Lösung für das Testproblem zu $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$.
- Finden Sie p_0 und p_1 , so dass die Bayes-Lösung nicht eindeutig ist.

Lösung a) Wir müssen für jedes d

$$(R_d(0), R_d(1)) = (L_{00}\mathbb{P}_0(\{d=0\}) + L_{01}\mathbb{P}_0(\{d=1\}), L_{10}\mathbb{P}_1(\{d=0\}) + L_{11}\mathbb{P}_1(\{d=1\}))$$

berechnen. Es ergeben sich acht Punkte für die acht verschiedenen Tests auf Ω :

- $(5, 10)$ für $(d_1(1), d_1(2), d_1(3)) = (0, 0, 0)$,
 $(\frac{11}{2}, \frac{17}{2})$ für $(d_2(1), d_2(2), d_2(3)) = (0, 0, 1)$,
 $(\frac{31}{6}, 7)$ für $(d_3(1), d_3(2), d_3(3)) = (0, 1, 0)$,
 $(\frac{17}{3}, \frac{11}{2})$ für $(d_4(1), d_4(2), d_4(3)) = (0, 1, 1)$,
 $(\frac{19}{3}, \frac{11}{2})$ für $(d_5(1), d_5(2), d_5(3)) = (1, 0, 0)$,
 $(\frac{41}{6}, 4)$ für $(d_6(1), d_6(2), d_6(3)) = (1, 0, 1)$,
 $(\frac{13}{2}, \frac{5}{2})$ für $(d_7(1), d_7(2), d_7(3)) = (1, 1, 0)$,
 $(7, 1)$ für $(d_8(1), d_8(2), d_8(3)) = (1, 1, 1)$.

b) Die Minimax-Lösung für das Testproblem ist aus der Skizze abzulesen: Der Punkt $D = (\frac{17}{3}, \frac{11}{2})$, also Test d_4 , ist die Minimax-Lösung.

c) Für $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$ ist $p_0x + p_1y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = c$ die Schar der Geraden mit Steigung $m = -1$. Diejenige Gerade mit kleinstem c , so dass die Punktwolke noch getroffen wird, ist eingezeichnet und die Bayes-Lösung ist somit bei Punkt $H = (7, 1)$, also bei Test d_8 , gefunden.

d) Die Bayes-Lösung ist z.B. dann nicht eindeutig, wenn die Gerade mit kleinstem c durch die Punkte A und C führt (wie in der Skizze zu sehen liegen keine weiteren Punkte unterhalb der Geraden und bei noch kleinerem c würden keine Punkte der Punktwolke mehr getroffen werden). Die Gleichung dieser Geraden ist $y = 100 - 18x$ oder auch $\frac{18}{19}x + \frac{1}{19}y = \frac{100}{19}$ und damit ist die Bayes-Lösung für $p_0 = \frac{18}{19}$ und $p_1 = \frac{1}{19}$ nicht eindeutig, denn die Tests d_1 und d_3 sind beide eine Bayes-Lösung zu diesen p_i .

Ü11.2.2 Finden Sie ein Beispiel, in dem eine Testfunktion so gefunden werden kann, dass die Gütefunktion auf Θ_0 exakt gleich 0 und auf Θ_1 exakt gleich 1 ist.

Ü11.2.3 Es sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Varianz σ^2 . Sie wird n -mal abgefragt, wobei n „groß“ ist. Entwerfen Sie einen Test für die Nullhypothese „ $\mu \leq \mu_0$ “ zum Niveau α .

Ü11.2.4 Es sei die Familie aller Gleichverteilungen auf $[a - 1, a + 1]$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Entwerfen Sie einen Test zum Niveau α für die Nullhypothese „ $a \leq a_0$ “.

Zu Abschnitt 11.3

Ü11.3.1 Hier ist die geometrische Version des Neyman-Pearson-Ergebnisses.

Zu $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$, $\mu_1, \dots, \mu_n \in [0, 1]$ und $\alpha \in [0, 1]$ mit

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \mu_i = 1$$

sei das folgende Maximierungsproblem gegeben.

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere} \quad \sum_{i=1}^n \mu_i x_i, \\ &\text{so dass} \quad 0 \leq x_i \leq 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n, \\ &\quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \alpha. \end{aligned}$$

- a) Beweisen Sie die Existenz einer Lösung dieses Problems.
 b) Zeigen Sie, dass eine Lösung x_1, \dots, x_n existiert, bei der es höchstens ein i mit $x_i \notin \{0, 1\}$ gibt.

Ü11.3.2 Es sei $\Omega = \{1, \dots, 10\}$, und Wahrscheinlichkeitsmaße \mathbb{P}_0 und \mathbb{P}_1 auf Ω seien durch die folgende Tabelle gegeben.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{P}_0(k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$
$\mathbb{P}_1(k)$	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Finden Sie alle Neyman-Pearson-Tests zum Niveau $\alpha = 0.1$.

Ü11.3.3 Wir betrachten das statistische Modell aller Poisson-Verteilungen zu Parametern $\lambda \in \mathbb{R}$. Geben Sie einen Neyman-Pearson-Test

$$d : \{0, 1, 2, \dots\}^3 \rightarrow [0, 1]$$

zum Niveau $\alpha = 0.1$ für die Nullhypothese „ $\lambda \leq 0.3$ “ an.

Ü11.3.4 Es sei $\Omega = \{0, \dots, 25\}$, und \mathbb{P}_0 sowie \mathbb{P}_1 seien die folgenden Wahrscheinlichkeitsmaße:

$$\mathbb{P}_0(k) = b(25, k; 3/5), \quad \mathbb{P}_1(k) = b(25, k; 2/5).$$

Bestimmen Sie einen Neyman-Pearson-Test zum Niveau $\alpha = 0.05$.

Ü11.3.5 Eine Münze sei vorgelegt, die Nullhypothese besagt, dass die Wahrscheinlichkeit p für „Kopf“ gleich 0.4 ist. Sie wird fünf Mal geworfen. Konzipieren Sie einen Neyman-Pearson-Test von H_0 gegen $H_1 : p = 0.7$ zum Niveau $\alpha = 0.1$.

Aufgaben zu Kapitel 12

Zu Abschnitt 12.1

Ü12.1.1 Zeigen Sie, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(S_i = j_i \text{ für } i = 1, \dots, s \mid N = n)$$

gleich $M(j_1, \dots, j_s; p_1, \dots, p_s; n)$ ist (vgl. den Beweis von Satz ??).

Ü12.1.2 Es soll getestet werden, ob ein vorgelegter Würfel fair ist. Er wird 600 Mal geworfen, die Ergebnisse 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 treten dabei 50, 120, 120, 75, 102 bzw. 133 Mal auf. Sollte daraufhin die Hypothese „Der Würfel ist fair“ zum Irrtumsniveau $\alpha = 0.05$ abgelehnt werden?

Zu Abschnitt 12.2

Ü12.2.1 Es werden 1000 Leute befragt, dabei geht es um den Zusammenhang zwischen „Sind Sie verheiratet?“ und „Kleiden Sie sich gern teuer und aufwändig ein?“ Das Ergebnis:

- 402 für „verheiratet, Kleidung aufwändig“.
- 306 für „verheiratet, Kleidung eher einfach“.
- 120 für „nicht verheiratet, Kleidung aufwändig“.
- 172 für „nicht verheiratet, Kleidung eher einfach“.

Sollte daraufhin die Hypothese, dass „verheiratet“ und „aufwändige Kleidung“ unabhängig sind, zum Fehlerniveau $\alpha = 0.05$ abgelehnt werden?

Zu Abschnitt 12.3

Ü12.3.1 Beweisen Sie die Rekursionsformel

$$N(m; k, l) = \sum_{j=0}^k N(m-j; j, l-1).$$

Lösung Zur Wiederholung beginnen wir mit der Definition der Zahl $N(m; k, l)$. Sie ist als die Anzahl an Möglichkeiten definiert, die es gibt, die Zahl m als Summe von k Summanden $m = s_1 + \dots + s_k$ darzustellen, sodass jeder Summand $s_i, i \in \{1, \dots, k\}$ kleiner oder gleich l ist.

Für alle diese Zerlegungen der Zahl m in k Summanden können wir die Zahl j an Summanden bestimmen, die nicht Null sind. Dann ist j für jede Zerlegung sicherlich eine Zahl zwischen 0 und k . Das heißt aber für eine Zerlegung, dass $m-j$ Summanden Null sind und die restlichen j Zahlen größer gleich 1 sind. Das heißt, wenn wir die j Nicht-Null-Summanden um 1 verringern erhalten wir eine Zerlegung der Zahl $m-j$ in j Summanden, wobei alle Summanden aufgrund der Subtraktion kleiner gleich $l-1$ sind. Offensichtlich bilden Zerlegungen von

m mit gleichem j somit alle Zerlegungen der Zahl $m - j$ in j Summanden, die alle kleiner gleich $l - 1$ sind, also die Anzahl an Zerlegungen der Zahl m mit fixiertem j gleich $N(m - j; j, l - 1)$. Somit ergibt sich obige Rekursionsformel.

Ü12.3.2 Zeigen Sie, dass $N(m; k, l) = N(m; l, k)$ für alle m, k, l gilt.

Lösung $N(m; k, l)$ war definiert als die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahl m als $m = m_1 + \dots + m_k$ mit $0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k \leq l$ zu schreiben.

Die Idee besteht nun darin, eine Bijektion zwischen zwischen den Mengen

$$A := \{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k : m = m_1 + \dots + m_k, 0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k \leq l\}$$

und

$$B := \{(\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_l) \in \mathbb{N}^l : m = \tilde{m}_1 + \dots + \tilde{m}_l, 0 \leq \tilde{m}_1 \leq \dots \leq \tilde{m}_l \leq k\}$$

anzugeben; mit anderen Worten: jeder Möglichkeit, die Zahl m als $m = m_1 + \dots + m_k$ mit $0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k \leq l$ zu schreiben, entspricht genau eine Möglichkeit, die Zahl m als $m = \tilde{m}_1 + \dots + \tilde{m}_l$ mit $0 \leq \tilde{m}_1 \leq \dots \leq \tilde{m}_l \leq k$ zu schreiben.

Da beide Mengen endlich sind, muss dann $|A| = N(m; k, l) = N(m; l, k) = |B|$ gelten, wobei $|M|$ die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M bezeichnet.

Zunächst stellen wir fest, dass A und B genau dann leer sind, wenn $m > kl$; d.h. auch, dass A und B zugleich entweder leer sind oder nicht. Falls beide Mengen leer sind, ist nichts mehr zu zeigen, daher gehen wir o.B.d.A. davon aus, dass A nicht leer ist und müssen nun noch eine bijektive Abbildung von A nach B finden.

Eine solche Bijektion lässt sich leicht mit einem kleinen Trick angeben: gegeben sei ein beliebiges $(m_1, \dots, m_k) \in A$. Wir interpretieren nun die m_1, \dots, m_k als k verschiedene Fächer, auf die m Kugeln verteilt werden sollen, wobei die im $i+1$ -ten Fach mindestens so viele Kugeln wie im i -ten sein sollen, und jedes Fach höchstens l Kugeln enthalten darf. Diese denken wir uns wie in der folgenden Abbildung:

Hier ist $m = 9$ die Gesamtanzahl der Kugeln, die auf die $k = 4$ Fächer m_1, \dots, m_4 verteilt sind, und es soll $l = 5$ sein. Es ist $m_1 = 1, m_2 = m_3 = 2$ und $m_4 = 4$. Nun kommt der entscheidende Trick: Wir drehen diese Anordnung um 90° nach rechts, und verändern in naheliegender Weise die Beschriftung (aus „ m_i “ wird „ $\# = k - i + 1$ “ und aus „ $\# = i$ “ wird „ \tilde{m}_{l-i+1} “), und erhalten nun die folgende neue Anordnung:

Dies lässt sich nun als $\tilde{m}_1 = 0$, $\tilde{m}_2 = \tilde{m}_3 = 1$, $\tilde{m}_4 = 3$ und $\tilde{m}_5 = 4$, und $(\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_l)$ ist tatsächlich in B !

Die auf diese Weise definierte Abbildung ist offensichtlich bijektiv, und daher gilt $|A| = N(m; k, l) = N(m; l, k) = |B|$.

Ü12.3.3 Verwenden Sie die Tabelle in Abschnitt 12.3, um im Fall $k = l = 4$ einen Konfidenzbereich zum Niveau $\alpha = 0.1$ für die Nullhypothese „Die Verteilungen von X und Y sind gleich“ zu finden.

Zu Abschnitt 12.4

Ü12.4.1 Es soll getestet werden, ob eine Verteilungsfunktion F vorliegt. Dazu wird eine Stichprobe aus 40 Werten erzeugt, und es ergibt sich $D_n = 0.102$. Wird die Hypothese daraufhin zum Niveau $\alpha = 0.05$ abgelehnt?

Lösung Der kritische Wert für $\alpha = 0.05$ ist aus der Tabelle auf Seite 368 abzulesen: $D = 0.24$. Der Wert $D_n = 0.102$ ist kleiner als der kritische Wert und die Hypothese wird somit nicht abgelehnt.

Ü12.4.2 Das gleiche Problem mit 600 Werten und $\alpha = 0.25$.

Elementare Stochastik

Ein Lernbuch - von Studierenden mitentwickelt

Behrends, E.

2013, XVIII, 374 S. 70 Abb., 15 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-8348-1939-0