

Lösungen ausgewählter Übungsaufgaben
zum Buch „Elementare Stochastik“
(Springer Spektrum, 2012)
Teil 3: Aufgaben zu den Kapiteln 5 und 6

Aufgaben zu Kapitel 5

Zu Abschnitt 5.1

Ü5.1.1 Finden Sie eine maximum-likelihood-Schätzung für p bei gegebenen n, k und eine für n bei gegebenen p, k im Fall der Binomialverteilung. (Ausführlich: Wenn n und k fest vorgegeben sind, für welches p wird dann $b(n, k; p)$ maximal? Wenn p und k fest vorgegeben sind, für welches n wird dann $b(n, k; p)$ maximal?)

Lösung

m-l-Schätzung für p

Um den maximum-likelihood-Schätzer für p bei festem n und k zu bestimmen, bedienen wir uns der Hilfsmittel der Analysis. Wir suchen das \hat{p} , das $b(n, k; p)$ maximiert. Notwendige Bedingung hierfür ist $b'(n, k; \hat{p}) = 0$. Wir bestimmen zunächst die erste Ableitung von $b(n, k; p)$ bezüglich p .

$$b'(n, k; p) = \binom{n}{k} (k p^{k-1} (1-p)^{n-k} - p^k (n-k) (1-p)^{n-k-1})$$

Nullsetzen liefert

$$\begin{aligned} 0 &= k \hat{p}^{k-1} (1 - \hat{p})^{n-k} - \hat{p}^k (n-k) (1 - \hat{p})^{n-k-1} \\ &= \hat{p}^{k-1} (1 - \hat{p})^{n-k-1} (k(1 - \hat{p}) - \hat{p}(n-k)) \end{aligned}$$

Das ist erfüllt für $\hat{p} = 1$, $\hat{p} = 0$ und für $\hat{p} = k/n$.

Da $b(n, k; 0) = b(n, k; 1) = 0$ und $b(n, k; p) > 0 \quad \forall p \in (0, 1)$ muss es sich bei $\hat{p} = k/n$ um das gesuchte p handeln.

m-l-Schätzung für n Den maximum-likelihood-Schätzer für n bestimmen mit dem auf Seite 101 beschriebenen Verfahren, betrachten also die Quotienten

$$\frac{b(n, k; p)}{b(n+1, k; p)} = \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{\binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k}} = \frac{n+1-k}{(n+1)(1-p)}.$$

Dieser Ausdruck ist genau dann $\square 1$, wenn $n \square k/p - 1$ ist. Dabei steht \square wieder für eine der Relationen $<, >, =$. Der Maximalwert wird also bei $n = k/p - 1$ erreicht und das ist folglich unser maximum-likelihood-Schätzer für n .

Ü5.1.2 Ein Graphologe wird getestet. Ihm werden acht Paare von Schriftproben vorgelegt, jeweils von einem Arzt und einem Juristen geschrieben. Der Graphologe soll eingestellt werden, wenn er in mindestens sechs Fällen die richtige

Zuordnung herausfindet. Wenn die fachliche Erfahrung des Graphologen so beschaffen ist, dass er im Mittel in 80% der Fälle richtig liegt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er nach diesem Test eingestellt wird?

Ü5.1.3 Beweisen Sie, dass stets $b(k, n; p) = b(n - k, n; 1 - p)$ gilt.

Ü5.1.4 X und Y seien unabhängige Zufallsvariable. X (bzw. Y) sei binomialverteilt zu den Parametern n und p (bzw. m und p). Zeigen Sie, dass $X + Y$ unter diesen Voraussetzungen binomialverteilt zu den Parametern $n + m$ und p ist.

Lösung Wir wollen zunächst eine ausgesprochen elegante und kurze Lösung präsentieren: Laut Satz 5.1.1 entspricht $b(n, k; p)$ gerade der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = k)$, wobei es sich bei den X_i um n unabhängige Bernoulliexperimente mit Erfolgswahrscheinlichkeit p handelt sind. Ebenso lässt sich Y als Summe aus m unabhängigen Bernoulliexperimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit p interpretieren. Dann entspricht $X + Y$ folglich der Summe aus $n + m$ Bernoulliexperimenten und somit $\mathbb{P}(X + Y = s) = \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n + Y_1 + \dots + Y_m = s) = \binom{n+m}{s} p^s (1-p)^{n+m-s} = b(n+m, s; p)$.

Die Behauptung kann auch etwas schreibintensiver durch die Berechnung der diskreten Faltung bewiesen werden.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X + Y = s) &= \sum_{k=0}^s \mathbb{P}(X = k, Y = s - k) \\
 &= \sum_{k=0}^s b(n, k; p) \cdot b(m, s - k; p) \\
 &= \sum_{k=0}^s \left[\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{m}{s-k} p^{s-k} (1-p)^{m-s+k} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^s \left[\binom{n}{k} \binom{m}{s-k} p^s (1-p)^{n+m-s} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^s \left[\frac{\binom{n}{k} \binom{m}{s-k}}{\binom{n+m}{s}} \right] \binom{n+m}{s} p^s (1-p)^{n+m-s} \\
 &= \binom{n+m}{s} p^s (1-p)^{n+m-s} = b(n+m, s; p).
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt unser Wissen über die hypergeometrische Verteilung ausgenutzt, nämlich $\sum_{k=0}^s h(k, s; n, n+m) = 1$

Zu Abschnitt 5.2

Ü5.2.1 Überzeugen Sie sich durch Nachrechnen davon, dass die Voraussetzungen, unter denen wir die hypergeometrische Verteilung durch eine Binomialver-

teilung approximiert haben, wesentlich sind: k klein gegen r , m klein gegen n , $m - k$ klein gegen $n - r$.

Zu Abschnitt 5.3

Ü5.3.1 Im Mittel bekommt Herr H. 5 Weihnachtskarten. Wie wahrscheinlich ist es, dass er in diesem Jahr weniger als 2 bekommt?

Lösung Sei n die Anzahl der Menschen, die Herrn H. mit Wahrscheinlichkeit p eine Karte schreiben. Zwar sind n und p nicht bekannt, so dass wir die Binomialverteilung direkt nicht anwenden können, doch da das Produkt $np = 5$, der Erwartungswert der Binomialverteilung bekannt ist, können wir approximierend die Poissonverteilung zum Parameter $np = 5$ verwenden, wie im Abschnitt 5.3 erläutert wird. Damit berechnen wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit (man beachte $0! := 1$):

$$p(0; 5) + p(1; 5) = \frac{5^0}{0!} e^{-5} + \frac{5^1}{1!} e^{-5} = (1 + 5) e^{-5} \approx 0.04.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Herr H. weniger als zwei Karten bekommt, beträgt also nur rund 4%.

Ü5.3.2 Im Mittel gibt es im Büro des Professors P. zwischen 10 und 11 Uhr vier Anrufe. Wie wahrscheinlich ist es, dass es an einem speziellen Tag in dieser Zeit höchstens einen Anruf gibt?

Ü5.3.3 X und Y seien poissonverteilt. Beweisen Sie, dass $X + Y$ nicht notwendig ebenfalls poissonverteilt sein muss. (Falls X, Y unabhängig sind, stimmt das: vgl. Seite 152).

Lösung Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(\{X + X = n\}) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{X = n - k\})$$

für eine zum Parameter λ_X poissonverteilte Zufallsvariable X .

Wäre $X + X$ poissonverteilt, müsste ein $\lambda \geq 0$ existieren, sodass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}(\{X + X = n\}) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

gilt.

Sei nun n aus der obigen Wahrscheinlichkeit eine ungerade Zahl. Dann ist die Menge $\{X = k\} \cap \{X = n - k\}$ für alle $0 \leq k \leq n$ leer, denn es gilt $n \neq n - k$. Somit ist auch die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\{X + X = n\}) = 0$. Demnach muss, wenn wir annehmen, dass $X + X$ poissonverteilt ist, der Parameter $\lambda = 0$ sein.

Für gerades n ist die Menge $\{X = k\} \cap \{X = n - k\} = \{X = n/2\}$ nicht leer und es gilt

$$\mathbb{P}(\{X + X = n\}) = \mathbb{P}(\{X = n/2\}) = \frac{\lambda_X^{n/2}}{\frac{n}{2}!} e^{-\lambda_X}.$$

Wenn jedoch $\lambda_X \neq 0$ gilt, erhalten wir einen Widerspruch, da die Wahrscheinlichkeiten für gerade und ungerade n durch Poissonverteilungen mit unterschiedlichen Parametern beschrieben werden, so dass insgesamt keine poissonverteilte Zufallsvariable X vorliegen kann.

Zu Abschnitt 5.4

Ü5.4.1 Die Zufallsvariable X sei binomialverteilt zum Parameter $p = 0.4$ auf $\{0, \dots, 1000\}$.

a) Wie groß ist der Erwartungswert von X ?

b) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(300 < X \leq 600)$ approximativ mit Hilfe des Satzes von de Moivre-Laplace.

c) Finden Sie (wieder mit dem Satz von de Moivre-Laplace) ein möglichst kleines $\alpha \in \mathbb{N}$, so dass $P(X \in [\mathbb{E}(X) - \alpha, \mathbb{E}(X) + \alpha]) \geq 0.8$ ist.

Lösung Für Aufgabenteil a) sei an Satz 5.1.3. (i) erinnert, der besagt, dass der Erwartungswert für die binomialverteilte Zufallsvariable X gleich $np = 1000 \cdot 0.4 = 400$ ist.

Für Aufgabenteil b) nutzen wir Satz 5.4.3 mit den Werten $\alpha = 301$ und $\beta = 600$. Für die Approximation müssen dann die Werte $x(300, 5)$ und $x(600, 5)$ errechnet werden. Ein Einsetzen in die Funktion liefert

$$x(300, 5) = (300, 5 - 400) / \sqrt{400 \cdot 0.6} \approx -6,4227$$

$$x(600, 5) = (600, 5 - 400) / \sqrt{400 \cdot 0.6} \approx 12,9422.$$

Die Tabelle der Normalverteilung enthält leider nur Werte von -3 bis 3 und es gilt $\Phi(3) - \Phi(-3) \approx 1 - 0,0013 = 0,9987$, sodass wir für $\mathbb{P}(300 < X \leq 600) \approx 1$ annehmen können.

Für Aufgabenteil c) rechnen wir analog zu Bemerkung 6 auf Seite 182. Es muss $\Phi(x_\alpha) - \Phi(-x_\alpha) = 0,8$ gelten. Dabei hat x_α die Form

$$x_\alpha = \frac{\alpha + 0,5}{\sqrt{400 \cdot 0,6}}.$$

Analog zu den Überlegungen der Bemerkung gilt dann $2\Phi(x_\alpha) - 1 = 0.8$ und somit $\Phi(x_\alpha) = 0.9$. Aus der Tabelle für die Normalverteilung entnehmen wir $\Phi(1,28) = 0,8997$ und $\Phi(1,29) = 0,9015$. Eine lineare Approximation liefert $\Phi(1,2817) \approx 0,9$ und somit $\alpha = 1,2817 \cdot \sqrt{400 \cdot 0,6} - 0,5 \approx 19,36$. Da ein ganzzahliges α gewünscht war, ergibt sich als Lösung die Zahl $\alpha = 20$.

Ü5.4.2 Zwei Spieler A und B werfen eine Münze 10.001 Mal. Zeigt sich dabei „Kopf“ öfter als „Zahl“, so gewinnt A, anderenfalls B. Spieler A, dem der

Ausgang zu ungewiss ist, versucht, die Münze so zu fälschen, dass sie mit Wahrscheinlichkeit $p > 1/2$ Kopf zeigt. Wie groß muss p sein, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% zu gewinnen?

(Es reicht, die Wahrscheinlichkeiten approximativ mit dem Satz von de Moivre-Laplace zu bestimmen.)

Lösung Spieler A benötigt mindestens 5001 mal „Kopf“, um zu gewinnen. Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A bei 10001 Bernoulli-Experimenten mindestens 5001 mal Erfolg hat, soll demnach 95% betragen. Diese Wahrscheinlichkeit kann approximativ mit dem Satz von de Moivre-Laplace bestimmt werden:

$$\sum_{k=5001}^{k=10001} b(k, n; p) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x(5000.5)}^{x(10001.5)} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

wobei $x(t) := (t - np)/\sqrt{np(1-p)}$ mit $n = 10001$. Das heißt, dass die folgende Gleichung nach p aufgelöst werden muss:

$$0.95 = \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{erf}\left(\frac{10001.5-10001 \cdot p}{\sqrt{10001 \cdot p \cdot (1-p)}}\right)}{\sqrt{2}} - \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{5000.5-10001 \cdot p}{\sqrt{10001 \cdot p \cdot (1-p)}}\right)}{\sqrt{2}} \right);$$

dabei ist $\operatorname{erf}(y) := (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^y e^{-x^2/2} dx$. Da diese Gleichung nicht algebraisch gelöst werden kann, muss entweder iterativ geraten und die auftretenden Integrale numerisch gelöst werden oder ein Programm zur Lösung hinzugezogen werden. Es ergibt sich $p \approx 0.5082$.

Aufgaben zu Kapitel 6

Zu Abschnitt 6.1

Ü6.1.1 Sei X eine zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable. Für welche Werte von λ ist $P(X \in [2, 4]) = 5/36$?

Lösung Die Exponentialverteilung ist durch $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ gegeben. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{5}{36} &= P(X \in [2, 4]) = \lambda \int_2^4 e^{-\lambda x} dx \\ &= [-e^{-\lambda x}]_2^4 = e^{-2\lambda} - e^{-4\lambda}. \end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $y = e^{-2\lambda}$. Ihre Lösung ist $e^{-2\lambda} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3}$, also $\lambda_1 = \frac{\log(\frac{5}{6})}{-2} \approx 0.09$ und $\lambda_2 = \frac{\log(\frac{1}{6})}{-2} \approx 0.90$.

Ü6.1.2 Sei X eine zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable. Für welchen Wert von λ ist $P(X \in [2, 4])$ maximal?

Ü6.1.3 Beweisen Sie, dass positive Vielfache gedächtnisloser Wartezeiten wieder gedächtnislos sind, und zwar

- a) direkt unter Verwendung der Definition „gedächtnislos“;
 b) unter Verwendung von Satz 6.1.3.

Lösung Wir wollen beweisen, dass positive Vielfache αT einer gedächtnislosen Wartezeit T ebenfalls gedächtnislos sind.

- a) Für T gilt: $\mathbb{P}(\{T \geq s+t\}) = \mathbb{P}(\{T \geq s\})\mathbb{P}(\{T \geq t\})$ für beliebige $s, t \geq 0$. Für αT gilt dann:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\alpha T \geq s+t\}) &= \mathbb{P}(\{T \geq \frac{s}{\alpha} + \frac{t}{\alpha}\}) = \mathbb{P}(\{T \geq \frac{s}{\alpha}\})\mathbb{P}(\{T \geq \frac{t}{\alpha}\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\alpha T \geq s\})\mathbb{P}(\{\alpha T \geq t\}).\end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $\alpha > 0$ gilt.

- b) Es soll nun Satz 6.1.3 angewandt werden. Teil (ii) sagt, dass ein Parameter λ existiert, sodass die gedächtnislose Wartezeit T exponentialverteilt zu λ ist, also $\mathbb{P}(\{a \leq T \leq b\}) = \lambda \int_a^b e^{-\lambda x} dx$.

Betrachte nun wieder αT für $\alpha > 0$. Wir wollen zeigen, dass auch $\mathbb{P}_{\alpha T}$ exponentialverteilt zu einem Parameter $\tilde{\lambda}$ ist: Wir können $\tilde{\lambda} = \lambda/\alpha$ wählen.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{a \leq \alpha T \leq b\}) &= \mathbb{P}(\{\frac{a}{\alpha} \leq T \leq \frac{b}{\alpha}\}) \\ &= \lambda \int_{\frac{a}{\alpha}}^{\frac{b}{\alpha}} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\alpha} \int_a^b e^{-\lambda \frac{u}{\alpha}} du \\ &= \tilde{\lambda} \int_a^b e^{-\tilde{\lambda} u} du.\end{aligned}$$

Nach Satz 6.1.3 (i) ist also auch αT für $\alpha > 0$ gedächtnislos.

Ü6.1.4 Die Zeit, die Sie benötigen, um eine stark befahrene Vorfahrtsstraße mit Ihrem PKW zu überqueren, soll durch eine gedächtnislose Wartezeit modelliert werden. Im Mittel warten Sie 2 Minuten.

- a) Wie wahrscheinlich ist es, dass es heute länger als 3 Minuten dauert?
 b) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(\text{Es dauert länger als drei Minuten} \mid \text{Es dauert weniger als fünf Minuten})?$$

Ü6.1.5 $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ sei eine gedächtnislose Wartezeit. Finden Sie alle Zahlen $a > 0$, $b \geq 0$, so dass auch $aT + b$ gedächtnislos ist.

Ü6.1.6 Das Intervall $[0, +\infty[$ sei durch die stetige Dichtefunktion f zu einem Wahrscheinlichkeitsraum gemacht worden. Es gelte für alle $t \geq 0$

$$\frac{\int_t^\infty (s-t)f(s) ds}{\int_t^\infty f(s) ds} = \text{const.} =: \frac{1}{\lambda}.$$

Zeigen Sie, dass f die Dichte der Exponentialverteilung zum Parameter λ ist.

Der Quotient der Integrale ist gerade der Erwartungswert der Wartezeit unter der Bedingung, dass schon t Zeiteinheiten gewartet wurde. Die Bedingung sagt dann, dass dieser Wert unabhängig von t ist: Es nutzt nichts, schon lange gewartet zu haben, der Erwartungswert der restlichen Wartezeit ist immer gleich.

Zu Abschnitt 6.2

Ü6.2.1 Sie stehen vor drei besetzten Telefonzellen, vor Ihnen steht sonst niemand. Die jeweiligen Wartezeiten sind exponentialverteilt zu den Parametern 2, 3 und 5 (in Minuten). Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine der Telefonzellen innerhalb der nächsten 60 Sekunden frei?

Lösung Es ist $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Wartezeit $T = \min(T_1, T_2, T_3) \in [0, 1]$ ist. T ist exponentialverteilt (vgl. Satz 6.2.4) zum Parameter $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P(0 \leq T \leq 1) &= \lambda \int_0^1 e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^1 = 1 - e^{-\lambda} \\ &= 1 - e^{-10} \approx 0,9999546. \end{aligned}$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, innerhalb der nächsten 60 Sekunden telefonieren zu können nahezu 1.

Ü6.2.2 X_1, X_2, X_3, X_4 seien unabhängig und exponentialverteilt zu den Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Denken Sie sich eine Situation aus dem „wirklichen Leben“ aus, in dem die Zufallsvariable $X_1 + \min\{X_2, X_3, X_4\}$ von Interesse sein könnte und berechnen Sie die Dichtefunktion der zugehörigen Verteilung.

Ü6.2.3 Sei X eine zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable. Wir definieren eine weitere Zufallsvariable Y durch $Y(\omega) :=$ „die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich ω ist“. (Anders ausgedrückt: Für $\omega \in]n-1, n]$ ist $Y(\omega) = n$, $n = 1, 2, \dots$)

a) Beweisen Sie, dass Y eine Zufallsvariable ist.

b) Bestimmen Sie \mathbb{P}_Y . Zu welcher bekannten Klasse von Verteilungen gehört diese induzierte Wahrscheinlichkeit?

Zu Abschnitt 6.3

Ü6.3.1 X sei geometrisch verteilt zum Parameter λ . Was ist wahrscheinlicher: „ X ist gerade“ oder „ X ist ungerade“?

Ü6.3.2 Die Zufallsvariable X sei geometrisch verteilt zum Parameter $0 < q < 1$. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(\{X \in \{1, 2, 3\}\} | X \text{ ist gerade})$.

Ü6.3.3 Es sei $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ eine gedächtnislose diskrete Wartezeit. Es gilt also $P(T > s + t | T > s) = P(T > t)$ für alle $s, t \in \mathbb{N}_0$. Dann ist T nicht

gedächtnislos, wenn man T als \mathbb{R}^+ -wertig interpretiert: Es ist nicht richtig, dass $P(T \geq s+t \mid T \geq s) = P(T \geq t)$ für alle $s, t \geq 0$ gilt.

Lösung Wenn $T: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ eine diskrete gedächtnislose Wartezeit ist, dann gilt die Charakterisierungsgleichung

$$P(T > s+t) = P(T > t) \cdot P(T > s)$$

für jedes $s, t \in \mathbb{N}_0$. Erweitern wir diese Charakterisierung auf reelle Zahlen s, t , so müsste auch die Gleichung

$$P(T \geq s+t) = P(T \geq s) \cdot P(T \geq t)$$

für alle $s, t \geq 0$ gelten. Insbesondere folgt für $s = t = 1/3$ gerade

$$P(T > 2/3) = P(T > 1/3) \cdot P(T > 1/3) \quad \Leftrightarrow \quad P(T > 0) = P(T > 0)^2,$$

Widerspruch! Alternativ kann man hier auch die Familie aller diskreten gedächtnislosen Wartezeiten zu Hilfe ziehen und erhält mit dem gleichen Argument wie oben die Gleichung $q = q^2$, was (außer im trivialen Fall $q = 0$ oder $q = 1$) einen Widerspruch darstellt.

Ü6.3.4 Jemand wirft zwei Würfel so lange, bis er das erste Mal „Augensumme 11“ erhält.

- a) Wie oft muss er im Mittel würfeln?
- b) Nun hat er schon 20 Mal gewürfelt, ohne dass die Augensumme einmal 11 gewesen ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird er auch in den nächsten beiden Versuchen keinen Erfolg haben?

Lösung Zunächst zum Teil a). Die Wahrscheinlichkeit, beim Wurf zweier Würfel die Augensumme 11 zu erhalten, beträgt $2 \cdot (1/6)^2 = 2/36 = 1/18$, im Mittel erwarten wir also 18 Würfe, bis man zum ersten Mal die Augensumme 11 erhält.

Formal lässt sich das so begründen: Es handelt sich um eine unabhängigen Folge von Bernoulli-Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 1/18$. Das Warten auf den ersten Erfolg ist geometrisch verteilt mit dem Parameter $q = 1 - p$, und der Erwartungswert ist $1/(1 - q) = 1/p = 18$ (siehe S. 167 und S. 199).

Teil b) ist eine Fangfrage. Da die Würfe unabhängig sind, liegt natürlich die gleiche Situation wie am Anfang vor. Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei zwei aufeinanderfolgenden Versuchen zwei Misserfolge zu haben, beträgt $(17/18)^2 = 289/324 \approx 0.9$.

Elementare Stochastik

Ein Lernbuch - von Studierenden mitentwickelt

Behrends, E.

2013, XVIII, 374 S. 70 Abb., 15 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-8348-1939-0