

Lösungen ausgewählter Übungsaufgaben
zum Buch „Elementare Stochastik“
(Springer Spektrum, 2012)
Teil 2: Aufgaben zu den Kapiteln 3 und 4

Zu Abschnitt 3.1

Ü3.1.1 Es seien $X_n, n = 1, 2, \dots$ reellwertige Zufallsvariable (dabei seien die reellen Zahlen mit den Borelmengen als σ -Algebra versehen). Dann sind die folgenden Mengen Ereignisse:

- a) Die ω , bei denen mindestens ein X_n positiv ist.
- b) Die ω , bei denen alle X_n positiv sind.
- c) Die ω , bei denen die Folge $(X_n(\omega))_n$ beschränkt ist.

Lösung a) $E = \{\omega \in \Omega \mid \text{mindestens ein } X_n(\omega) \text{ ist positiv}\}$ ist ein Ereignis, da es die (abzählbare) Vereinigung der $E_n = \{X_n > 0\}$ ist, welche selbst Ereignisse sind, da die X_n Zufallsvariable sind.

b) Wie zuvor sind auch die $\{X_n \leq 0\}$ Ereignisse und damit auch deren Vereinigung $E = \bigcup_{n \geq 1} \{X_n \leq 0\}$. Die Menge der ω , bei denen alle X_n positiv sind, ist gerade $\Omega \setminus E$ und daher ebenso Ereignis. (Wem bekannt ist, dass in einer σ -Algebra auch abzählbare Schnitte enthalten sind, der kann das gesuchte Ereignis auch etwas direkter als $\bigcap_{n \geq 1} \{X_n > 0\}$ darstellen.)

c) Die gesuchte Menge lässt sich als $E = \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} \{|X_n| < m\}$ darstellen und ist Ereignis, da bei dieser Darstellung nur abzählbare Schnitte und Vereinigungen von Ereignissen auftreten.

Ü3.1.2 Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit der Eigenschaft, dass für jedes c die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\{X \geq c\})$ entweder 0 oder 1 ist. Zeigen Sie, dass X dann „im Wesentlichen konstant“ sein muss. Genauer: Es gibt ein c_0 , so dass $\mathbb{P}(\{X = c_0\}) = 1$.

Ü3.1.3 Der \mathbb{R}^2 sei mit den Borelmengen versehen, und $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine vektorwertige Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei durch $X(\omega) := (X_1(\omega), X_2(\omega))$ definiert, wobei $X_1, X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweisen Sie: X ist genau dann Zufallsvariable, wenn X_1 und X_2 Zufallsvariable sind.

Ü3.1.4 X sei eine reellwertige Zufallsvariable auf Ω . Definiere $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch $Y(\omega) := X(\omega)$ für $|X(\omega)| < 1$ und $Y(\omega) := 0$ sonst. Zeigen Sie, dass auch Y eine Zufallsvariable ist.

Ü3.1.5 Sei X eine Zufallsvariable. Beweisen Sie: X ist genau dann fast sicher konstant, wenn es keine Zahl a mit der Eigenschaft

$$\mathbb{P}(\{X < a\}) > 0 \text{ und } \mathbb{P}(\{X > a\}) > 0$$

gibt. Dabei heißt X fast sicher konstant, wenn es ein Ereignis N mit $\mathbb{P}(N) = 0$ und eine Zahl c so gibt, dass $X(\omega) = c$ für $\omega \notin N$.

Tipp: In der schwierigeren Beweisrichtung könnte man es mit der Konstanten $c := \sup\{a \mid \mathbb{P}(\{X < a\}) = 0\}$ versuchen. Zeigen Sie zuerst, dass das wirklich eine reelle Zahl ist (Teil 1: Es kann nicht sein, dass $\mathbb{P}(\{X < a\}) = 0$ für alle a gilt; Teil 2: Es gibt ein a mit $\mathbb{P}(\{X < a\}) = 0$.)

Lösung Zur einfacheren Beweisrichtung „ \Rightarrow “: Sei X fast sicher konstant bei c , d.h. es ist $\mathbb{P}(X \neq c) = 0$ und damit insbesondere $\mathbb{P}(X > c) = 0$ und $\mathbb{P}(X < c) = 0$. Für jedes $a > c$ ist ebenfalls $\mathbb{P}(X > a) = 0$ und für jedes $a < c$ ist $\mathbb{P}(X < a) = 0$. Damit gibt es kein $a \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}(X < a) > 0$ und $\mathbb{P}(X > a) > 0$. Zur schwierigeren Beweisrichtung „ \Leftarrow “: Wie im Tipp beschrieben wollen wir zeigen, dass X bei $c := \sup\{a \mid \mathbb{P}(X < a) = 0\}$ fast sicher konstant ist. Damit c existiert, muss die fragliche Menge nichtleer und nach oben beschränkt sein. Wäre sie unbeschränkt, so gäbe es beliebig große $a \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}(X < a) = 0$. Damit wäre automatisch $\mathbb{P}(X < a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und daher $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{a \in \mathbb{N}} \{X < a\}\right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X < a) = 0$. Da jedoch immer $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ist, muss $\{a \mid \mathbb{P}(X < a) = 0\}$ beschränkt sein. Die Menge ist außerdem nichtleer: Nach Voraussetzung gilt für alle $a \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}(X < a) = 0$ oder $\mathbb{P}(X > a) = 0$. Es kann nicht für alle $a \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}(X > a) = 0$ gelten (sonst wäre wieder $\mathbb{P}(\Omega) = 0$). Folglich gibt es ein a mit $\mathbb{P}(X < a) = 0$ und damit ist die Menge nichtleer.

Damit existiert c und es gilt $\mathbb{P}(X < c) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X < c - \frac{1}{n}\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X < c - \frac{1}{n}) = 0$. Aufgrund der Definition von c gilt $\mathbb{P}(X < a) > 0$ für alle $a > c$ und damit nach Voraussetzung $\mathbb{P}(X > a) = 0$. Mit der gleichen Argumentation wie für $\mathbb{P}(X < c)$ folgt nun $\mathbb{P}(X > c) = 0$. X ist damit fast sicher konstant bei c .

Zu Abschnitt 3.2

Ü3.2.1 $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ modelliere das Werfen von drei fairen Würfeln. $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ist also $\{1, \dots, 6\}^3$ mit der Gleichverteilung. Bestimmen Sie \mathbb{P}_X für die Zufallsvariable $X : (i, j, k) \rightarrow i - j + k$.

Ü3.2.2 $\Omega = [1, 27]$ sei mit der Dichte $f(x) = cx$ versehen (c ist eine geeignete Konstante). Eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $X(x) := \sqrt[3]{x}$ definiert. Bestimmen Sie die Dichte von \mathbb{P}_X und berechnen Sie damit $\mathbb{P}(\{X \in [1, 2]\})$.

Ü3.2.3 Bei den neuen ALDI-Computern hat es eine Panne gegeben. Der Zufallsgenerator wirft nicht, wie beabsichtigt, in $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallszahlen aus, sondern Zahlen, die gemäß der Dichte $f(x) := 2x$ (auf $[0, 1]$) verteilt sind. Die Computer werden zu einem Spottpreis verkauft. Stellen Sie die **random**-Funktion durch ein geeignetes Unterprogramm wieder her!

(Genauer heißt das: Sie sollen eine Zufallsvariable $X : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ so finden, dass \mathbb{P}_X die Gleichverteilung auf $[0, 1]$ ist. Falls Sie übrigens während des Beweises eine Funktion g brauchen, für die (für alle x) $g'(x)g(x) = 0.5$ gilt, so versuchen Sie es doch mit $g(x) = \sqrt{x}$.)

Lösung Gesucht ist zunächst eine Zufallsvariable, die die gewünschte Gleichverteilung auf $[0, 1]$ wiederherstellt. Das bedeutet: Die Dichtefunktion auf dem Zielraum soll die Form $h(y) = 1$ haben für alle $y \in [0, 1]$. Satz 3.2.3 liefert eine Berechnungsvorschrift für h , sofern die Zufallsvariable X gegeben ist und einige Eigenschaften erfüllt. In diesem Fall ist es aber anders herum, wir haben bereits die gewünschte Zieldichtefunktion gegeben und suchen die Zufallsvariable. Wir betrachten also die gegebene Gleichung

$$h(y) = f \circ X^{-1}(y) \cdot (X^{-1})'(y)$$

und lösen nach der Zufallsvariablen X auf. Sollte X dann die im Satz 3.2.3 genannten Eigenschaften erfüllen, ist die Aufgabe gelöst. Setzt man h und f ein, so entsteht

$$1 = 2(X^{-1})(X^{-1})'.$$

Die Aufgabenstellung verleitet an dieser Stelle dazu, $X^{-1}(y) = \sqrt{y}$ zu setzen. Der Test ergibt:

$$\sqrt{y} \cdot \sqrt{y}' = \sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}.$$

X^{-1} erfüllt tatsächlich die Gleichung. Die gesuchte Zielfunktion ist daher $X(x) = x^2$. X ist also stetig differenzierbar, bijektiv und streng monoton steigend. Auch die Ableitung $X^{-1}(y) = \sqrt{y}$ ist stetig differenzierbar, zumindest auf $(0, 1]$. Daher waren die Voraussetzungen für Satz 3.2.3 erfüllt und X führt die Zufallszahlen der Aldi-Rechner auf eine Gleichverteilung zurück.

Ü3.2.4 X sei exponentialverteilt zum Parameter λ . Zeigen Sie, dass cX für $c > 0$ ebenfalls exponentialverteilt ist. Wie groß ist der zugehörige Parameter?

Ü3.2.5 Beweisen Sie ein zu Satz ?? analoges Ergebnis für streng monoton fallende Zufallsvariable.

Ü3.2.6 Es sei $f : [-1, 1] \rightarrow [0, +\infty[$ eine stetige Dichtefunktion. Weiter sei $X : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Zufallsvariable. Wir setzen voraus, dass X auf dem Teilintervall $[0, 1]$ streng monoton steigt. Bestimmen Sie in Analogie zu Satz ?? eine Dichtefunktion für \mathbb{P}_X . Berechnen Sie diese Dichtefunktion konkret für den Fall $f(x) = (1+x)/2$ und $X(x) = x^2$.

Ü3.2.7 F_X sei die Verteilungsfunktion einer reellwertigen Zufallsvariablen X . Zeigen Sie:

- a) F_X besitzt höchstens abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen.
- b) F_X ist unstetig bei einem $x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $P_X(\{x\}) > 0$ gilt.

Zu Abschnitt 3.3

Ü3.3.1 In einem Kasino wird nach folgenden Regeln mit drei Würfeln gespielt: Ein Spieler bekommt 1000 Euro für drei Sechsen, 100 Euro für zwei Sechsen und 10 Euro für eine Sechse. In allen anderen Fällen gibt es gar nichts. Welchen

Mindesteinsatz wird der Kasinobetreiber verlangen, wenn er nicht draufzahlen will?

Lösung

Die Wahrscheinlichkeiten, mit drei Würfeln dreimal, zweimal oder einmal eine 6 zu würfeln sind

$P(\{3\}) = \frac{1}{6^3}$, $P(\{2\}) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{6^3}$ und $P(\{1\}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{6^3}$.
Der erwartete Gewinn (in Euro) ist

$$E(\text{Gewinn}) = 1000 \cdot \frac{1}{6^3} + 100 \cdot \frac{15}{6^3} + 10 \cdot \frac{75}{6^3} = \frac{2575}{216} \approx 11,921.$$

Somit sollte der Betreiber 11,93 EUR verlangen, um nicht draufzuzahlen.

Ü3.3.2 Bestimmen Sie die Varianz und die Streuung der Poissonverteilung.

Ü3.3.3 Bestimmen Sie die Varianz und die Streuung der geometrischen Verteilung.

Ü3.3.4 Bestimmen Sie die Varianz und die Streuung der Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$.

Ü3.3.5 Bestimmen Sie die Varianz und die Streuung der Exponentialverteilung.

Ü3.3.6 Es sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(X)$ genau dann existiert, wenn $\sum_n \mathbb{P}(X \geq n) < \infty$ gilt.

Zusatz: Ist $X : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$, so gilt sogar $\mathbb{E}(X) = \sum_n \mathbb{P}(X \geq n)$ im Fall $\sum_n \mathbb{P}(X \geq n) < \infty$.

Lösung

Wir betrachten die Mengen $M_n := \{X \geq n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt natürlich für $m \leq n$ der Zusammenhang $M_m \subset M_n$. Sei nun χ_n die charakteristische Funktion der Menge M_n .

Für ein beliebiges $\omega \in \Omega$ liegt $X(\omega)$ in einem Intervall $[k, k+1)$ für ein passendes $k \in \mathbb{N}$. Dementsprechend gilt $\omega \in M_i$ für alle $i \leq k$ und $\omega \notin M_{k+1}$. Da dies für alle ω gilt, können wir die Funktion $\sum_n \chi_n$ betrachten und erkennen

$$X(\omega) \leq \sum_n \chi_n(\omega) \leq X(\omega) + 1.$$

Für eine Beweisrichtung sei $\mathbb{E}(X) < \infty$. Dann gilt

$$\sum_n \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_n \mathbb{E}(\chi_n) = \mathbb{E}\left(\sum_n \chi_n\right) \leq \mathbb{E}(X+1) = \mathbb{E}(X) + 1 < \infty.$$

Für die Umkehrung sei $\sum_n \mathbb{P}(X \geq n) < \infty$. Dann gilt entsprechend

$$\infty > \sum_n \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_n \mathbb{E}(\chi_n) = \mathbb{E}\left(\sum_n \chi_n\right) \geq \mathbb{E}(X).$$

Für den Zusatz, also den diskreten Fall, gilt, dass ω in M_k liegt, genau dann, wenn $X(\omega) = k$ ist. Dementsprechend gilt $X = \sum_n \chi_n$ und die Gleichheit folgt sofort.

Ü3.3.7 Ein Stab der Länge 1 werde zufällig in zwei Teile zerbrochen (Bruchstelle gleichverteilt).

- Wie groß ist der Erwartungswert für X , wobei X die Länge des kleineren der beiden Stücke misst?
- Berechnen Sie auch den Erwartungswert des Quotienten "kürzeres Stück durch längeres Stück".
- In diesem Aufgabenteil sei die Bruchstelle gleichverteilt in $[0.5 - c, 0.5 + c]$, wobei $0 \leq c \leq 0.5$. Die Zufallsvariable X sei wie in „a)“ definiert. Für welche Werte von c ist der Erwartungswert von X größer als 0.4?

Zu Abschnitt 3.4

Ü3.4.1 Es werden n Kugeln auf gut Glück auf n Fächer verteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Fach leer bleibt?

Lösung Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Kugeln und n Ksten, genau ein Kasten leer bleibt. Dazu berechnen wir die Anzahl der günstigen und die Anzahl der möglichen Ereignisse und dividieren sie. Bei den günstigen Ereignissen gilt, dass die Reihenfolge unwichtig und Wiederholung möglich ist (in einem Kasten können mehrere Kugeln liegen). Die Anzahl bei k Kugeln und n Kästen berechnet sich folgendermaßen: $\binom{n+k-1}{k}$. Wir ersetzen noch k durch n und erhalten #mögliche Ereignisse = $\binom{2n-1}{n}$. Für die günstigen Ereignisse müssen wir zählen, wie viele Möglichkeiten es gibt, dass genau ein Kasten frei bleibt. Es gibt n Kästen, von denen einer frei bleiben muss. Für die Kugel, die nicht in einen eigenen Kasten kommt, existieren $n - 1$ verschiedene Möglichkeiten, also insgesamt $n(n - 1)$ günstige Möglichkeiten. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{\# \text{ günstige Ereignisse}}{\# \text{ mögliche Ereignisse}} = \frac{n(n-1)}{\binom{2n-1}{n}}$.

Ü3.4.2 Eine endliche Folge $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ in \mathbb{Z}^2 soll ein *Treppenweg* genannt werden, wenn stets entweder $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) + (0, 1)$ gilt oder $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) + (1, 0)$, wenn es also immer jeweils einen Schritt nach rechts oder nach oben geht.

Wie viele Treppenwege gibt es von $(0, 0)$ nach $(20, 30)$?

Lösung Wie man seinen Treppenweg auch anstellt, in jedem Fall gibt es insgesamt 20 Schritte nach rechts und 30 nach oben, lediglich die Reihenfolge ist unterschiedlich. Aus 50 insgesamt getätigten Schritten müssen also die 20 erwählt werden, welche nach rechts führen sollen. Die Anzahl der Möglichkeiten, 20 aus 50 Schritten zu wählen entspricht also der Anzahl an möglichen Treppenwegen von $(0, 0)$ nach $(20, 30)$ und das sind gerade

$$\binom{50}{20} = \frac{50!}{20! \cdot 30!} = 47\,129\,212\,243\,960$$

Möglichkeiten.

Ü3.4.3 Wie viele verschiedene neunbuchstabile Wörter kann man aus den Buchstaben $A, B, C, E, E, H, I, K, O, R, S, S, T, T, T, W, Z$ bilden? Jeder Buchstabe dieses Vorrats darf dabei nur einmal verwendet werden. („STOCHASTIK“ ist also zugelassen, „STOCKKORB“ aber nicht.)

Ü3.4.4 Beweisen Sie die Formel $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ für $k \leq n$.

Zu Abschnitt 3.5

Ü3.5.1 Diskutiere die Wahrscheinlichkeiten für das neue Lotto:

„5 aus 35, mit zwei Zusatzzahlen“.

Es werden also aus 35 nummerierten Kugeln 5 „Richtige“ und zwei Zusatzzahlen gezogen, und gefragt sind die interessierenden Wahrscheinlichkeiten („5 Richtige“, „4 Richtige mit Zusatzzahl“, „3 Richtige mit 2 Zusatzzahlen“, usw.).

Lösung Wir leiten die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis

$$E := \{4 \text{ Richtige} + \text{Zusatzzahl}\}$$

explizit her, die anderen Lösungen funktionieren analog. Wir betrachten zunächst die Menge aller möglichen Ziehungen: Wir ziehen erst 5 aus 35 Kugeln ($\binom{35}{5}$ Möglichkeiten) und im Anschluss zwei Zusatzzahlen aus den verbleibenden 30 ($\binom{30}{2}$ Möglichkeiten). Die Multiplikation dieser beiden Zahlen liefert uns die Anzahl aller Ziehungen, die eintreten können.

Die Anzahl aller für uns günstigen Fälle berechnen wir so: Wir wählen aus den 5 gezogenen Zahlen „unsere“ 4 Richtigen aus ($\binom{5}{4}$ Möglichkeiten), weiter „unsere“ Zusatzzahl ($\binom{2}{1}$ Möglichkeiten) und schließlich die zwei verbleibenden „falschen“ Zahlen ($\binom{28}{2}$ Möglichkeiten). Multiplizieren liefert die Anzahl aller günstigen Fälle. Zusammen erhalten wir also

$$P(E) = \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{28}{2}}{\binom{35}{5} \cdot \binom{30}{2}} = \frac{9}{336226} \approx 2.6768 \cdot 10^{-5}.$$

Analog berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für 5 Richtige zu $1/\binom{35}{5}$. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „3 Richtige und 2 Zusatzzahlen“ ist genauso groß wie die für das Ereignis E (man ersetze $\binom{5}{4} \cdot \binom{2}{1}$ durch $\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1}$).

Ü3.5.2 Sei σ eine Zufallspermutation der Zahlen $1, \dots, n$. Weiter sei k eine natürliche Zahl, $k \leq n$. Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit, dass in σ genau k Elemente festbleiben.

Schließen Sie aus der Formel, dass diese Wahrscheinlichkeit für festes k und genügend große n durch $1/(k!e)$ approximiert werden kann.

Bei zufälligem Zusammenwürfeln von Tanzpaaren ist es also ziemlich wahrscheinlich, dass nicht nur ein Paar sondern gleich mehrere in der alten Zusammensetzung antreten.

Ü3.5.3 In Italien spielen sie „6 aus 90“. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige und denken Sie sich eine originelle Illustration aus, um diese geringe Wahrscheinlichkeit zu veranschaulichen.

Ü3.5.4 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto (6 aus 49) zwei aufeinanderfolgende Zahlen zu ziehen?

Tipp: Um die Anzahl der günstigen Ausgänge zu bestimmen, ist es hilfreich, die Elementarereignisse als 6-Tupel (n_1, \dots, n_6) , $n_i \in \{1, \dots, 49\}$ mit $n_1 < n_2 < \dots < n_6$, aufzufassen. Wie lassen sich dann die günstigen Ausgänge beschreiben? Finden Sie ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N < 49$, so dass die gesuchte Anzahl gerade die Anzahl aller Ziehungen „6 aus N “ ist.

Ü3.5.5 Wir betrachten \mathbb{N}_0 , versehen mit allen Poissonverteilungen. Ein (unbekannter) Parameter λ wird ausgewählt, dann wird einmal abgefragt. Das Ergebnis sei n . Finden Sie eine maximum-likelihood-Schätzung für λ .

Lösung Sei n das Ergebnis des Zufallsexperiments. Wir setzen zunächst $n \neq 0$ voraus und betrachten

$$L_n(\lambda) := P(\{X = n\}) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Gesucht ist das Maximum dieser Likelihood-Funktion. Dazu leiten wir L nach λ ab und erhalten

$$L'_n(\lambda) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{n-1}}{n!} \cdot (n - \lambda).$$

Nullsetzen liefert $n = \lambda$. Aus der Problemstellung heraus ergibt sich, dass λ ein Maximum ist (alternativ: zweite Ableitung bilden!).

Im Fall $n = 0$ erhalten wir die Likelihood-Funktion $L_0(\lambda) = e^{-\lambda}$ mit dem Maximum in $\lambda = 0$.

Aufgaben zu Kapitel 4

Zu Abschnitt 4.1

Ü4.1.1 Das Intervall $[0, 1]$ sei mit der Gleichverteilung versehen. Finden Sie alle Intervalle $[a, b]$, so dass $[a, b]$ und $[0, 0.5]$ unabhängig sind.

Lösung Zunächst sind alle Intervalle $[a, b]$ mit $a = b$ unabhängig von $[0, 0.5]$, da dies Nullmengen sind ($\mathbb{P}([a, a] \cap [0, 0.5]) = 0$ und $\mathbb{P}([a, a]) \cdot \mathbb{P}([0, 0.5]) = 0$), sei also nun $a < b$. Das Intervall $[a, b]$ kann nicht in $[0, 0.5]$ enthalten sein, denn sonst wäre $\mathbb{P}([a, b] \cap [0, 0.5]) = \mathbb{P}([a, b])$, aber $\mathbb{P}([a, b]) \cdot \mathbb{P}([0, 0.5]) = \frac{1}{2} \mathbb{P}([a, b])$. Außerdem muss $a < 0.5$ gelten, denn sonst wäre wieder $\mathbb{P}([a, b]) \cdot \mathbb{P}([0, 0.5]) = \frac{1}{2} \mathbb{P}([a, b])$, aber $\mathbb{P}([a, b] \cap [0, 0.5]) = 0$. Es bleibt folglich der Fall $a < 0.5$ und

$b > 0.5$. Erneut ist $\mathbb{P}([a, b] * \mathbb{P}([0, 0.5])) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([a, b])$, d.h. wir müssen $[a, b]$ so wählen, dass $\mathbb{P}([a, b] \cap [0, 0.5]) = \mathbb{P}([a, 0.5]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([a, b])$ gilt. Die beiden Intervalle sind folglich genau dann unabhängig, falls entweder $a = b$ gilt oder falls genau die Hälfte des Intervalls $[a, b]$ in $[0, 0.5]$ liegt (das gilt für $a + b = 1$).

Ü4.1.2 Wir betrachten die Poissonverteilung auf $\{0, 1, \dots\}$ zum Parameter λ . Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A | B)$ für $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$.

Ü4.1.3 Bestimmen Sie eine stetige Dichte f auf $[0, 1]$ so, dass $[0, 0.5]$ und $[0.4, 0.8]$ unabhängig sind.

Ü4.1.4 Aus einem vollständigen Skatenspiel wurde das Kreuz As entfernt. Die restlichen Karten seien mit der Gleichverteilung versehen.

- Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\text{König} | \text{Kreuz})$.
- Zeigen Sie, dass es nur auf triviale Weise möglich ist, zwei unabhängige Ereignisse A, B zu finden. (Das soll bedeuten: A, B sind genau dann unabhängig, wenn A oder B die leere Menge oder der ganze Raum ist.)

Ü4.1.5 In einem Kasten befinden sich 4 weiße, 6 rote und 10 grüne Kugeln. Es wird zweimal ohne Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsbaumes die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gleichfarbige Kugeln gezogen wurden.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass keine grüne Kugel gezogen wurde.

Ü4.1.6 Die Menge $\{1, \dots, n\}$ sei mit der Gleichverteilung versehen, dabei sei $n > 1$. Zeigen Sie: n ist genau dann eine Primzahl, wenn aus „ A, B Ereignisse, A, B unabhängig“ stets folgt, dass eine der Mengen leer oder gleich $\{1, \dots, n\}$ ist.

Lösung Wir betrachten die Menge $\{1, \dots, n\}$ mit der Gleichverteilung. Wir zeigen beide Implikationen:

\Rightarrow Sei $n = p$ eine Primzahl, und seien A und B unabhängige Ereignisse. Aus der Charakterisierungsgleichung für Unabhängigkeit folgt $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$, genauer: $\frac{|A|}{p} \cdot \frac{|B|}{p} = \frac{|A \cap B|}{p}$, was äquivalent zu $|A| \cdot |B| = |A \cap B| \cdot p$ ist. Offenbar gilt also $p \mid |A| \cdot |B|$, und damit $p \mid |A|$ oder $p \mid |B|$. Wegen $|A|, |B| \leq p$ folgt die Aussage aus der Aufgabenstellung.

\Leftarrow Es gelte folgende Aussage: Sind die Mengen $A, B \subset \{1, \dots, n\}$ unabhängig, dann gilt $A = \emptyset$ oder $A = \{1, \dots, n\}$ (oder $B = \emptyset$ oder $B = \{1, \dots, n\}$). Zu zeigen ist, dass dann n eine Primzahl sein muss. Wir führen einen Kontrapositionsbeweis. Sei also n keine Primzahl. Wir weisen nun die Existenz zweier unabhängiger Mengen $A, B \subset \{1, \dots, n\}$ nach, so dass weder A noch B leer oder die ganze Menge sind.

Wir können n als Produkt seiner Primfaktoren darstellen: $n = \prod_{i=1}^d p_i$ für $d \geq 2$. Wir konstruieren die Mengen A und B gerade so, dass die jeweiligen Kardinalitäten die Unabhängigkeitsbedingung $|A| \cdot |B| = |A \cap B| \cdot \prod_{i=1}^d p_i$ erfüllen. Wählen wir $A = \{1, 2, \dots, m\}$ und $B = \{m, m+1, \dots, m+p_d-1\}$

mit $m = \prod_{i=1}^{d-1} p_i$, so erhalten wir $|A| = \prod_{i=1}^{d-1} p_i$, $|B| = p_d$ sowie $|A \cap B| = 1$ (Man beachte, dass dies nur möglich ist, weil wir uns auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum befinden, auf dem wir jede Menge als Ereignis zulassen!). Zusammen gilt also:

$$|A| \cdot |B| = \prod_{i=1}^{d-1} p_i \cdot p_d = 1 \cdot \prod_{i=1}^d p_i = |A \cap B| \cdot n,$$

was unseren Kontrapositionsbeweis abschließt.

Ü4.1.7 Herr A. hat seine Bachelorarbeit geschrieben. Er bittet zwei Freunde darum, nach Rechtschreibfehlern zu suchen. Sie lesen die Arbeit unabhängig voneinander. Der erste findet k_1 , der andere k_2 Fehler, dabei gibt es k Fehler, die beide angestrichen haben. Ermitteln Sie daraus einen Schätzwert für die wirkliche Fehleranzahl k_0 .

Tipp: Sei k_0 die Anzahl der wirklichen Fehler. Wenn dann der erste Freund Fehler mit Wahrscheinlichkeit p_1 findet, so sollte $k_1 \approx k_0 p_1$ gelten. Und so weiter. (Die Unabhängigkeit ist auch noch zu berücksichtigen: Wie wahrscheinlich ist es, dass beide den gleichen Fehler finden?) So erhält man drei Gleichungen für p_1, p_2, k_0 , und damit ist k_0 leicht zu bestimmen.

Lösung Sei Ω die Menge aller Fehler, und $F_1, F_2 \subset \Omega$ die Mengen der Fehler, die der erste bzw. der zweite Freund gefunden haben. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit von $F_1 \cap F_2$, also dass ein Fehler von beiden Freunden gefunden wurde, folgende Gleichung:

$$\mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) = \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(F_1|F_2)\mathbb{P}(F_2)$$

Beim ersten Gleichheitszeichen wird die Unabhängigkeit beider Ereignisse genutzt, beim zweiten die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit. Nach Einsetzen wird diese Gleichungsfolge nun zu

$$p_1 p_2 = \frac{k}{k_0} = \frac{k}{k_2} p_2.$$

Durch Kürzen erhalten wir nun die Gleichung $p_1 = k/k_2$, d.h. aus den bekannten Werten k und k_2 können wir p_1 berechnen. Aus dem daraus erhaltenen Wert für p_1 und der bereits vorgegebenen Schätzung $k_1 \approx k_0 p_1$ können wir schließlich das gesuchte k_0 berechnen, d.h. die Schätzung für die Anzahl k_0 aller Fehler lautet

$$k_0 \approx \frac{k_1 k_2}{k}.$$

Man überlege sich, dass das Ergebnis plausibel ist, und beachte, dass die Rollen von k_1 und k_2 vertauschbar sind.

Zu Abschnitt 4.2

Ü4.2.1 Drei Kästen K_1, K_2, K_3 enthalten gut durchmischt schwarze und weiße Kugeln. Es enthalte

- K_1 : 2 schwarze und 4 weiße Kugeln;
 K_2 : 3 schwarze und 5 weiße Kugeln;
 K_3 : 1 schwarze und 3 weiße Kugeln.

- a) Aus Kasten K_3 wird dreimal mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel weiß, die zweite schwarz und die dritte wieder weiß ist?
 b) Nun wird zunächst einer der Kästen zufällig ausgewählt (jeder mit Wahrscheinlichkeit $1/3$), aus dem dann einmal gezogen wird. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert das eine weiße Kugel?
 c) Wenn eine Ziehung wie in „b)“ eine weiße Kugel liefert, mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde dann im ersten Schritt Kasten K_2 gewählt?

Ü4.2.2 In einem Laden ist eine Alarmanlage eingebaut, die im Falle eines Einbruchs mit Wahrscheinlichkeit 0.99 die Polizei alarmiert. In einer Nacht ohne Einbruch wird mit Wahrscheinlichkeit 0.002 Alarm ausgelöst. (Eine Maus berührt die Anlage o. ä.) Die Einbruchswahrscheinlichkeit für eine Nacht ist 0.0005. Die Anlage hat gerade Alarm gegeben. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass gerade ein Einbruch stattfindet.

Lösung Seien die in der Aufgabe betrachteten Ereignisse wie folgt definiert:

- A = „Die Alarmanlage ist ausgelöst worden.“
- B = „Es wird eingebrochen.“

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(B|A)$. Der Satz von Bayes (4.2.2) liefert folgenden Zusammenhang:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B_2)(1 - \mathbb{P}(B))}$$

Die gegebenen Wahrscheinlichkeiten eingesetzt, folgt

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{0.99 \cdot 0.0005}{0.99 \cdot 0.0005 + 0.002 \cdot (1 - 0.0005)} \approx 0.19847$$

Nur mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 20% handelt es sich also tatsächlich um einen Einbruch.

Ü4.2.3 Es geht um das Problem auf Seite ?? („Erfolg macht sicher“). Dort wurden die Kästen gleichverteilt ausgesucht, d. h. der i -te Kasten wurde mit Wahrscheinlichkeit $1/n$ gewählt.

- a) Diskutieren Sie die Variante, bei der der i -te Kasten mit Wahrscheinlichkeit $2i/[n(n+1)]$ gewählt wird ($i = 1, \dots, n$); es werden also mit größerer Wahrscheinlichkeit Kästen mit „vielen“ roten Kugeln ausgewählt.

Wie ist in diesem Fall die bedingte Wahrscheinlichkeit, nach k Erfolgen noch einen weiteren zu haben? Geben Sie die exakte Lösung an sowie eine geeignete Näherung mit Hilfe einer Integration.

b) Diesmal sei die Wahrscheinlichkeit für den i -ten Kasten $2(n-i+1)/[n(n+1)]$. Bestimmen Sie auch für diese Situation die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass es nach k Erfolgen noch einen weiteren gibt (Formel und Integralapproximation).

Ü4.2.4 Diskutieren Sie das Ziegenproblem in der Variante mit k Türen, wobei $k > 2$: Es gibt einen Gewinn, der Kandidat wählt, der Quizmaster öffnet $k-2$ Türen, und der Kandidat darf noch einmal wechseln. Würden dadurch seine Gewinnchancen steigen? Und wenn ja, um wie viel?

Ü4.2.5 Falls Sie am Sonntagvormittag das Radio bei einem zufällig gewählten Sender einstellen, erklingt mit 20 Prozent Wahrscheinlichkeit Orgelmusik, an den anderen Vormittagen nur mit 2 Prozent Wahrscheinlichkeit.

Nun hatten Sie in den Semesterferien ein etwas unstrukturiertes Leben, die Tage der Woche waren alle gleichberechtigt. An irgendeinem Vormittag wachten Sie auf, und beim Radio-Einschalten – der Sender wurde zufällig gewählt – erklang Orgelmusik. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war das ein Sonntag?

Lösung Die Bezeichnung für Sonntag sei S , die für Orgelmusik O . Gesucht ist $\mathbb{P}(S | O)$. Es ist bekannt, dass $P(S) = \frac{1}{7}$ und $P(\neg S) = \frac{6}{7}$, sowie $P(O | S) = \frac{1}{5}$ und $P(O | \neg S) = \frac{2}{100}$ betragen. Die Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit erfolgt durch Anwenden des Satzes von Bayes:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S | O) &= \frac{\mathbb{P}(O | S) \cdot \mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(O | S) \cdot \mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(O | \neg S) \cdot \mathbb{P}(\neg S)} \\ &= \frac{5}{8} = 62,5\%.\end{aligned}$$

Ü4.2.6 Hier geht es um das Umkehren bedingter Wahrscheinlichkeiten. Es sei A das Ereignis „der Patient hat die Krankheit K “, und B bedeutet, dass ein Test auf K positiv verlaufen ist. Finden Sie – mit Begründung – eine Formel für $P(\neg A | \neg B)$, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Patient K *nicht* hat, wenn das Testergebnis negativ ist. Diese Formel soll die Zahlen $P(A)$, $P(B|A)$ und $P(B|\neg A)$ enthalten.

Berechnen Sie danach $P(\neg A | \neg B)$ für die konkreten Werte

$$P(A) = 0.04, \quad P(B|A) = 0.99, \quad P(B|\neg A) = 0.05.$$

Ü4.2.7 (Das diskrete Interview): In einer Urne sind 1000 Zettel mit Fragen. Auf 500 Zetteln steht „Ist die letzte Ziffer Ihrer Personalausweisnummer gerade?“, auf den anderen 500 eine Frage F , die mit „ja“ oder „nein“ zu beantworten ist, auf die aber vor Zeugen nur ungern eine ehrliche Antwort gegeben wird (Beispiele sollten jedem selbst einfallen). Um zu erfahren, mit welcher Wahrscheinlichkeit p die Interviewten F mit „ja“ beantworten, wird so verfahren: Der Interviewte zieht einen Zettel und antwortet; dabei weiß der Interviewer nicht, welcher Zettel gezogen wurde. Wie kann man nun p schätzen, wenn viele Interviews geführt wurden?

Lösung Wir bezeichnen mit F_h das Ereignis *harmlose Frage*, also die Frage nach der letzten Ziffer der Ausweisnummer, F_p stehe für *peinliche Frage*. Die befragte Person antwortet mit *ja* sei durch J abgekürzt und N stehe für die Antwort *nein*.

Gesucht ist also $p = \mathbb{P}(J \mid F_p)$.

Wir setzen voraus, dass die Hälfte aller Ausweise mit einer geraden Ziffer endet.

Es ist also $\mathbb{P}(J \mid F_h) = 0.5$ als bekannt vorausgesetzt.

Da es von beiden Fragen jeweils 500 Zettel gibt, gilt $\mathbb{P}(F_p) = \mathbb{P}(F_h) = 0.5$

Wir wenden nun Satz 4.2.1 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit) an:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J) &= \mathbb{P}(J \mid F_p)\mathbb{P}(F_p) + \mathbb{P}(J \mid F_h)\mathbb{P}(F_h) \\ &= p \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.5\end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass von N befragten Personen n mit *ja* geantwortet haben.

Wir können $\mathbb{P}(J)$ also durch n/N schätzen.

Auf diese Weise erhalten wir für p die Schätzung

$$p = 2 \left(\frac{n}{N} - 0.25 \right).$$

Zu Abschnitt 4.3

Ü4.3.1 $\Omega := \{1, \dots, n\}^m$ sei mit der Gleichverteilung versehen. Wir definieren $E_{k,l} \subset \Omega$ durch $E_{k,l} := \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_k = l\}$ für $k = 1, \dots, m$ und $l = 1, \dots, n$. Was ist die maximale Anzahl, die Sie aus diesen $m \cdot n$ Mengen wählen können, um unabhängige Ereignisse zu erhalten?

Ü4.3.2 Seien A, B, C Ereignisse (in irgendeinem Wahrscheinlichkeitsraum). Falls A und B unabhängig sind, so folgt aus $A \cap B \subset C \subset A \cup B$, dass $\mathbb{P}(A \cap C) \geq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ gilt.

Lösung Wir definieren zunächst

$a := P(A \cap B)$; $b := P(A \setminus B)$; $c := P(B \setminus A)$; $\tilde{b} := P(C \setminus B)$; $\tilde{c} := P(C \setminus A)$.

Wegen der Voraussetzung $A \cap B \subset C$ gilt $C = (A \cap B) \cup (C \setminus B) \cup (C \setminus A)$ und folglich $P(C) = a + \tilde{b} + \tilde{c}$. Außerdem gilt $P(A) = a + b$ und somit ist

$$a + \tilde{b} \geq (a + b)(a + \tilde{c} + \tilde{b}) \tag{1}$$

zu zeigen.

Die Unabhängigkeit der Ereignisse A und B liefert

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ a &= (a + b)(a + c)\end{aligned} \tag{2}$$

Offensichtlich gelten die Ungleichungen $0 \leq \tilde{b} \leq b$ und $0 \leq \tilde{c} \leq c$ und damit folgt (??). Um das einzusehen, betrachten wir für festes \tilde{c} die Funktionen $f(x) = a + x$ und $g(x) = (a + b)(a + \tilde{c} + x)$ und bedienen uns der Hilfsmittel der Analysis. Zunächst einmal ist $f(0) \geq g(0)$. Das folgt aus (??) und $a + \tilde{c} \leq a + c$. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt außerdem $1 = f'(x) \geq g'(x) = a + b$, da $a + b = P(A) \leq 1$. Folglich ist $f(x) \geq g(x)$ für $x \geq 0$, und die Substitution $x = \tilde{b}$ liefert die Behauptung (??).

Ü4.3.3 Es sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und A, B seien unabhängige Ereignisse. Muss dann $\{E \in \mathcal{E} \mid A, B, E \text{ sind unabhängig}\}$ eine Teil- σ -Algebra von \mathcal{E} sein?

Ü4.3.4 A, B, C seien Ereignisse. Man weiß, dass sie unabhängig sind und man kennt die Wahrscheinlichkeiten. Kann man aus diesen Informationen die Wahrscheinlichkeit von $A \cup B \cup C$ ermitteln?

Zu Abschnitt 4.4

Ü4.4.1 Beweisen Sie: Sind X_1, \dots, X_n reellwertige unabhängige Zufallsvariable, so sind auch Y, X_1, \dots, X_n unabhängig, wenn Y konstant ist.

Ü4.4.2 (X_n) sei eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Folge (X_n) von irgendeiner Stelle an monoton fallend ist?

Ü4.4.3 Mit Ω wie in Aufgabe 4.3.1 definieren wir $X_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch $(x_1, \dots, x_m) \mapsto x_k$ für $k = 1, \dots, m$. Zeigen Sie, dass die X_1, \dots, X_m unabhängig sind.

Lösung Der Fall $n = 6, m = 2$ wird auf Seite 136 ausführlich behandelt. Wir zeigen die Unabhängigkeit der Ereignisse $\{X_1 \geq a_1\}, \dots, \{X_m \geq a_m\}$ für beliebige $a_1, \dots, a_m \in \{1, \dots, n\}$. Für $k = 1, \dots, m$ gibt es jeweils $(n - a_k + 1)n^{m-1}$ Elemente in Ω mit $X_k \geq a_k$ und folglich ist

$$\mathbb{P}(\{X_k \geq a_k\}) = \frac{(n - a_k + 1)n^{m-1}}{n^m} = \frac{(n - a_k + 1)}{n}.$$

Es gibt weiter $\prod_{i=1}^m (n - a_i + 1)$ Elemente in Ω mit $X_1 \geq a_1, X_2 \geq a_2, \dots$ und $X_m \geq a_m$. Es ist folglich

$$\mathbb{P}(\{X_1 \geq a_1, \dots, X_m \geq a_m\}) = \frac{\prod_{i=1}^m (n - a_i + 1)}{n^m} = \prod_{i=1}^m \mathbb{P}(\{X_i \geq a_i\})$$

und das beweist die Unabhängigkeit.

Ü4.4.4 $X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seien unabhängige Zufallsvariable, und alle P_{X_k} seien die Gleichverteilung auf $[0, 1]$. Beweisen Sie, dass das Ereignis

$$\{\omega \mid \text{für alle } k \text{ ist } X_k(\omega) \leq 0.999\}$$

Wahrscheinlichkeit Null hat.

Ü4.4.5 X_1, \dots, X_n seien reellwertige Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass Sie genau dann unabhängig sind, wenn

$$\mathbb{P}(\{X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n\}) = \mathbb{P}(\{X_1 \in B_1\}) \cdots \mathbb{P}(\{X_n \in B_n\})$$

für beliebige Borelmengen B_1, \dots, B_n gilt.

Es ist also nicht erforderlich, die entsprechende Gleichung für Indizes $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ nachzuprüfen (vgl. „Irrtum 2“ auf Seite 133).

Lösung

Nach Definition 4.4.5 sind die Zufallsvariablen genau dann unabhängig, wenn für alle $a_k \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}$ gilt, dass die Mengen $\{X_1 \geq a_1\}, \dots, \{X_n \geq a_n\}$ unabhängig sind.

Da es sich dabei nur um endlich viele Mengen handelt, liefert das wiederholte Anwenden von Lemma 4.4.1, dass diese Bedingung äquivalent dazu ist, dass die Mengen $\{X_1 \in B_1\}, \dots, \{X_n \in B_n\}$ für alle Borelmengen B_1, \dots, B_n unabhängig sind.

Dies ist nach Definition der Unabhängigkeit äquivalent zur Gleichheit

$$\mathbb{P}(\{X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n\}) = \mathbb{P}(\{X_1 \in B_1\}) \cdots \mathbb{P}(\{X_n \in B_n\})$$

für alle Borelmengen B_1, \dots, B_n , sodass damit alles gezeigt ist.

Zu Abschnitt 4.5

Ü4.5.1 Mit den Bezeichnungen von Satz 4.5.1 gilt:

- $\{(\omega_1, \omega_2, \dots) \mid X_n(\omega_n) < n \text{ für alle } n\}$ gehört zu \mathcal{E}_∞ .
- $\{(\omega_1, \omega_2, \dots) \mid \left((X_1(\omega_1) + X_n(\omega_n)) / n \right)_n \text{ ist konvergent}\}$ gehört ebenfalls zur σ -Algebra \mathcal{E}_∞ .

Ü4.5.2 Wir verwenden wieder die Bezeichnungen von Satz 4.5.1. Es sei \mathbb{P}_X die Gleichverteilung in $\{1, \dots, 6\}$, es geht also um die Modellierung einer Folge von Würfelwürfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von

$$\{(X_1 \geq 2) \text{ und } ((X_4 = 6) \text{ oder } (X_5 \leq 3))\}.$$

Lösung Wir betrachten das Ereignis $E = \{(X_1 \geq 2) \text{ und } ((X_4 = 6) \text{ oder } (X_5 \leq 3))\}$. Dazu eine kleine Vorbemerkung: Wir können hier nur die Wahrscheinlichkeit von Schnitten oder disjunkten Vereinigungen berechnen, deswegen müssen

wir das Ereignis E passend zerlegen. Seien dazu $A = \{X_1 \geq 2\}$, $B = \{X_4 = 6\}$ und $C = \{X_5 \leq 3\}$. Dann ist $E = A \cap (B \cup C)$, und wir erhalten

$$P(E) = P(A \cap (B \cup C)) = P(A) \cdot P(B \cup C),$$

was nach dem Inklusions-Exklusionsprinzip gerade

$$P(A) \cdot P(B \cup C) = P(A) \cdot (P(B) + P(C) - P(B \cap C)) = P(A) \cdot (P(B) + P(C) - P(B) \cdot P(C))$$

ist. Einsetzen von $P(A) = 5/6$, $P(B) = 1/6$ und $P(C) = 3/6$ liefert $P(E) = 35/72$.

Zu Abschnitt 4.6

Ü4.6.1 Es seien $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariable, für die der Erwartungswert existiert. Dann kann es sein, dass das Produkt XY keinen Erwartungswert hat.

Lösung Betrachte als Ω das Intervall $[0, 1]$ mit der Gleichverteilung und als Zufallsvariablen X, Y die Funktionen $x \mapsto 1/\sqrt{x}$. Der Erwartungswert von X und Y ist endlich, der von XY existiert aber nicht.

Ü4.6.2 Seien X_1, X_2, X_3 unabhängige auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Wie ist dann $X_1 + X_2 + X_3$ verteilt? (Es soll die Gleichung der Dichtefunktion ermittelt werden.)

Ü4.6.3 X, Y seien unabhängige, auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum definierte reellwertige Zufallsvariable. Die zugehörigen Verteilungsfunktionen F_X, F_Y mögen stetig differenzierbar sein; wir wissen schon, dass dann die Ableitungen gerade die Dichtefunktionen zu P_X, P_Y sind.

a) Zeigen Sie, dass $Z := \max\{X, Y\}$ ebenfalls eine Dichtefunktion hat. Drücken Sie dazu die Verteilungsfunktion von Z durch F_X und F_Y aus und bestimmen Sie daraus durch Ableiten die Dichtefunktion von Z . Als Beispiel soll berechnet werden, nach welcher Dichtefunktion

`max(random, random)` (also das Maximum zweier unabhängigen Abfragen des Zufallsgenerators) verteilt ist.

b) Das gleiche Problem, diesmal für das Minimum.

Lösung

a) Weil das Supremum (falls es überall endlich ist) von Folgen von Zufallsvariablen wieder eine Zufallsvariable ist (vgl. Satz 3.1.4 (v)), ist insbesondere $Z := \max\{X, Y\}$ eine Zufallsvariable. Die Verteilungsfunktion von Z lautet:

$$\begin{aligned} F_Z(a) &= P(\omega \mid Z(\omega) \leq a) = P(\omega \mid \max\{X(\omega), Y(\omega)\} \leq a) \\ &= P(\omega \mid (X(\omega) \leq a) \cap (Y(\omega) \leq a)) \\ &= P(\omega \mid X(\omega) \leq a) \cdot P(\omega \mid Y(\omega) \leq a) \\ &= F_X(a) \cdot F_Y(a), \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichung wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit gilt. Die Dichtefunktion erhalten wir durch Ableiten, denn nach Voraussetzung sind

F_X und F_Y stetig differenzierbar. $f_Z(a) = F'_Z(a) = f_X(a) \cdot F_Y(a) + F_X(a) \cdot f_Y(a)$, wobei f die jeweilige Dichtefunktion bezeichnet.

'random' hat die Dichtefunktion $f(x) = 1$ auf $[0, 1]$ und 0 sonst. Die Verteilungsfunktion lautet $F(x) = x$ für $x \in [0, 1]$. Dann ist $f_{\max\{\text{random}, \text{random}\}}(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$ auf $[0, 1]$.

b) Es bezeichne $W = \min\{X, Y\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} 1 - F_W &= P(\omega \mid W(\omega) > a) \\ &= P(\omega \mid (X(\omega) > a) \cap (Y(\omega) > a)) \\ &= P(\omega \mid X(\omega) > a) \cdot P(\omega \mid Y(\omega) > a) \\ &= (1 - F_X(a)) \cdot (1 - F_Y(a)) \\ \Rightarrow F_W &= F_X + F_Y - F_X \cdot F_Y. \end{aligned}$$

Dann ist $f_{\min\{\text{random}, \text{random}\}}(x) = 2 - 2x$ auf $[0, 1]$.

Ü4.6.4 Es gibt Zufallsvariable X, Y mit existierendem Erwartungswert, die *nicht* unabhängig sind, so dass die Erwartungswerte von X, Y, XY existieren und $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$ gilt. (Unabhängigkeit ist also keine notwendige Bedingung für diese Gleichheit.)

Elementare Stochastik

Ein Lernbuch - von Studierenden mitentwickelt

Behrends, E.

2013, XVIII, 374 S. 70 Abb., 15 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-8348-1939-0