

Lösungen ausgewählter Übungsaufgaben
zum Buch „Elementare Stochastik“
(Springer Spektrum, 2012)
Teil 1: Aufgaben zu den Kapiteln 1 und 2

Der Autor und die studentischen Team-Mitglieder haben sich daran beteiligt, Musterlösungen der Übungsaufgaben auszuarbeiten.

Aufgaben zu Kapitel 1

Ü1.2.1 Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Geben Sie drei verschiedene σ -Algebren auf Ω an.

Lösung

Wähle \mathcal{E}_1 als Potenzmenge von Ω und – zum Beispiel –

$$\mathcal{E}_2 = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}\},$$

$$\mathcal{E}_3 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Ü1.2.2 Sei Ω beliebig und \mathcal{E} eine σ -Algebra auf Ω . Für eine Teilmenge C von Ω definieren wir die *Spur* von \mathcal{E} in C durch $\mathcal{E}_C := \{E \cap C \mid E \in \mathcal{E}\}$. Zeigen Sie, daß \mathcal{E}_C eine σ -Algebra ist und dass im Fall $C \in \mathcal{E}$ gilt:

$$\mathcal{E}_C = \{E \in \mathcal{E} \mid E \subset C\}.$$

Ü1.2.3 Es sei Ω eine Menge, und \mathcal{E} wird als die Potenzmenge von Ω definiert. Wir fixieren ein $\omega_0 \in \Omega$ und definieren dann $\mathbb{P} : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ wie folgt: Es ist $\mathbb{P}(E) := 1$, wenn ω_0 zu E gehört, für alle anderen E ist $\mathbb{P}(E) := 0$. Zeigen Sie, dass \mathbb{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. (Es wird das zu ω_0 gehörige *Punktmaß* genannt.)

Lösung

Nachzuweisen ist, dass die in der Aufgabenstellung definierte Abbildung \mathbb{P} die beiden Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes aus Definition 1.2.2. erfüllt:

- (i) Es muss $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ gezeigt werden.

Da Ω ein Ereignis ist, das ω_0 enthält, folgt die Aussage sofort aus der Definition von \mathbb{P} .

- (ii) Für eine disjunkte Folge E_1, E_2, \dots von Ereignissen muss $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \dots$ erfüllt sein.

Da die $E_i, i \in \mathbb{N}$, disjunkt sind, kann ω_0 in höchstens einer (oder keiner) dieser Mengen enthalten sein. Ist ω_0 in keinem $E_i, i \in \mathbb{N}$, enthalten, so ist $\mathbb{P}(E_i) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$, und da ω_0 ebenfalls nicht in $E_1 \cup E_2 \cup \dots$ enthalten ist, ist auch $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = 0$, d.h. die obige Gleichung wird

zu $0 = 0$, ist also erfüllt. Analog wird die Gleichung für den Fall, dass ω_0 in genau einer der Mengen $E_i, i \in \mathbb{N}$ enthalten ist, zu $1 = 1$, d.h. die obige Forderung ist stets erfüllt.

Ü1.2.4 Es gibt keine abzählbar unendliche σ -Algebra.

Tipp: Wenn \mathcal{E} eine unendliche σ -Algebra ist, kann man eine Folge E_1, E_2, \dots disjunkter nichtleerer Elemente in \mathcal{E} finden. Es folgt, dass \mathcal{E} mindestens so viele Elemente enthalten muss, wie es Teilmengen von \mathbb{N} gibt.

Lösung

Wir nehmen an, dass unsere σ -Algebra \mathcal{E} eine *abzählbar* unendliche σ -Algebra über der Menge M ist. Dann ist M auch unendlich, da sonst $\#\mathcal{E} \leq \#\mathcal{P}(M) < \infty$ gelten würde. Sei nun für $x \in M$ die Menge M_x durch

$$M_x := \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{E} \\ x \in A}} A$$

definiert. Dieser Schnitt ist abzählbar und somit nach Satz 1.3.1 ein Element aus \mathcal{E} . Des Weiteren wird mindestens über M geschnitten und es gilt $x \in M_x$, sodass $M_x \neq \emptyset$ ist.

Seien nun zwei $x, y \in M$ beliebig vorgegeben. Wenn dann $M_x \cap M_y \neq \emptyset$ gilt, existiert ein z in diesem Schnitt. Somit gilt nach Konstruktion $M_z \subset M_x$ und $M_z \subset M_y$ und somit $M_z \subset M_x \cap M_y$. Wenn wir nun annehmen, dass $x \notin M_z$ gilt, so folgt $x \in M_x \setminus M_z \in \mathcal{E}$. Also muss bei der Konstruktion von M_x auch über $M_x \setminus M_z$ geschnitten worden sein, sodass nur $M_x = M_x \setminus M_z$ beziehungsweise $M_x \cap M_z = \emptyset$ gelten kann. Dies ist unmöglich, sodass $x \in M_z$ erfüllt sein muss und demnach auch $M_x \subset M_z$ gilt. Es folgt also $M_x = M_z$. Analoges gilt für y , sodass sich $M_x = M_z = M_y$ ergibt, wenn M_x und M_y nicht disjunkt sind.

Wir zeigen nun, dass es unendlich viele verschiedene Mengen M_x gibt. Offenbar gilt für alle $A \in \mathcal{E}$ die Gleichung $A = \bigcup_{x \in A} M_x$. Gäbe es nur endlich viele verschiedene Mengen M_x wäre deshalb auch die Anzahl der Elemente von \mathcal{E} im Gegensatz zur Annahme endlich.

Wir haben also die Menge von Mengen $\{M_x \mid x \in M\}$ mit unendlich vielen verschiedenen disjunkten Elementen gefunden, aus welcher wir uns eine unendliche Folge E_1, E_2, \dots gemäß des Tipps auswählen können. Dann liegt jedoch für jede Teilmenge $I \subset \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen die Menge

$$F_I := \bigcup_{i \in I} E_i$$

in \mathcal{E} . Somit besitzt \mathcal{E} mindestens so viele Elemente wie die Potenzmenge von \mathbb{N} und ist somit im Widerspruch zur Annahme überabzählbar.

Ü1.2.5 Sei Ω eine überabzählbare Menge. Geben Sie die kleinste σ -Algebra an, die alle einelementigen Teilmengen von Ω enthält. Zeigen Sie, dass auf dieser σ -Algebra durch

$$\mathbb{P}(E) = \begin{cases} 0 & \text{falls } E \text{ ist abzählbar,} \\ 1 & \text{falls } E \text{ ist überabzählbar} \end{cases}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert wird.

Ü1.2.6 Sei Ω eine Menge und \mathcal{E} eine σ -Algebra auf Ω . Ein Ereignis $A \in \mathcal{E}$ heißt *Atom*, falls es kein $B \in \mathcal{E}$ gibt mit $B \subset A$ und $B \neq A$. Zeigen Sie:

- a) Zwei verschiedene Atome sind disjunkt.
- b) Ist Ω höchstens abzählbar, so existiert zu jedem $\omega \in \Omega$ genau ein Atom $A(\omega)$ mit $\omega \in A(\omega)$. \mathcal{E} ist die Menge aller Vereinigungen seiner Atome.

Ü1.2.7 Sei $\Omega = \{-100.000, \dots, 100.000\}$. Welches der folgenden Mengensysteme ist eine σ -Algebra auf Ω ?

- a) Alle Teilmengen, für die die Summe der Elemente Null ergibt (die leere Summe ist als Null definiert). Zum Beispiel gehört $\{-2, -1, 3\}$ zu diesem Mengensystem, $\{-1, 3\}$ aber nicht.
- b) Sei $A := \{1, 2, \dots, 12\}$. Man betrachte das System aller Teilmengen von Ω , für die der Schnitt mit A eine gerade Anzahl von Elementen hat. (Insbesondere gehören alle zu A disjunkten Mengen dazu, denn 0 ist gerade.)
- c) Das System, das aus der leeren Menge und allen Teilmengen der Form $\{-100.000, \dots, 0\} \cup E$ mit $E \subset \{1, \dots, 100.000\}$ besteht.

Ü1.2.8 Ω sei eine k -elementige Menge. Für welche Zahlen n gibt es eine σ -Algebra auf Ω mit n Elementen?

Lösung

Sei $\#\Omega = k$. Wir klassifizieren die σ -Algebren anhand der Anzahl der Atome (siehe dazu auch Aufgabe 1.2.6). Es kann höchstens k Atome geben, und jede σ -Algebra \mathcal{E} auf Ω ist die Menge aller Vereinigungen aller Atome. Dafür gibt es bei i Atomen genau 2^i Möglichkeiten. Die kurze Antwort lautet also: für jedes n mit $n = 2^i$, wobei $i \in \{1, \dots, k\}$ ist, gibt es eine σ -Algebra auf Ω mit genau n Elementen.

Ü1.2.9 Es seien \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 σ -Algebren auf Ω . Beweisen Sie: Wenn $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ eine σ -Algebra ist, so gilt $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$ oder $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1$.

Ü1.2.10 Es sei Ω eine Menge, und \mathcal{E} sowie $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$ seien σ -Algebren auf Ω . Es gelte $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \subset \dots \subset \mathcal{E}$.

Dann muss $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$ keine σ -Algebra sein.

Ü1.2.11 Eine σ -Algebra \mathcal{E} ist mit den Verknüpfungen Δ und \cap ein kommutativer Ring. (Dabei steht „ $E \Delta F$ “ für die symmetrische Differenz: $E \Delta F := (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$.)

Man kann also wirklich eine algebraische Struktur in einer σ -Algebra finden.

Zu Abschnitt 1.3

Ü1.3.1 \mathbb{P}_1 und \mathbb{P}_2 seien Wahrscheinlichkeitsmaße auf (Ω, \mathcal{E}) . Wir definieren $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\mathbb{P}(E) := \min\{\mathbb{P}_1(E), \mathbb{P}_2(E)\}.$$

Zeigen Sie, dass \mathbb{P} genau dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, wenn $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ gilt.

Lösung

Unter den gegebenen Definitionen ist zu zeigen:

$$\mathbb{P} \text{ ist Wahrscheinlichkeitsmaß} \Leftrightarrow \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$$

Teil 1. Sei $\mathbb{P}_1 \neq \mathbb{P}_2$ angenommen. Nun ist zu zeigen, dass \mathbb{P} kein Wahrscheinlichkeitsmaß sein kann. Aus der Annahme folgt sofort, dass ein $E \in \mathcal{E}$ existiert, für das die folgenden Gleichungen erfüllt sind¹⁾:

$$\mathbb{P}_1(E) \neq \mathbb{P}_2(E) \tag{1}$$

$$\mathbb{P}_1(\Omega \setminus E) \neq \mathbb{P}_2(\Omega \setminus E) \tag{2}$$

Gelte ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\mathbb{P}_1(E) < \mathbb{P}_2(E)$. Dann folgt für \mathbb{P} :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_1(E) \tag{3}$$

$$\mathbb{P}(\Omega \setminus E) = \mathbb{P}_2(\Omega \setminus E) \tag{4}$$

Wegen (??) und $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(\Omega \setminus E) = 1$ folgt $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(\Omega \setminus E) \neq 1$. Aus diesem Grund kann \mathbb{P} tatsächlich kein Wahrscheinlichkeitsmaß sein.

Teil 2: Trivialerweise gilt dann $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ und \mathbb{P} ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Ü1.3.2 \mathbb{P}_1 und \mathbb{P}_2 seien Wahrscheinlichkeitsmaße auf (Ω, \mathcal{E}) . Gilt dann $\mathbb{P}_1(E) \leq \mathbb{P}_2(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$, so ist $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$.

Ü1.3.3 Es sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir nennen eine Teilmenge N von Ω eine *Nullmenge*, wenn es ein $E \in \mathcal{E}$ mit $N \subset E$ und $\mathbb{P}(E) = 0$ gibt. Beweisen Sie:

- Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wieder eine Nullmenge.
- Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.
- Definiere $\mathcal{E}' := \{E \cup N \mid E \in \mathcal{E}, N \text{ ist Nullmenge}\}$. Dann ist \mathcal{E}' eine σ -Algebra, die \mathcal{E} enthält.
- Eine Funktion $\mathbb{P}' := \mathcal{E}' \rightarrow [0, 1]$ sei durch $\mathbb{P}'(E \cup N) := \mathbb{P}(E)$ erklärt. Diese Abbildung ist wohldefiniert, es ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, und für $E \in \mathcal{E}$ ist $\mathbb{P}'(E) = \mathbb{P}(E)$. (Man spricht von der *Vervollständigung* von $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.)

Lösung a) Seien $N_i \subset \Omega$ Nullmengen, dh. es existieren Mengen $E_i \in \mathcal{E}$ mit $N_i \subset E_i$ und $\mathbb{P}(E_i) = 0$. Es soll gezeigt werden, dass die abzählbare Vereinigung

¹⁾Genauer: Es existiert ein $E \in \mathcal{E}$, sodass (??) erfüllt ist. Wegen der Definition von einem Wahrscheinlichkeitsmaß muss dann auch die zweite Ungleichheit erfüllt sein.

$\bigcup_i N_i$ eine Nullmenge ist. Gesucht ist also eine Menge $E \in \mathcal{E}$ mit $\bigcup_i N_i \subset E$ und $P(E) = 0$.

Wir wählen $E = \bigcup_i E_i$ und zeigen, dass E das Geforderte leistet:

Es ist $E \in \mathcal{E}$, denn $E_i \in \mathcal{E}$, $\forall i = 1, 2, \dots$ und damit ist auch die abzählbare Vereinigung der E_i in der σ -Algebra \mathcal{E} enthalten.

Außerdem ist $\bigcup_i N_i \subset E$. Um das einzusehen, betrachten wir ein festes $\omega \in \bigcup_i N_i$. Wegen $\omega \in N_{i^*}$ für ein $i^* \in \mathbb{N}$ folgt $\omega \in E_{i^*}$ und damit $\omega \in E$.

Es ist noch zu zeigen, dass $P(E) = 0$.

Es ist doch $0 \leq P(E) \leq \sum_i P(E_i) = 0$.

b) Sei N eine Nullmenge und $M \subset N$. Es gibt also $E \in \mathcal{E}$ mit $N \subset E$ und $P(E) = 0$. Dann ist auch $M \subset E$ und folglich ist auch M eine Nullmenge.

c) \mathcal{E}' ist eine σ -Algebra:

- $\emptyset \in \mathcal{E}'$. Zu zeigen ist, dass die leere Menge als Vereinigung $E \cup N$ schreiben lässt, wobei $E \in \mathcal{E}$ und N eine Nullmenge ist. Wähle hierfür $E = N = \emptyset$.
- $E \in \mathcal{E}' \Rightarrow \Omega \setminus E \in \mathcal{E}'$. Hierfür schreiben wir $E = E_1 \cup N$, wobei $E_1 \in \mathcal{E}$ und N Nullmenge. Da N eine Nullmenge ist, folgt $\exists E_2 \in \mathcal{E}$ mit $N \subset E_2$ und $P(E_2) = 0$. Beachte weiter, dass dann auch $\tilde{N} := E_2 \setminus N$ eine Nullmenge ist.
Es ist nun $\Omega \setminus E = \Omega \setminus (E_1 \cup N_1) = \Omega \setminus E_1 \setminus N_1 = (\Omega \setminus E_1 \setminus E_2) \cup \tilde{N} \in \mathcal{E}'$, denn $(\Omega \setminus E_1 \setminus E_2) \in \mathcal{E}$.
- $E_i \in \mathcal{E}' \Rightarrow \bigcup_i E_i \in \mathcal{E}'$. Wir schreiben wieder $E_i = \tilde{E}_i \cup N_i$ mit $E_i \in \mathcal{E}$, N_i Nullmengen. Dann ist $\bigcup E_i = \bigcup \tilde{E}_i \cup \bigcup N_i \in \mathcal{E}'$, denn $\bigcup \tilde{E}_i \in \mathcal{E}$ und nach a) ist $\bigcup N_i$ wieder eine Nullmenge.

Bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$. Hierfür betrachten wir ein beliebiges Ereignis $E \in \mathcal{E}$. Es ist sicher \emptyset eine Nullmenge und $E = E \cup \emptyset$ folglich in \mathcal{E}' enthalten.

d) Wir zeigen zunächst die *Wohldefiniertheit* der Funktion \mathbb{P}' .

Hierfür betrachten wir die Ereignisse $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2 \in \mathcal{E}'$, wobei wieder $\tilde{E}_i = E_i \cup N_i$ mit $E_i \in \mathcal{E}$ und N_i Nullmenge. Es sei nun $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_2$ und wir wollen zeigen, dass dann $P(E_1) = P(E_2)$.

Da N_2 eine Nullmenge ist, existiert $E \in \mathcal{E}$ mit $N_2 \subset E$ und $P(E) = 0$. Außerdem gilt die folgende Inklusionskette: $E_1 \subset E_1 \cup N_1 \subset E_2 \cup E$. Für das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} folgt: $\mathbb{P}(E_1) \leq \mathbb{P}(E_2 \cup E) = \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(E_2 \cap E) = \mathbb{P}(E_2)$. Analog erhalten wir $\mathbb{P}(E_2) \leq \mathbb{P}(E_1)$ und damit die gewünschte Gleichheit.

Als nächstes ist zu zeigen, dass \mathbb{P}' ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* ist.

Es gilt $\mathbb{P}'(\Omega) = \mathbb{P}'(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Sei $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{E}'$ eine disjunkte Folge von Ereignissen, die sich wiederum wie folgt darstellen lassen: $E_i = \tilde{E}_i \cup N_i$ mit $\tilde{E}_i \in \mathcal{E}$ und N_i Nullmenge. Da die E_i disjunkt sind, gilt das auch für die \tilde{E}_i und folglich $\mathbb{P}'(\bigcup_i E_i) = \mathbb{P}'(\bigcup_i \tilde{E}_i \cup \bigcup_i N_i) = \mathbb{P}(\bigcup_i \tilde{E}_i) = \sum_i \mathbb{P}(\tilde{E}_i) = \sum_i \mathbb{P}'(\tilde{E}_i \cup N_i)$. Dabei haben wir ausgenutzt, dass die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge ist und dass \mathbb{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Zuletzt soll gezeigt werden, dass $\mathbb{P}'(E) = \mathbb{P}(E) \forall E \in \mathcal{E}$.
Das ist klar, denn $\mathbb{P}'(E) = \mathbb{P}'(E \cup \emptyset) = \mathbb{P}(E)$.

Ü1.3.4 Sei $\Omega = \mathbb{N}$, versehen mit irgendeiner σ -Algebra \mathcal{E} . Zeigen Sie, dass die Menge \mathcal{P} der Wahrscheinlichkeitsmaße auf (Ω, \mathcal{E}) eine konvexe Menge ist. Wie sehen die Extrempunkte von \mathcal{P} aus?

(Ein Element x einer konvexen Menge K heißt extremal, wenn es sich nicht als echte Konvexkombination zweier verschiedener Punkte $x_1, x_2 \in K, x_1, x_2 \neq x$ darstellen lässt, wenn also für $\lambda \in]0, 1[$ und $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ stets folgt, dass $x = x_1 = x_2$ gilt. So sind zum Beispiel die Extrempunkte eines Quadrats gerade die Ecken.)

Zu Abschnitt 1.4

Ü1.4.1 Es sei \mathcal{E} eine σ -Algebra auf \mathbb{R}^2 , die alle offenen Kreisscheiben enthält. Dann enthält sie auch alle offenen Rechtecke.

Lösung Zur Lösung der Aufgabe wählen wir ein Rechteck $Q \subset \mathbb{R}^2$ und zeigen, dass dieses als abzählbare Vereinigung von offenen Kreisen dargestellt werden kann. Die Punkte mit rationalen Koordinaten in Q sind abzählbar. Wählen wir um jeden dieser Punkte die größtmögliche offene Kreisscheibe aus \mathcal{E} , welche noch in Q enthalten ist und vereinigen diese, so entsteht eine abzählbare Vereinigung Q' von offenen Kreisscheiben. Das Resultat Q' ist also in \mathcal{E} enthalten, da \mathcal{E} eine σ -Algebra ist. Zu zeigen ist nur, dass Q' dem Rechteck Q entspricht. Sicherlich ist es eine Teilmenge von Q , da jede Kreisscheibe ja in Q enthalten war. $Q \subseteq Q'$ geht daraus hervor, dass jeder Punkt aus Q in mindestens einer der Kreisscheiben liegt, über die vereinigt wurde.

Ü1.4.2 Sei $\Omega := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, also die Menge aller Folgen mit Werten in $\{0, 1\}$. Darauf sei eine σ -Algebra \mathcal{E} gegeben, die alle Mengen der Form

$$\{(x_n) \mid x_{n_0} = 0\}, n_0 = 1, 2, \dots$$

enthält.

Zeigen Sie, dass dann auch die folgenden Mengen in \mathcal{E} enthalten sind:

- alle einpunktigen Teilmengen;
- die Teilmenge der konvergenten Folgen in Ω ;
- die Teilmenge derjenigen Folgen, die an genau 122 Stellen den Wert 0 annehmen.

Ü1.4.3 Vorgelegt sei eine n -elementige Menge, und es sei $k \leq n$ eine natürliche Zahl. Betrachten Sie das System derjenigen Teilmengen, die genau k Elemente enthalten und berechnen Sie die erzeugte σ -Algebra.

Lösung Es soll zunächst der triviale Fall $k = n$ behandelt werden.

Das System der n -elementigen Teilmengen von M ist gerade das System, das die Menge M selbst und sonst nichts enthält: $\mathcal{M}_n = \{M\}$. Die erzeugte σ -Algebra ist folglich das Mengensystem $\sigma(\mathcal{M}_n) = \{\emptyset, M\}$.

Wir betrachten nun den Fall $k < n$ und behaupten, dass die erzeugte σ -Algebra der Potenzmenge von M entspricht.

Es gibt $\binom{n}{k}$ k -elementige Teilmengen. Durch Vereinigung von jeweils zwei k -elementigen Teilmengen erhält man jede beliebige $k+1$ -elementige Teilmenge. Dann erhält man aber auch jede beliebige einelementige Teilmenge über Differenzbildung. Es ist dann offensichtlich die Potenzmenge von M die kleinste σ -Algebra, die alle einelementigen Teilmengen von M enthält und da die erzeugte σ -Algebra in $\mathcal{P}(M)$ enthalten ist, folgt $\sigma(\mathcal{M}_k) = \mathcal{P}(M)$.

Zu Abschnitt 1.5

Ü1.5.1 Beweisen Sie, dass die folgenden Teilmengen von \mathbb{R} Borelmengen sind:

a) Die Menge \mathcal{A} der algebraischen Zahlen. (Eine Zahl heißt algebraisch, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist.)

b) Die Menge $\{x \mid 0 < f(x) \leq (f(x))^2\}$, wobei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

Ü1.5.2 Man zeige: Ist $B \subset \mathbb{R}$ keine Borelmenge, so ist auch $a \cdot B := \{ax \mid x \in B\}$ keine Borelmenge für $a \neq 0$.

Ü1.5.3 Sei M eine Menge, wir versehen sie mit der diskreten Metrik d . (Es ist also $d(x, y) := 1$ für $x \neq y$ und $d(x, y) := 0$ sonst.) Bestimmen Sie die Borelmengen in diesem metrischen Raum.

Ü1.5.4 Es seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass

$$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid f(x_1, \dots, x_n) \leq x_{n+1} < g(x_1, \dots, x_n)\}$$

eine Borelmenge im \mathbb{R}^{n+1} ist.

Lösung Ziel ist es unter Ausnutzung der im Kapitel 1 gegebenen Sätze die obige Menge, nennen wir sie M , als Borelmenge zu identifizieren. Anstatt die gesamte Menge M zu betrachten, wollen wir zwei geeignete Mengen M_1 und M_2 finden, die Borelmengen sind und für die $M = M_1 \cap M_2$ gilt. Denn wenn M_1 und M_2 Borelmengen sind, so ergibt sich dies aus den Eigenschaften einer σ -Algebra auch für M .

Wir definieren dazu

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid f(x_1, \dots, x_n) \leq x_{n+1}\} \\ M_2 &:= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_{n+1} < g(x_1, \dots, x_n)\} \end{aligned}$$

Es ist nun sicherlich klar, dass die oben gewünschte Eigenschaft $M = M_1 \cap M_2$ erfüllt ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass es sich bei M_1 bzw. M_2 wirklich um Borelmengen handelt.

Betrachten wir dazu zuerst die Menge M_1 . Um zu zeigen, dass es sich bei dieser Menge um eine Borelmenge handelt, werden wir den *Satz 1.6.2 (iii)* anwenden, indem wir eine passende stetige Funktion finden, deren Urbild einer passend gewählten Borelmenge der Menge M_1 entspricht.

Sei

$$\begin{aligned}\tilde{f} : \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &\mapsto (f(x_1, \dots, x_n), x_{n+1})\end{aligned}$$

diese Funktion. Wir zeigen nun, dass \tilde{f} stetig ist. Wem das zu einfach erscheint, der kann die nächsten Zeilen überspringen.

Warum ist \tilde{f} stetig?

Wir verwenden das Folgenkriterium um die Stetigkeit zu beweisen. Das Folgenkriterium besagt, dass eine Funktion f genau dann stetig ist, wenn die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ für alle konvergenten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit jeweiligem Grenzwert x gegen $f(x)$ konvergiert.

Sei nun $((x_{1,m}, \dots, x_{n+1,m}))_{m \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge im \mathbb{R}^{n+1} mit Grenzwert (x_1, \dots, x_{n+1}) . Wir wissen, dass Folgen im \mathbb{R}^{n+1} genau dann konvergieren, wenn sie komponentenweise konvergieren, also gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{n+1,m} = x_{n+1}$ und $\lim_{m \rightarrow \infty} (x_{1,m}, \dots, x_{n,m}) = (x_1, \dots, x_n)$

Da die Funktion f nach Voraussetzung stetig ist, muss auch

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(x_{1,m}, \dots, x_{n,m}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

gelten. Somit ist \tilde{f} nach obigem Folgenkriterium stetig.

Die Stetigkeit der Funktion \tilde{f} ermöglicht es uns nun, M_1 als Urbild einer geeigneten Teilmenge des \mathbb{R}^2 darzustellen. Sei dazu die Menge H_1 definiert durch $H_1 := \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq x_2\}$.

Dann ist

$$\begin{aligned}\tilde{f}^{-1}(H_1) &= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \tilde{f}(x_1, \dots, x_{n+1}) \in H_1\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (f(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}) \in H_1\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x_1, \dots, x_n) \leq x_{n+1}\} \\ &= M_1\end{aligned}$$

Wenn wir nun nachweisen können, dass H_1 eine Borelmenge ist, dann liefert *Satz 1.6.2 (iii)*, dass dies auch für M_1 gilt. Wir wiederholen den Trick mit der stetigen Abbildung für die Menge H_1 . Diesmal wählen wir die Abbildung

$$\begin{aligned}h_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1 - x_2, x_2)\end{aligned}$$

Wieder ist die Abbildung h_1 stetig, wobei wir jedoch auf den Nachweis verzichten. Er ist sehr leicht mit Hilfe des Folgenkriteriums und der Tatsache, dass sich Grenzwerte additiv verhalten, zu erbringen.

Offenbar ist die Menge $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq 0\}$ eine Borelmenge. Es gilt jedoch auch

$$\begin{aligned} h_1^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid h_1(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - x_2, x_2) \in \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 \leq 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq x_2\} \\ &= H_1 \end{aligned}$$

Wir schließen mit Satz *Satz 1.6.2 (iii)*, dass H_1 und damit auch M_1 jeweils Borelmengen sind.

Für die Menge M_2 sind die Überlegungen analog, wobei die Mengen $H_2 := \{(x_1, x_2) \mid x_1 > x_2\}$ und $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ in Verbindung mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} \tilde{g} : \mathbb{R}^{n+1} &\leftarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &\mapsto (g(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h_2 : \mathbb{R}^2 &\leftarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1 - x_2, x_2) \end{aligned}$$

verwendet werden.

Es ergibt sich, dass jeweils M_1 und M_2 Borelmengen sind. Daraus folgt nach der eingangs getätigten Überlegung, dass auch M Borelmenge ist. \square

Zu Abschnitt 1.6

Ü1.6.1 Sei Ω eine n -elementige Menge, und es sei k ein Teiler von n . Man zeige: Das Mengensystem aller $E \subset \Omega$, für die die Anzahl der Elemente ein Vielfaches von k ist, ist ein Dynkinsystem auf Ω . Handelt es sich auch um eine σ -Algebra?

Ü1.6.2 Es seien $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf (Ω, \mathcal{E}) . Zeigen Sie, dass

$$\{E \in \mathcal{E} \mid \mathbb{P}_1(E) = \mathbb{P}_2(E) = \mathbb{P}_3(E)\}$$

ein Dynkinsystem ist.

Lösung $\mathcal{D} := \{E \in \mathcal{E} \mid \mathbb{P}_1(E) = \mathbb{P}_2(E) = \mathbb{P}_3(E)\}$. Wir müssen zeigen, dass (i) die leere Menge und Ω , (ii) beliebige Komplemente, sowie (iii) abzählbare, disjunkte Vereinigungen in \mathcal{D} liegen.

(i) $\mathbb{P}_1(\emptyset) = \mathbb{P}_2(\emptyset) = \mathbb{P}_3(\emptyset) = 0 \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{D}$

$\mathbb{P}_1(\Omega) = \mathbb{P}_2(\Omega) = \mathbb{P}_3(\Omega) = 1 \Rightarrow \Omega \in \mathcal{D}$

(ii) Sei $E \in \mathcal{D}$, d.h. $\mathbb{P}_1(E) = \mathbb{P}_2(E) = \mathbb{P}_3(E)$. Folglich ist $1 - \mathbb{P}_1(E) = 1 - \mathbb{P}_2(E) = 1 - \mathbb{P}_3(E)$ und damit $\mathbb{P}_1(\Omega \setminus E) = \mathbb{P}_2(\Omega \setminus E) = \mathbb{P}_3(\Omega \setminus E)$ aufgrund von

$\mathbb{P}_i(\Omega \setminus E) = 1 - \mathbb{P}_i(E) \rightarrow \Omega \setminus E \in \mathcal{D}$.

(iii) Sei E_1, E_2, \dots eine disjunkte Folge in \mathcal{D} , d.h. $\mathbb{P}_1(E_i) = \mathbb{P}_2(E_i) = \mathbb{P}_3(E_i)$ für jedes $i \geq 1$. Folglich ist $\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}_1(E_i) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}_2(E_i) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}_3(E_i)$ und damit $\mathbb{P}_1\left(\bigcup_{i \geq 1} E_i\right) = \mathbb{P}_2\left(\bigcup_{i \geq 1} E_i\right) = \mathbb{P}_3\left(\bigcup_{i \geq 1} E_i\right)$, denn aufgrund der Disjunktheit der E_i ist $\mathbb{P}_j\left(\bigcup_{i \geq 1} E_i\right) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}_j(E_i)$.

Es folgt $\bigcup_{i \geq 1} E_i \in \mathcal{D}$.

Ü1.6.3 Finden Sie eine endliche Menge Ω und ein Mengensystem \mathcal{M} , so dass gilt:

- a) Die von \mathcal{M} erzeugte σ -Algebra ist die Potenzmenge von Ω .
- b) Es gibt zwei verschiedene Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, die auf \mathcal{M} übereinstimmen. (Das zeigt, dass die Forderung der Durchschnittsstabilität in Satz 1.6.5 wesentlich ist.)

Ü1.6.4 Welches der Mengensysteme aus Übungsaufgabe Ü1.2.7 ist ein Dynkin-system?

Aufgaben zu Kapitel 2

Ü2.1.1 Man werfe zwei (sechseckige) Würfel W_1 und W_2 , wobei $\mathbb{P}(W_1 = 1) = \mathbb{P}(W_1 = 2) = \mathbb{P}(W_1 = 3) = 1/9$, $\mathbb{P}(W_1 = 4) = \mathbb{P}(W_1 = 5) = \mathbb{P}(W_1 = 6) = 2/9$ und $\mathbb{P}(W_2 = 1) = \mathbb{P}(W_2 = 2) = \mathbb{P}(W_2 = 3) = 2/9$, $\mathbb{P}(W_2 = 4) = \mathbb{P}(W_2 = 5) = \mathbb{P}(W_2 = 6) = 1/9$ sei. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Augensumme 4 bzw. 7?

Ü2.1.2 Betrachte auf \mathbb{N}_0 die Poissonverteilung zum Parameter λ . Hat dann die Menge der geraden oder die der ungeraden Zahlen die größere Wahrscheinlichkeit?

Tipp: Wie kann man die Differenz dieser Wahrscheinlichkeiten übersichtlicher mit Hilfe der e -Funktion schreiben?

Lösung Es sei $G = \{0, 2, 4, \dots\} \subset \mathbb{N}_0$ die Menge der geraden und $U = \{1, 3, 4, \dots\}$ die Menge der ungeraden, positiven Zahlen. Wir werden zeigen, dass die Menge der geraden Zahlen die größere Wahrscheinlichkeit hat.

Es ist offensichtlich $\mathbb{P}(G) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{2n\})$. Analog für U .

Dann gilt für die Differenz der Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(U) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} - \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) e^{-\lambda} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-2\lambda} > 0. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im vorletzten Schritt die Potenzreihe von $e^{-\lambda}$ erkannt. Da die Exponentialfunktion immer echt größer ist als Null, folgt die Behauptung.

Ü2.1.3 Wie vorstehend, aber für die geometrische Verteilung zum Parameter q auf \mathbb{N} .

Ü2.1.4 Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\{1, \dots, n\}$ kann mit einem Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ identifiziert werden: Dem Maß wird der Vektor $p := (\mathbb{P}(\{1\}), \dots, \mathbb{P}(\{n\}))$ zugeordnet. Sei \mathcal{P} die Gesamtheit der so entstehenden Vektoren. Zeigen Sie, dass \mathcal{P} eine kompakte und konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^n ist.

Ü2.1.5 Es sei \mathcal{P} wie vorstehend. Beschreiben Sie die Extrempunkte von \mathcal{P} (vgl. Übungsaufgabe Ü1.3.4.)

Ü2.1.6 Auf \mathbb{N}_0 sei eine Poissonverteilung zum Parameter λ gegeben. Man weiß, dass $\mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{5\})$ gilt. Kann man daraus darauf schließen, wie groß λ ist? Wenn ja: Wie groß ist λ ?

Lösung Es ist $\Omega = \mathbb{N}_0, \lambda \geq 0$. Die Wahrscheinlichkeit der Poissonverteilung ist durch $P(\{n\}) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}$ gegeben. Einsetzen der Voraussetzung ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^3}{3!} \cdot e^{-\lambda} = P(\{3\}) &= P(\{5\}) = \frac{\lambda^5}{5!} \cdot e^{-\lambda} \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda^3}{3!} &= \frac{\lambda^5}{5!} \\ \Leftrightarrow \lambda^2 &= 20. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\lambda \geq 0$ gilt, erhält man die eindeutig bestimmte Lösung $\lambda = \sqrt{20}$.

Zu Abschnitt 2.2

Ü2.2.1 Es sei $\Omega = [0, 1]$, versehen mit der Dichtefunktion $(\alpha + 1)x^\alpha$ mit einer Zahl $\alpha > 0$.

a) Ist das wirklich eine Dichtefunktion?

b) Man bestimme α so, dass $\mathbb{P}([0, 0.5]) = 0.001$ ist.

Lösung

Gegeben ist $\Omega = [0, 1]$ mit der Funktion $f(x) = (\alpha + 1)x^\alpha$ für $\alpha > 0$. Wegen

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (\alpha + 1)x^\alpha dx = x^{\alpha+1} \Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$$

kann f als Dichtefunktion auf $[0, 1]$ verwendet werden.

Für Teil b) ist α so zu bestimmen, dass

$$\mathbb{P}([0, 0.5]) = 0.001 = \int_0^{0.5} (\alpha + 1)x^\alpha dx = 0.5^{\alpha+1}$$

gilt. Es folgt $\log 0.001 = (\alpha + 1) \log 0.5$, d.h. $\alpha = \log 0.001 / \log 0.5 - 1 \approx 8.96$.

Ü2.2.2 In einem Kreis mit Radius 1 wird eine Sehne „zufällig“ gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sehnenlänge S größer als 1 ist?

Man löse die Aufgabe, indem man den Begriff „zufällig“ auf folgende Arten präzisiert:

- Der Sehnenmittelpunkt ist gleichverteilt im Inneren des Kreises.
- Die Polarkoordinaten des Sehnenmittelpunktes sind gleichverteilt auf der Menge $[0, 1] \times [0, 2\pi]$.
- Aus Symmetriegründen denke man sich einen Sehnenendpunkt festgelegt; der andere soll dann gleichverteilt auf dem Kreisrand sein.

Ü2.2.3 Sei $p > 0$ eine vorgegebene Zahl. Unter welchen Bedingungen an p gibt es eine Zahl λ , so dass bezüglich der zugehörigen Exponentialverteilung das Intervall $[1, 2]$ die Wahrscheinlichkeit p hat? Wie ist λ in diesem Fall zu wählen?

Ü2.2.4 Sei \mathcal{P} die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $[0, 1]$, die eine stetige Dichte haben. Man zeige, dass \mathcal{P} eine konvexe Menge ist (die Elemente von \mathcal{P} werden als Abbildungen von den Borelmengen in $[0, 1]$ nach $[0, 1]$ aufgefasst). Es soll weiter gezeigt werden, dass \mathcal{P} keine Extrempunkte hat.

Ü2.2.5 Eine fiktive Geschichte: Ein Zeitgenosse von Buffon hat keine Stöckchen zur Hand, er wirft runde Bierdeckel auf den Dielenfußboden. (Dielenbreite d , Bierdeckeldurchmesser b .) Prüfen Sie, ob man aus der Wahrscheinlichkeit, dass der Bierdeckel eine Kante trifft, die Zahl π approximativ bestimmen kann.

Eine etwas anspruchsvollere Version der fiktiven Geschichte lautet: Ein Zeitgenosse von Buffon wirft quadratische Bierdeckel auf den Dielenfußboden. (Dielenbreite d , Bierdeckelseitenkante b .) Prüfen Sie, ob man aus der Wahrscheinlichkeit, dass der Bierdeckel eine Kante trifft, die Zahl π approximativ bestimmen kann.

Lösung

Variante mit kreisförmigem Bierdeckel:

Wir nehmen $b < d$ an, sonst würde der Bierdeckel ja immer die Kante treffen. Die Lage des Bierdeckels ist durch die Lage des Mittelpunkts eindeutig festgelegt; wir gehen davon aus, dass der Abstand y des Mittelpunkts des Bierdeckels zur nächstgelegenen Kante gleichverteilt in $[0, d/2]$ ist, d.h. mit der zugehörigen konstanten Dichtefunktion $f = 2/d$.

Der Bierdeckel trifft die Kante, falls $y \leq b/2$, und die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $b/2 \cdot 2/d = b/d$. Da hier kein π auftritt, lässt sich dieses Verfahren nicht nutzen, um π approximativ zu bestimmen.

Variante mit quadratischem Bierdeckel:

Diese Variante lässt sich geschickt auf die ursprüngliche Variante mit Nadeln zurückführen. Der quadratische Bierdeckel hat zwei Diagonalen der Länge $l := \sqrt{2}b$. Der Mittelpunkt beider Diagonalen ist derselbe - der Mittelpunkt des Quadrats und zugleich der Schnittpunkt der Diagonalen.

Wenn wir mit y den Abstand des Mittelpunkts des Quadrats zur nähergelegenen Kante bezeichnen, so ist dieser wieder gleichverteilt in $[0, d/2]$. Beide Diagonalen (bzw. ihre gedachte Verlängerung) schließen nun mit der nähergelegenen Kante jeweils einen Winkel α_1 und α_2 ein, wobei die Summe dieser Winkel gleich $\pi/2 = 90^\circ$ ist (das folgt sofort daraus, dass die Innenwinkelsumme des Dreiecks 180° beträgt).

Nun setzen wir $\alpha := \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, und α ist dann gleichverteilt in $[0, \pi/4]$. Mit anderen Worten: Wir fassen die Diagonale, die den größeren Winkel mit der Kante einschließt, als die Nadel in dem ursprünglichen Nadelexperiment auf, und die folgenden Berechnungen erfolgen völlig analog:

Es handelt sich also um die gleichverteilte Auswahl eines Tupels (α, y) aus $\Omega = [0, \pi/4] \times [0, d/2]$. Der quadratische Bierdeckel trifft nun eine Kante genau dann, wenn $y \leq l/2 \sin(\alpha)$. Sei $E \subset \Omega$ die Menge aller Tupel in Ω , die dies erfüllen. Dann ist der Flächeninhalt von E

$$\int_0^{\pi/4} \frac{l}{2} \sin(\alpha) d\alpha = \frac{l}{2} [-\cos(\alpha)]_0^{\pi/4} = \frac{l}{2} (1 - \sqrt{2}/2) = \frac{b}{2} (\sqrt{2} - 1).$$

$\mathbb{P}(E)$ entspricht dann dem Verhältnis des Flächeninhalts von E zum Flächeninhalt von Ω , d.h.

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\frac{b}{2}(\sqrt{2} - 1)}{(\pi/4)(d/2)} = \frac{4b(\sqrt{2} - 1)}{\pi d}.$$

Ermittelt man nun also empirisch einen Wert für $\mathbb{P}(E)$, so kann man umgekehrt π schätzen mit

$$\pi = \frac{4b(\sqrt{2} - 1)}{\mathbb{P}(E)d}.$$

Ü2.2.6 Sei $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ eine stetige Dichtefunktion und r sei kleiner als $b - a$. Man zeige, dass es ein Teilintervall von $[a, b]$ der Länge r mit maximaler Wahrscheinlichkeit gibt. Finden Sie auch ein Beispiel, wo es genau zwei derartige Intervalle gibt.

Zu Abschnitt 2.3

Ü2.3.1 Schreiben Sie ein Programm, das Zufallspermutationen von $\{1, \dots, n\}$ erzeugt. Bestimmen Sie dann mit einem Monte-Carlo-Verfahren die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Zufallspermutation kein Element fixiert bleibt.

Ü2.3.2 Wir haben gezeigt, wie man mit Hilfe der Gleichverteilung auf $[0, 1]$ einen Laplaceaum auf $\{1, \dots, n\}$ erzeugen kann. Geht das auch umgekehrt? Wenigstens in guter Näherung?

Zu Abschnitt 2.4

Ü2.4.1 Finden Sie mit einem Monte-Carlo-Verfahren die Wahrscheinlichkeit von $[1, 2]$ unter $N(0, 1)$ und vergleichen Sie mit dem aus der Tabelle abgelesenen wirklichen Wert.

Ü2.4.2 Beweisen Sie, dass die Verteilungsfunktion $F_{\mathbb{P}}$ monoton steigend und von rechts stetig ist. (D.h. es gilt stets $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\mathbb{P}}(x_n) = F_{\mathbb{P}}(x)$ für Folgen (x_n) mit $x_n \geq x$ und $x_n \rightarrow x$.)

Lösung

Zuerst zur Monotonie. Zu zeigen ist $F_{\mathbb{P}}(x_1) \leq F_{\mathbb{P}}(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$. Einsetzen in die Definition liefert $F_{\mathbb{P}}(x_1) = \mathbb{P}(]-\infty, x_1])$ und $F_{\mathbb{P}}(x_2) = \mathbb{P}(]-\infty, x_2])$, und mit der Beobachtung $]-\infty, x_1] \subset]-\infty, x_2]$ liefert Satz 1.3.2. (iii) sofort die Behauptung.

Nun zur Rechtsstetigkeit: Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \geq x$ und $x_n \rightarrow x$. Zu zeigen ist $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\mathbb{P}}(x_n) = F_{\mathbb{P}}(x)$, was nach Einsetzen der Definition der Verteilungsfunktion zu $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(]-\infty, x_n]) = \mathbb{P}(]-\infty, x])$ äquivalent ist.

Wir definieren nun eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $y_n := \sup\{x_k : k \geq n\}$. Dann gilt natürlich wieder $y_n \rightarrow x$, außerdem ist (y_n) monoton fallend, d.h. $y_n \geq y_{n+1}$, und es gilt $y_n \geq x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Nun setzen wir $E :=]-\infty, x]$ und $E_n :=]-\infty, y_n]$. Es gilt $E_{n+1} \subset E_n$, $n \in \mathbb{N}$, und $E = \bigcap_n E_n$. Nach Satz 1.3.2 (vi) gilt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(E)$, und damit folgt auch sofort die Aussage, denn

$$|\mathbb{P}(]-\infty, x]) - \mathbb{P}(]-\infty, x_n])| \leq |\mathbb{P}(]-\infty, x]) - \mathbb{P}(]-\infty, y_n])| = |\mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(E_n)| \rightarrow 0.$$

Ü2.4.3 $x \mapsto \sin x$ ist eine Dichtefunktion auf $[0, \pi/2]$. Schreiben Sie ein Programm, das Punkte aus dem entsprechenden Wahrscheinlichkeitsraum simuliert.

Lösung

Wir gehen hier nach dem Satz 2.4.3. vor. Als erstes ermitteln wir die Verteilungsfunktion $F : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := \mathbb{P}([0, x]) = \int_0^x \sin(t) dt = 1 - \cos(x).$$

Da die Funktion $h(x) := 1 - \cos(x)$ das Intervall $[0, \pi/2]$ bijektiv auf das Intervall $[0, 1]$ abbildet und somit auf diesem Intervall umkehrbar ist, können wir das im Satz 2.4.3. angegebene Verfahren zur Simulation des gegebenen Wahrscheinlichkeitsraumes bequem anwenden: Erzeuge ein in $[0, 1]$ gleichverteiltes y und gib $x := \arccos(1 - y)$ aus. Das Programm muss also wie folgt aufgebaut sein:

```
y:=random;
x:=arccos(1-y);
print x
```

Elementare Stochastik

Ein Lernbuch - von Studierenden mitentwickelt

Behrends, E.

2013, XVIII, 374 S. 70 Abb., 15 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-8348-1939-0