

**Lösungen ausgewählter Übungsaufgaben**  
**zum Buch „Elementare Stochastik“**  
**(Springer Spektrum, 2012)**  
**Teil 4: Aufgaben zu den Kapiteln 7 und 8**

**Aufgaben zu Kapitel 7**

**Zu Abschnitt 7.1**

**Ü7.1.1**  $\Omega$  sei höchstens abzählbar, und  $X, X_1, \dots$  seien darauf definierte reellwertige Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass die  $X_n$  fast sicher gegen  $X$  gehen, falls Konvergenz in Wahrscheinlichkeit vorliegt.

Anders ausgedrückt: „Konvergenz in Wahrscheinlichkeit“ und „Konvergenz fast sicher“ sind in diesem Fall äquivalent.

**Lösung** Wir schreiben  $\Omega$  als  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  und nehmen  $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  an, da wir sonst ohne Veränderung der Wahrscheinlichkeiten von  $\Omega$  zu  $\Omega \setminus \{\omega_i\}$  übergehen könnten.

Aufgrund der Sätze 7.1.2 und 7.2.2 reicht es zu zeigen, dass  $\lim_{i, W, n \rightarrow \infty} X_n = 0$  die Konvergenz  $\lim_{f, s, n \rightarrow \infty} X_n = 0$  impliziert.

Wir wählen dazu ein beliebiges  $\omega_i \in \Omega$  und fixieren es. Wir zeigen dann, dass die Folge  $(X_n(\omega_i))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen 0 geht. Sei ein  $\varepsilon > 0$  fixiert. Aufgrund der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit geht die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon)$$

für wachsendes  $n$  gegen 0. Das bedeutet insbesondere: Es existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq n_0$  die Bedingung

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \mathbb{P}(\{\omega_i\})$$

gilt. Damit kann  $\omega_i$  kein Element aus  $\{|X_n| > \varepsilon\}$  sein. Entsprechend gilt  $X_n(\omega_i) < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ .

Aufgrund der beliebigen Wahl von  $\varepsilon$  folgt somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega_i) = 0$ .

**Ü7.1.2**  $X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  seien Zufallsvariable, die nur die Werte 0 und 1 annehmen. Weiter sei  $p_n := \mathbb{P}(\{X_n = 1\})$ . Man zeige, dass die  $X_n$  genau dann in Wahrscheinlichkeit gegen die Nullfunktion gehen, wenn  $p_n \rightarrow 0$  gilt.

**Lösung** Wir betrachten die Folge  $X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  von Zufallsvariablen. Dann geht  $X_n$  genau dann in Wahrscheinlichkeit gegen die Nullfunktion, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  die Wahrscheinlichkeit  $P(|X_n - 0| > \varepsilon) = P(|X_n| > \varepsilon)$  gegen Null geht. Weil  $X_n$  nur die Werte Null oder Eins annehmen kann, ist die Aussage  $|X_n| > \varepsilon$  äquivalent zu der Aussage  $X_n = 1$ , also: Für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1) = 0$ , was gerade der Voraussetzung an die  $p_n$  in der Aufgabenstellung entspricht. Dies zeigt die Äquivalenz.

**Ü7.1.3**  $X, X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow ]0, +\infty[$  seien Zufallsvariable, und es gelte  $X = \lim_{i.W. n \rightarrow \infty} X_n$ . Gilt dann auch  $1/X = \lim_{i.W. n \rightarrow \infty} 1/X_n$ ?

**Lösung** Die kurze Antwort lautet: Ja. Zu zeigen ist doch die Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : P\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{X}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \delta.$$

Zum Beweis seien  $\varepsilon > 0$  und  $\delta > 0$  vorgegeben. Wir wählen uns weiter ein  $\eta > 0$ , sodass  $P(\{X \geq 2\eta\}) = 1 - \frac{\delta}{3}$  gilt. Im Hinterkopf behalten wir, dass  $X_n \xrightarrow{i.W.} X$  gilt, also finden wir zu gegebenem  $\tilde{\varepsilon}$  und  $\tilde{\delta}$  ein  $\tilde{n}_0$ , sodass  $P(|X_n - X| \geq \tilde{\varepsilon}) \leq \tilde{\delta}$ ; speziell gilt dies für  $\tilde{\delta} = \frac{\delta}{3}$ . Auf dem Rest der Grundmenge gilt  $|X_n - X| < \tilde{\varepsilon}$ . Für diese Menge gilt außerdem  $X \geq \eta$  sowie  $X_n \geq \eta$ . Weil  $1/X : \Omega \rightarrow [\eta, \infty)$  gleichmäßig stetig ist, folgt die Aussage.

**Ü7.1.4** Gibt es eine zu Satz 7.1.2(iii) analoge Aussage, wenn man „+“ durch „·“ ersetzt?

**Ü7.1.5** Es seien  $A, A_1, A_2, \dots$  Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, dass die Indikatorfunktionen  $\chi_{A_n}$  genau dann gegen  $\chi_A$  gehen, wenn  $\mathbb{P}(A_n \Delta A) \rightarrow 0$  gilt<sup>1)</sup>

## Zu Abschnitt 7.2

**Ü7.2.1** Es gelte  $\lim_{f.s.} X_n = X$ . Wir fixieren nun ein  $r > 0$  und „beschneiden“  $X$  und die  $X_n$ : Neue Zufallsvariable werden durch

$$Y := \min\{\max\{X, -r\}, r\}, \quad Y_n := \min\{\max\{X_n, -r\}, r\}$$

definiert. Zeigen Sie, dass dann  $\lim_{f.s.} Y_n = Y$  gilt.

**Ü7.2.2** Gibt es eine zu Satz 7.2.2(iii) analoge Aussage, wenn man „+“ durch „·“ ersetzt?

**Ü7.2.3** Es seien  $A_1, A_2, \dots$  Ereignisse. Finden Sie Bedingungen dafür, dass  $\lim_{f.s.} \chi_{A_n} = 0$  gilt.

## Zu Abschnitt 7.3

**Ü7.3.1**  $\Omega = [0, 1]$  sei mit der Gleichverteilung versehen. Die Zufallsvariablen  $X_n$  seien definiert durch

$$X_n(\omega) := \begin{cases} \omega, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ 1 - \omega, & \text{wenn } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Konvergiert die Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

---

<sup>1)</sup>Hierbei bezeichnet  $\Delta$  die symmetrische Differenz:  $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

- fast sicher,
- in Wahrscheinlichkeit,
- in Verteilung?

**Ü7.3.2**  $\lim_{i.V.} X_n = X$  impliziert  $\lim_{i.V.} (X_n + c) = X + c$  für alle  $c \in \mathbb{R}$ .

**Ü7.3.3** Man sagt, dass eine für Elementarereignisse sinnvoll formulierbare Eigenschaft *fast sicher* gilt, wenn es ein Ereignis  $N$  mit Wahrscheinlichkeit 0 so gibt, dass alle nicht in  $N$  gelegenen Elementarereignisse diese Eigenschaft haben.

Nun seien  $X, X_1, X_2, \dots$  reellwertige Zufallsvariable, die alle auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind. Wir setzen voraus, dass die  $X_n$  für  $n = 1, \dots$  fast sicher nichtnegativ sind.

Die  $X_n$  sollen gegen  $X$  konvergent sein. Welche Art der Konvergenz impliziert, dass auch  $X$  fast sicher nichtnegativ ist: fast sicher, in Wahrscheinlichkeit, in Verteilung?

**Ü7.3.4** Es seien  $X, X_1, X_2, \dots$  Zufallsvariable, und  $F_X, F_{X_1}, F_{X_2}, \dots$  seien die zugehörigen Verteilungsfunktionen. Zeigen Sie: Wenn die  $X_n$  in Verteilung gegen  $X$  gehen, so ist  $\lim_n F_{X_n}(x) = F_X(x)$  für jedes  $x$ , bei dem  $F_X$  stetig ist<sup>2)</sup>.

## Aufgaben zu Kapitel 8

### Zu Abschnitt 8.1

**Ü8.1.1** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $E_n \subset \mathbb{R}^2$  die Kreisscheibe mit dem Radius  $n^3$ . Bestimmen Sie  $\limsup E_n$  und  $\liminf E_n$ .

**Lösung** Es sei  $E_n$  die Kreisscheibe mit Radius  $n^3$ .

$\limsup E_n = \bigcap_m \bigcup_{n \geq m} E_n = \bigcap_m \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ , denn  $x \in \mathbb{R}^2$  ist in  $\bigcup_{n \geq m} E_n$  für jedes  $m \in \mathbb{N}$  enthalten.

$\liminf E_n = \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} E_n = \bigcup_m E_m = \mathbb{R}^2$ .

**Ü8.1.2** Es sei  $(X_n)$  eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die alle geometrisch verteilt zum Parameter  $0 < q < 1$  sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unendlich oft  $X_n \geq n + 1$  gilt?

**Lösung** Wir können uns diese Situation als unabhängige Folge von Abfragen eines Zufallsautomaten vorstellen, der die geometrische Verteilung simuliert. Wir setzen dann  $E_i := \{i + 1, i + 2, \dots\}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , und interessieren uns nun für die Wahrscheinlichkeit, dass für unendlich viele  $n$  die  $n$ -te Abfrage in  $E_n$  liegt. Nach den Lemmata von Borel-Cantelli aus Abschnitt 8.1 ist dafür der Wert der Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$  zu ermitteln. Der erste Schritt besteht nun darin,

$$\mathbb{P}(E_i) = \sum_{n=i+1}^{\infty} q^{n-1}(1-q).$$

<sup>2)</sup>Die Umkehrung gilt übrigens auch, das ist aber etwas schwieriger einzusehen.

zu berechnen. Zunächst betrachten wir die zugehörige Partialsumme und formen diese um, wobei wir die Gleichung  $\sum_{k=0}^N = (1 - q^{N+1})/(1 - q)$  verwenden.

$$\begin{aligned} \sum_{n=i+1}^M q^{n-1}(1-q) &= (1-q) \left( \sum_{n=1}^M q^{n-1} - \sum_{n=1}^i q^{n-1} \right) \\ &= (1-q) \left( \sum_{n=0}^{M-1} q^n - \sum_{n=0}^{i-1} q^n \right) \\ &= (1-q) \left( \frac{1-q^M}{1-q} - \frac{1-q^i}{1-q} \right) \\ &= q^i - q^M \end{aligned}$$

Nun gehen wir zum Grenzwert mit  $M \rightarrow \infty$  über und erhalten  $\mathbb{P}(E_i) = q^i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Nun gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} q^i = -1 + \sum_{i=0}^{\infty} q^i = -\frac{1-q}{1-q} + \frac{1}{1-q} = \frac{q}{1-q} < \infty.$$

Nach dem ersten Teil des Lemmas von Borel-Cantelli (Lemma 8.1.1.) ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit also gleich Null (auf die Forderung der Unabhängigkeit hätte man übrigens verzichten können).

**Ü8.1.3** Es sei  $(X_n)$  eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die alle exponentialverteilt zum Parameter  $\lambda > 0$  sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unendlich oft  $X_n \leq n$  gilt?

**Ü8.1.4** Es seien  $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Zufallsvariable für  $n \in \mathbb{N}$ , und  $\Delta$  sei die Menge derjenigen  $\omega \in \Omega$ , für die  $\sum_n X_n(\omega)$  existiert. (Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass  $\Delta$  ein Ereignis ist.)

Beweisen Sie: Ist  $\mathbb{P}(\{|X_n| \geq q^n\}) \leq q^n$  für eine geeignete Zahl  $q \in ]0, 1[$  und alle  $n$ , so hat  $\Delta$  Wahrscheinlichkeit 1: Die Reihe  $\sum_n X_n$  ist also fast sicher konvergent.

**Ü8.1.5** Ein Affe versucht, den Text „ELEMENTARE STOCHASTIK“ zu schreiben. Er ist unermüdlich (und unsterblich), ein Versuch dauert zehn Sekunden. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Wartezeit, bis das zum ersten Mal klappt. (Auf seiner Schreibmaschine sind nur die Großbuchstaben und das Leerzeichen, und alle Tasten haben die gleiche Wahrscheinlichkeit, angeschlagen zu werden.)

**Lösung** Wir bestimmen zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass der Affe einen richtigen Buchstaben tippt:  $\mathbb{P}(B) = 1/27$ , denn es gibt 26 Buchstaben und das Leerzeichen. Wenn wir annehmen, dass der Affe keinen Buchstaben bevorzugt und alle Buchstaben unabhängig voneinander produziert, können wir die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass er *ELEMENTARE STOCHASTIK* tippt.

$p = \mathbb{P}(\text{ELEMENTARE STOCHASTIK}) = (1/27)^{21} = 8.7370 \cdot 10^{-31}$  Es handelt

sich also um ein Bernoulliexperiment mit sehr kleiner Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$ . Der Erwartungswert der Anzahl der Versuche bis zum ersten Erfolg ist gleich  $1/p$  (Vgl. Abschnitt 6.3). Dauert nun ein Versuch 10 Sekunden, so folgt, dass die mittlere Wartezeit  $1/p \cdot 10 \text{ s} = 1.1446 \cdot 10^{31} \text{ s} = 3.6269 \cdot 10^{14} \text{ Jahr}$ milliarden.

## Zu Abschnitt 8.2

**Ü8.2.1** Zeigen Sie, dass für die Gültigkeit des schwachen Gesetzes die Unabhängigkeit der  $X_1, X_2, \dots$  wesentlich ist.

**Lösung** Wenn wir die Voraussetzung „unabhängig“ weg lassen, so können wir z.B.  $X_i = X$  für alle  $i$  wählen. Damit ist  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{n \cdot X}{n} = X$ , und wenn  $X$  nicht gerade konstant ist, so geht dies nicht gegen  $\mathbb{E}(X)$ .

**Ü8.2.2** Nutzen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung aus, um das folgende Problem zu lösen: Wie viele Versuche muss man machen, um eine unbekannte Wahrscheinlichkeit  $p$  bis auf einen Fehler von 0.02 so zu bestimmen, dass das Ergebnis mit 95 Prozent Wahrscheinlichkeit verlässlich ist

**Ü8.2.3** Das Integral  $\int_0^1 X(x) dx$  soll mit einem Monte-Carlo-Verfahren bestimmt werden: Als Ergebnis wird  $X(x_1) + \dots + X(x_n)$  vorgeschlagen, wobei die  $x_1, \dots, x_n$  unabhängig und gleichverteilt in  $[0, 1]$  sind. Wie muss man  $n$  wählen, um das Integral bis auf einen Fehler von höchstens 0.01 und mit einer Sicherheit von 0.99 dadurch bestimmen zu können. (Achtung: Das Ergebnis hängt von  $X$  ab.)

**Lösung** Wir definieren uns eine neue Zufallsvariable  $Y_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X(x_i)$ . Offenbar gilt  $E(Y_n) = \int_0^1 X(x) dx$ , also erhalten wir mithilfe der Tschebyscheff-Ungleichung:

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X(x_i)}{n} - \int_0^1 X(x) dx\right| < \varepsilon\right) = P(|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2(Y_n)}{\varepsilon^2},$$

und mit  $\varepsilon = 0.01$  und der geforderten Wahrscheinlichkeit von 0.99 erhalten wir die Ungleichung

$$1 - \frac{\sigma^2(Y_n)}{0.01^2} \geq 0.99,$$

was umgestellt nach  $\sigma(Y_n)$  gerade  $0.01^3 \geq \sigma^2(Y_n)$  ist. Wir müssen also  $n$  so wählen, dass die Varianz  $\sigma^2(Y_n)$  kleiner als  $0.01^3$  ist.

## Zu Abschnitt 8.3

**Ü8.3.1** Zeigen Sie, dass für die Gültigkeit des starken Gesetzes die Unabhängigkeit der  $X_1, X_2, \dots$  wesentlich ist.

**Lösung** Wir konstruieren ein Beispiel mit Zufallsvariablen, die nicht unabhängig voneinander sind und zeigen, dass das starke Gesetz dann nicht gilt. Wähle den Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{E}, P)$  mit  $\Omega = \{0, 1\}$ ,  $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$  und  $P(\{0\}) =$

$P(\{1\}) = \frac{1}{2}$ . Es sei  $X$  eine Zufallsvariable und  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$  Kopien. Es ist leicht nachzuprüfen, dass der Erwartungswert und die Streuung von  $X$  existieren. Es ist  $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ , aber  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{n \cdot X}{n} = X \in \{0, 1\}$ , also liegt für  $n \rightarrow \infty$  keine Konvergenz gegen den Erwartungswert vor. Damit ist gezeigt, dass die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen wesentlich ist.

**Ü8.3.2** Angenommen, es existiert der Erwartungswert von  $X^6$ . Was lässt sich dann über  $\mathbb{P}(|X_1 + \dots + X_n|/n \geq \varepsilon)$  aussagen? (Vgl. den Beweis von Satz 8.3.1.)

**Ü8.3.3** Folgern Sie aus dem starken Gesetz: Ist  $E$  ein Ereignis im Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$  und erzeugt man unabhängige Abfragen aus  $\Omega$  gemäß  $\mathbb{P}$ , so konvergiert der Anteil der  $\omega$ , die in  $E$  liegen, fast sicher gegen  $\mathbb{P}(E)$ .

#### Zu Abschnitt 8.4

**Ü8.4.1** Beweisen Sie, dass die Voraussetzung der Unabhängigkeit im zentralen Grenzwertsatz wesentlich ist.

**Lösung** Für eine Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  identisch wie  $X$  verteilter Zufallsvariablen, für die Erwartungswert  $\mathbb{E}(X)$  und Varianz  $\sigma^2 \neq 0$  existieren und die nicht standardnormalverteilt sind, konvergieren die Zufallsvariablen  $(X_1 + \dots + X_n - n\mathbb{E}(X))/\sqrt{n}\sigma$  in Verteilung gegen  $X$  und nicht gegen die Standardnormalverteilung. Der zentrale Grenzwertsatz gilt also nicht mehr, wenn man die Forderung der Unabhängigkeit weglässt.

**Ü8.4.2** Es soll gezeigt werden, dass gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Tipp: Betrachten Sie eine Folge  $X_1, X_2, \dots$  von unabhängigen Zufallsvariablen, die alle poissonverteilt zum Parameter 1 sind. Bestimmen Sie nun den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{X_1 + \dots + X_n \leq 0\})$  auf zwei verschiedene Arten: einmal durch Anwenden des zentralen Grenzwertsatzes und einmal durch exaktes Berechnen von  $P(X_1 + \dots + X_n \leq 0)$ . Dabei muss man sich daran erinnern, was herauskommt, wenn man zwei Poisson-Verteilungen miteinander faltet.

Ein analytischer Beweis der Behauptung scheint schwieriger zu sein.

**Ü8.4.3** Das schwache Gesetz besagt doch: Wenn Erwartungswert und Streuung für  $X$  existieren, so gehen die Mittelwerte unabhängiger Kopien in Wahrscheinlichkeit gegen eine konstante Zufallsvariable (konstanter Wert =  $\mathbb{E}(X)$ ).

Zeigen Sie, dass dieses Ergebnis auch eine Folgerung aus dem zentralen Grenzwertsatz ist. (Vorbereitend ist dazu zu beweisen: Gehen Zufallsvariable in Verteilung gegen eine Konstante, so liegt sogar Konvergenz in Wahrscheinlichkeit vor.)

**Ü8.4.4** Eine Zufallsvariable  $X$  sei poissonverteilt zum Parameter 4, und die Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$  seien unabhängige Kopien. Wie groß ist (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass  $X_1 + \dots + X_{1000}$  zwischen 3.9 und 4.1 liegt?

## Zu Abschnitt 8.5

**Ü8.5.1** Wir betrachten einen Zufallsspaziergänger auf  $\mathbb{Z}$ . Er startet bei Null, und im jeweils nächsten Schritt geht er mit gleicher Wahrscheinlichkeit einen Schritt nach links oder rechts. Folgern Sie aus dem Satz vom iterierten Logarithmus, dass er mit Wahrscheinlichkeit Eins jedes  $z \in \mathbb{Z}$  unendlich oft besuchen wird.

**Ü8.5.2** Stimmt die Aussage in der vorigen Aufgabe auch dann noch, wenn die Wahrscheinlichkeit für „links“ gleich  $p$  und für „rechts“ gleich  $1 - p$  ist und  $p$  von 0.5 verschieden ist?

**Ü8.5.3** Zeigen Sie, dass das starke Gesetz der großen Zahlen eine Folgerung des Satzes vom iterierten Logarithmus ist.

**Lösung** Aus dem Teil (i) des Satzes vom iterierten Logarithmus (Satz 8.5.1) und der Definition von  $\limsup$  folgt sofort

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mathbb{E}(X)}{\sigma\sqrt{2n \log \log n}} \leq 1 + \epsilon,$$

d.h. über jeder vorgegebenen  $\epsilon$ -Umgebung um den Limes superior ( $= 1$ ) liegen nur endlich viele Folgenglieder.

Völlig analog schließen wir aus Teil (ii) des Satzes und der Definition von  $\liminf$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mathbb{E}(X)}{\sigma\sqrt{2n \log \log n}} \geq -(1 + \epsilon).$$

Wir stellen beide Gleichungen um und fassen sie zusammen:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \\ -\sigma \frac{\sqrt{2n \log \log n}}{n} (1 + \epsilon) \leq \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mathbb{E}(X) \leq \sigma \frac{\sqrt{2n \log \log n}}{n} (1 + \epsilon). \end{aligned}$$

Um nun das starke Gesetz der großen Zahlen zu zeigen, zeigen wir, dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mathbb{E}(X) \rightarrow 0$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass

$$\frac{\sqrt{2n \log \log n}}{n} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Dafür genügt es, die Ungleichung  $\log(n) \leq n^{1/4}$  zu zeigen, denn damit hätte man sofort

$$\frac{\sqrt{2n \log \log n}}{n} \leq \frac{\sqrt{2n \log n}}{n} \leq \frac{\sqrt{2nn^{1/4}}}{n} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Nun also zum Beweis von  $\log(n) \leq n^{1/4}$ . Zunächst erinnern wir uns an die Darstellung der Exponentialfunktion als Potenzreihe, d.h.  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ . Daraus können wir sofort die Abschätzung  $e^x \geq x^4/4!$  ablesen, und durch Einsetzen von  $x = n^{1/4}$  erhalten wir  $e^{n^{1/4}} \geq n/4!$ , und Logarithmieren ergibt dann sofort die gewünschte Ungleichung  $\log(n) \leq n^{1/4}$  (bis auf eine Konstante).



Elementare Stochastik

Ein Lernbuch - von Studierenden mitentwickelt

Behrends, E.

2013, XVIII, 374 S. 70 Abb., 15 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-8348-1939-0