

Bei der Anwendung der Randelementmethode auf mehrdimensionale Probleme ergeben sich neue Probleme, insbesondere bei der mathematischen Beschreibung. In diesem Kapitel werden am Beispiel der Wärmeleitung diese Fragestellungen behandelt.

2.1 Die Feldgleichung der Wärmeleitung

In differentieller Schreibweise lautet der 1. Hauptsatz der Thermodynamik

$$\delta Q + \delta W = dT + dU, \quad (2.1)$$

wobei die kinetische Energie T und innere Energie U Zustandsgrößen und die zugeführte Wärme Q und Arbeit W Prozessgrößen sind.

Im Gegensatz zu *Zustandsgrößen*, die den thermodynamischen *Zustand* eines Systems kennzeichnen, gehören *Prozessgrößen* zu einem *Prozess*, der mit einer Zustandsänderung verbunden ist. Vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet bedeutet dies, dass für Zustandsgrößen ein vollständiges Differential existiert, während für eine Prozessgröße f lediglich ein Zuwachs δf angegeben werden kann. Zur Erinnerung:

Satz 2.1 Für die Funktion $f = f(x, y)$ ist

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x dy \quad (2.2)$$

ein vollständiges Differential, wenn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

gilt. Diese – als Integrabilitätsbedingung bezeichnete – Vorschrift ist notwendig und hinreichend für ein vollständiges (exaktes) Differential.

Dividiert man Gl. (2.1) einmal mit dt durch, so erhält man für die Leistungen

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{\delta W}{dt} + \frac{\delta Q}{dt}, \quad (2.3)$$

wobei die Leistung infolge Änderung der kinetischer Energie $\frac{dT}{dt}$ und die Leistung der Volumen- und Oberflächenkräfte $\frac{\delta W}{dt}$ im folgenden nicht weiter berücksichtigt werden sollen.

Bei Festkörpern ist der Massenstrom durch die Oberfläche gleich Null, und für die spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck und Volumen gilt näherungsweise

$$c_p = c_v = c. \quad (2.4)$$

Damit erhält man für die in einem Gebiet Ω gespeicherte innere Energie

$$U = \int_{\Omega} \rho u d\Omega, \quad (2.5)$$

wobei ρ die Dichte,

$$u = cT \quad (2.6)$$

die spezifische innere Energie und T die absolute Temperatur ist.

Die zugeführte Wärmeleistung ist

$$\frac{\delta Q}{dt} = - \int_{\Gamma} \vec{q}_w \cdot \vec{n} d\Gamma, \quad (2.7)$$

wobei der Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ senkrecht auf der Oberfläche Γ stehend *nach außen* zeigt. Für den Wärmestromvektor $\vec{q}_w$ gilt das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz

$$\vec{q}_w = -k \nabla T = -k \text{ grad } T \quad (2.8)$$

mit der Wärmeleitfähigkeit k , die oft auch mit λ bezeichnet wird. Die Tatsache, dass der Wärmestromvektor vom höheren zum niedrigeren Temperaturniveau zeigt, wird durch das Minuszeichen in Gl. (2.8) berücksichtigt.

Nach Einsetzen der Gleichungen (2.5–2.8) in Gl. (2.3) erhält man

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho c T d\Omega \right) = - \int_{\Gamma} \vec{q}_w \cdot \vec{n} d\Gamma. \quad (2.9)$$

Die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes (siehe Kap. 2.4.2.2, S. 42) führt weiterhin auf

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho c T \, d\Omega \right) &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{q}_w \, d\Omega \\
 &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{q}_w \, d\Omega \\
 &= + \int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla T) \, d\Omega.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Mit Hilfe der Indexschreibweise ergibt sich

$$\nabla \cdot (k \nabla) = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(k \vec{e}_l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) = \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_l}_{\delta_{il}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \tag{2.11}$$

bzw.

$$\rho c \frac{dT}{dt} = (k T_{,i})_{,i} = \underbrace{k_{,i} T_{,i}}_{=0, k=\text{const.}} + k T_{,ii} = k \Delta T = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right). \tag{2.12}$$

Für den stationären (zeitunabhängigen) Fall verbleibt die Laplace-Gleichung der Wärmeleitung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = \nabla^2 T = \Delta T = 0. \tag{2.13}$$

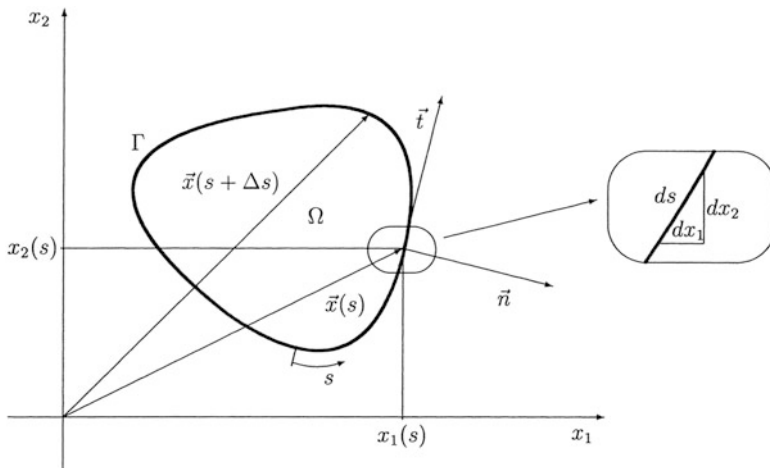
2.2 Ebene Problemstellung

Betrachten wir ein (abgeschlossenes) Gebiet Ω , wie in Abb. 2.1 dargestellt, in dem die Laplace-Gleichung (2.13) in der $x_1 x_2$ Ebene gilt. Eine solche Problemstellung heißt Innenraumproblem. Beim Innenraumproblem liegt der Normalenvektor rechts, wenn der Bogenparameter s des Randes in positiver Richtung, d. h. im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.

Den Rand des Gebietes kann man in zwei Teile $\Gamma_T \cup \Gamma_{q_w} = \Gamma$ aufteilen. Auf Γ_T ist die Randbedingung $T = \bar{T}$, auf Γ_{q_w} die Randbedingung $q_w = \bar{q}_w$ gegeben, wobei q_w der Fluss senkrecht durch den Rand, d. h. die Ableitung von T in Richtung von $\vec{n}$ ist,

$$q_w = -k \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}. \tag{2.14}$$

Diese Ableitung wird auch Richtungsableitung (Normalenableitung) genannt, für sie gilt

**Abb. 2.1** 2D-Innenraumproblem

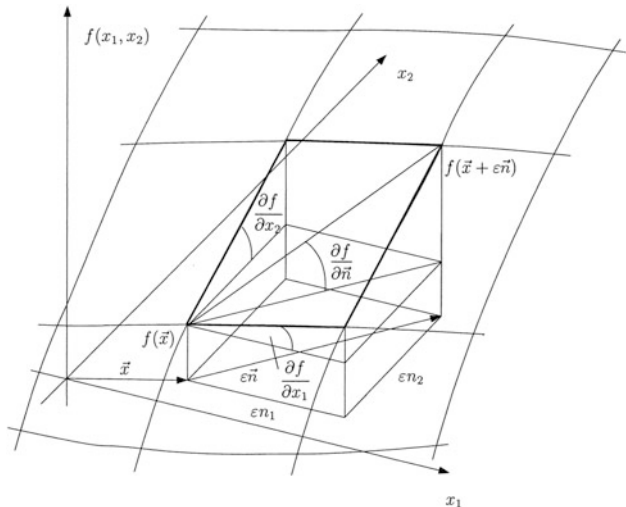
Definition 2.1 Die Richtungsableitung ist die Ableitung einer Funktion f in Richtung eines beliebigen Einheitsvektors $\vec{n}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + \varepsilon \vec{n}) - f(\vec{x})}{\varepsilon}, |\vec{n}| = 1.$$

Satz 2.2 Für die Richtungsableitung gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial f}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} n_2 = \nabla f \cdot \vec{n}.$$

Die Gültigkeit dieses Satzes wird aus Abb. 2.2 deutlich:

Abb. 2.2 Richtungsableitung einer Funktion $f(\vec{x})$ 

Berechnet man den Funktionswert $f(\vec{x} + \varepsilon \vec{n})$ aus dem Funktionswert $f(\vec{x})$ und den Ableitungen in die Koordinatenrichtungen, so erhält man durch Aufsummieren unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung ε^2

$$f(\vec{x} + \varepsilon \vec{n}) = f(\vec{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \varepsilon n_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \varepsilon n_2, \quad (2.15)$$

woraus unmittelbar Satz 2.2 folgt. Im übrigen ist auch ∇f ein Vektor, der interpretiert werden kann: Auf einer Linie $f = \text{const.}$ ändert sich f nicht, d.h. für Vektoren $\vec{n}$, die in dieser Linie liegen, ist $\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \vec{n} = 0$. Daraus folgt jedoch unmittelbar, dass ∇f ein Vektor ist, der senkrecht auf $\vec{n}$ und damit auch auf der Linie $f = \text{const.}$ steht.

Setzt man in Gl. (2.14) das Ergebnis aus Satz 2.2 ein und vergleicht dies mit Gl. (2.8), so erkennt man, dass $qw = \vec{q}w \cdot \vec{n}$ sein muss, d.h. qw ist gerade der Anteil von $\vec{q}w$ in Normalenrichtung.

Für den Tangentenvektor gilt nach Abb. 2.1

$$\vec{t} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(s + \Delta s) - \vec{x}(s)}{\Delta s} = \frac{d\vec{x}}{ds}, |\vec{t}| = 1. \quad (2.16)$$

Mit

$$\vec{x} = x_1(s)\vec{e}_1 + x_2(s)\vec{e}_2 \quad (2.17)$$

folgt

$$\vec{t} = \frac{dx_1}{ds} \vec{e}_1 + \frac{dx_2}{ds} \vec{e}_2. \quad (2.18)$$

Für den nach außen weisenden Normalenvektor erhält man mit $\vec{t} \cdot \vec{n}^* = 0$

$$\vec{n}^* = \frac{dx_2}{ds} \vec{e}_1 - \frac{dx_1}{ds} \vec{e}_2, \quad (2.19)$$

wobei hier $|\vec{n}^*| = 1$ gilt, d.h. $\vec{n}^*$ ist hier ein Einheitsvektor. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall, der Normaleneinheitsvektor wird dann durch die Normierung

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}^*}{|\vec{n}^*|} \quad (2.20)$$

gewonnen.

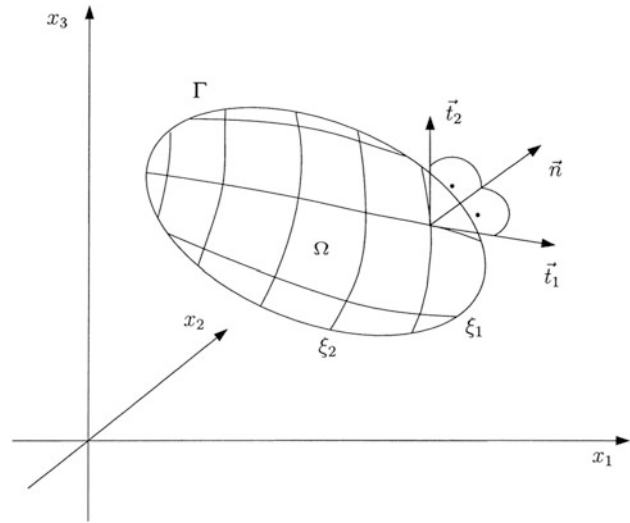
Zusammenfassung der Randbedingungen Aus Gründen der Allgemeinheit wird im folgenden die Feldfunktion (hier: Temperatur T) mit u bezeichnet. Dann lautet die Formulierung des vollständigen Randwertproblems:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \nabla^2 u = \Delta u = 0 \text{ in } \Omega \quad (2.21)$$

$$u = \bar{u} \text{ auf } \Gamma_u \quad (2.22)$$

$$qw = -k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \vec{q}w \text{ auf } \Gamma_{qw} \quad (2.23)$$

Abb. 2.3 3D-Innenraumproblem



2.3 Räumliche Problemstellung

Bei einem dreidimensionalen Innenraumproblem, wie in Abb. 2.3 dargestellt, sind einige Unterschiede im Vergleich zu einem zweidimensionalen Problem zu beachten.

Dies betrifft hier zunächst die Berechnung des Normalenvektors. Dieser wird nun aus den zwei Tangentenvektoren durch Kreuzproduktbildung

$$\vec{n}^* = \vec{t}_1 \times \vec{t}_2 \quad (2.24)$$

ermittelt, wobei sich $\vec{t}_1$ und $\vec{t}_2$ ihrerseits aus der Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{x}(\xi_1, \xi_2)$ des Randes durch Differentiation gemäß

$$\vec{t}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1}, \quad \vec{t}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} \quad (2.25)$$

berechnen. Auch der Vektor $\vec{n}^*$ ist i. a. kein Einheitsvektor. Für die Normalenableitung gilt analog zum Zweidimensionalen

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial f}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} n_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} n_3 = \nabla f \cdot \vec{n}. \quad (2.26)$$

Der Vektor ∇f ist nun ein Vektor, der senkrecht auf einer Fläche $f = \text{const.}$ steht.

2.4 Randelementformulierung der Laplace-Gleichung

2.4.1 Schwache Form der Differentialgleichung

Die gewichtete (oder schwache) Form der Laplace-Gleichung lautet im Mehrdimensionalen (vgl. Gl. (1.145))

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u w \, d\Omega = 0. \quad (2.27)$$

2.4.2 Transformation auf den Rand

Dieser Schritt entspricht der partiellen Integration des Differentialoperators im Eindimensionalen, erfordert jedoch zusätzlich, abhängig von der Dimension des Problems, die Anwendung spezieller Integralsätze. Dies reduziert die Gebietsintegrale – anders als im Eindimensionalen, wo die Integrale auf skalare Größen reduziert wurden – auf Randintegrale. In den folgenden Abschnitten wird die Transformation auf den Rand sowohl für zwei- als auch für dreidimensionale Probleme Schritt für Schritt durchgeführt, wobei die entsprechenden Integralsätze mit ihren Voraussetzungen ausführlich behandelt werden.

2.4.2.1 Zweidimensionale Probleme

Für den zweidimensionalen Fall lautet die schwache Form des Laplace-Operators ausgeschrieben

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u w \, d\Omega = \int_{(x_2)} \int_{(x_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right) w \, dx_1 \, dx_2 + \int_{(x_1)} \int_{(x_2)} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) w \, dx_2 \, dx_1. \quad (2.28)$$

Partielle Integration, im ersten Integral über x_1 , im zweiten über x_2 , führt auf

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 u w \, d\Omega &= \int_{(x_2)} \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} w \right]_{x_1(l)(x_2)}^{x_1(r)(x_2)} dx_2 + \int_{(x_1)} \left[\frac{\partial u}{\partial x_2} w \right]_{x_2(u)(x_1)}^{x_2(o)(x_1)} dx_1 \\ &\quad - \int_{(x_1)} \int_{(x_2)} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) dx_1 \, dx_2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

wobei $x_1(l)$ und $x_2(u)$ bzw. $x_1(r)$ und $x_2(o)$ untere bzw. obere Integrationsgrenzen darstellen und als nächstes zu klären ist, welche Bedeutung diesen zunächst schwer zu interpretierenden Integralen zuzuordnen ist. Hierzu ist die Verwendung des Greenschen Satzes in der Ebene (auch ‘Gaußscher Integralsatz der Ebene’ [6] oder im englischsprachigen Raum ‘Green’s theorem in the plane’ [13] genannt) erforderlich. Dieser Integralsatz überführt diese beiden Integrale in ein geschlossenes Randintegral und schafft damit die Voraussetzungen für eine Randintegralformulierung.

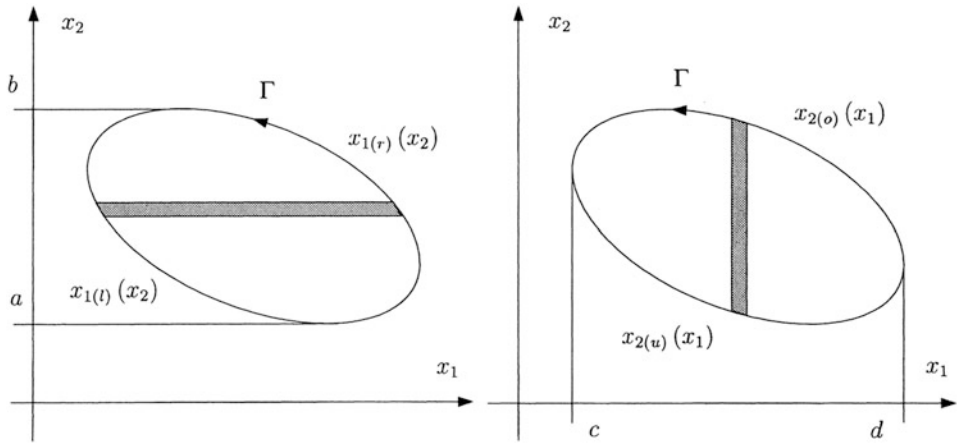


Abb. 2.4 Zum Greenschen Satz

Greenscher Satz in der Ebene Zur Herleitung dieses Satzes betrachtet man ein konvexes Gebiet wie in Abb. 2.4 dargestellt. Die eindimensionalen Integrale in der ersten Zeile von Gl. (2.29) lassen sich durch einen Ausdruck

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (2.30)$$

darstellen, denn nach einmaliger Integration erhält man

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_a^b [P]_{x_{1(l)}(x_2)}^{x_{1(r)}(x_2)} dx_2 + \int_c^d [Q]_{x_{2(u)}(x_1)}^{x_{2(o)}(x_1)} dx_1. \quad (2.31)$$

Weiteres Ausrechnen liefert

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 &= \int_a^b (P(x_{1(r)}(x_2), x_2) - P(x_{1(l)}(x_2), x_2)) dx_2 \\ &\quad + \int_c^d (Q(x_1, x_{2(o)}(x_1)) - Q(x_1, x_{2(u)}(x_1))) dx_1 \\ &= \int_a^b P(x_{1(r)}(x_2), x_2) dx_2 + \int_b^a P(x_{1(l)}(x_2), x_2) dx_2 \\ &\quad - \int_d^c Q(x_1, x_{2(o)}(x_1)) dx_1 - \int_c^d Q(x_1, x_{2(u)}(x_1)) dx_1, \end{aligned} \quad (2.32)$$

und unter Beachtung des in Abb. 2.4 eingezeichneten positiven Umlaufsinnns folgt der *Greensche Satz in der Ebene*

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} P dx_2 - Q dx_1. \quad (2.33)$$

Betrachtet man nun die eindimensionalen Integrale in Gl. (2.29), so kann man sie unter Berücksichtigung der Beziehung (2.31) und mit Hilfe des Greenschen Satzes (2.33) auf die Form

$$\begin{aligned} \int_{(x_2)} \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} w \right]_{x_{1(l)}(x_2)}^{x_{1(r)}(x_2)} dx_2 + \int_{(x_1)} \left[\frac{\partial u}{\partial x_2} w \right]_{x_{2(u)}(x_1)}^{x_{2(o)}(x_1)} dx_1 &= \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_1} w dx_2 - \frac{\partial u}{\partial x_2} w dx_1 \\ &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} w \frac{dx_2}{ds} - \frac{\partial u}{\partial x_2} w \frac{dx_1}{ds} \right) ds \\ &= \int_{\Gamma} w \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{n_1^*}{|\vec{n}^*|} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{n_2^*}{|\vec{n}^*|} \right) |\vec{n}^*| ds \\ &= \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.34)$$

bringen, wobei noch Gebrauch von der Definition der Normalenableitung gemacht wurde. Damit lässt sich der einmal partiell integrierte Laplace-Operator gemäß

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u w d\Omega = \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) d\Omega \quad (2.35)$$

darstellen. Diese Darstellung wird häufig als '1. Greensche Formel' bezeichnet [6]. Erneute partielle Integration des Ausdrucks

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (2.36)$$

führt dann weiterhin auf

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 u w d\Omega &= \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\Gamma - \int_{(x_2)} \left[u \frac{\partial w}{\partial x_1} \right]_{x_{1(l)}(x_2)}^{x_{1(r)}(x_2)} dx_2 + \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} d\Omega \\ &\quad - \int_{(x_1)} \left[u \frac{\partial w}{\partial x_2} \right]_{x_{2(u)}(x_1)}^{x_{2(o)}(x_1)} dx_1 + \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla^2 u w d\Omega \end{aligned} \quad (2.37)$$

und auf die 2. Greensche Formel [6]

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u w - \nabla^2 w u) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(w \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \right) d\Gamma. \quad (2.38)$$

2.4.2.2 Dreidimensionale Probleme

Für den dreidimensionalen Fall lautet die schwache Form des Laplace-Operators ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 u w d\Omega &= \int_{(x_3)} \int_{(x_2)} \int_{(x_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right) w dx_1 dx_2 dx_3 \\ &+ \int_{(x_1)} \int_{(x_3)} \int_{(x_2)} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) w dx_2 dx_3 dx_1 \\ &+ \int_{(x_2)} \int_{(x_1)} \int_{(x_3)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right) w dx_3 dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Partielle Integration, im ersten Integral über x_1 , im zweiten über x_2 und im dritten über x_3 , führt auf

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 u w d\Omega &= \int_{(x_3)} \int_{(x_2)} \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} w \right]_{x_{1(u)}(x_2, x_3)}^{x_{1(o)}(x_2, x_3)} dx_2 dx_3 - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} d\Omega \\ &+ \int_{(x_1)} \int_{(x_3)} \left[\frac{\partial u}{\partial x_2} w \right]_{x_{2(u)}(x_3, x_1)}^{x_{2(o)}(x_3, x_1)} dx_3 dx_1 - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} d\Omega \\ &+ \int_{(x_2)} \int_{(x_1)} \left[\frac{\partial u}{\partial x_3} w \right]_{x_{3(u)}(x_1, x_2)}^{x_{3(o)}(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial w}{\partial x_3} d\Omega, \end{aligned} \quad (2.40)$$

wobei $x_{i(u)}(x_j, x_k)$ bzw. $x_{i(o)}(x_j, x_k)$ die entsprechenden unteren bzw. oberen Integrationsgrenzen sind. Die neuentstandenen zweidimensionalen Integrale können nun mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes (im Englischen als ‘divergence theorem’ oder ‘Green’s theorem in space’ bezeichnet) weiterverarbeitet werden.

Gaußscher Integralsatz Die zweidimensionalen Integrale in Gl. (2.40) können – analog zum zweidimensionalen Fall – durch einen Ausdruck

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (2.41)$$

Methode der Randelemente in Statik und Dynamik

Gaul, L.; Fiedler, C.

2013, XII, 195 S., Hardcover

ISBN: 978-3-8348-2536-0