

Eine erste Verallgemeinerung der euklidischen Geometrie, bei der man auf die Orthogonalität der Transformationsmatrix verzichtet, führt auf den Begriff der affinen Geometrie. Eine wichtige invariante Eigenschaft in dieser Geometrie betrifft die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes bezüglich eines Simplexes (Dreieck oder Tetraeder für  $d = 2$  oder  $3$ ) und das Teilverhältnis. Beide Begriffe besitzen Anwendungen bei der Konstruktion und Beschreibung von polynomialen Kurven, die ein wichtiges Werkzeug im Computer Aided Design (CAD) darstellen. Zum Abschluss dieses Kapitels werden Algorithmen zur Berechnung der konvexen Hülle einer Menge von Punkten vorgestellt.

## 3.1 Affine Abbildungen, baryzentrische Koordinaten und das Teilverhältnis

In diesem Abschnitt betrachten wir affine Abbildungen in der Form

$$\alpha : \mathbf{p} \mapsto \alpha(\mathbf{p}) = \vec{\mathbf{a}} + \hat{A}\mathbf{p}, \quad (3.1)$$

die bereits in (1.27) eingeführt wurde. Dabei ist  $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^d$  ein Vektor und  $\hat{A}$  eine  $d \times d$ -Matrix. Falls diese Matrix regulär ist, so ist die affine Abbildung ebenfalls regulär und besitzt eine eindeutig bestimmte Umkehrabbildung. Andernfalls ist die affine Abbildung singulär und besitzt keine Umkehrabbildung.

Zunächst ermitteln wir die Anzahl der *Freiheitsgrade* der affinen Abbildungen. Durch Einbettung der  $d(d+1)$  Koordinaten des Vektors  $\vec{\mathbf{a}}$  und der Matrix  $\hat{A}$  wie in (3.1) in den  $\mathbb{R}^{d(d+1)}$  lassen sich affine Abbildungen mit Punkten dieses Raumes identifizieren. Jeder Punkt dieses Raumes ist bijektiv einer affinen Abbildung zugeordnet.

**Satz** Eine affine Abbildung  $\alpha$  des  $E^d$  besitzt  $d(d+1)$  Freiheitsgrade. Durch Vorgabe der Bilder des Koordinatenursprungs  $\mathbf{u} = (0, \dots, 0)^T$  und der  $d$  Einheitspunkte<sup>1</sup>  $\mathbf{e}_i = (\delta_0^i, \dots, \delta_d^i)^T$  auf den Koordinatenachsen ( $i = 1, \dots, d$ ) ist eine affine Abbildung eindeutig bestimmt.

*Beweis* Die Anzahl der Freiheitsgrade ist durch die Anzahl der frei wählbaren Koeffizienten in  $\bar{\mathbf{a}}$  und  $\hat{A}$  festgelegt, diese beträgt  $d(d+1)$ . Man überzeugt sich weiter leicht davon, dass es eine eindeutig bestimmte affine Abbildung (3.1) gibt, die den Koordinatenursprung und die Einheitspunkte in vorgegebene Bildpunkte  $\mathbf{u}'$  und  $\mathbf{e}'_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ) überführt. Die Abbildung ist gegeben durch den Vektor  $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{u}'$  und durch die Matrix  $\hat{A}$ , deren Spalten die Differenzvektoren  $\mathbf{e}'_i - \mathbf{u}'$  sind.  $\square$

### Definition

Wir betrachten  $d+1$  beliebige, aber fest gegebene Punkte  $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_d$  im  $E^d$  in allgemeiner Lage.<sup>2</sup> Für einen beliebigen Punkt  $\mathbf{x}$  im  $E^d$  gibt es eindeutig bestimmte Zahlen  $\xi_0, \dots, \xi_d$ , die den Gleichungen

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^d \xi_i \mathbf{v}_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^d \xi_i = 1 \quad (3.2)$$

genügen. Diese werden als **baryzentrische Koordinaten** von  $\mathbf{x}$  bezüglich des durch die fest gegebenen Punkte  $\mathbf{v}_i$  festgelegten **baryzentrischen Koordinatensystems** bezeichnet.

Durch (3.2) wird das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ v_{01} & v_{11} & \cdots & v_{d1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{0d} & v_{1d} & \cdots & v_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

bestimmt, wobei  $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{id})^T$  die Koordinaten der fest gegebenen Punkte sind. Die Lösung des Systems sind die baryzentrischen Koordinaten des Punktes  $\mathbf{x}$ . Die Lösung ist eindeutig bestimmt, da die Koordinatenmatrix regulär ist: Ihre Spalten sind die homogenen Koordinatenvektoren der fest gegebenen Punkte  $\mathbf{v}_i$  und diese wurden als in allgemeiner Lage vorausgesetzt.

<sup>1</sup> Hier ist  $\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  das Kronecker-Delta.

<sup>2</sup> Dies bedeutet, dass diese Punkte nicht in einer Hyperebene enthalten sind. Entsprechend der Definition am Beginn des zweiten Kapitels lässt sich das durch die lineare Unabhängigkeit der entsprechenden homogenen Koordinatenvektoren charakterisieren.

Die Lösungen lassen sich mit der Cramerschen<sup>3</sup> Regel ermitteln,

$$\xi_i = \frac{\det^+(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{x}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_d)}{\det^+(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_d)}, \quad (3.3)$$

wobei wir die Abkürzung

$$\det^+(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_d) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ p_{01} & p_{11} & \cdots & p_{d1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{0d} & p_{1d} & \cdots & p_{dd} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

verwenden.

Falls der Punkt  $\mathbf{x}$  in der von  $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_d$  aufgespannten Hyperebene liegt, so gilt

$$\det^+(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{x}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_d) = 0$$

und folglich  $\xi_i = 0$ . Da die baryzentrischen Koordinaten linear von den Koordinaten  $x_i$  des Punktes abhängen, ist jede Koordinate  $\xi_i$  ein Vielfaches der Gleichung der Hyperebene durch die Punkte  $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_d$ , wobei sich die Gleichungen aller  $d + 1$  Hyperebenen zu 1 summieren.

Für  $d = 2$  zeigt Abb. 3.1 die dabei entstehende Vorzeichenverteilung, durch die die Ebene in sieben Teilbereiche zerlegt wird.

Mit Hilfe der Darstellung (3.3) zeigen wir den folgenden Satz:

**Satz** Die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes sind affin invariant: Ist  $\alpha$  eine reguläre affine Abbildung, so stimmen die baryzentrischen Koordinaten eines beliebigen Punktes  $\mathbf{x}$  bezüglich der Punkte  $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_d$  mit denen des Punktes  $\alpha(\mathbf{x})$  bezüglich der Punkte  $\alpha(\mathbf{v}_0), \dots, \alpha(\mathbf{v}_d)$  überein.

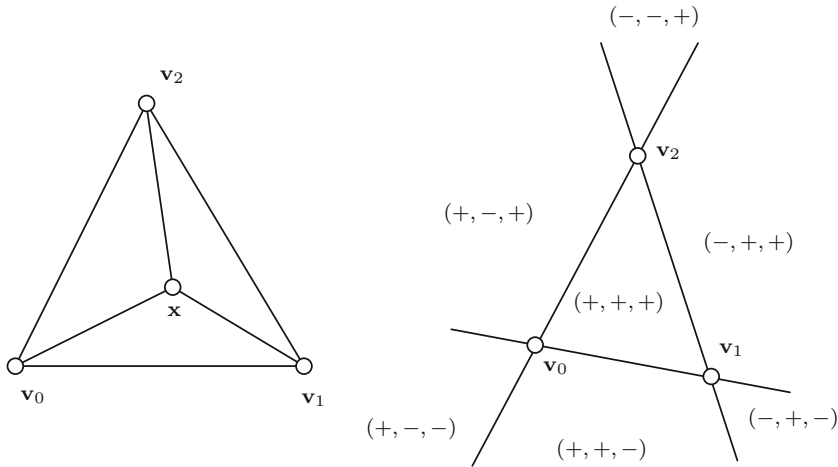
*Beweis* Für eine affine Abbildung der Form (3.1) gilt

$$\det^+(\vec{\mathbf{a}} + \hat{A}\mathbf{p}_1, \dots, \vec{\mathbf{a}} + \hat{A}\mathbf{p}_d) = \det(\hat{A}) \det^+(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_d), \quad (3.5)$$

da die Beziehung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\mathbf{a}} + \hat{A}\mathbf{p}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ \vec{\mathbf{a}} & \hat{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{p}_i \end{pmatrix}$$

<sup>3</sup> Der Genfer Mathematiker Gabriel Cramer (1704–1752) veröffentlichte 1750 im Anhang eines Buches die nach ihm benannte Formel zur Lösung linearer Gleichungssysteme und gab damit den Anstoß zur Entwicklung des Begriffs der Determinante.



**Abb. 3.1** Zur Definition der baryzentrischen Koordinaten  $(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$  in der Ebene (*links*) und Vorzeichenverteilung (*rechts*)

gilt und die Matrix, mit der die Spaltenvektoren multipliziert werden, die Determinante  $\det \hat{A}$  besitzt. Aus dieser Beziehung folgt unmittelbar die affine Invarianz der baryzentrischen Koordinaten, da sowohl Zähler als auch Nenner in (3.3) mit  $\det \hat{A}$  multipliziert werden.  $\square$

► **Bemerkung** Teilt man den in (3.4) definierten Ausdruck durch  $d!$ , so erhält man das orientierte Volumen des durch die  $d+1$  Punkte bestimmten Simplexes<sup>4</sup>. Aus (3.5) folgt unmittelbar, dass dieser Ausdruck gegenüber volumentreuen affinen Abbildungen – also insbesondere bei eigentlichen Bewegungen – invariant ist und bei uneigentlichen Bewegungen sein Vorzeichen wechselt. Damit erhält man eine geometrische Interpretation der baryzentrischen Koordinaten als Verhältnisse der orientierten Volumen verschiedener Simplexes (vgl. Abb. 3.1).

#### Definition

Sei  $\mathbf{x}$  ein Punkt der Geraden durch zwei voneinander verschiedene Punkte  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$ . Wir ergänzen  $\mathbf{p} = \mathbf{v}_0$  und  $\mathbf{q} = \mathbf{v}_1$  zu  $d+1$  Punkten in allgemeiner Lage und ermitteln die baryzentrischen Koordinaten von  $\mathbf{x}$  bezüglich dieser Punkte. Das Verhältnis der ersten beiden baryzentrischen Koordinaten

$$\text{TV}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{x}) = \xi_1 / \xi_0$$

wird dann als **Teilverhältnis** von  $\mathbf{x}$  bezüglich des Geradensegments  $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$  bezeichnet.

<sup>4</sup> Für  $d = 1$ : Strecke oder Geradensegment, für  $d = 2$ : Dreieck, für  $d = 3$ : Tetraeder.

Man überzeugt sich leicht davon, dass das Teilverhältnis nicht von der Wahl der  $d - 1$  zusätzlichen Punkte  $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d$  abhängt. Offenbar gilt  $\xi_i = 0$  für  $i = 2, \dots, d$ , da die Punkte

$$\mathbf{p} = \mathbf{v}_0, \mathbf{q} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{x}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_d,$$

aufgrund der Kollinearität von  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  und  $\mathbf{x}$  stets in einer Hyperebene enthalten sind. Daraus folgt  $\xi_0 + \xi_1 = 1$  und die Beziehung (3.2) vereinfacht sich zu

$$\mathbf{x} = \xi_0 \mathbf{v}_0 + \xi_1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{p} + \xi_1 (\mathbf{q} - \mathbf{p}).$$

Lässt man  $\xi_1$  in  $\mathbb{R}$  variieren, so erhält man eine Parametrisierung der Geraden durch  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$ . Da diese Parametrisierung bijektiv ist, ist für jeden Punkt  $\mathbf{x}$  der Geraden der Wert von  $\xi_1$  und damit das Teilverhältnis eindeutig bestimmt.

**Folgerung** Das Teilverhältnis  $\text{TV}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{x})$  von drei kollinearen Punkten  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  und  $\mathbf{x}$  mit  $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$  ist eindeutig festgelegt und affin invariant.

## 3.2 Polynomiale Kurven

In diesem Abschnitt werden wir verschiedene Möglichkeiten zur Beschreibung polynomialer Kurven untersuchen. Diese Klasse von Kurven (und ihre Verallgemeinerung auf Flächen) wird zur Beschreibung von Freiformobjekten im Computer Aided Design und in der Computergrafik eingesetzt.

### Definition

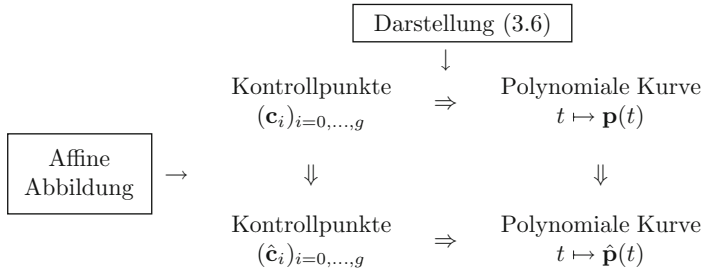
Eine **polynomiale Kurve** vom Grad  $g$  ist eine Abbildung

$$\mathbf{p} : \mathbb{R} \rightarrow E^d : t \mapsto \mathbf{p}(t) = (p_1(t), \dots, p_d(t))^T,$$

bei der die  $d$  Koordinatenfunktionen  $p_i$  jeweils Polynome vom Grad  $g$  in  $t$  sind. Schränkt man den Parameterbereich auf ein abgeschlossenes Intervall  $[a, b]$  ein, so spricht man von einem **polynomialen Kurvenstück**. Ist  $(\varphi_i)_{i=0, \dots, g}$  eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Grad  $g$ , so besitzt die Kurve eine **Darstellung**

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^g \varphi_i(t) \mathbf{c}_i \tag{3.6}$$

bezüglich dieser Basis mit Koeffizientenvektoren  $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^d$ .



**Abb. 3.2** Affine Invarianz einer Darstellung für polynomiale Kurven: Die Berechnung der Kurve entsprechend der Darstellung (3.6) und die Anwendung einer affinen Abbildung kommutieren miteinander

Polynomiale Kurven und Kurvenstücke sind offensichtlich invariant unter affinen Abbildungen. Eine Darstellung (3.6) wird als affin invariant bezeichnet, falls für jede affine Abbildung  $\alpha$  die Beziehung

$$\alpha(\mathbf{p}(t)) = \sum_{i=0}^g \varphi_i(t) \alpha(\mathbf{c}_i)$$

erfüllt ist. Dies gilt jedoch nicht für jede Basis des Raumes der Polynome!

Interpretiert man die Koeffizienten  $\mathbf{c}_i$  als affine Koordinatenvektoren von  $g+1$  Punkten, so bleibt im Falle einer affin invarianten Darstellung die Beziehung zwischen diesen Punkten und der Kurve bei affinen Abbildungen erhalten (vgl. Abb. 3.2). In diesem Fall werden die Punkte  $\mathbf{c}_i$  als *Kontrollpunkte* der polynomialen Kurve bezeichnet.

Für die Darstellung solcher Kurven gibt es jedoch mehrere Möglichkeiten, die nicht alle affin invariant sind. Beispielhaft werden wir drei mögliche Basen des Vektorraums der Polynome vom Grad  $g$  betrachten, die verschiedene Eigenschaften besitzen:

Die Basis der **Monome** (Potenzfunktionen) vom Grad  $g$  ist gegeben durch

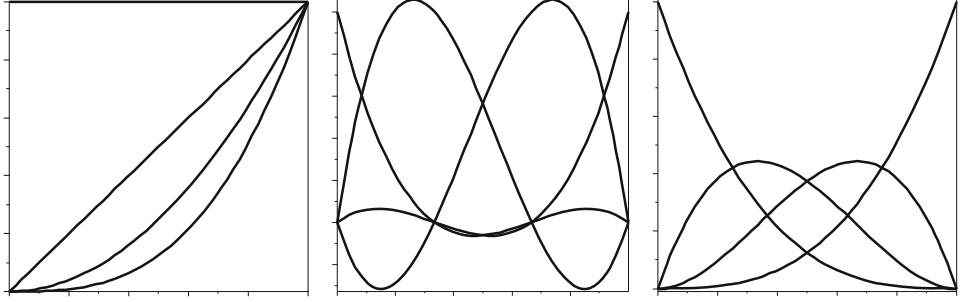
$$\mu_i(t) = t^i, \quad (i = 0, \dots, g),$$

siehe Abb. 3.3. Die Verwendung dieser Basis entspricht der üblichen Darstellung von Polynomen.

Die Basis der **Lagrange-Polynome**<sup>5</sup> vom Grad  $g$  zu gegebenen paarweise verschiedenen Knoten  $\tau_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 0, \dots, g$ ) besitzt die Darstellung

$$\lambda_i(t) = \frac{\prod_{0 \leq j \leq g, j \neq i} (t - \tau_j)}{\prod_{0 \leq j \leq g, j \neq i} (\tau_i - \tau_j)}, \quad i = 0, \dots, g.$$

<sup>5</sup> Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) war ein italienischer Mathematiker. Er begründete die analytische Mechanik und arbeitete u. a. zu Themen der Variationsrechnung, der Gruppentheorie und der Theorie komplexer Funktionen.



**Abb. 3.3** Monome, Lagrange-Polynome und Bernstein-Polynome vom Grad  $g = 3$  für  $[a, b] = [0, 1]$

Dabei können die Knoten beliebig gewählt werden. Für ein Kurvenstück mit dem Parameterbereich  $[a, b]$  bietet es sich an, die Knoten äquidistant in diesem Intervall zu verteilen,

$$\tau_i = \frac{(g-i)a + ib}{g}.$$

Die Lagrange-Polynome genügen den Gleichungen

$$\lambda_i(\tau_j) = \delta_j^i, \quad i, j = 0, \dots, g. \quad (3.7)$$

Daraus folgt die Identität

$$\sum_{i=0}^g \lambda_i(t) - 1 = 0.$$

In der Tat ist wegen (3.7) die linke Seite dieser Gleichung ein Polynom vom Grad  $g$  mit den  $g+1$  Nullstellen  $\tau_0, \dots, \tau_g$ , also identisch gleich Null.

Die Basis der **Bernstein-Polynome**<sup>6</sup> bezüglich des Intervalls  $[a, b]$  wird durch die Funktionen

$$\beta_i^g(t) = \binom{g}{i} \frac{(t-a)^i (b-t)^{g-i}}{(b-a)^g} \quad (i = 0, \dots, g)$$

gebildet. Das Bernstein-Polynom  $\beta_i^g$  besitzt  $a$  und  $b$  als Nullstellen mit den Vielfachheiten  $i$  und  $g-i$ . Die Bernstein-Polynome genügen der Identität

$$\sum_{i=0}^g \beta_i^g(t) - 1 = 0,$$

<sup>6</sup> Der russische Mathematiker Sergej N. Bernstein (1880–1968) führte 1911 die Bernstein-Polynome ein, um einen konstruktiven Beweis des Approximationssatzes von Weierstraß zu geben.

die sich leicht durch Anwendung des binomischen Satzes auf die rechte Seite der Gleichung

$$(b - a)^g = [(b - t) - (t - a)]^g$$

beweisen lässt. Darüber hinaus sind alle Bernstein-Polynome im Inneren des Intervalls  $[a, b]$  positiv,

$$\beta_i^g(t) > 0 \quad \text{für } a < t < b.$$

Der folgende Satz beschreibt den Zusammenhang zwischen den Eigenschaften der Basen und den geometrischen Eigenschaften der entsprechenden Kurvendarstellung:

**Satz** Eine Darstellung (3.6) für polynomiale Kurven vom Grad  $g$  ist genau dann affin invariant, wenn die Basisfunktionen  $(\varphi_i)_{i=0,\dots,g}$  eine Zerlegung der Eins bilden,

$$\sum_{i=0}^g \varphi_i(t) = 1. \quad (3.8)$$

Falls zusätzlich dazu die Werte dieser Funktionen im Intervall  $[a, b]$  nichtnegativ sind, so liegt das polynomiale Kurvenstück mit dem Parameterbereich  $[a, b]$  in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte  $\mathbf{c}_i$ .

*Beweis* Aus der Eigenschaft (3.8) und der Darstellung (3.1) einer affinen Abbildung folgt unmittelbar

$$\sum_{i=0}^g \varphi_i(t) \alpha(\mathbf{c}_i) = \sum_{i=0}^g \varphi_i(t) (\bar{\mathbf{v}} + \hat{A} \mathbf{c}_i) = \bar{\mathbf{v}} + \hat{A} \left( \sum_{i=0}^g \varphi_i(t) \mathbf{c}_i \right) = \alpha(\mathbf{p}(t))$$

und damit die affine Invarianz. Zum Nachweis der Eigenschaft, dass jeder Kurvenpunkt in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte liegt, beweist man mit Hilfe vollständiger Induktion für  $n = 0, \dots, g$ , dass jeder Punkt

$$\sum_{i=0}^n \xi_i \mathbf{c}_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^n \xi_i = 1 \text{ und } \xi_i \geq 0$$

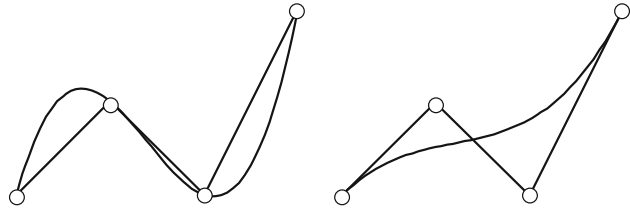
in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte  $\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_n$  liegt. Mit  $\xi_i = \varphi_i(t)$  folgt dann das gewünschte Resultat.

Der Induktionsanfang für  $n = 0$  ist trivialerweise erfüllt. Für den Induktionsschritt betrachtet man die Zerlegung

$$\sum_{i=0}^{n+1} \xi_i \mathbf{c}_i = \left( \sum_{j=0}^n \xi_j \right) \hat{\mathbf{c}} + \xi_{n+1} \mathbf{c}_{n+1} \quad (3.9)$$



**Abb. 3.4** Polynomiale Kurven in Darstellung bezüglich der Lagrange-Polynome (*links*) und der Bernstein-Polynome (*rechts*)



mit

$$\hat{\mathbf{c}} = \sum_{i=0}^n \hat{\xi}_i \mathbf{c}_i \quad \text{und} \quad \hat{\xi}_i = \frac{\xi_i}{\sum_{j=0}^n \xi_j}.$$

Die Induktionsvoraussetzung garantiert, dass  $\hat{\mathbf{c}}$  in der konvexen Hülle der Punkte  $\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_n$  liegt. Der in (3.9) definierte Punkt liegt auf der Verbindungsstrecke von  $\hat{\mathbf{c}}$  und  $\mathbf{c}_{n+1}$  und demnach in der konvexen Hülle der Punkte  $\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_{n+1}$ .  $\square$

Abbildung 3.4 zeigt Kurven mit demselben Kontrollpolygon in der Basisdarstellung bezüglich der Lagrange- und der Bernstein-Polynome. Im ersten Fall interpoliert die Kurve wegen (3.7) die gegebenen Kontrollpunkte, während im zweiten Fall das Kurvenstück vollständig in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte enthalten ist.

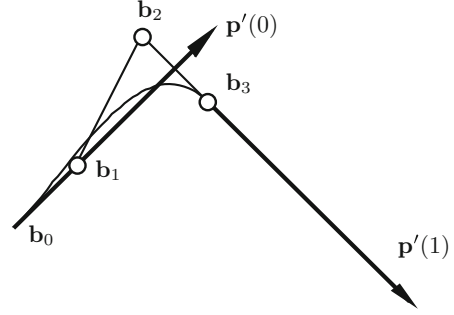
► **Bemerkung** Zwischen affin invarianten Kurvendarstellungen und baryzentrischen Koordinaten besteht ein enger Zusammenhang: Falls die Dimension  $d$  des Raumes mindestens so groß wie der Grad  $g$  der Kurve ist ( $g \leq d$ ) und falls sich die  $g+1$  Kontrollpunkte  $\mathbf{c}_i$  in allgemeiner Lage befinden ( $g = d$ ) bzw. sich zu  $d+1$  Punkten in allgemeiner Lage ergänzen lassen ( $g < d$ ), so handelt es sich bei den Werten der Basisfunktionen  $(\varphi_i(t))_{i=0,\dots,g}$  (ergänzt durch  $(d-g)$ -fach den Wert Null) gerade um die baryzentrischen Koordinaten des Kurvenpunktes  $\mathbf{p}(t)$  bezüglich der Kontrollpunkte  $\mathbf{c}_i$ .

Sowohl Lagrange- als auch Bernstein-Polynome bilden eine Zerlegung der Eins und liefern damit affin invariante Darstellungen für polynomiale Kurven. Für Bernstein-Polynome ist das Kurvenstück darüber hinaus in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte enthalten.

Polynomiale Kurven, die bezüglich der Basis der Bernstein-Polynome dargestellt sind, werden auch als *Bézier-Kurven*<sup>7</sup> bezeichnet. *Bézier-Kurven sind folglich affin invariant und stets in der konvexen Hülle ihrer Kontrollpunkte enthalten.* Die letzte Eigenschaft ist beispielsweise nützlich zur Ermittlung von Schnittpunkten zwischen Bézier-Kurven und Hyperebenen: Falls keine Schnittpunkte einer Hyperebene mit dem Kontrollpolygon einer Bézier-Kurve existieren, so kann es auch keine Schnittpunkte mit der Kurve geben.

<sup>7</sup> Pierre Bézier (1910–1999) war ein französischer Ingenieur bei Renault und beschrieb in den 1960er Jahren die nach ihm benannten Kurven.

**Abb. 3.5** Konstruktion einer kubischen Bézier-Kurve aus zwei Randpunkten und Ableitungsvektoren für  $[a, b] = [0, 1]$



Zum Abschluss dieses Abschnitts stellen wir einige nützliche Eigenschaften von Bézier-Kurven zusammen.

- Bernstein-Polynome besitzen die Symmetrieeigenschaft

$$\beta_i^g(a+t) = \beta_{g-i}^g(b-t), \quad i = 0, \dots, g. \quad (3.10)$$

Kehrt man die Reihenfolge der Kontrollpunkte um,  $\mathbf{c}_i^* = \mathbf{c}_{g-i}$ , so erhält man dieselbe Kurve mit umgekehrter Parametrisierung,  $\mathbf{p}^*(a+t) = \mathbf{p}(b-t)$ . Auch Kurven in Lagrange-Darstellung besitzen diese Eigenschaft, falls die Knoten  $\tau_i$  symmetrisch bezüglich des Mittelpunktes  $(a+b)/2$  des Parameterbereiches gewählt werden.

- Für die Ableitungen einer Bézier-Kurve gilt

$$\left( \frac{d^k}{dt^k} \mathbf{p} \right)(t) = \sum_{i=0}^{g-k} \beta_i^{g-k}(t) \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{(b-a)^k} \Delta^k \mathbf{c}_i, \quad (3.11)$$

wobei  $\Delta \mathbf{c}_i = \mathbf{c}_{i+1} - \mathbf{c}_i$  die ersten Vorwärtsdifferenzen der Kontrollpunkte sind und  $\Delta^k$  die  $k$ -te Vorwärtsdifferenz bezeichnet ( $k = 0, \dots, g$ ).

- Für die Randwerte einer Bézier-Kurve gelten

$$\left( \frac{d^k}{dt^k} \mathbf{p} \right)(a) = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{(b-a)^k} \Delta^k \mathbf{c}_0$$

sowie

$$\left( \frac{d^k}{dt^k} \mathbf{p} \right)(b) = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{(b-a)^k} \Delta^k \mathbf{c}_{g-k}.$$

Damit lassen sich beispielsweise leicht kubische Kurven konstruieren, die vorgegebene Randpunkte und Ableitungsvektoren interpolieren, siehe Abb. 3.5.

Einführung in die angewandte Geometrie

Aichholzer, O.; Jüttler, B.

2014, X, 127 S. 50 Abb., 5 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-0346-0143-6

A product of Birkhäuser Basel