

---

## Einleitung

Geometrie ist aus elementaren Bedürfnissen der Menschen entstanden und beschäftigte sich ursprünglich mit Fragen wie beispielsweise der Längen-, Winkel- und Inhaltsmessung. Euklids<sup>1</sup> Werk „Die Elemente“ formulierte ein Axiomensystem für die elementare Geometrie und leitete aus diesem alle weiteren Resultate ab. Dieses Werk erlangte enormen Einfluss und wurde lange Zeit als Geometrie-Lehrbuch eingesetzt. Einige offene Fragen, wie etwa die nach der Unabhängigkeit des Parallelenaxioms, konnten erst im 19. Jahrhundert durch die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie einer endgültigen Klärung zugeführt werden.

Die Verwendung von Koordinaten zur Beschreibung und Lösung geometrischer Probleme geht auf Descartes<sup>2</sup> zurück, der damit die Methode der analytischen Geometrie begründete. Bis dahin wurde in der Geometrie ausschließlich synthetisch gearbeitet, indem aus bekannten Eigenschaften neue erschlossen wurden.

Um 1800 begann in Paris an der École Polytechnique, die im Zuge der Französischen Revolution gegründet worden war, die Entwicklung der darstellenden Geometrie (u.a. durch Monge<sup>3</sup>) und der projektiven Geometrie (u.a. durch Poncelet<sup>4</sup>). In der Folge entwickelte sich die darstellende Geometrie zu einem wesentlichen Handwerkszeug in den technischen Wissenschaften wie Maschinenbau und Bauingenieurwesen, deren Bedeutung erst in den letzten Jahrzehnten durch die Einführung von CAD-Systemen abgenommen hat.

Im 19. Jahrhundert wurde die Geometrie in verschiedenste Richtungen weiterentwickelt. Unter anderem sind hier die algebraische Geometrie, die Differentialgeometrie (diese entstand als „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Geometrie“), aber

---

<sup>1</sup> Der griechische Mathematiker Euklid von Alexandria (um 300 v. Chr.) trug in seinem berühmtesten Werk „Die Elemente“ das Wissen der damaligen griechischen Mathematik zusammen und begründete dabei die axiomatische Methode.

<sup>2</sup> Der französische Mathematiker und Philosoph René Descartes (1596–1650) war einer der ersten Mathematiker, der Algebra und Geometrie miteinander verknüpfte.

<sup>3</sup> Gaspard Monge (1746–1818) war ein französischer Mathematiker und Physiker und hatte seit 1794 die Professur für Mathematik an der École Polytechnique inne.

<sup>4</sup> Jean-Victor Poncelet (1788–1867) studierte bei Monge und geriet als Leutnant während Napoleons Russlandfeldzug in Kriegsgefangenschaft. Während dieser Zeit erarbeitete er die Grundlagen der projektiven Geometrie.

auch die Grundlagen der Geometrie (Hilbert<sup>5</sup>) zu nennen. Von grundlegender Bedeutung war auch das „Erlanger Programm“ von F. Klein<sup>6</sup>, nach dem Geometrie als Invariantentheorie einer Transformationsgruppe betrachtet wird.

Besonders im vergangenen Jahrhundert hat sich die Entwicklung der Geometrie durch stärkere Verallgemeinerung und Abstraktion zunehmend von den Ursprüngen entfernt. Einerseits haben geometrische Methoden und Denkweisen Einzug in zahlreiche andere Gebiete gehalten, die von der mathematischen Physik bis in die Regelungstheorie reichen. Andererseits werden in vielen Lehrbüchern über algebraische Geometrie oder Differentialgeometrie kaum noch Kurven oder Flächen im dreidimensionalen Raum behandelt, und die Abbildungen – soweit überhaupt vorhanden – genügen gelegentlich nicht den (seit der Renaissance bekannten) grundlegenden Gesetzen der Perspektive. In gewisser Weise ist die Geometrie somit ein Opfer ihres eigenen Erfolges geworden!

Durch neue technische Möglichkeiten der Visualisierung (Computergrafik) und des computergestützten Konstruierens (Computer Aided Design/CAD) ist seit den 1950er Jahren ein wiederentstandenes Interesse an konkreten geometrischen Fragestellungen im Zusammenhang mit Objekten des Anschauungsraumes zu beobachten. Dabei entstanden mehrere Arbeitsfelder, die häufig durch enge Interaktion verschiedener Wissenschaftsdisziplinen gekennzeichnet sind. Beispielsweise werden im Computer Aided Geometric Design die mathematisch-geometrischen Grundlagen für das computergestützte Konstruieren untersucht, wobei Ergebnisse aus der Approximationstheorie eine wesentliche Rolle spielen. Dagegen beschäftigt sich die algorithmische Geometrie (Computational Geometry) mit Fragen des Entwurfs und der Implementierung effizienter geometrischer Algorithmen, mit denen auch umfangreiche geometrische Datenmengen bearbeitet werden können. Damit im Zusammenhang steht auch die kombinatorische (diskrete) Geometrie, deren Extremalfragen in der Analyse von Algorithmen und Datenstrukturen, aber auch in zahlreichen anderen Gebieten, beispielsweise der Zahlentheorie, bedeutende Fortschritte bewirkt haben; siehe dazu z. B. die umfangreichen Veröffentlichungen von Erdős<sup>7</sup>. Weitere Gebiete, die hier noch genannt werden sollen, sind Computer Vision (Maschinelles Sehen), Robotik und Computergrafik.

Die Intention dieses Buches ist es, eine Einführung in verschiedene Aspekte der Geometrie zu geben und dabei gleichzeitig die Grundlagen für ausgewählte Anwendungen zu

---

<sup>5</sup> David Hilbert (1862–1943) war einer der bedeutendsten und einflussreichsten Mathematiker am Anfang des 20. Jahrhunderts.

<sup>6</sup> Felix Klein (1849–1925) war ein deutscher Mathematiker. In einer Programmschrift, die er bei seiner Berufung an die Universität Erlangen im Jahre 1872 vorlegte, formulierte er das Erlanger Programm. Dieses Programm führte zu einer systematischen Klassifikation der verschiedenen Geometrien mit Hilfe der zugrunde liegenden Transformationsgruppen und den zugehörigen Invarianten geometrischer Objekte.

<sup>7</sup> Paul Erdős war einer der einflussreichsten Mathematiker des letzten Jahrhunderts. Mit zumindest 1525 Veröffentlichungen publizierte er mehr Arbeiten als jeder andere Wissenschaftler. Nach ihm ist auch die Erdős-Zahl benannt, die angibt, über wie viele gemeinsame Autorenschaften man von einer Publikation mit Erdős entfernt ist.

vermitteln. Der Aufbau des Buches orientiert sich am Erlanger Programm von F. Klein. Nach einem einführenden Kapitel über Koordinaten und geometrische Transformationen werden die euklidische, die affine und die projektive Geometrie jeweils zusammen mit relevanten Anwendungen (z. B. Voronoi-Diagrammen im Kapitel über euklidische Geometrie, Bézier-Kurven im Kapitel über affine Geometrie) vorgestellt. Zum Abschluss wird dargestellt, wie die verschiedenen Geometrien im Rahmen der projektiven Geometrie einer einheitlichen Behandlung zugeführt werden können. Dies zeigt gleichzeitig den Weg zu den verschiedenen nichteuklidischen Geometrien auf, die im Rahmen dieses Buches allerdings nur sehr kurz angesprochen werden können.

Es werden im Wesentlichen nur Vorkenntnisse aus der linearen Algebra, der elementaren Geometrie und der analytischen Geometrie vorausgesetzt. Auf die Verwendung der axiomatischen Methode wurde bewusst verzichtet, um eine möglichst enge Anbindung an die dem Leser bereits vertrauten Methoden und Begriffe der linearen Algebra zu gewährleisten.

Einführung in die angewandte Geometrie

Aichholzer, O.; Jüttler, B.

2014, X, 127 S. 50 Abb., 5 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-0346-0143-6

A product of Birkhäuser Basel