Vorwort

Viele Systeme aus der Physik, der Biologie oder der Ökonomie sind einer Zeitentwicklung unterworfen, deren asymptotisches Verhalten von zentralem Interesse ist. Die mathematische Theorie der dynamischen Systeme beschäftigt sich mit der Untersuchung von Modellen derartiger Systeme, wobei man normalerweise annimmt, dass sich das qualitative Verhalten des Systems im Laufe der Zeitentwicklung nicht ändert. Dabei wählt man als *Zustandsraum* des Systems eine Menge X mit einer vorgegebenen Struktur (z. B. einen topologischen Raum oder einen Maßraum), die unter der Zeitentwicklung erhalten bleiben soll. Wenn das System zu einem Zeitpunkt t_0 im Zustand $x \in X$ ist, dann bezeichnet man mit $T_t x$ den Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t_0 + t$. Die so definierten Abbildungen T_t bilden eine Halbgruppe: $T_s \circ T_t = T_{s+t}$ für alle $s, t \geq 0$. Je nachdem, ob man die Zeitentwicklung kontinuierlich oder nur zu Vielfachen eines gegebenen Zeitpunktes t_0 verfolgt, spricht man von einem „kontinuierlichen“ oder „diskreten“ dynamischen System.

Im Fall einer diskreten Zeitentwicklung wird ein dynamisches System also durch ein Paar (X, T) beschrieben, wobei X eine Menge und $T: X \longrightarrow X$ eine Abbildung ist, die die Entwicklung des Systems in einem Zeitschritt beschreibt. Wenn X ein topologischer Raum (hier meist kompakt und metrisierbar) und $T: X \longrightarrow X$ stetig ist, so spricht man von einem *topologischen dynamischen System*. Wenn der Zustandsraum ein Wahrscheinlichkeitsraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$ und $T: X \longrightarrow X$ eine maßerhaltende Transformation ist, so ist man im Bereich der *Ergodentheorie*, die sich mit dem statistischen Verhalten des Systems oder eines zufällig gewählten „typischen“ Anfangszustands des Systems im Laufe der Zeitentwicklung beschäftigt.

Die asymptotischen Eigenschaften, an denen man bei einem dynamischen System interessiert ist, hängen natürlich von der Struktur des Systems ab. Bei einem topologischen dynamischen System kann man z. B. untersuchen, ob das System eine Bahn hat, die im Zustandsraum X dicht liegt, oder ob sogar jede Bahn des Systems dicht in X liegt. Eine weitere wichtige Frage betrifft die Auswirkung geringfügiger Änderungen des Anfangszustands auf die Bahn des Zustands: Wenn x, y verschiedene Anfangszustände des Systems sind, können die Punkte $T^k x, T^k y$ für alle $k \geq 0$ nahe beisammen liegen? Derartige Fragen werden im ersten Kapitel dieses Buches untersucht, wobei wir besonderes Augenmerk auf topologische Mischungs- und Rekurrenzeigenschaften, Minimalität sowie die Existenz und mögliche Eindeutigkeit invarianter Wahrscheinlichkeitsmaße legen.

Bei maßtheoretischen dynamischen Systemen ist man an qualitativen und quantitativen Aussagen über die statistische Komplexität des Systems und seiner typischen Bahnen interessiert. Das zweite Kapitel dieses Buches bietet eine Einführung in die Ergodentheorie mit den klassischen Ergodensätzen und Mischungseigenschaften sowie mit einigen Anwendungen auf Gleichverteilung, Ziffernentwicklungen und stochastische Prozesse.

Die Kap. 3 und 4 behandeln die Entropie dynamischer Systeme. Der ursprünglich aus der statistischen Physik stammende Begriff der Entropie ist auf dem Wege der Informationstheorie zu zentraler Bedeutung für die Dynamik gelangt, wo er die Komplexität eines dynamischen Systems quantifiziert. Das dritte Kapitel ist den Definitionen und Eigenschaften sowie der Berechnung der maßtheoretischen Entropie ergodischer Transformation gewidmet. Das vierte Kapitel bietet eine Einführung in die topologische Entropie stetiger Transformationen und den Zusammenhang zwischen topologischer und maßtheoretischer Entropie.

In den letzten Jahrzehnten betrachtet die Theorie der Dynamischen Systeme in zunehmendem Maße nicht nur „lineare" Zeitentwicklungen, sondern auch Wirkungen mehrdimensionaler Symmetriegruppen auf Systeme mathematischen oder physikalischen Ursprungs. Dabei ergeben sich Querverbindungen nicht nur zur statistischen Physik, sondern überraschenderweise auch zu mathematischen Disziplinen wie der klassischen Zahlentheorie und der Algebra. In Kap. 5 wenden wir uns zwei Beispielen aus der mehrparametrischen Dynamik zu, die einen ersten Einblick in tiefe arithmetische Zusammenhänge bieten, die in den letzten Jahren zu bemerkenswerten mathematischen Forschungsergebnissen geführt haben.

Der Inhalt dieses Buches entspricht einer Vorlesung für Studierende des letzten Studienjahrs des Bachelorstudiums und für Studierende des Masterstudiums, wobei sich eine den Interessen der Studierenden angepasste Themenauswahl empfiehlt. Die ersten beiden Kapitel vermitteln die Grundbegriffe und sind damit Voraussetzung für die späteren Kapitel. Die Kap. 3 und 4 sind der Entropietheorie gewidmet. Das Kap. 5 ist größtenteils unabhängig von den Kap. 3 und 4 und kann daher (mit kleinen Abstrichen) unmittelbar aufbauend auf die ersten beiden Kapitel behandelt werden. Abschnitt 5.4 in Kap. 5 stellt weitere Verbindungen zur Zahlentheorie her und kommt zwar ohne weitere Vorkenntnisse aus, ist aber in der Methodik etwas anspruchsvoller als die ersten Kapitel des Buches.

Der Text beinhaltet über 100 Übungsaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit, die der Vertiefung der dargestellten Theorie dienen, sowie eine große Zahl von Beispielen zur Illustration des unterschiedlichen Verhaltens dynamischer Systeme.

Die Autoren sind Franz Hofbauer zu Dank verpflichtet, der wesentliche Beiträge zu einer früheren Fassung dieses Manuskripts geleistet hat.

Zürich und Wien, Jänner 2013

Manfred Einsiedler
Klaus Schmidt

Springer

http://www.springer.com/978-3-0348-0633-6

Dynamische Systeme
Ergodentheorie und topologische Dynamik
Einsiedler, M.; Schmidt, K.
2014, VIII, 159 S. 6 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-0348-0633-6
A product of Birkhäuser Basel