

2.1	Grundlagen	103
2.1.1	Statistischer Operator (Dichtematrix)	103
2.1.2	Korrespondenzprinzip	108
2.1.3	Aufgaben	110
2.2	Mikrokanonische Gesamtheit	111
2.2.1	Phasenvolumen	112
2.2.2	Dritter Hauptsatz	114
2.2.3	Aufgaben	115
2.3	Kanonische Gesamtheit	117
2.3.1	Kanonische Zustandssumme	118
2.3.2	Sattelpunktmethode	121
2.3.3	Darwin-Fowler-Methode	124
2.3.4	Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren	132
2.3.5	Aufgaben	135
2.4	Großkanonische Gesamtheit	144
2.4.1	Großkanonische Zustandssumme	145
2.4.2	Aufgaben	150
2.5	Extremaleigenschaften thermodynamischer Potentiale	151
2.5.1	Entropie und Statistischer Operator	151
2.5.2	Boltzmann'sche H -Funktion	153
2.5.3	Entropie	155
2.5.4	Freie Energie	156

2.5.5	Großkanonisches Potential	156
2.6	Näherungsmethoden	157
2.6.1	Thermodynamische Wechselwirkungsdarstellung	158
2.6.2	Störungstheorie zweiter Ordnung	160
2.6.3	Variationsverfahren	163
2.6.4	Aufgaben	165
	Kontrollfragen	166

2.1 Grundlagen

Unsere bisherigen, recht ausführlichen Betrachtungen zur Statistischen Physik waren rein *klassischer Natur*. Natürlich würde es uns nicht schwer fallen, Grenzen ihrer Gültigkeit aufzudecken, d. h. Widersprüche zum Experiment aufzuspüren, so wie es uns ja auch mit der Klassischen Mechanik ergangen ist. Letztlich benötigt die korrekte Naturbeschreibung natürlich die *übergeordnete* Quantenmechanik. Wir werden also die *Klassische Statistische Physik* des ersten Kapitels auf eine *Quantenstatistik* umzuschreiben haben. Dabei wird sich herausstellen, dass die grundlegenden Konzepte der Statistik dieselben bleiben, dass sie allerdings auch mit einigen typisch quantenmechanischen Aspekten zu kombinieren sind. Erinnern wir uns noch einmal: **Klassisch** gelingt die vollständige Beschreibung eines physikalischen Systems durch Angabe der *Phase* $\pi = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, die sich den Hamilton'schen Bewegungsgleichungen (1.13) entsprechend zeitabhängig im *Phasenraum* ändert und damit die *Phasentrajektorie* des Systems definiert. Statistische Methoden werden notwendig bei unvollständiger Information über die zur Lösung der Bewegungsgleichungen unverzichtbaren Anfangsbedingungen, was für makroskopische Systeme der Regelfall ist.

Quantenmechanisch liegt eine ganz andere Situation vor, die gewissermaßen durch eine *doppelte Unkenntnis* charakterisiert ist. Da ist zunächst der **spezifisch quantenmechanische Indeterminismus**. Selbst wenn der Systemzustand eigentlich bekannt ist (*reiner Zustand*), sind Messergebnisse in der Regel nicht exakt vorauszusagen. Die Messung selbst führt zu einer unkontrollierbaren Störung des Systems. Diese Unsicherheit manifestiert sich in der *statistischen Interpretation* der Wellenfunktion (Abschn. 2.2.1, Bd. 5 Teil 1) und in der *Unbestimmtheitsrelation* ((1.5), (3.155), Bd. 5 Teil 1). Orte q_i und Impulse p_i sind nicht mehr gleichzeitig scharf messbar. Damit verlieren automatisch auch *Phasenraum* und *Phasentrajektorie* in der Quantenmechanik ihren Sinn; Begriffe, die ja in der Klassischen Statistischen Physik von großer Bedeutung sind. Die zweite Unsicherheit ist dann die **unvollständige Information**, die klassisch wie quantenmechanisch im Fall makroskopischer Systeme statistische Konzepte zur Problemlösung erzwingt. Sie wird im Prinzip in der Quantenstatistik genauso behandelt wie in der Klassischen Statistik. Die Hauptaufgabe wird demnach darin bestehen, die in Kap. 1 entwickelten Methoden um den oben erwähnten *typisch quantenmechanischen Aspekt* zu erweitern.

2.1.1 Statistischer Operator (Dichtematrix)

Strenggenommen haben wir die soeben formulierte Problematik der *doppelten Unkenntnis*, die von der Quantenstatistik zu bewältigen ist, bereits in der *Quantenmechanik* (Abschn. 3.3.4, Bd. 5 Teil 1) diskutiert. Die simultane Ausführung der beiden qualitativ verschiedenen Mittelungsprozesse gelingt mithilfe des *Statistischen Operators*, auch *Dichtematrix* genannt, an dessen Wirkungsweise wir uns mit der folgenden Zusammenstellung

erinnern wollen. Die Darstellung soll kurz und knapp ausfallen, Einzelheiten sind im Bd. 5 Teil 1 des **Grundkurs: Theoretische Physik** nachzulesen. Allerdings ist der *Statistische Operator* für die Quantenstatistik auch von so zentraler Bedeutung, dass eine gewisse Wiederholung wichtiger Fakten gerechtfertigt sein dürfte.

Die Quantenmechanik unterscheidet zwei Typen von Zuständen, in denen sich physikalische Systeme befinden können, den *reinen* und den *gemischten Zustand*.

■ 1) Reiner Zustand

Dieser wird präpariert durch Messung eines **vollständigen** Satzes kommutierender Observabler, d. h. durch einen zur Identifikation ausreichenden Satz von Messprozessen. Einem reinen Zustand lässt sich deshalb stets ein Hilbert-Vektor $|\psi\rangle$ zuordnen. Trotzdem sind Resultate von Messungen auch an einem sich in einem solchen reinen Zustand befindlichen System in der Regel nicht mit Sicherheit vorherzusagen.

Sei $\hat{F}$ eine Observable mit der Eigenwertgleichung:

$$\hat{F}|f_n\rangle = f_n|f_n\rangle ; \quad \langle f_n | f_m \rangle = \delta_{nm} .$$

Die Eigenzustände $\{|f_n\rangle\}$ mögen ein vollständiges, orthonormiertes (VON-) System darstellen. Dann lässt sich jeder Zustand $|\psi\rangle$ nach dem *Entwicklungssatz* ((3.27), Bd. 5 Teil 1) als Linearkombination der $|f_n\rangle$ schreiben:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |f_n\rangle ; \quad c_n = \langle f_n | \psi \rangle .$$

(Wir lassen so genannte *uneigentliche* Dirac-Zustände (Abschn. 3.2.4, Bd. 5 Teil 1), bei denen die Summe durch ein Integral zu ersetzen wäre, hier zunächst außer acht.) Das Betragsquadrat des Koeffizienten $|c_n|^2$ stellt die Wahrscheinlichkeit dafür dar, bei einer Messung der Observablen $\hat{F}$ am Systemzustand $|\psi\rangle$ den Messwert f_n zu erhalten. Es ist eine Zahl zwischen 0 und 1, die die erwähnte *quantenmechanische Unsicherheit* der Messung zum Ausdruck bringt. Eine gesicherte Aussage ist nur dann möglich, wenn $|\psi\rangle$ als Eigenzustand zu $\hat{F}$ präpariert ist. Es ist deshalb sinnvoll, einen **Mittelwert** einzuführen, gedacht als *mittlerer Wert* vieler nacheinander durchgeführter Messungen an ein und demselben System unter stets gleichen Bedingungen oder aber auch simultan an vielen gleichartigen Systemen. Letzteres erinnert stark an den für die Statistik fundamentalen Begriff des *Ensembles*, dem wir in der Tat bereits in der Quantenmechanik in diesem Zusammenhang begegnet sind:

$$\begin{aligned} \langle \hat{F} \rangle &= \sum_n f_n |c_n|^2 = \sum_n f_n \langle \psi | f_n \rangle \langle f_n | \psi \rangle \\ &= \sum_n \langle \psi | \hat{F} | f_n \rangle \langle f_n | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle . \end{aligned} \quad (2.1)$$

Im letzten Schritt haben wir die Vollständigkeitsrelation ausgenutzt.

■ 2) Gemischter Zustand

Liegt eine unvollständige Vorinformation über das zu beschreibende System vor, konnte also kein vollständiger Satz kommutierender Observabler gemessen werden, so sagt man, das System befinde sich in einem *gemischten Zustand*. Diese Situation ist typisch für die makroskopischen Systeme; aber nicht nur für die, wenn wir uns an unser Standardbeispiel, den *unpolarisierten Elektronenstrahl*, in Bd. 5 Teil 1 erinnern. Dem gemischten Zustand kann **kein** Hilbert-Vektor zugeordnet werden. Denkbar sind aber Charakterisierungen der folgenden Art:

Das System befindet sich mit der Wahrscheinlichkeit p_m in dem reinen Zustand $|\psi_m\rangle$; $m = 1, 2, \dots$:

$$0 \leq p_m \leq 1: \quad \sum_m p_m = 1.$$

Wir wissen zwar aufgrund unserer mangelhaften Vorinformation nicht wirklich, in welchem Zustand sich das System befindet, sind aber in der Lage, die Möglichkeiten ein wenig einzuschränken. $|\psi_m\rangle$ sei einer der *denkbaren* Zustände des Systems, die wir als orthonormiert voraussetzen wollen:

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}. \quad (2.2)$$

Die Annahme der Orthogonalität ist bequem, aber nicht notwendig. Wir demonstrieren in Aufgabe 2.1.2, dass die Annahme der Normiertheit eigentlich bereits ausreicht. Die Hauptaufgabe wird später darin bestehen, die Wahrscheinlichkeit p_m festzulegen, mit der sich das System im Zustand $|\psi_m\rangle$ befindet.

Wir führen nun eine Messung der Observablen $\widehat{F}$ durch. Wenn das System *mit Sicherheit* im Zustand $|\psi_m\rangle$ wäre, würden wir gemäß (2.1) den Mittelwert

$$\langle \psi_m | \widehat{F} | \psi_m \rangle$$

erhalten. Wegen unvollständiger Information haben wir diese Sicherheit nicht, sondern sind zu einer zusätzlichen statistischen Mittelung gezwungen:

$$\langle \widehat{F} \rangle = \sum_m p_m \langle \psi_m | \widehat{F} | \psi_m \rangle. \quad (2.3)$$

Dieser Mittelwert enthält nun **zwei** unterschiedliche Prozesse, wobei der quantenmechanische *prinzipieller Natur* ist, (2.1), und sich damit in keinem Fall vermeiden lässt. Er kommt durch die Zustände selbst ins Spiel, die durch Messprozesse beeinflusst werden. Typische Konsequenzen sind die bekannten Interferenzeffekte (Abschn. 2.1, Bd. 5 Teil 1). Die statistische Mittelung (p_m) resultiert aus unvollständiger Information und wäre damit im Prinzip

behebbar. Sie ist also nicht von so grundsätzlicher Art und erfolgt über Erwartungswerte (Zahlen!), hat demnach keine Interferenzeffekte zur Folge.

Äquivalent zu (2.3) ist die Darstellung

$$\langle \hat{F} \rangle = \sum_n f_n w_n .$$

Dabei ist w_n die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung von $\hat{F}$ am *gemischten Zustand* den Eigenwert f_n zu finden. $w_{nm} = |\langle f_n | \psi_m \rangle|^2$ ist die entsprechende Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass sich das System mit Sicherheit im reinen Zustand $|\psi_m\rangle$ befindet. Dann gilt offenbar

$$w_n = \sum_m p_m w_{nm} , \quad (2.4)$$

wodurch die *doppelte Natur* der Quantenstatistik noch einmal zum Ausdruck gebracht wird. Die zentrale Größe der Quantenstatistik, mit der sich die beiden Mittelungsprozesse gewissermaßen simultan erfassen lassen, ist der **Statistische Operator** $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho} = \sum_m p_m |\psi_m\rangle \langle \psi_m| . \quad (2.5)$$

Wir stellen seine wichtigsten Eigenschaften zusammen (s. Abschn. 3.3.4, Bd. 5 Teil 1):

1. Mittelwerte

$$\langle \hat{F} \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{F}) . \quad (2.6)$$

Den Begriff der *Spur* (Sp) haben wir in Abschn. 3.2.8 in Bd. 5 Teil 1 als Summe der Diagonalelemente einer Matrix kennen gelernt. Sie hat unter anderem die nützliche Eigenschaft, von der verwendeten VON-Basis unabhängig zu sein. Das bringt rechen-technische Vorteile mit sich, da man diese dann nach Zweckmäßigkeit auswählen kann. Weitere nützliche Eigenschaften rufen wir uns mit Aufgabe 2.1.1 in Erinnerung. Wegen ihrer fundamentalen Bedeutung wollen wir den Beweis der Beziehung (2.6) noch einmal skizzieren. Es sei $\{|\varphi_i\rangle\}$ ein VON-System:

$$\begin{aligned} \langle \hat{F} \rangle &= \sum_m p_m \langle \psi_m | \hat{F} | \psi_m \rangle = \sum_m p_m \langle \psi_m | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | \hat{F} | \varphi_j \rangle \langle \varphi_j | \psi_m \rangle \\ &= \sum_{i,j} \left(\sum_m p_m \langle \varphi_j | \psi_m \rangle \langle \psi_m | \varphi_i \rangle \right) \langle \varphi_i | \hat{F} | \varphi_j \rangle \\ &= \sum_{i,j} \hat{\rho}_{ji} \hat{F}_{ij} = \sum_j (\hat{\rho} \hat{F})_{jj} = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{F}) . \end{aligned}$$

2. Hermitezität: $\hat{\rho} = \hat{\rho}^+$

Diese Tatsache ist unmittelbar an der Definition (2.5) abzulesen. Der Projektionsoperator $|\psi_m\rangle \langle \psi_m|$ ist hermitesch ((3.84), Bd. 5 Teil 1) und p_m reell.

3. Spur

$$\text{Sp } \hat{\rho} = 1 . \quad (2.7)$$

Dies folgt direkt aus (2.6) für $\widehat{F} = \mathbf{1}$.

4. $\hat{\rho}$ nicht-negativ

Dies bedeutet, dass der Erwartungswert des Operators $\hat{\rho}$ in jedem beliebigen Zustand $|\varphi\rangle$ nicht negativ ist:

$$\langle \varphi | \hat{\rho} | \varphi \rangle = \sum_m p_m |\langle \varphi | \psi_m \rangle|^2 \geq 0 .$$

Falls $|\varphi\rangle$ normiert ist, kann dieser Erwartungswert auch als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, das durch $\hat{\rho}$ beschriebene System im Zustand $|\varphi\rangle$ anzutreffen.

5. Eigenwerte

$\hat{\rho}$ besitzt als hermitescher Operator reelle Eigenwerte und zueinander orthogonale Eigenzustände. Da wir die $|\psi_m\rangle$ als orthonormal vorausgesetzt haben (2.2), sind sie bereits die Eigenzustände mit den Wahrscheinlichkeiten p_m als zugehörige Eigenwerte. Diese Aussage ist offensichtlich nicht mehr richtig, wenn die $|\psi_m\rangle$ zwar normiert, aber nicht orthogonal sind (Aufgabe 2.1.2).

6. Reiner Zustand

Auch dieser lässt sich natürlich formal mithilfe eines statistischen Operators behandeln. In (2.5) ist dann eines der p_m gleich 1, die anderen sind sämtlich Null (vollständige Information!). $\hat{\rho}$ ist in diesem Spezialfall also mit dem Projektionsoperator auf den reinen Zustand identisch:

$$\hat{\rho}_\psi \equiv P(\psi) = |\psi\rangle \langle \psi| . \quad (2.8)$$

Sämtliche allgemeinen Eigenschaften des statistischen Operators bleiben selbstverständlich gültig. Wir überprüfen ($\{|\varphi_n\rangle\}$ -VON-System):

$$\text{Sp } \hat{\rho}_\psi = \sum_n \langle \varphi_n | \hat{\rho}_\psi | \varphi_n \rangle = \sum_n \langle \psi | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1 \iff (2.7) ,$$

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\hat{\rho}_\psi \widehat{F}) &= \sum_n \langle \varphi_n | \hat{\rho}_\psi \widehat{F} | \varphi_n \rangle = \sum_n \langle \psi | \widehat{F} | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \widehat{F} | \psi \rangle \iff (2.1), (2.6) . \end{aligned}$$

7. Operatorquadrat

Wegen der Orthonormalität der *denkbaren* Zustände $|\psi_m\rangle$ erhält man aus der Definition (2.5):

$$\hat{\rho}^2 = \sum_m p_m^2 |\psi_m\rangle \langle \psi_m| . \quad (2.9)$$

Dies bedeutet insbesondere:

$$\text{Sp } \hat{\rho}^2 = \sum_m p_m^2 . \quad (2.10)$$

Wegen $0 \leq p_m \leq 1$ ist

$$\sum_m p_m^2 \leq \sum_m p_m = 1.$$

Das Gleichheitszeichen gilt für reine Zustände.

8. Zeitliche Entwicklung

Die Bewegungsgleichung des Statistischen Operators haben wir als Gl. (3.167) in Bd. 5 Teil 1 für das *Schrödinger-Bild* abgeleitet:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [H, \hat{\rho}]_- . \quad (2.11)$$

Sie wird sich im nächsten Abschnitt als das quantenmechanische Analogon zur klassischen *Liouville-Gleichung* (1.36) interpretieren lassen.

Da sich mithilfe des Statistischen Operators alle beobachtbaren Eigenschaften eines physikalischen Systems erfassen lassen, können wir andererseits *zwei gemischte Zustände identisch* nennen, wenn ihnen derselbe Statistische Operator zugeordnet ist.

2.1.2 Korrespondenzprinzip

Wir suchen nun nach einer *Zuordnung*, nach einer *Übersetzungsvorschrift* zwischen Quantenstatistik und Klassischer Statistischer Physik. Dazu haben wir uns zunächst Gedanken über den grundlegenden Begriff der *Statistischen Gesamtheit* zu machen. Dieser macht allerdings überhaupt keine Schwierigkeiten, da wir ihn in die Quantenstatistik in voller Analogie zum *klassischen Pendant* (Abschn. 1.2.2) einführen können.

Unter einem **Statistischen Ensemble** oder einer **Statistischen Gesamtheit** versteht man eine Schar (*Gemisch*) von *gedachten*, gleichartigen Systemen, die sämtlich exakte Abbilder des realen Systems sind, über das keine vollständige Information vorliegt, das sich also in einem *gemischten* Zustand befindet. Jedes Ensemble-Mitglied besetzt einen der *denkbaren* Zustände $|\psi_m\rangle$ des realen Systems. Wichtig ist, dass das Ensemble eine **inkohärente** Menge von Zuständen einnimmt. Die Systeme der Gesamtheit wechselwirken nicht miteinander, ihre Zustände interferieren nicht.

Diese Definition ist völlig gleich lautend mit der entsprechenden klassischen, womit aber auch klar ist, dass der Statistische Operator $\hat{\rho}$ in direkter Analogie zur klassischen Dichteverteilungsfunktion gesehen werden muss. Das wird insbesondere deutlich, wenn wir einmal die *Scharmittelwerte*, deren Berechnung das vornehmliche Ziel der Statistischen Physik darstellt, gegenüberstellen:

Klassisch ((1.26), (1.52), (1.134), (1.135)):

$$\langle F \rangle = \frac{1}{h^{3N} N!} \int \cdots \int d^{3N} q d^{3N} p \rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}) F(\mathbf{q}, \mathbf{p}) ,$$

$$1 \stackrel{!}{=} \frac{1}{h^{3N} N!} \int \cdots \int d^{3N} q d^{3N} p \rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}) .$$

Quantenmechanisch:

$$\langle \widehat{F} \rangle = \text{Sp}(\widehat{\rho} \widehat{F}) ,$$

$$1 \stackrel{!}{=} \text{Sp} \widehat{\rho} .$$

Einen weiteren Hinweis geben die **Bewegungsgleichungen**:

Klassisch (Liouville-Gleichung (1.36)):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H, \rho\} \quad (H: \text{Hamilton-Funktion}) .$$

Quantenmechanisch:

$$\frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\widehat{H}, \widehat{\rho}]_- \quad (\widehat{H}: \text{Hamilton-Operator}) .$$

Um praktisch sämtliche Ergebnisse der Klassischen Statistischen Physik aus Kap. 1 für die Quantenstatistik übernehmen zu können, haben wir uns *nur* an das **Korrespondenzprinzip** (Abschn. 3.5 (3.228), (3.229), Bd. 5 Teil 1) zu erinnern. Dieses legt die folgenden Zuordnungen nahe (links: *klassisch*, rechts: *quantenmechanisch*):

- | | | | |
|----|---|-----------------------|--|
| 1) | Phasenraumfunktion
$F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ | $\Longleftrightarrow$ | Observable (Operator)
$\widehat{F}$ |
| 2) | Dichteverteilungsfunktion
$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ | $\Longleftrightarrow$ | Statistischer Operator
$\widehat{\rho}$ |

- 3) Poisson-Klammer $\iff$ Kommutator
- $$\{F, G\} = \frac{1}{i\hbar} [\widehat{F}, \widehat{G}]_- = \frac{1}{i\hbar} (\widehat{F}\widehat{G} - \widehat{G}\widehat{F})$$
- 4) Phasenraumintegration $\iff$ Spur
- $$\frac{1}{h^{3N} N!} \int \dots \int d^{3N} q d^{3N} p \dots \quad \text{Sp}(\dots) \quad (2.12)$$
- 5) $\iff$ stationäres Ensemble
- $$\{\rho, H\} = 0 \quad \iff \quad [\hat{\rho}, \widehat{H}]_- = 0.$$

Auch in der Quantenstatistik interessieren nur *stationäre* Gesamtheiten, da nur diese zu zeitunabhängigen Scharmittelwerten führen. Für nicht explizit zeitabhängige Observable gilt ((3.211), Bd. 5 Teil 1):

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \widehat{F} \rangle = \langle [\widehat{F}, \widehat{H}]_- \rangle.$$

Unter Ausnutzung der *zyklischen Invarianz* der Spur (s. Aufgabe 2.1.1) formen wir die rechte Seite um:

$$\langle [\widehat{F}, \widehat{H}]_- \rangle = \text{Sp}(\widehat{\rho}(\widehat{F}\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{F})) = \text{Sp}(\widehat{H}\widehat{\rho}\widehat{F} - \widehat{\rho}\widehat{H}\widehat{F}) = \text{Sp}([\widehat{H}, \widehat{\rho}]_- \widehat{F}).$$

Damit folgt also in der Tat:

$$\frac{d}{dt} \langle \widehat{F} \rangle = 0 \iff [\widehat{H}, \widehat{\rho}]_- = 0. \quad (2.13)$$

2.1.3 Aufgaben

Aufgabe 2.1.1

Es seien $\widehat{F}, \widehat{G}, \widehat{H}$ quantenmechanische Operatoren und α, β komplexe Zahlen. Beweisen Sie die folgenden nützlichen Eigenschaften der *Spur*:

1. $\text{Sp} \widehat{F}^+ = (\text{Sp} \widehat{F})^*$,
2. $\text{Sp}(\alpha \widehat{F} + \beta \widehat{G}) = \alpha \text{Sp} \widehat{F} + \beta \text{Sp} \widehat{G}$,
3. $\text{Sp}(\widehat{F}^+ \widehat{F}) \geq 0$,
4. $\text{Sp}(\widehat{F}\widehat{G}\widehat{H}) = \text{Sp}(\widehat{H}\widehat{F}\widehat{G}) = \text{Sp}(\widehat{G}\widehat{H}\widehat{F})$ (zyklische Invarianz der Spur),
5. $\text{Sp}(\widehat{U}^+ \widehat{F} \widehat{U}) = \text{Sp} \widehat{F}$, $\widehat{U}$: unitärer Operator.

Grundkurs Theoretische Physik 6

Statistische Physik

Nolting, W.

2014, XVI, 642 S. 114 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-25392-8