

Kapitel 2

Die Dirac-Theorie

2.1 Die Form der Dirac-Gleichung

Historisch betrachtet kam vor der relativistischen Quantentheorie die Ein-Teilchen-Theorie von Dirac. Diese war beim Beschreiben des Elektrons so erfolgreich, dass sie über viele Jahre hinweg die einzige angesehenen relativistische Quantentheorie war. Und die Schwierigkeiten, die sie mit sich brachte, waren weitaus weniger offensichtlich als die der Ein-Teilchen-Theorie von Klein-Gordon.

Dirac nahm an, ein Teilchen könne in verschiedenen bestimmten Zuständen mit dem gleichen Impuls (und verschiedenen Spinrichtungen) existieren. Dann müsste die Wellenfunktion ψ , die die Beziehung (6) erfüllt, verschiedene *Komponenten* aufweisen; sie wäre dann kein Skalar, sondern eine Menge von Zahlen, von denen jede einer Wahrscheinlichkeitsamplitude entspräche, das Teilchen an einem bestimmten Ort in einem bestimmten Subzustand vorzufinden. Somit schreiben wir ψ als eine einspaltige Matrix

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad \text{mit den Komponenten } \psi_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots$$

Dirac nahm an, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte an jedem Punkt durch

$$\rho = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^* \psi_{\alpha} \tag{8}$$

bestimmt sei, was wir – wie in der nicht-relativistischen Theorie – als

$$\rho = \psi^* \psi$$

schreiben. Hierbei ist ψ^* eine *einzeilige* Matrix:

$$[\psi_1^*, \psi_2^*, \dots]$$

Dabei muss (3) noch immer erfüllt sein. Somit muss ψ eine Wellengleichung *erster Ordnung* in t erfüllen. Da jedoch die Gleichungen relativistisch sind, muss die Gleichung ebenfalls erster Ordnung in x, y, z sein. Folglich lautet die allgemeinste mögliche Wellengleichung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_1^3 \alpha^k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + i \frac{mc}{\hbar} \beta \psi = 0 \quad (9)$$

wobei x_1, x_2, x_3 anstelle von x, y, z geschrieben werden und $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \beta$ quadratische Matrizen sind, deren Elemente Zahlen sind. Bildet man von (9) das komplex Konjugierte, so erhält man

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \sum_1^3 \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k} \alpha^{k*} - i \frac{mc}{\hbar} \psi^* \beta^* = 0 \quad (10)$$

mit α^{k*} und β^* als hermitesch Konjugierten.

Um nun (3) aus (8), (9) und (10) zu erhalten, muss $\alpha^{k*} = \alpha^k$ und $\beta^* = \beta$ gelten. Demnach sind α^k und β *hermitesch*, und es ist

$$j_k = c(\psi^* \alpha^k \psi) \quad (11)$$

Was fordern wir als Nächstes von Gleichung (9)? Zwei Dinge. (A) Sie muss mit (6), der Gleichung zweiter Ordnung, mit der wir begonnen haben, konsistent sein. (B) Die gesamte Theorie muss Lorentz-invariant sein.

Lassen Sie uns zuerst (A) betrachten. Wenn (9) mit (6) konsistent ist, muss es möglich sein, exakt Gleichung (6) zu erhalten, indem wir (9) mit dem Operator

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \sum_1^3 \alpha^\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} - i \frac{mc}{\hbar} \beta \quad (12)$$

multiplizieren, der so gewählt ist, dass sich die gemischten Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x_k}$ und $\frac{\partial}{\partial t}$ herauskürzen. Das ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \sum_k \sum_{\ell \neq k} \frac{1}{2} (\alpha^k \alpha^\ell + \alpha^\ell \alpha^k) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_\ell} + \sum_k \alpha_k^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} \\ &\quad - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \beta^2 \psi + i \frac{mc}{\hbar} \sum_k (\alpha^k \beta + \beta \alpha^k) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Das stimmt mit (6) genau dann überein, wenn gilt

$$\begin{aligned} \alpha^k \alpha^\ell + \alpha^\ell \alpha^k &= 0 \quad k \neq \ell \\ \alpha^k \beta + \beta \alpha^k &= 0 \\ \alpha^{k2} = \beta^2 &= \mathbb{I} \quad (\text{Einheitsmatrix}) \end{aligned} \tag{13}$$

Folglich können wir nicht die Gleichung zweiter Ordnung in zwei Gleichungen als *Faktoren* mit Operatoren erster Ordnung mit regulären Zahlen *zerlegen*. Aber mit *Matrizen* können wir das machen.

Wir betrachten die uns vertrauten Pauli-Spin-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Sie erfüllen die Beziehung

$$\sigma_k \sigma_\ell + \sigma_\ell \sigma_k = 2\delta_{\ell k}$$

Aber wir können nicht alle vier Matrizen dieser Art antikommutativ machen. Die gesuchten Matrizen müssen *mindestens* eine Größe von 4×4 haben.

Ein mögliches Ensemble von α^k und β ist

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Insbesondere gilt

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese sind, wie gewünscht, hermitesch. Wenn α^k und β einen bestimmten Satz von Matrizen bilden, der (13) erfüllt, dann bilden $S\alpha^k S^{-1}$ und $S\beta S^{-1}$ natürlich einen anderen Satz von Matrizen, wobei S eine *unitäre* Matrix $SS^* = 1$ ist. Umgekehrt kann gezeigt werden, dass alle möglichen (4×4) -Matrizen α^k und β ebenfalls diese Form haben – mit *irgendeiner* solchen Matrix S . Wir werden das hier jedoch nicht zeigen.

Die Dirac-Gleichung ist demnach ein Gebilde aus vier gleichzeitig linearen partiellen Differenzialgleichungen in den vier Funktionen ψ_α .

2.2 Lorentz-Invarianz der Dirac-Gleichung

Was bedeutet das? Betrachten wir eine allgemeine Lorentz-Transformation mit x'_μ als den neuen Koordinaten:

$$x'_\mu = \sum_{\nu=0}^3 a_{\mu\nu} x_\nu \quad (x_0 = ct) \quad (16)$$

Die Wellenfunktion im neuen Koordinatensystem ist ψ' . Natürlich erwarten wir nicht, dass $\psi' = \psi$ ist. Ein Beispiel: In der Maxwell-Theorie, die relativistisch ist, ist das magnetische Feld H nicht mehr ein bloßes Magnetfeld in einem bewegten System. Stattdessen verhält es sich bei der Transformation wie ein Tensor. Wir müssen also *irgendein* Transformationsgesetz für ψ finden, das die physikalischen Konsequenzen der Gleichungen invariant gegenüber der Transformation macht.

Dafür benötigen wir zwei Dinge: (i) Die Interpretation von $\psi^* \psi$ als Wahrscheinlichkeitsdichte muss erhalten bleiben. (ii) Die Gültigkeit der Dirac-Gleichung muss im neuen System erhalten bleiben.

Betrachten wir zunächst (i). Die Größe, die direkt beobachtet werden kann und invariant sein muss, ist

$$(\psi^* \psi) \times V$$

wobei V ein Volumen darstellt. Indem wir nun zu einem neuen Lorentz-System mit der Relativgeschwindigkeit v übergehen, ändert sich das Volumen V aufgrund der Fitzgerald-Kontraktion zu dem Wert

$$V' = V \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Folglich ist

$$(\psi^{*\prime}\psi') = \frac{\psi^*\psi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (17)$$

Somit verhält sich $(\psi^*\psi) = \rho$ bei der Transformation wie eine *Energie*, d. h. wie die vierte Komponente eines Vektors. Dies zeigt uns sofort, dass $\psi' \neq \psi$ ist. Weil ρ und \vec{j} über die Kontinuitätsgleichung miteinander verknüpft sind, sind die räumlichen Komponenten des 4er-Vektors gegeben durch

$$(S_1, S_2, S_3) = \psi^* \alpha^k \psi = \frac{1}{c} j_k \quad (18)$$

Wir fordern also, dass sich die vier Größen

$$(S_1, S_2, S_3, S_0) = (\psi^* \alpha^k \psi, \psi^* \psi) \quad (19)$$

wie ein *4er-Vektor* transformieren lassen. Das wird ausreichen, um die angesprochene Interpretation der Theorie beizubehalten.

Wir nehmen an, dass

$$\psi' = S\psi \quad (20)$$

gilt, wobei S ein *linearer* Operator ist. Dann ist

$$\psi'^* = \psi^* S^* \quad (21)$$

Somit fordern wir:

$$\begin{aligned} \psi^{*\prime} \alpha^k \psi' &= \psi^* S^* \alpha^k S \psi = \sum_{\nu=0}^3 a_{k\nu} \psi^* \alpha^\nu \psi \\ \psi^{*\prime} \psi' &= \psi^* S^* S \psi = \sum_{\nu=0}^3 a_{0\nu} \psi^* \alpha^\nu \psi \end{aligned} \quad (22)$$

mit $\alpha^0 = \mathbb{I}$.

Demnach benötigen wir die Beziehung

$$S^* \alpha^\mu S = \sum_{\nu=0}^3 a_{\mu\nu} \alpha^\nu \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (23)$$

Lassen Sie uns nun (ii) betrachten. Die Dirac-Gleichung für ψ' lautet

$$\sum_0^3 \alpha^\nu \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \psi' + i \frac{mc}{\hbar} \beta \psi' = 0 \quad (24)$$

Nun wird die ursprüngliche Dirac-Gleichung für ψ in Abhängigkeit von den neuen Koordinaten formuliert:

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \alpha^\mu \frac{\partial}{\partial x'_\nu} a_{\nu\mu} S^{-1} \psi' + i \frac{mc}{\hbar} \beta S^{-1} \psi' = 0 \quad (25)$$

Die beiden Gleichungen (24) und (25) müssen äquivalent sein, nicht aber identisch. Folglich muss (25) der Gleichung (24) entsprechen, wenn man diese mit $\beta S^{-1} \beta$ multipliziert. Es muss also gelten:

$$\beta S^{-1} \beta \alpha^\nu = \sum_0^3 \alpha^\lambda a_{\nu\lambda} S^{-1} \quad (26)$$

Jedoch sind (23) und (26) identisch, wenn gilt:

$$\beta S^{-1} \beta = S^* \quad \text{also} \quad S^* \beta S = \beta \quad (27)$$

Somit verhält sich β bei der Transformation wie ein Skalar, jedoch α^ν wie ein 4er-Vektor, wenn diese mit $S^* S$ multipliziert werden.

2.3 Die Bestimmung von S

Mit zwei aufeinander folgenden Koordinatentransformationen, deren Matrizen schon feststehen, entspricht nun die kombinierte Transformation dem Produkt dieser Matrizen. Daher müssen wir nur drei einfache Arten von Transformationen betrachten:

(1) Reine Rotationen

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0 & x'_3 &= x_3 \\ x'_1 &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ x'_2 &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{aligned}$$

(2) Reine Lorentz-Transformationen

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 & x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \cosh \theta + x_0 \sinh \theta \\ x'_0 &= x_3 \sinh \theta + x_0 \cosh \theta \end{aligned}$$

(3) Reine Spiegelungen

$$x'_1 = -x_1 \quad x'_2 = -x_2 \quad x'_3 = -x_3 \quad x'_0 = x_0$$

Fall 1. Es ist

$$S = \cos \frac{1}{2} \theta + i \sigma_3 \sin \frac{1}{2} \theta \quad (28)$$

Hier kommutiert

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

mit α_3 und β .

$$\sigma_3 \alpha_1 = i \alpha_2, \quad \sigma_3 \alpha_2 = -i \alpha_1$$

$$S^* = \cos \frac{1}{2} \theta - i \sigma_3 \sin \frac{1}{2} \theta$$

Dann ist

$$S^* \beta S = \beta$$

$$S^* \alpha^0 S = \alpha^0$$

$$S^* \alpha^3 S = \alpha^3$$

wie gefordert.

$$S^* \alpha^1 S = \cos \theta \alpha^1 + \sin \theta \alpha^2$$

$$S^* \alpha^2 S = -\sin \theta \alpha^1 + \cos \theta \alpha^2$$

Fall 2.

$$S = S^* = \cosh \frac{1}{2} \theta + \alpha_3 \sinh \frac{1}{2} \theta \quad (29)$$

Hier gilt

$$S^* \beta S = \beta$$

$$S^* \alpha^1 S = \alpha^1$$

$$S^* \alpha^2 S = \alpha^2$$

$$S^* \alpha^3 S = \cosh \theta \alpha^3 + \sinh \theta \alpha^0$$

$$S^* \alpha^0 S = \sinh \theta \alpha^3 + \cosh \theta \alpha^0$$

Fall 3.

$$S = S^* = \beta \quad (30)$$

Man beachte, dass S in allen Fällen bis auf den Faktor ± 1 bestimmt ist. So führt im Fall 1 eine Rotation von 360° zu $S = -1$.

Aufgabe 1. Ermitteln Sie das S , das einer allgemeinen infinitesimalen Koordinatentransformation entspricht. Zeigen Sie durch einen Vergleich, dass es mit den hier angegebenen exakten Lösungen übereinstimmt.

Die Transformationen der ψ_α mit den S -Transformationen werden *Spinoren* genannt. Sie sind eine direkte Erweiterung der nicht-relativistischen Zweikomponenten-Spin-Funktionen. Die mathematische Theorie der Spinoren ist

nicht sehr hilfreich. Vielmehr werden wir in der Praxis immer herausfinden, dass die Berechnungen am einfachsten sind, wenn man die explizite Darstellung der Spinoren vermeidet. *Wir verwenden nur formale Algebra und die Kommutationsrelationen der Matrizen.*

2.4 Die kovariante Schreibweise

Um die Unterscheidung zwischen kovarianten und kontravarianten Vektoren zu vermeiden (was wir bisher ungerechtfertigterweise ignoriert haben), ist es hilfreich, die imaginäre vierte Koordinate zu nutzen:

$$x_4 = ix_0 = ict \quad (31)$$

In diesem Koordinatensystem sind diese vier Matrizen ein 4er-Vektor:

$$\gamma_{1,2,3,4} = (-i\beta\alpha^{1,2,3}, \beta) \quad \text{also} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} & \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sie sind alle hermitesch und erfüllen die Beziehung

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad (33)$$

Die Dirac-Gleichung und ihre komplex Konjugierte können nun so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \sum_1^4 \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + \frac{mc}{\hbar} \psi &= 0 \\ \sum_1^4 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu - \frac{mc}{\hbar} \bar{\psi} &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

mit

$$\bar{\psi} = \psi^* \beta \quad \text{und} \quad (35)$$

$$s_\mu = i (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) = \left(\frac{1}{c} \vec{J}, i\rho \right) \quad (36)$$

Diese Schreibweisen sind die für Berechnungen gebräuchlichsten.

2.5 Erhaltungssätze und die Existenz des Spins

Der Hamilton-Operator in dieser Theorie lautet

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (37)$$

$$H = -i\hbar c \sum_1^3 \alpha^k \frac{\partial}{\partial x_k} + mc^2 \beta = -i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + mc^2 \beta \quad (38)$$

Er kommutiert mit dem Impuls $\mathbf{p} = -i\hbar \nabla$. Somit ist der Impuls \mathbf{p} eine Konstante der Bewegung.

Dagegen ist der Drehimpuls-Operator

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \quad (39)$$

keine Konstante. Hier gilt

$$[H, \mathbf{L}] = -\hbar^2 c \boldsymbol{\alpha} \times \nabla \quad (40)$$

Aber es ist

$$[H, \boldsymbol{\sigma}] = -i\hbar c \nabla \cdot [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma}] \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

mit

$$[\alpha^1, \sigma_1] = 0 \quad [\alpha^1, \sigma_2] = 2i\alpha^3 \quad [\alpha^1, \sigma_3] = -2i\alpha^2 \quad \text{etc.}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} [H, \sigma_3] &= 2\hbar c (\alpha^1 \nabla_2 - \alpha^2 \nabla_1) \quad \text{und folglich} \\ [H, \boldsymbol{\sigma}] &= 2\hbar c \boldsymbol{\alpha} \times \nabla \end{aligned} \quad (41)$$

Daher ist

$$\mathbf{L} + \frac{1}{2}\hbar \boldsymbol{\sigma} = \hbar \mathbf{J} \quad (42)$$

eine Konstante – der Gesamtdrehimpuls –, denn aufgrund von (40), (41) und (42) gilt:

$$[H, \mathbf{J}] = 0$$

\mathbf{L} ist der Bahndrehimpuls und $\frac{1}{2}\hbar \boldsymbol{\sigma}$ der Spindrehimpuls. Das stimmt mit der nicht-relativistischen Theorie überein. Aber in dieser Theorie waren Spin und Bahndrehimpuls eines freien Teilchens *jeweils für sich* konstant. Das ist jetzt nicht mehr der Fall.

Wenn ein Zentralkraftpotenzial $V(r)$ zu H summiert wird, ist der Operator \mathbf{J} noch immer konstant.

2.6 Elementare Lösungen

Für ein Teilchen mit einem bestimmten Impuls \mathbf{p} und einer bestimmten Energie E lautet die Wellenfunktion

$$\psi(x, t) = u \exp \left(i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{\hbar} - i \frac{Et}{\hbar} \right) \quad (43)$$

wobei u einen konstanten Spinor darstellt. Die Dirac-Gleichung wird dann eine Gleichung ausschließlich für u :

$$Eu = (c \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2 \beta) u \quad (44)$$

Nun setzen wir

$$p_+ = p_1 + ip_2 \quad p_- = p_1 - ip_2 \quad (45)$$

Die Gleichung (44) lautet dann vollständig ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} (E - mc^2) u_1 &= c (p_3 u_3 + p_- u_4) \\ (E - mc^2) u_2 &= c (p_+ u_3 - p_3 u_4) \\ (E + mc^2) u_3 &= c (p_3 u_1 + p_- u_2) \\ (E + mc^2) u_4 &= c (p_+ u_1 - p_3 u_2) \end{aligned} \quad (46)$$

Diese vier Gleichungen bestimmen u_3 und u_4 , wenn u_1 und u_2 gegeben sind, oder umgekehrt. Entweder u_1 und u_2 oder u_3 und u_4 können beliebig gewählt werden, falls gilt:

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2 \quad (47)$$

Demnach gibt es bei gegebenem p mit $E = +\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$ zwei unabhängige Lösungen von (46); diese sind, in nicht-normierter Form:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c p_3}{E + mc^2} \\ \frac{c p_+}{E + mc^2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c p_-}{E + mc^2} \\ \frac{-c p_3}{E + mc^2} \end{pmatrix} \quad (48)$$

Diese liefern die beiden Spinzustände des Elektrons mit dem gegebenen Impuls, wie es physikalisch gefordert wird.

Es gibt jedoch auch Lösungen mit $E = -\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$. Dies sind wiederum zwei unabhängige Lösungen, sodass insgesamt vier Lösungen vorliegen.

Dyson Quantenfeldtheorie

Die weltbekannte Einführung von einem der Väter der
QED

Dyson, F.

2014, XXIX, 288 S. 148 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-37677-1