

Lorenz Adlung, Christian Hopp,  
Alexandra Köthe, Niko Schnellbacher  
Oskar Staufer

# **Tutorium Mathe für Biologen**

**Von Studenten für Studenten**

Lösungen der Übungsaufgaben

Springer Spektrum

# 1 Funktionen, Differenziale und Integrale

## A1

Erklärt die Begriffe Funktion, Definitionsmenge und Wertebereich anhand eines selbstgewählten Beispiels.

### Lösung von A1:

Eine Funktion ist die Zuordnung von Elementen zweier Mengen. Dabei ist die eine die Definitionsmenge, die andere der Wertebereich. Beispielsweise ordnet eine entsprechend angepasste Exponentialfunktion den Zeitpunkten aus dem Definitionsbereich die Größe einer Bakterienkolonie aus dem Wertebereich zu.

## A2

Konstruiert eine periodische Funktion mit ausschließlich positiven Funktionswerten, einer Periode von  $\pi$ , einer Amplitude von 2 und einem Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse bei  $(0, 0)$ . Berechnet im Anschluss die Hoch- und Tiefpunkte.

### Lösung von A2:

Die Funktion soll durch den Koordinatenursprung verlaufen sowie immer positiv und periodisch sein. Daher entscheiden wir uns für den Cosinus, den wir entlang der  $x$ -Achse spiegeln und dann um eine Einheit nach oben verschieben, also  $-\cos(x) + 1$ .  $\cos(x)$  besitzt allerdings eine Amplitude von 1. Um die Amplitude zu verdoppeln, muss man die Funktionswerte verdoppeln. Das führt zu  $2 \cdot (-\cos(x) + 1) = 2 \cdot -\cos(x) + 2$ . Der Cosinus hat eine Periode von  $2\pi$ . Um die Periode anzupassen multiplizieren wir  $x$  mit dem Faktor 2. Dadurch halbieren wir die Periode. Wir erhalten  $2 \cdot -\cos(2 \cdot x) + 2$ . Diese Funktion besitzt alle gewünschten Eigenschaften.

Für die Hoch- und Tiefpunkte leiten wir die Funktion  $f(x) = 2 \cdot (-\cos(2 \cdot x)) + 2$  einmal ab. Dazu benötigen wir die Kettenregel.

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = 2 \cdot 2 \cdot (\sin(2 \cdot x)) = 4 \cdot \sin(2 \cdot x)$$

Um Stellen zu finden, an denen die  $f(x)$  potentiell Hoch- oder Tiefpunkte besitzt, müssen wir die Ableitung  $f'(x)$  nach Nullstellen überprüfen. Da 4 niemals null wird, müssen wir uns nur noch dem Sinus widmen. Da der einfache Sinus seine Nullstellen bei  $n \cdot \pi$  (mit  $n$  aus den ganzen Zahlen) hat, müssen wir nur prüfen, wann der innere Term diese Werte annimmt. Die erste Nullstelle von  $f'(x)$  liegt bei  $x = 0$ . Nun erinnern wir uns daran, dass wir die Periode halbiert haben, wodurch sich auch der Abstand der Nullstellen des Sinus halbiert. Die Nullstellen von  $f'(x)$  liegen also bei  $\frac{n}{2} \cdot \pi$  (mit  $n$  aus den ganzen Zahlen).

Nun müssen wir nur noch die Art der Extrema bestimmen. Dazu benötigen wir die zweite Ableitung von  $f(x)$ .

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = f''(x) = 2 \cdot (4) \cdot (\cos(2 \cdot x)) = 8 \cdot \cos(2 \cdot x)$$

Wegen der Periodizität genügt es, die ersten beiden Extrema zu überprüfen.  $8 \cdot \cos(2 \cdot 0) = 8$ . Daher ist dies ein Minimum. Für  $n = 1$  erhalten wir  $8 \cdot \cos(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi) = 8 \cdot \cos(\pi) = 8 \cdot (-1) = -8$ . Daher liegt dort ein Maximum. Damit können wir sagen, dass  $f(x)$  jeweils bei geraden  $n$  Tiefpunkte und bei ungeraden  $n$  Hochpunkte besitzt.

### A3

Aus experimentellen Gründen werden Mäusen Tumorzellen injiziert. Die Tumorkolonie hat zu Beginn einen Durchmesser von 0,05 cm. Im Schnitt sterben die Mäuse 10 Tage nach der Injektion an dem Tumor. Zum Todeszeitpunkt hat dieser einen Durchmesser von 3 cm. Das Wachstum ist sigmoidal mit einem Wendepunkt nach 5 Tagen. Konstruiert anhand dieser Parameter eine entsprechende Funktion.

#### Lösung von A3:

Wir benötigen die allgemeine Gleichung der Gompertz-Kurve

$$N(t) = N_{stat} \exp \left( \ln \left( \frac{y_0}{N_{stat}} \right) \exp(-\alpha t) \right).$$

Die Anfangsgröße ist  $y_0 = 0,05$  und die stationäre Größe  $N_{stat}$  können wir mit 3 beziffern. Es fehlt also nur noch  $\alpha$ . Diesen Parameter haben wir im Abschnitt 1.4.4 durch das Nullsetzen der 2. Ableitung gewonnen.

$$\alpha = \frac{\ln \left( -\ln \left( \frac{y_0}{N_{stat}} \right) \right)}{t}$$

In der Gleichung müssen wir lediglich den Zeitpunkt des Wendepunktes (5 Tage) einsetzen und erhalten

$$\alpha = \frac{\ln \left( -\ln \left( \frac{0,05}{3} \right) \right)}{5} \approx 0,2819.$$

### A4

Berechnet den Flächeninhalt, der zwischen der  $x$ -Achse und der Funktion  $f(x) = x^3$  im Intervall zwischen  $-1$  und  $1$  eingeschlossen ist.

#### Lösung von A4:

Wir benötigen dazu die Stammfunktion von  $f(x)$ . Diese ist  $F(x) = \frac{1}{4} \cdot x^3$ . Die Funktion  $f(x)$  besitzt in  $x = 0$  eine Nullstelle. Daher kann man nicht einfach über diese Nullstelle hinweg integrieren. Das ist aber auch gar nicht nötig, da die Funktion um den Koordinatenursprung punktsymmetrisch ist. Das heißt, dass die Flächeninhalte links und rechts von der  $y$ -Achse gleich groß sind. Wir müssen daher nur den Flächeninhalt zwischen null und eins berechnen und diesen anschließend verdoppeln.

Dank des Fundamentalsatzes der Analysis müssen wir die beiden Grenzen (hier null und eins) nur in die Stammfunktion einsetzen und die Differenz der beiden Funktionswerte bilden.

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = 2 \cdot \int_0^1 x^3 dx = 2 \cdot \left[ \frac{1}{4} \cdot x^3 \right]_0^1 = 2 \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot 1^3 - \frac{1}{4} \cdot 0^3 \right) = 2 \cdot \left( \frac{1}{4} - 0 \right) = \frac{1}{2}.$$

### A5

Was sind die drei Aussagen des Fundamentalsatzes der Analysis? Was bedeutet das für die Differenzial- und Integralrechnung?

**Lösung von A5:**

- 1) Jede stückweise stetige Funktion besitzt eine Stammfunktion  $F(x)$ . Leitet man diese ab, so ergibt sie die ursprüngliche Funktion  $f(x)$ .
- 2) Diese Stammfunktion ist bis auf eine Konstante eindeutig. Das macht auch Sinn, denn diese Konstante würde bei der Ableitung wieder verschwinden.
- 3) Um den Flächeninhalt unterhalb einer Kurve zu berechnen genügt es, die Grenzen in die Stammfunktion einzusetzen und die Differenz davon zu bilden, also

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Diese Aussage haben wir bereits in der letzten Aufgabe genutzt.

## 2 Beschreibende Statistik

### A1

Bilde für die folgenden kleinen Datensätze Mittelwert, Modalwert, Median, 0,25-Quantil und 0,75-Quantil.

Datensatz 1: 3 5 7 2 5 2 5 7 9 3 9 5 7 3 0 5 7 3

Datensatz 2: 4 7 8 2 6 5 9 0 2 7 4 8 6 2 7 4 8

#### Lösung von A1:

Die Datei BeschStat.xls, Datenblatt A1 enthält die Lösungen dieser Aufgabe. Datensatz 1: Der Mittelwert beträgt 4,8. Der Modalwert beträgt 5, der Median 5, das 0,25-Quantil 3 und das 0,75-Quantil 7. Datensatz 2: Es ergeben sich die Werte 5,2;4;6;4;7.

Die Formel zur Berechnung des Mittelwertes ist auf Seite 55 zu sehen. Zunächst werden die Werte der Datensätze aufsummiert (für Datensatz 1 beträgt die Summe 87, für Datensatz 2 ist sie 89) und anschließend durch n geteilt (Datensatz 1 n=18, Datensatz 2 n=17). Der Excelbefehl zur Berechnung des Mittelwertes lautet =Mittelwert(Matrix), wobei Matrix die Zellen des Datensatz meint (siehe Zelle C4 in der Datei BeschStat.xls Datenblatt A1).

Da der Modalwert der am häufigsten vorkommende Wert einer Datenerhebung ist, kann er bei solch übersichtlichen Datensätzen wie hier einfach abgezählt werden. Bei größeren Datensätzen schafft Excel mit dem Befehl =Modus(Matrix) Abhilfe (siehe Zelle C5 in der Datei BeschStat.xls Datenblatt A1).

Mit Hilfe der Formel 2.2 auf Seite 56 kann der Median der Datensätze berechnet werden. Hierzu wird zunächst, nach dem Ordnen der Zahlen, ermittelt, ob die Anzahl der Datenpunkte in den Datensätzen gerade oder ungerade ist (Datensatz 1 gerade, Datensatz 2 ungerade). Für den ersten Datensatz muss nun n=18 betrachtet werden. Daraus ergibt sich, dass die Summe der Datenpunkt 9 und 10 (in diesem Fall 10) mit 0,5 multipliziert werden muss. Es ergibt sich also ein Median von 5. Der Excelbefehl für die Berechnung des Medians lautet =Median(Matrix), wobei Matrix die Zellen des Datensatz meint (siehe Zelle C6 in der Datei BeschStat.xls Datenblatt A1). Da Datensatz 2 ungerade ist, muss nur der Datenpunkt 9 der geordneten Liste betrachtet werden, der Median beträgt also 6.

Zur Berechnung der Quantile kann die Formel auf Seite 57 herangezogen werden. Zunächst wird die Anzahl der Datenpunkte mit dem zu berechnenden Quantilwert multipliziert (0,25-Quantil des ersten Datensatzes:  $18 \cdot 0,25 = 4,5$ ). Im Falle dieses nicht ganzzahligen Wertes muss die untere Rechenvorschrift beachtet werden. Es muss also der fünfte Datenpunkt betrachtet werden (nach Aufrunden von 4,5). Natürlich bietet Excel auch hier eine einfache Lösung. Mit dem Befehl =Quantil(Matrix;alpha) kann das alpha-Quantil einer Matrix berechnet werden (siehe Zelle C7 in der Datei BeschStat.xls Datenblatt A1).

### A2

Zeichne ein Histogramm für folgenden Datensatz und ermittle den Mittelwert sowie den Median.

25 5 7 2 25 5 2 25 5 7 9 3 23 9 5 3 5 7 3

Croppe nun den Datensatz und ermittle beide Werte nochmals. Warum und in welcher Weise (wie stark beziehungsweise in welche Richtung) ändern sich die Werte?

**Lösung von A2:**

Die Datei BeschStat.xls, Datenblatt A2 enthält die Lösungen dieser Aufgabe. Die vier höchsten Werte nehmen stark Einfluss auf den Mittelwert und „ziehen“ ihn in ihre Richtung. Man kann allerdings annehmen, dass diese Werte Ausreißer darstellen und sie aus der Betrachtung herausnehmen. Nach dem croppen erkennt man, dass der nun berechnete Mittelwert deutlich näher an der eigentlichen Mitte des Datensatzes liegt. Hierbei ist auch zu beachten, dass der Median in beiden Fällen gleich bleibt. Dies zeigt die Robustheit des Medians gegenüber Ausreißern.

**A3**

Zeichne die jeweiligen Boxplots für folgende Datensätze (Spannweite des Datensatzes für die Whisker) und vergleiche sie hinsichtlich der Auswirkungen von Ausreißern.

Datensatz 1: 3 6 7 2 4 6 3 9 4 8 7 2 5 4 8 1 7 3 6 4 8 2 7 44 2  
Datensatz 2: 3 6 23 4 8 3 6 4 2 5 5 1 3 7 4 9 3 18 6 2 9 25 3 6 5

Welche Datenpunkte würdest du als Ausreißer betrachten? Welche Parameter ändern sich, wenn diese in den Berechnungen betrachtet werden?

**Lösung von A3:**

Die Datei BeschStat.xls, Datenblatt A3 enthält die Lösungen dieser Aufgabe. Im Datensatz 2 können die Datenpunkte mit den Werten 18, 23 und 25 als Ausreißer betrachtet werden. Werden diese in der Berechnung verschiedener Lage- und Streumaße betrachtet, können sich starke Abweichungen ergeben. Insbesondere der Minimal- und Maximalwert und eben dadurch auch die Spannweite werden stark beeinflusst. Der Median sowie die Quantile werden weniger stark durch die Ausreißer beeinflusst.

**A4**

Bilde für folgende Datensätze Mittelwert, Varianz und Standardabweichung. Zeichne anschließend ein Balkendiagramm, in dem alle drei Datensätze zusammengefasst werden, mit dazugehörigen Fehlerbalken.

Datensatz A: 3 2 5 7 4 6 3 5  
Datensatz B: 2 4 2 3 1 4 3 2  
Datensatz C: 2 5 3 4 3 5 25 4

**Lösung von A4:**

Die Datei BeschStat.xls, Datenblatt A4 enthält die Lösungen dieser Aufgabe. Für den Datensatz A ergibt sich ein Mittelwert von 4,4. Varianz und Standardabweichung betragen 2,5 beziehungsweise 1,7. Für den Datensatz B beträgt der Mittelwert 2,6 und die Varianz 1,0. Daraus ergibt sich eine Standardabweichung von 1,0. Für den Datensatz C gelten die Werte 6,4 für den Mittelwert, für die Varianz 50,5 und für die Standardabweichung 7,6.

**A5**

Zeichne für folgende Datensätze die dazugehörigen Punktwolken (Punktdiagramme) und schätze einen Korrelationskoeffizienten. Berechne anschließend den Korrelationskoeffizienten (runde wenn nötig auf drei Stellen hinter dem Komma).

Ausprägungen von Merkmal A: 1 2 3 4 5 6

Ausprägungen von Merkmal B: 1 2 3 4 5 6

Ausprägungen von Merkmal C: 1 2 3 4 5 6

Ausprägungen von Merkmal D: 0,5 1 2,5 3 3,5 4

Ausprägungen von Merkmal E: 1 2 3 4 5 6

Ausprägungen von Merkmal F: 4,5 4,5 3,5 3 3 2

Um welche Form von Abhängigkeiten handelt es sich in den einzelnen Fällen?

#### **Lösung von A5:**

Die Punktwolken der Datensätze sind in der Datei BeschStat.xls, Datenblatt A5 gezeigt. Der Korrelationskoeffizient wird nach der Formel auf Seite 66 berechnet. Da hierfür schon bei kleineren Datensätzen sehr viele Summen und Produkte gebildet werden müssen, empfiehlt sich hier wiederum die Nutzung von Excel. Der Befehl zur Berechnung des Korrelationskoeffizienten lautet =KORREL(Matrix), wobei Matrix die Zellen des Datensatz meint (siehe Zelle F2). Diese Art der Korrelationen ist typisch für eine einseitige Abhängigkeit.

#### **A6**

Zeichne für folgende Datensätze die dazugehörigen Punktdiagramme, in denen jeweils die beiden Ausprägungen gegeneinander aufgetragen werden. Zeichne nun per Hand eine Linie ein, welche nach deiner Einschätzung die beste Regressionsgerade darstellt (kleinste Summe der quadrierten Abstände zur Kurve). Berechne anschließend die Regressionsgerade und zeichne diese in dieselbe Abbildung ein (runde auf eine Stelle hinter dem Komma).

Ausprägungen A: 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ausprägungen B: 2 2 2,5 5 5,6 4 7 8,3 8,6

#### **Lösung von A6:**

Das Punktdiagramm zu den Datensätzen ist in der Datei BeschStat.xls, Datenblatt A6 gezeigt. Zur Berechnung der Regressionsgerade kann die Formel auf Seite 67 herangezogen werden. Auch hier kann die Bildung mehrerer Dutzend Summen auf Excel "geoutsourced" werden. Erstellt man ein Punktdiagramm der Datensätze kann im Menüpunkt **Diagrammlayout** eine Trendlinie hinzugefügt werden. Die Geradengleichung für diese kann im Menüpunkt **Trendlinienoptionen** angezeigt werden.

### 3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

#### A1

Eine diskrete Zufallsvariable  $X$  kann sechs verschiedene Realisierungen  $x_i \in \mathbb{N}$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) annehmen. Die diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$  ist in Tabelle 1 gegeben.

Tabelle 1: Realisierungswahrscheinlichkeiten der diskreten Zufallsvariablen  $X$ .

$i$	1	2	3	4	5	6	
$X = x_i$	2	3	5	7	10	11	Realisierung
$p_i = P(X = x_i)$	0,6	0,2	0,05	0,05	0,07	0,03	Wahrscheinlichkeit

Betrachtet das Ereignis  $A$ , dass  $X$  eine ungerade Zahl annimmt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $A$ ? Wie groß ist der Erwartungswert und die Varianz dieser diskreten Verteilung?

#### Lösung von A1:

Wir beantworten zunächst die Frage nach der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis  $A$ . Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = P(X = 3) + P(X = 5) + P(X = 7) + P(X = 11) = 0,2 + 0,05 + 0,05 + 0,03 = 0,33$$

Als nächstes berechnen wir den Erwartungswert  $E[X]$ .

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=1}^6 x_i \cdot p_i = \\ &= 2 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,05 + 7 \cdot 0,05 + 10 \cdot 0,07 + 11 \cdot 0,03 = 3,43 \end{aligned}$$

Schlussendlich bestimmt man die Varianz aus der Formel

$$\begin{aligned} V[X] &= E[(X - E[X])^2] = \sum_{i=1}^6 p_i \cdot (x_i - E[X])^2 \\ &= 0,6 \cdot (2 - 3,43)^2 + 0,2 \cdot (3 - 3,43)^2 + 0,05 \cdot (5 - 3,43)^2 \\ &\quad + 0,05 \cdot (7 - 3,43)^2 + 0,07 \cdot (10 - 3,43)^2 + 0,03 \cdot (11 - 3,43)^2 = 6,7651 \end{aligned}$$

#### A2

Die Verteilung  $p$  definiert eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsdichte auf dem Intervall  $[0, 1]$  der reellen Zahlengerade. Überprüft, ob die gegebene Verteilung auch in der Tat korrekt normalisiert ist und bestimmt ihren Erwartungswert sowie die Varianz.

$$p(x) := \begin{cases} \frac{2}{5} & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{8}{5} & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



**Lösung von A2:**

Die Normalisierungsbedingung lautet:

$$\int_0^1 p(x) dx = 1$$

Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} \int_0^1 p(x) dx &= \int_0^{1/2} p(x) dx + \int_{1/2}^1 p(x) dx = \int_0^{1/2} \frac{2}{5} dx + \int_{1/2}^1 \frac{8}{5} dx = \\ &= \frac{2}{5} \left[ x \right]_0^{1/2} + \frac{8}{5} \left[ x \right]_{1/2}^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1 \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass die Dichtefunktion wie erwartet normalisiert ist. Als nächstes berechnen wir den Erwartungswert  $E[X]$ :

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1 x \cdot p(x) dx = \\ &= \int_0^{1/2} x \cdot p(x) dx + \int_{1/2}^1 x \cdot p(x) dx = \\ &= \frac{2}{5} \cdot \int_0^{1/2} x dx + \frac{8}{5} \cdot \int_{1/2}^1 x dx = \\ &= \frac{2}{5} \cdot \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{1/2} + \frac{8}{5} \cdot \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{1/2}^1 = \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{20} + \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{20} + \frac{3}{5} = 0,65 \end{aligned}$$

Zum Schluss berechnen wir noch die Varianz  $V[X]$ :

$$\begin{aligned} V[X] &= E[(X - E[X])^2] = \\ &= \int_0^1 (x - E[X])^2 \cdot p(x) dx = \\ &= \int_0^{1/2} (x - 0,65)^2 \cdot p(x) dx + \int_{1/2}^1 (x - 0,65)^2 \cdot p(x) dx = \\ &= \frac{2}{5} \cdot \int_0^{1/2} (x - 0,65)^2 dx + \frac{8}{5} \cdot \int_{1/2}^1 (x - 0,65)^2 dx = \\ &= \frac{2}{5} \cdot \int_{-0,65}^{-0,15} x^2 dx + \frac{8}{5} \cdot \int_{-0,15}^{0,35} x^2 dx = \\ &= \frac{2}{5} \cdot \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_{-0,65}^{-0,15} + \frac{8}{5} \cdot \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_{-0,15}^{0,35} = \frac{73}{1200} \approx 0,061 \end{aligned}$$

In der vorletzten Zeile wurde die Substitution  $y(x) = x - 0,65$  vorgenommen und danach die Variable  $y$  wieder in  $x$  umbenannt. Hierbei verschieben sich die vorherigen Integrationsgrenzen global um  $-0,65$ .

## 4 Schließende Statistik

### A1

Muss man für Western-blot-Daten auch zwischen Stichprobe und Grundgesamtheit unterscheiden? Warum?

#### Lösung von A1:

Prinzipiell nicht, weil hier ein Mittelwert der Grundgesamtheit erzeugt wird, dadurch dass man eine Population von Millionen von Zellen in einer Probe analysiert und dafür nur einen Wert für die jeweilige Bandenintensität erhält. Anders verhält es sich, wenn aus einem Pool von Zellen jeweils (Stich)proben genommen werden, für eine separate Analyse.

### A2

Welche der Hypothesen aus Tab. 2 können mit statistischen Tests überprüft werden?

Tabelle 2: Beispiele für Hypothesen in der Biologie.

Hypothese	auf „mathematisch“
Es gibt mehr als 50 % phosphorylierte Moleküle in den Zellen.	$p_{phos} > 50\%$
Mindestens ein Drittel aller Zellen ist markerpositiv.	$\frac{\#(\text{Marker}^+)}{\#(\text{Marker}^+ + \text{Marker}^-)} \geq \frac{1}{3}$
Die durchschnittliche Bandenintensität beträgt 531 BLU.	$\mu = 531 \text{ BLU}$
Die Streuung des Signals liegt zwischen fünf und sechs.	$\sigma \in [5, 6]$

#### Lösung von A2:

Die erste Aussage kann mittels  $t$ - oder  $Z$ -Test beurteilt werden, wenn der gemessene Mittelwert  $\bar{x}$  des Phosphorylierungsgrades der Moleküle mit dem gegebenen Wert  $\mu = 50\%$  verglichen wird.

Für die zweite Aussage gilt selbiges. Einziger Unterschied zum ersten Beispiel ist, dass hier die Nullhypothese formuliert ist, wohingegen in der ersten Zeile die Alternativhypothese steht.

Wenn man mehrere Western-blot-Banden mehrerer Replikate quantifiziert, kann man wiederum ermitteln, ob der Mittelwert  $\bar{x}$  der gemessenen Intensitäten dem vorgegebenen Wert  $\mu = 531 \text{ BLU}$  entspricht. *BLU* steht dabei übrigens für Boehringer Light Units.

In dem  $R$ -Skript SkriptSchlStat01.R auf [www.springer.com/978-3-642-37785-3](http://www.springer.com/978-3-642-37785-3) gibt es einen so genannten  $F$ -Test, um zu überprüfen, ob sich die Varianzen zweier Messreihen in der gleichen Größenordnung befinden. Damit könnte man die obige Hypothese testen.

### A3

Liegen im 95 %-Konfidenzintervall auch 95 % der Messwerte?

#### Lösung von A3:

Nein. Das 95 %-Konfidenzintervall ist der Bereich, in dem mit 95 %-iger Wahrscheinlichkeit der wahre Mittelwert  $\mu$  der Grundgesamtheit liegt. Bei einer hohen Anzahl von Stichproben kann man das Konfidenzintervall zumeist präziser schätzen und es wird entsprechend schmaler, wodurch auch nur noch ein Teil der eigentlichen Messwerte in diesem Bereich liegt.

## A4

Ist es ratsam, ein Experiment zu wiederholen, wenn ein statistischer Test kein signifikantes Ergebnis lieferte?

### Lösung von A4:

Nein. Ein solches Vorgehen würde eine falsche Tendenz in Richtung geringer  $p$ -Werte erzeugen. Der  $p$ -Wert verlöre damit seine Aussagekraft und Interpretationen wären verwässert. Denn dann würde man beispielsweise in mehr als 5 % der so gezeigten Tests ein signifikantes Ergebnis mit  $p < 0,05$  erhalten, selbst wenn die Nullhypothese wahr wäre. Das widerspricht dem Konzept hinter dem  $p$ -Wert und der Signifikanz [1].

## A5

Berechne das 95 %-Konfidenzintervall der Differenzen zwischen Kontroll- und Stimulationsbedingung in der Datei DatenSchlStat01.xls auf [www.springer.com/978-3-642-37785-3](http://www.springer.com/978-3-642-37785-3). Spielt die Reihenfolge der Messwerte eine Rolle? Führe anschließend auch einen  $t$ -Test mit der eingeführten Funktion (s. Abschn. 4.5.5, S. 126) durch, um das Ergebnis des  $R$ -Skripts zu validieren.

### Lösung von A5:

Die Weite  $w$  des 95 %-Konfidenzintervalls für die Differenzen der Messreihen ergibt sich mit der nachstehenden Funktion in Excel:

=CONFIDENCE(0,05;15,56;10)

Das Ergebnis lautet  $\approx 9,65$ . Damit schließt das 95 %-Konfidenzintervall  $CI : [\bar{x} - w, \bar{x} + w]$  für die gemessenen Differenzen mit dem gegebenen Mittelwert  $\bar{x} = -10,20$  null aus:  $CI : [-10,20 - 9,65, -10,20 + 9,65] = [-19,85, -0,55]$ . Damit ist der wahre Mittelwert  $\mu$  der Differenzen signifikant von null verschieden.

Wenn man die Reihenfolge verändert, in der man die Stimulationsmessung von der Kontrollmessung subtrahiert, bleibt der Mittelwert  $\bar{x}$  der Differenzen gleich, jedoch nicht die Standardabweichung, wodurch sich auch die Weite des Konfidenzintervalls verändert. Man sollte immer sicher stellen, ob Messwerte paarweise zusammen gehören bzw. voneinander unabhängig sind.

Mit Excel führt man den  $t$ -Test wie folgt aus:

=TTEST(B2:B11;C2:C11;2;3)

In den Zellen B2 bis B11 sind die Kontrollmessungen eingetragen, in C2 bis C11 stehen die Messergebnisse nach Stimulation, die 2 meint einen zweiseitigen Test und die 3, dass wir zwei Messreihen mit unterschiedlichen Varianzen  $s^2$  vorliegen haben. Mit dieser Funktion erhalten wir einen  $p$ -Wert, der mit  $p \approx 0,0349$  unserem bereits in  $R$  ermittelten Ergebnis entspricht. All dies findet sich auch in den Eintragungen der Datei ResultateSchlStat01.xls

## A6

Nutze die Excel-Vorlage auf [www.springer.com/978-3-642-37785-3](http://www.springer.com/978-3-642-37785-3) für die Durchführung eines weiteren  $\chi^2$ -Tests [2].

### Lösung von A6:

Die Datei TestSchlStat01.xls enthält den in [2] aufgeführten  $\chi^2$ -Test zum Zusammenhang von Tremor und visuellen Halluzinationen bei Parkinson-Patienten und reproduziert das publizierte Ergebnis  $p \approx 0,16$ .

## 5 Lineare Gleichungssysteme

### A1

Löst das Lineare Gleichungssystem und bestimmt die Dimension des Lösungsraums.

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 - x_4 = 21$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - x_4 = 7$$

$$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 11$$

$$x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 = 7$$

#### Lösung von A1:

Wir überführen das Gleichungssystem in vektorielle Form, indem wir die erweiterte Koeffizientenmatrix aufstellen und mit dem Gaußverfahren beginnen:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 6 & -1 & 21 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3 \cdot \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - 2 \cdot \text{II} \\ \text{IV} - \text{II}}} \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 6 & -1 & 21 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{|\cdot(\frac{1}{2}) \\ \text{III} + \text{II}}} \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 6 & -1 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{\text{I} - 4 \cdot \text{II} \\ |\cdot(-1) \\ \text{IV} + \text{II}}} \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 6 & 3 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{I} - 6 \cdot \text{III}}} \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{|\cdot(\frac{1}{3})}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{|\cdot(-1) \\ \text{IV} + \text{III}}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Da eine Nullzeile vorliegt, führen wir einen freien Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein und wählen  $\lambda := x_4$ . Mit dieser Parametrisierung können wir das letzte Gaußsystem explizit ausschreiben als

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 1 - 1 \cdot \lambda \\ x_2 = 0 + 1 \cdot \lambda \\ x_3 = 3 + 0 \cdot \lambda \\ x_4 = 0 + 1 \cdot \lambda \end{array} \right\} \implies \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Die gesuchte Lösungsmenge lautet folglich:

$$\mathbb{L} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Da wir die Lösung unter Zuhilfenahme eines freien Parameters aufstellen konnten, ist der Lösungsraum eindimensional:  $\dim(\mathbb{L}) = 1$ .

## A2

Berechnet die dritte Potenz der Matrix  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

### Lösung von A2:

Gesucht ist  $A^3 = A \cdot A \cdot A$ . Wir rechnen explizit aus:

$$\begin{aligned} A^3 &= A \cdot A \cdot A = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Ergebnis dieser dritten Matrixpotenz ist die  $3 \times 3$ -Nullmatrix.

## A3

Welche Eigenwerte hat die Matrix  $B$ ?

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & -4 & -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Wie lauten die zugehörigen Eigenvektoren? Ist  $B$  diagonalisierbar?

### Lösung von A3:

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix  $B$ . Also bestimmen wir zunächst das charakteristische Polynom mithilfe der Laplace-Entwicklung:

$$\begin{aligned} \chi_B(t) &= \det(t \cdot E_3 - B) = \det \begin{pmatrix} t-6 & -8 & -8 \\ 0 & t+2 & 0 \\ 4 & 4 & t+6 \end{pmatrix} = (t+2) \cdot \det \begin{pmatrix} t-6 & -8 \\ 4 & t+6 \end{pmatrix} \\ &= (t+2) \cdot \left[ (t-6)(t+6) - 4 \cdot (-8) \right] = (t+2) \left[ t^2 - 36 + 32 \right] \\ &= (t+2) \left[ t^2 - 4 \right] = (t+2)(t+2)(t-2) = (t+2)^2(t-2) \end{aligned}$$

Der vereinfachte faktorisierte Term im letzten Ausdruck wird genau dann null, wenn  $t$  entweder  $t = -2$  oder  $t = +2$  ist. Wir haben also zwei Eigenwerte:  $\lambda_1 = -2$  und  $\lambda_2 = +2$ . Um die zugehörigen Eigenvektoren zu bestimmen, müssen wir die Eigenräume für beide

Eigenwerte aufstellen. Wir bestimmen als Erstes den Eigenraum zum Eigenwert  $-2$ , indem wir das homogene LGS:  $(B - (-2)E_3) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}_V$  lösen. Ausgeschrieben finden wir:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (\frac{1}{8}) \\ \\ 2 \cdot \text{III} + \text{I} \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

Da hier zwei Nullzeilen vorliegen, benötigen wir zwei freie Parameter. Wir wählen  $\lambda := y \in \mathbb{R}$  und  $\mu = z \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Eig}(B, -2) = \mathbb{L}(B + 2 \cdot E_3, \mathbf{0}_V) = \left\{ \mathbf{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Der Eigenraum der Matrix  $B$  zum Eigenwert  $\lambda_1 = -2$  ist also ein zweidimensionaler Teilraum des  $\mathbb{R}^3$ . Jetzt verfahren wir genauso für den zweiten Eigenwert  $\lambda_2 = +2$ . Jetzt müssen wir das homogene LGS  $(B_1 - (+2)E_3) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}_V$  lösen.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -8 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (\frac{1}{4}) \\ | \cdot (-\frac{1}{4}) \\ \text{III} + \text{I} \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{I} - 2 \cdot \text{II} \\ \\ \text{III} - 4 \cdot \text{II} \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Wir führen einen freien Parameter  $r := z \in \mathbb{R}$  ein und können damit den Eigenraum angeben:

$$\text{Eig}(B, +2) = \mathbb{L}(B - 2 \cdot E_3, \mathbf{0}_V) = \left\{ \mathbf{x} = r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

Damit haben wir alle zugehörigen Eigenvektoren bestimmt. Die Eigenvektoren des Eigenwertes  $\lambda_1 = -2$  sind alle Vektoren aus dem Eigenraum  $\text{Eig}(B, -2)$ , die ungleich dem Nullvektor sind und ebenso sind alle Eigenvektoren des Eigenwertes  $\lambda_2 = +2$  gegeben durch die Elemente des Eigenraumes  $\text{Eig}(B, +2)$ , die ungleich dem Nullvektor sind.

Jetzt ist nur noch die Frage nach der Diagonalisierbarkeit zu beantworten. Die Matrix  $B$  ist diagonalisierbar, falls wir 3 linear unabhängige Eigenvektoren finden können. Wir betrachten hierfür die folgenden drei Eigenvektoren, aus den zuvor bestimmten Eigenräumen:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hier sind  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  gerade zwei Eigenvektoren die den Eigenraum von  $\lambda_1 = -2$  aufspannen und  $\mathbf{v}_3$  ein Eigenvektor, der den Eigenraum von  $\lambda_2 = +2$  aufspannt. Um diese drei Vektoren auf lineare Unabhängigkeit zu überprüfen, müssen wir zeigen, dass eine Linearkombination dieser drei Vektoren, die den Nullvektor darstellt, nur durch die triviale Linearkombination erfüllt wird, bei der alle drei Koeffizienten vor den Vektoren null sind.

$$c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 \cdot \mathbf{v}_2 + c_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}_V$$

Wir möchten also zeigen, dass die drei reellen Koeffizienten  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  alle null sein müssen, um die obige Gleichung zu erfüllen. Wir können diese Linearkombination auch in

Maxtrix-Vektor-Schreibweise formulieren

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und sehen, dass wir wieder ein homogenes LGS lösen müssen, um  $c_1, c_2$  und  $c_3$  zu bestimmen.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I+II+III}} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{|\cdot(-1)|} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III+I}}$$

Aus dem letzten Gaußsystem geht hervor, dass in der Tat  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$  und  $c_3 = 0$  gilt, die drei vorliegenden Vektoren also linear unabhängig sind. Die Matrix  $B$  ist also **diagonalisierbar**. Damit haben wir eine Basis bestehend aus EV gefunden und können jetzt auch direkt die Transformationsmatrix angeben, die  $B$  in Diagonalgestalt überführt. Hierfür schreiben wir gerade die drei Vektoren spaltenweise in eine neue  $3 \times 3$ -Matrix, die wir  $S$  nennen wollen.

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix  $S$  ist invertierbar und es gilt:  $B = SDS^{-1}$  bzw. äquivalent dazu:  $D = S^{-1}B_1S$ , wobei  $D$  die Diagonalmatrix mit den EW auf der Diagonalen ist:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

## A4

Abbildung 1: Zweizustandssystem mit den Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_A$  und  $p_B$ .

Wir betrachten das folgende System aus zwei Zuständen  $A$  und  $B$ . Mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p_A = 0,3$  bleibt Zustand  $A$  erhalten. Mit der komplementären Wahrscheinlichkeit  $1 - p_A = 0,7$  wechselt man zu  $B$ . Für  $B$  gilt analog  $p_B = 0,5$  und  $1 - p_B = 0,5$ . Ein zweidimensionaler Zustandsvektor  $\mathbf{v} = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$  beschreibt einen Besetzungszustand.  $x$  beschreibt zu wie vielen Teilen Zustand  $A$  besetzt ist und  $y$  gibt die Besetzungsanzahl von Zustand  $B$  an. Die Matrix  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} p_A & 1 - p_B \\ 1 - p_A & p_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,7 & 0,5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$



beschreibt das Übergangsverhalten des Systems. Die Einträge in jeder Spalte sind gerade die entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten und alle Spalteneinträge summieren sich jeweils zu 1. Wendet man  $A$  auf einen Zustandsvektor des Systems an, so erhält man die neue Besetzungsverteilung. Gibt es für dieses System einen stationären Zustand? Gibt es also einen Zustandsvektor (Eigenvektor)  $\mathbf{v}^* \in \mathbb{R}^2$  für den gilt

$$A \cdot \mathbf{v}^* = \mathbf{v}^* ?$$

#### Lösung von A4

Die Aufgabenstellung kann auch so verstanden werden, dass man herausfinden soll, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} p_A & 1 - p_B \\ 1 - p_A & p_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,7 & 0,5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

den Eigenwert  $\lambda = 1$  hat. Gibt es einen solchen Eigenwert, dann erfüllen die korrespondierenden Eigenvektoren gerade die Gleichung  $A \cdot \mathbf{v}^* = \mathbf{v}^*$ . Also bestimmen wir alle Eigenwerte von  $A$ . Hierfür benötigen wir wieder das charakteristische Polynom der Matrix:

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \det(t \cdot E_2 - A) = \det \begin{pmatrix} t - p_A & p_B - 1 \\ p_A - 1 & t - p_B \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} t - 0,3 & -0,5 \\ -0,7 & t - 0,5 \end{pmatrix} = (t - 0,3) \cdot (t - 0,5) - 0,7 \cdot 0,5 = \\ &= t^2 - 0,8 \cdot t + 0,15 - 0,35 = t^2 - 0,8 \cdot t - 0,2 \stackrel{!}{=} 0 \\ \implies t_{1,2} &= 0,4 \pm \sqrt{0,4^2 + 0,2} = 0,4 \pm \sqrt{9/25} = 0,4 \pm 3/5 \\ \implies t_1 &= 1,0 \quad \text{und} \quad t_2 = -0,2 \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom hat die Nullstelle  $\lambda = 1$ . Da es also einen Eigenwert 1 gibt, sind die zu diesem Eigenwert zugehörigen Eigenvektoren gerade jene stationären Zustände  $\mathbf{v}$ , die die Gleichung

$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$$

erfüllen. Wenn man diese Eigenvektoren bestimmen möchte, so muss man wieder das entsprechende homogene LGS:  $(A - E_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}_V$  lösen.

$$\left( \begin{array}{cc|c} -0,7 & 0,5 & 0 \\ 0,7 & -0,5 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-10) \\ \text{II} + \text{I} \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cc|c} 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Das letzte Gaußsystem kann auf die Gleichung  $7x = 5y$  reduziert werden. Da wir eine Nullzeile haben, benötigen wir einen freien Parameter, um den Eigenraum angeben zu können.

$$\text{Eig}(A, 1) = \left\{ \mathbf{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

Ein möglicher stationärer Zustand ist also zum Beispiel durch den Zustandsvektor  $\mathbf{v} = (\frac{5}{7}, 1)^T$  gegeben.

## 6 Modellierung mit gewöhnlichen Differenzialgleichungen

### A1

Wir betrachten die logistische Differenzialgleichung

$$\frac{d}{dt}u = ku(K - u)$$

für positive Parameter  $k, K$ . Berechnet die Gleichgewichtspunkte dieser Gleichung und analysiert deren Stabilität. Erstellt das Phasendiagramm für selbstgewählte Parameter  $k$  und  $K$ .

#### Lösung von A1:

Wir untersuchen die logistische Differenzialgleichung

$$\frac{d}{dt}u = ku(K - u) = kKu - ku^2 =: f(u)$$

für positive Parameter  $k, K$ .

Zunächst berechnen wir die Gleichgewichtspunkte der Differenzialgleichung. Ein Gleichgewichtspunkt  $\bar{u}$  muss die Gleichung  $f(\bar{u}) = k\bar{u}(K - \bar{u}) = 0$  erfüllen. Da ein Produkt nur dann null ist, wenn einer der Faktoren null ist, erhalten wir  $\bar{u}_1 = 0$  und  $\bar{u}_2 = K$ . Um die Stabilität dieser Gleichgewichtspunkte zu analysieren, berechnen wir die Ableitung der Funktion  $f(u)$ :

$$f'(u) = kK - 2ku = k(K - 2u)$$

und setzen die Gleichgewichtspunkte dort ein:

$$f'(\bar{u}_1) = f'(0) = kK \quad \text{und} \quad f'(\bar{u}_2) = f'(K) = k(K - 2K) = -kK.$$

Da wir voraussetzen, dass die Parameter  $k, K$  positiv sind, ist somit  $\bar{u}_1$  instabil, wohingegen  $\bar{u}_2$  stabil ist.

Um das Phasendiagramm zu erstellen, wählen wir die Parameter

$$k = 1.5 \quad \text{und} \quad K = 2$$

und zeichnen die Funktion  $f(u) = 1.5u(2 - u)$  in ein Diagramm. Die Nullstellen der Funktion entsprechen den Gleichgewichtspunkten. Da  $\bar{u}_1 = 0$  instabil ist, wird dies mit einem weißen Kreis markiert, wohingegen  $\bar{u}_2 = 2$  durch einen schwarzen Kreis gekennzeichnet wird. Im Intervall  $(0, 2)$  ist  $f(u)$  positiv, weshalb wir Pfeile nach rechts auf die  $u$ -Achse zeichnen. Für  $u < 0$  und  $u > 2$  ist  $f$  negativ und wir zeichnen Pfeile nach links (vgl. Abb. 6).

Abbildung 2: Phasendiagramm der logistischen Gleichung  $\frac{d}{dt}u = 1.5u(2 - u)$ . Der Gleichgewichtspunkt  $\bar{u}_1 = 0$  ist instabil, was wir daran erkennen, dass alle Pfeile von ihm weg zeigen. Der Gleichgewichtspunkt  $\bar{u}_2 = 2$  ist stabil, da alle Pfeile zu ihm hin gerichtet sind.

## A2

Zeigt, dass die Gompertz-Funktion

$$N(t) = N_{stat} \exp\left(\ln\left(\frac{N_0}{N_{stat}}\right) \exp(-\alpha t)\right)$$

Lösung der Differenzialgleichung

$$\frac{d}{dt}N = \alpha \ln\left(\frac{N_{stat}}{N(t)}\right) N(t) \quad (1)$$

zum Anfangswert  $N(0) = N_0$  ist. Berechnet den Gleichgewichtspunkt der Gleichung 1 und analysiert dessen Stabilität. Erstellt das Phasendiagramm für die Parameter  $\alpha = 2$  und  $N_{stat} = 3$ .

### Lösung von A2:

Die Gompertz-Funktion

$$N(t) = N_{stat} \exp\left(\ln\left(\frac{N_0}{N_{stat}}\right) \exp(-\alpha t)\right)$$

erfüllt die Anfangsbedingung  $N(0) = N_0$ , da wir durch Einsetzen von  $t = 0$  erhalten:

$$\begin{aligned} N(t=0) &= N_{stat} \exp\left(\ln\left(\frac{N_0}{N_{stat}}\right) \exp(-\alpha \cdot 0)\right) \\ &= N_{stat} \exp\left(\ln\left(\frac{N_0}{N_{stat}}\right)\right) \\ &= N_{stat} \left(\frac{N_0}{N_{stat}}\right) = N_0. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Ableitung mithilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N(t) &= N_{stat} \exp\left(\ln\left(\frac{N_0}{N_{stat}}\right) \exp(-\alpha t)\right) \cdot \frac{d}{dt}\left(\ln\left(\frac{N_0}{N_{stat}}\right) \exp(-\alpha t)\right) \\ &= N(t) \cdot \left(\ln\left(\frac{N_0}{N_{stat}}\right) \exp(-\alpha t) \cdot (-\alpha)\right) \\ &= \alpha N(t) \cdot \left(-\ln\left(\frac{N_0}{N_{stat}}\right) \exp(-\alpha t)\right). \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt verwenden wir, dass  $\ln(\exp(x)) = x$  für jedes reelle  $x$  ist. Außerdem

Abbildung 3: Phasendiagramm der Differenzialgleichung  $\frac{d}{dt}N = 2\ln(3/N)N$ . Der Gleichgewichtspunkt  $N_{stat} = 3$  ist stabil, was wir daran erkennen, dass alle Pfeile zu ihm hin gerichtet sind.

benutzen wir folgende Rechenregel für die Exponentialfunktion:  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ .

$$\begin{aligned}
&= \alpha N(t) \cdot \ln(\exp(-\ln(\frac{N_0}{N_{stat}}) \exp(-\alpha t))) \\
&= \alpha N(t) \cdot \ln\left(\frac{1}{\exp(\ln(\frac{N_0}{N_{stat}}) \exp(-\alpha t))}\right) \\
&= \alpha N(t) \cdot \ln\left(\frac{N_{stat}}{N_{stat} \exp(\ln(\frac{N_0}{N_{stat}}) \exp(-\alpha t))}\right) \\
&= \alpha \ln\left(\frac{N_{stat}}{N(t)}\right) N(t).
\end{aligned}$$

Somit sehen wir, dass  $N(t)$  eine Lösung der Differenzialgleichung

$$\frac{d}{dt}N = \alpha \ln\left(\frac{N_{stat}}{N(t)}\right) N(t) = f(N(t))$$

ist.

Nun wollen wir die Gleichgewichtspunkte dieser Differenzialgleichung berechnen. Dies sind die Nullstellen der Funktion

$$f(N) = \alpha \ln\left(\frac{N_{stat}}{N}\right) N = \alpha (\ln(N_{stat}) - \ln(N)) N.$$

Diese Funktion ist nur definiert für  $N > 0$ , da man  $\ln(\frac{N_{stat}}{N})$  für  $N = 0$  nicht berechnen kann. Somit gibt es nur einen Gleichgewichtspunkt und zwar  $N = N_{stat}$ , da  $\ln(\frac{N_{stat}}{N_{stat}}) = \ln(1) = 0$ . Um die Stabilität zu analysieren, berechnen wir die Ableitung von  $f(N)$

$$\begin{aligned}
f'(N) &= \alpha \left( \left(0 - \frac{1}{N}\right) N + (\ln(N_{stat}) - \ln(N)) \right) \\
&= \alpha \left( -1 + \ln(N_{stat}) - \ln(N) \right)
\end{aligned}$$

Setzen wir den Gleichgewichtspunkt  $N = N_{stat}$  dort ein, dann erhalten wir

$$f(N_{stat}) = \alpha \left( -1 + \ln(N_{stat}) - \ln(N_{stat}) \right) = -\alpha < 0.$$

Somit ist dieser Gleichgewichtspunkt stabil.

### A3

Rechnet nach, dass die Hill-Funktion

$$f_H(u) = \frac{V_m u^n}{K_m^n + u^n}$$

für  $n \geq 2$  eine Sigmoidfunktion ist. D. h. die Funktion ist monoton wachsend, hat einen positiven Wendepunkt und außerdem gilt  $f(u) < V_m$  für alle  $u > 0$ .

Löst die Differenzialgleichung  $\frac{d}{dt}u = f_H(u)$  mithilfe der Separation der Variablen. Schreibt die Lösung so einfach wie möglich (es ist nicht möglich, die Lösung in die Form  $u(t) = \dots$  zu bringen.)

#### Lösung von A3:

Um das Verhalten der Hill-Funktion

$$f_H(u) = \frac{V_m u^n}{K_m^n + u^n} = V_m u^n (K_m^n + u^n)^{-1}.$$

für  $n \geq 2$  und  $u \geq 0$  zu untersuchen, berechnen wir zunächst die ersten beiden Ableitungen. Die erste Ableitung berechnet sich mithilfe der Produktregel zu

$$\begin{aligned} f'_H(u) &= V_m n u^{n-1} (K_m^n + u^n)^{-1} + V_m u^n \cdot (-1) (K_m^n + u^n)^{-2} n u^{n-1} \\ &= V_m n u^{n-1} \left( \frac{1}{K_m^n + u^n} - u^n \frac{1}{(K_m^n + u^n)^2} \right) \\ &= V_m n u^{n-1} \frac{1}{(K_m^n + u^n)^2} ((K_m^n + u^n) - u^n) \\ &= V_m n u^{n-1} \frac{1}{(K_m^n + u^n)^2} K_m^n \\ &= n V_m K_m^n \frac{u^{n-1}}{(K_m^n + u^n)^2} \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile haben wir zum einen  $n u^{n-1}$  ausgeklammert, da dieser Term in beiden Summanden vorkommt, in der nächsten Zeile haben wir noch  $\frac{1}{(K_m^n + u^n)^2}$  ausgeklammert.

Für  $n \geq 1$  und  $u \geq 0$  ist die erste Ableitung immer größer gleich 0 und somit ist die Funktion  $f_H$  monoton wachsend. Durch Einsetzen von  $u = 0$

$$f_H(0) = \frac{V_m 0^n}{K_m^n + 0^n} = 0$$

sehen wir, dass daraus folgt, dass  $f_H(u) \geq 0$  ist für alle  $u \geq 0$ .

Durch erneutes Ableiten mithilfe der Produktregel berechnen wir die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} f''_H(u) &= n V_m K_m^n \frac{d}{du} \left( u^{n-1} (K_m^n + u^n)^{-2} \right) \\ &= n V_m K_m^n \left( (n-1) u^{n-2} (K_m^n + u^n)^{-2} + u^{n-1} \cdot (-2) (K_m^n + u^n)^{-3} n u^{n-1} \right) \\ &= n V_m K_m^n u^{n-2} \left( \frac{n-1}{(K_m^n + u^n)^2} - \frac{2n u^n}{(K_m^n + u^n)^3} \right) \\ &= n V_m K_m^n \frac{u^{n-2}}{(K_m^n + u^n)^3} \left( (n-1)(K_m^n + u^n) - 2n u^n \right) \\ &= n V_m K_m^n \frac{u^{n-2}}{(K_m^n + u^n)^3} \left( (n-1) K_m^n - (n+1) u^n \right) \end{aligned}$$

Wir interessieren uns für Wendepunkte, deshalb müssen wir untersuchen, welche Nullstellen der Zähler der zweiten Ableitung hat. Sobald  $n > 2$  ist, hat die zweite Ableitung für  $u = 0$  eine Nullstelle, aber da wir nur die positiven Wendepunkte berechnen wollen, müssen wir die Nullstellen von  $(n-1)K_m^n - (n+1)u^n$  bestimmen.

Wir sehen zunächst, dass wir für  $n = 1$  den Zähler  $(1-1)K_m^n - (1+1)u^1 = -2u$  erhalten und somit nur  $u = 0$  als Wendepunkt. Aus diesem Grund ist die Michaelis-Menten-Funktion  $f_M(u) = \frac{V_m u}{K_m + u}$  keine Sigmoidfunktion.

Für  $n \geq 2$  hingegen können wir rechnen

$$(n-1)K_m^n - (n+1)u^n = 0 \quad \Rightarrow \quad (n+1)u^n = (n-1)K_m^n \quad \Rightarrow \quad u^n = \frac{n-1}{n+1}K_m^n$$

und erhalten  $u_W = \sqrt[n]{\frac{n-1}{n+1}}K_m$  als einzige positive reelle Nullstelle der zweiten Ableitung und somit als einzigen Wendepunkt.

Beim Plotten der Hill-Funktion für verschiedene Werte von  $n \geq 2$  sehen wir, dass alle Funktionen durch denselben Punkt gehen. Dieser Punkt ist  $u = K_m$ , da

$$f_H(K_m) = \frac{V_m K_m^n}{K_m^n + K_m^n} = \frac{1}{2}V_m$$

gilt, unabhängig von  $n$ .

Zuletzt wollen wir die Differenzialgleichung  $\frac{d}{dt}u = f_H(u)$  für  $n \geq 2$  mithilfe der Separation der Variablen lösen.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= V_m \frac{u^n}{K_m^n + u^n} \\ \left( \frac{K_m^n}{u^n} + 1 \right) du &= V_m dt \\ \int_0^u \left( \frac{K_m^n}{\tilde{u}^n} + 1 \right) d\tilde{u} &= V_m \int_0^t d\tilde{t} + C \\ K_m^n \frac{1}{-n+1} u^{-n+1} + u &= V_m t + C \\ \frac{u}{-n+1} \left( K_m^n \frac{1}{u^n} + (1-n) \right) &= V_m t + C \end{aligned} \tag{2}$$

Leider ist es nicht möglich diese Gleichung in die Form  $u(t) = \dots$  zu bringen. Allerdings ist es möglich, den Wert von  $C$  durch Einsetzen von  $t = 0$  in Gleichung (2) zu bestimmen, da  $u(t=0) = u_0$ .

$$C = \frac{u_0}{-n+1} \left( K_m^n \frac{1}{u_0^n} + (1-n) \right)$$

Für ein vorgegebenes  $u_0$  kann nun Gleichung (2) numerisch gelöst werden.

## A4

Wir betrachten die Lotka-Volterra-Gleichungen für beliebige Parameter  $a, b, c, d > 0$ .

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}u_A \\ \frac{d}{dt}u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_A(a - bu_B) \\ -u_B(c - du_A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_A - bu_Au_B \\ -cu_B + du_Au_B \end{pmatrix}$$

Berechnet die Gleichgewichtspunkte des Differenzialgleichungssystems und analysiert deren Stabilität. Erstellt das Phasendiagramm für die Parameterwerte  $a = 4, b = 2, c = 5$  und  $d = 1$ .

#### Lösung von A4:

Die Lotka-Volterra-Gleichungen für beliebige Parameter  $a, b, c, d > 0$  haben folgende Form

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} u_A \\ \frac{d}{dt} u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_A(a - bu_B) \\ -u_B(c - du_A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_A - bu_A u_B \\ -cu_B + du_A u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u_A, u_B) \\ g(u_A, u_B) \end{pmatrix}$$

Die Gleichgewichtspunkte des Systems sind diejenigen Tupel  $(\bar{u}_A, \bar{u}_B)$  für die gleichzeitig  $f(\bar{u}_A, \bar{u}_B) = 0$  und  $g(\bar{u}_A, \bar{u}_B) = 0$  gilt.

$$f(\bar{u}_A, \bar{u}_B) = \bar{u}_A(a - b\bar{u}_B) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_A = 0 \text{ oder } \bar{u}_B = \frac{a}{b} \quad (3)$$

$$g(\bar{u}_A, \bar{u}_B) = -\bar{u}_B(c - d\bar{u}_A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_B = 0 \text{ oder } \bar{u}_A = \frac{c}{d} \quad (4)$$

Damit gleichzeitig  $f$  und  $g$  null werden, müssen wir je einen Wert der Zeile (3) und (4) kombinieren. Somit erhalten wir die Gleichgewichtspunkte

$$(\bar{u}_A^1, \bar{u}_B^1) = (0, 0) \text{ und } (\bar{u}_A^2, \bar{u}_B^2) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right).$$

Um die Stabilität dieser Gleichgewichtspunkte zu analysieren, berechnen wir die Jacobimatrix

$$J(u_A, u_B) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_A} f(u_A, u_B) & \frac{\partial}{\partial u_B} f(u_A, u_B) \\ \frac{\partial}{\partial u_A} g(u_A, u_B) & \frac{\partial}{\partial u_B} g(u_A, u_B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - bu_B & -bu_A \\ du_B & -c + du_A \end{pmatrix}.$$

Setzen wir nun die Gleichgewichtspunkte ein, erhalten wir

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} a - b\frac{a}{b} & -b\frac{c}{d} \\ d\frac{a}{b} & -c + d\frac{c}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix  $J(0, 0)$  kann man direkt ablesen, da die Matrix Diagonalform hat. Somit sind  $\lambda_1 = a$  und  $\lambda_2 = -c$  die Eigenwerte und der Gleichgewichtspunkt  $(0, 0)$  ist ein Sattel.

Die Eigenwerte der Matrix  $J(c/d, a/b)$  sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & \frac{bc}{d} \\ -\frac{ad}{b} & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + ac = 0$$

Diese Nullstellen sind  $\lambda_{1/2} = \pm i\sqrt{ac}$ , somit können wir nach dem Satz von Hartman-Grobman keine Aussage über die Stabilität des nichtlinearen Systems treffen. Aufgrund

Abbildung 4: Phasendiagramm der Lotka-Volterra-Gleichungen  $\frac{d}{dt} u_A = u_A(4 - 2u_B)$ ,  $\frac{d}{dt} u_B = -u_B(5 - u_A)$ . Die blauen Geraden  $u_A = 0$  und  $u_A = 5$ , sowie  $u_B = 0$  und  $u_B = 2$  sind die Nullklinen des Systems. Der Gleichgewichtspunkt  $(0, 0)$  ist ein Sattel, der Gleichgewichtspunkt  $(5, 2)$  ist ein neutrales Zentrum, was wir daran erkennen, dass die Lösungen (schwarz und grau) geschlossene Kreise in der Phasenebene bilden.

der komplexen Eigenwerte gibt es aber nur die Möglichkeiten, dass der Gleichgewichtspunkt  $(c/d, a/b)$  ein neutrales Zentrum oder eine (stabile/instabile) Spirale ist. Anhand der Simulation (vgl. Abb. 6) sehen wir, dass ersteres zutrifft.

Zur Erstellung eines Phasendiagramms wählen wir die Parameter

$$a = 4, \quad b = 2, \quad c = 5 \quad \text{und} \quad d = 1.$$

Die Nullklinen sind diejenigen Kurven, auf denen  $f(u_A, u_B) = 0$ , bzw.  $g(u_A, u_B) = 0$  ist. Dies entspricht den in Gleichung (3) und (4) berechneten Werten. Auf der Gerade  $u_A = 0$  ist  $f = 0$  und  $g(0, u_B) = -cu_B = -5u_B < 0$  für  $u_B > 0$ , weshalb wir dort senkrechte, nach unten zeigende Pfeile zeichnen.

Für  $u_B = a/b = 2$  ist  $f = 0$  und  $g(u_A, 2) = -u_B(c - du_A) = -2(5 - u_B)$ . Letzteres ist negativ, wenn  $u_A < c/d = 5$  was zu senkrechten, nach unten zeigenden Pfeilen führt. Für  $u_A > 5$  ist  $g(u_A, 2)$  positiv und wir zeichnen senkrechte, nach oben zeigende Pfeile.

Für die Lösungen von  $g = 0$ , die durch  $u_B = 0$  und  $u_A = c/d = 5$  gegeben sind, erhalten wir waagerechte Pfeile. Da  $f(u_A, 0) = au_A = 4u_A > 0$ , wenn  $u_A > 0$ , zeigen die Pfeile nach rechts auf der Achse  $u_B = 0$ .

Für  $u_A = c/d = 5$  ist  $f(5, u_B) = 5(4 - 2u_B)$ . Dies ist positiv, wenn  $u_B < 2$  und negativ wenn  $u_B > 2$  ist. Somit zeichnen wir waagerechte nach rechts zeigende Pfeile für  $u_B < 2$  und nach links zeigende Pfeile für  $u_B > 2$ .

Insgesamt erhalten wir das Bild 6, in dem zusätzlich 2 numerisch berechnete Lösungen der Differenzialgleichung eingezeichnet sind. Da diese Lösungen geschlossene Kurven in der Phasenebene bilden, handelt es sich um Oszillationen, woraus wir schlussfolgern, dass der Gleichgewichtspunkt  $(5, 2)$  ein neutrales Zentrum ist.

## A5

Ein Chemostat ist ein Gefäß zur Kultivierung von Mikroorganismen, wie z. B. Bakterien. In das Gefäß werden mit konstanter Rate  $a_2$  Nährstoffe zugeführt. Die Bakterien ernähren sich davon, wodurch sie sich vermehren und gleichzeitig die Nährstoffe verbrauchen. Ein Teil des verbrauchten Nährmediums wird zusammen mit den darin befindlichen Bakterien wieder abgeführt.

Die Zustandsvariablen des Systems sind

$u_B$  - die Bakterienkonzentration,

$u_N$  - Die Nährstoffkonzentration.

Die zeitliche Veränderung der Bakterien- und Nährstoffkonzentration wird durch die Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u_B &= a_1 \left( \frac{u_N}{1 + u_N} \right) u_B - u_B \\ \frac{d}{dt}u_N &= - \left( \frac{u_N}{1 + u_N} \right) u_B - u_N + a_2 \end{aligned}$$

beschrieben. Berechnet die Gleichgewichtspunkte des Systems und gebt Bedingungen an, so dass alle Gleichgewichtspunkte nicht negativ sind. Erstellt ein Phasendiagramm für selbst gewählte Parameter  $a_1$  und  $a_2$ .



**Lösung von A5:**

Die Chemostat-Gleichungen haben die Form

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u_B &= a_1 \left( \frac{u_N}{1+u_N} \right) u_B - u_B = f(u_B, u_N) \\ \frac{d}{dt}u_N &= - \left( \frac{u_N}{1+u_N} \right) u_B - u_N + a_2 = g(u_B, u_N)\end{aligned}$$

wobei  $a_1, a_2$  positive Parameter sind.

Die Gleichgewichtspunkte des Systems sind diejenigen Tupel  $(\bar{u}_B, \bar{u}_N)$ , für die gleichzeitig  $f(\bar{u}_B, \bar{u}_N) = 0$  und  $g(\bar{u}_B, \bar{u}_N) = 0$  gilt.

Betrachten wir zunächst die Gleichung

$$f(\bar{u}_B, \bar{u}_N) = a_1 \left( \frac{\bar{u}_N}{1+\bar{u}_N} \right) \bar{u}_B - \bar{u}_B = \bar{u}_B \left( a_1 \left( \frac{\bar{u}_N}{1+\bar{u}_N} \right) - 1 \right) = 0. \quad (5)$$

Somit muss also entweder  $\bar{u}_B = 0$  sein oder  $a_1 \frac{\bar{u}_N}{1+\bar{u}_N} = 1$ . Letzteres ist gleichbedeutend mit  $\bar{u}_N = \frac{1}{a_1-1}$ . Dieser Wert existiert nur, wenn  $a_1 \neq 1$  und ist positiv für  $a_1 > 1$ . Somit nehmen wir ab sofort an, dass  $a_1 > 1$  gilt.

Um Informationen über die jeweils zweite Koordinate zu erhalten, setzen wir die eben berechneten Werte jeweils in die zweite Gleichung  $g(\bar{u}_B, \bar{u}_N) = 0$  ein und erhalten für  $\bar{u}_B = 0$

$$g(0, \bar{u}_N) = - \left( \frac{\bar{u}_N}{1+\bar{u}_N} \right) \cdot 0 - \bar{u}_N + a_2 = -\bar{u}_N + a_2$$

Somit haben wir den ersten Gleichgewichtspunkt berechnet

$$(\bar{u}_B^1, \bar{u}_N^1) = (0, a_2).$$

Für den zweiten Gleichgewichtspunkt setzen wir  $\bar{u}_N = \frac{1}{a_1-1}$  in die Gleichung  $g(\bar{u}_B, \bar{u}_N) = 0$  ein um  $\bar{u}_B$  zu berechnen. Dabei verwenden wir, dass  $\frac{\bar{u}_N}{1+\bar{u}_N} = \frac{1}{a_1}$  ist und erhalten

$$g(\bar{u}_B, \frac{1}{a_1-1}) = - \left( \frac{\bar{u}_N}{1+\bar{u}_N} \right) \bar{u}_B - \bar{u}_N + a_2 = -\frac{\bar{u}_B}{a_1} - \frac{1}{a_1-1} + a_2 = 0.$$

Daraus ergibt sich  $\frac{\bar{u}_B}{a_1} = -\frac{1}{a_1-1} + a_2 = \frac{1}{1-a_1} + a_2$  und somit  $\bar{u}_B = \frac{a_1}{1-a_1} + a_2 a_1$ . Wir haben also einen weiteren Gleichgewichtspunkt

$$(\bar{u}_B^2, \bar{u}_N^2) = \left( \frac{a_1}{1-a_1} + a_1 a_2, \frac{1}{a_1-1} \right)$$

gefunden. Die Koordinate  $\bar{u}_B$  ist nur dann positiv, wenn  $a_2 > \frac{1}{a_1-1} > 0$ , wodurch wir eine Bedingung für den zweiten Parameter erhalten.

Um die Stabilität dieser Gleichgewichtspunkte zu analysieren, berechnen wir die Jacobimatrix

$$J(u_B, u_N) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_B} f(u_B, u_N) & \frac{\partial}{\partial u_N} f(u_B, u_N) \\ \frac{\partial}{\partial u_B} g(u_B, u_N) & \frac{\partial}{\partial u_N} g(u_B, u_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \left( \frac{u_N}{1+u_N} \right) - 1 & a_1 \left( \frac{1}{(1+u_N)^2} \right) u_B \\ -\frac{u_N}{1+u_N} & -\frac{1}{(1+u_N)^2} u_B - 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Dafür haben wir die Ableitung  $\frac{\partial}{\partial u_N} \frac{u_N}{1+u_N}$  mithilfe der Produktregel berechnet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_N} \left( \frac{u_N}{1+u_N} \right) &= \frac{\partial}{\partial u_N} (u_N(1+u_N)^{-1}) = (1+u_N)^{-1} + u_N(-1)(1+u_N)^{-2} \\ &= (1+u_N)^{-2} (1+u_N - u_N) \\ &= \frac{1}{(1+u_N)^2} \end{aligned}$$

Setzen wir den Gleichgewichtspunkt  $(\bar{u}_B^1, \bar{u}_N^1) = (0, a_2)$  in die Jacobimatrix (6) ein, erhalten wir

$$J(0, a_2) = \begin{pmatrix} \frac{a_1 a_2}{1+a_2} - 1 & 0 \\ -\frac{a_2}{1+a_2} & -1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind die Diagonaleinträge, da die Matrix eine Dreiecksmatrix ist:

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{a_1 a_2}{1+a_2} - 1.$$

Aus der Bedingung an die Parameter  $a_2 > \frac{1}{a_1-1} > 0$ , erhalten wir die Abschätzung  $(a_1 - 1)a_2 = a_1 a_2 - a_2 > 1$  und können somit das Vorzeichen des zweiten Eigenwertes bestimmen:

$$\lambda_2 = \frac{a_1 a_2}{1+a_2} - 1 = \frac{a_1 a_2 - a_2 - 1}{1+a_2} > 0.$$

Somit ist der Gleichgewichtspunkt  $(0, a_2)$  ein Sattelpunkt, da die Jacobimatrix  $J(0, a_2)$  einen positiven und einen negativen Eigenwert besitzt.

Setzen wir den Gleichgewichtspunkt  $(\bar{u}_B^2, \bar{u}_N^2) = (\frac{a_1}{1-a_1} + a_1 a_2, \frac{1}{a_1-1})$  in die Jacobimatrix (6) ein, erhalten wir unter Verwendung von  $a_1 \frac{\bar{u}_N^2}{1+\bar{u}_N^2} - 1 = 0$  und  $\frac{1}{(1+\bar{u}_N^2)^2} = \left(\frac{a_1-1}{a_1}\right)^2$

$$J(\bar{u}_B^2, \bar{u}_N^2) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \frac{(a_1-1)^2}{a_1^2} \left(\frac{a_1}{1-a_1} + a_1 a_2\right) \\ -\frac{1}{a_1} & -\frac{(a_1-1)^2}{a_1^2} \left(\frac{a_1}{1-a_1} + a_1 a_2\right) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (a_1-1)(a_2(a_1-1)-1) \\ -\frac{1}{a_1} & -\frac{(a_1-1)}{a_1} (a_2(a_1-1)-1) - 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte der Matrix  $J(\bar{u}_B, \bar{u}_N)$  sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \lambda & -(a_1-1)(a_2(a_1-1)-1) \\ \frac{1}{a_1} & \lambda + \frac{(a_1-1)}{a_1} (a_2(a_1-1)-1) + 1 \end{pmatrix} \\ = \lambda \left( \lambda + \frac{(a_1-1)}{a_1} (a_2(a_1-1)-1) + 1 \right) + \frac{(a_1-1)}{a_1} (a_2(a_1-1)-1) \end{aligned}$$

Wir setzen hier zur besseren Lesbarkeit  $A = \frac{(a_1-1)}{a_1} (a_2(a_1-1)-1)$  und berechnen die Nullstellen des Polynoms

$$\lambda(\lambda + A + 1) + A = \lambda^2 + (A+1)\lambda + A.$$

Diese sind

$$\begin{aligned}
\lambda_{1/2} &= -\frac{A+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(A+1)^2}{4} - A} \\
&= -\frac{A+1}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2 + 2A + 1 - 4A}{4}} \\
&= -\frac{A+1}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2 - 2A + 1}{4}} \\
&= -\frac{A+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(A-1)^2}{4}} \\
&= -\frac{A+1}{2} \pm \frac{A-1}{2}.
\end{aligned}$$

Somit sind die Eigenwerte der Jacobimatrix  $J(\bar{u}_B^2, \bar{u}_N^2)$  durch

$$\lambda_1 = -\frac{A+1}{2} + \frac{A-1}{2} = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\frac{A+1}{2} - \frac{A-1}{2} = -A$$

gegeben. Der Wert  $A = \frac{(a_1-1)}{a_1}(a_2(a_1-1)-1)$  ist positiv, da nach Voraussetzung an die Parameter zum einen  $a_1 > 1$  gilt und daher  $\frac{(a_1-1)}{a_1}$  positiv ist. Zum anderen gilt  $a_2 > \frac{1}{a_1-1} > 0$  woraus die Positivität von  $a_2(a_1-1)-1$  folgt. Somit ist  $(\bar{u}_B, \bar{u}_N)$  ein stabiler Knoten.

Zur Erstellung des Phasendiagramms berechnen wir die Nullklinen. Aus Gleichung (5) folgt, dass  $f = 0$ , wenn entweder  $u_B = 0$  oder  $u_N = \frac{1}{a_1-1}$  ist. Somit liegen auf diesen Geraden senkrechte Pfeile. Da  $g(0, u_N) = -u_N + a_2$  ist, zeigen diese Pfeile auf  $u_B = 0$  nach unten, wenn  $u_N > a_2$  und nach oben, wenn  $u_N < 2$ .

Für  $u_N = \frac{1}{a_1-1}$  ist  $g(u_B, \frac{1}{a_1-1}) = -u_B/a_1 - 1/(a_1-1) + a_2$ , woraus folgt, dass die Pfeile auf dieser Geraden nach oben zeigen, wenn  $u_B < \bar{u}_B^2$  und nach unten, wenn  $u_B > \bar{u}_B^2$  gilt.

Waagerechte Pfeile erhalten wir für  $g(u_B, u_N) = 0$ , was gleichbedeutend ist mit

$$u_B = \frac{1+u_N}{u_N}(a_2 - u_N).$$

Setzen wir dies in  $f$  ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(u_B, u_N) &= f\left(\frac{1+u_N}{u_N}(a_2 - u_N), u_N\right) \\
&= a_1 \frac{u_N}{1+u_N} \frac{1+u_N}{u_N}(a_2 - u_N) - \frac{1+u_N}{u_N}(a_2 - u_N) \\
&= a_1(a_2 - u_N) - \frac{1+u_N}{u_N}(a_2 - u_N) \\
&= (a_2 - u_N) \left(a_1 - \frac{1+u_N}{u_N}\right)
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist positiv, wenn  $u_N \in (\bar{u}_N^2, a_2)$  liegt, weshalb wir in diesem Fall waagerechte Pfeile nach rechts zeichnen. Für  $u_N > a_2$  oder  $u_N < \bar{u}_N^2$  ist der Ausdruck negativ und wir zeichnen waagerechte Pfeile nach links.

Zur konkreten Erstellung von Phasendiagrammen wählen wir zwei Sätze von Parametern

Abbildung 5: Phasendiagramm der Chemostat-Gleichungen  $\frac{d}{dt}u_B = 1.5 \left( \frac{u_N}{1+u_N} \right) u_B - u_B$ ,  $\frac{d}{dt}u_N = - \left( \frac{u_N}{1+u_N} \right) u_B - u_N + 3$ . Der Gleichgewichtspunkt  $(0, 3)$  ist ein Sattel, der Gleichgewichtspunkt  $(1.5, 2)$  ist ein stabiler Knoten.

$$a_1 = 1,5 \quad \text{und} \quad a_2 = 3.$$

Die Bedingungen an die Parameter sind erfüllt, da zum einen  $a_1 > 1$  und außerdem  $a_2 = 3 > 2 = \frac{1}{1,5-1} = \frac{1}{a_1-1}$ . Die Gleichgewichtspunkte sind daher  $(\bar{u}_B^1, \bar{u}_N^1) = (0, a_2) = (0, 3)$ , sowie  $(\bar{u}_B^2, \bar{u}_N^2) = (\frac{a_1}{1-a_1} + a_1 a_2, \frac{1}{a_1-1}) = (1.5, 2)$ .

Außerdem wählen wir einen zweiten Satz von Parametern

$$a_1 = 3 \quad \text{und} \quad a_2 = 1.$$

Die Bedingungen an die Parameter sind erfüllt, da zum einen  $a_1 > 1$  und außerdem  $a_2 = 1 > 1/2 = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{a_1-1}$ . Die Gleichgewichtspunkte sind daher  $(\bar{u}_B^1, \bar{u}_N^1) = (0, a_2) = (0, 1)$ , sowie  $(\bar{u}_B^2, \bar{u}_N^2) = (\frac{a_1}{1-a_1} + a_1 a_2, \frac{1}{a_1-1}) = (1.5, 0.5)$ .

Abbildung 6: Phasendiagramm der Chemostat-Gleichungen  $\frac{d}{dt}u_B = 3 \left( \frac{u_N}{1+u_N} \right) u_B - u_B$ ,  $\frac{d}{dt}u_N = - \left( \frac{u_N}{1+u_N} \right) u_B - u_N + 1$ . Der Gleichgewichtspunkt  $(0, 1)$  ist ein Sattel, der Gleichgewichtspunkt  $(1.5, 0.5)$  ist ein stabiler Knoten.

## Literatur

- [1] Harvey Motulsky. *Intuitive biostatistics*. Oxford Univ. Press, New York [u.a.], completely edition, 2010.
- [2] Abdul Qayyum Rana, Haris Munir Vaid, Adnaan Edun, Okan Dogu, and Mohammed A Rana. Relationship of dementia and visual hallucinations in tremor and non-tremor dominant Parkinson’s disease. *Journal of the neurological sciences*, 323(1-2):158–61, December 2012.

Tutorium Mathe für Biologen

Von Studenten für Studenten

Adlung, L.; Hopp, C.; Köthe, A.; Schnellbacher, N.;

Staufer, O.

2014, X, 287 S. 66 Abb., 53 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-642-37785-3