

# Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie

Winfried Kabblo

## Lösung ausgewählter Aufgaben

**Aufgabe 1.1** Man kann  $\|f\|_n^2 := \sum_{j=0}^n \int_a^b |f^{(j)}(x)|^2 dx$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  nehmen, analog  $\|x\|_n^2 := \sum_{k=1}^\infty k^{2n} |x_k|^2$  auf  $s(\mathbb{N})$  oder  $\|f\|_n^2 := \int_{K_n} |f(z)|^2 d\lambda$  auf  $\mathcal{H}(\Omega)$ ,  $K_n$  wie in (1.3). Ein Fundamentalsystem solcher *Halbnormen* besitzen alle *nuklearen* Räume (vgl. Satz 11.17).

**Aufgabe 1.2** Eine stetige Halbnorm auf  $\mathcal{C}(\Omega)$  ist durch eine solche der Form  $p_K$ ,  $K \subseteq \Omega$  kompakt (vgl. S. 7), abschätzbar, also keine Norm. Entsprechendes gilt auch für die Räume  $\omega$  und  $\mathcal{E}(\Omega)$ ; diese Räume sind nicht zu  $s$  isomorph.

**Aufgabe 1.3** Man hat  $|x_k| \leq C_r k^{-2/r}$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Die Umkehrung ist nicht allgemein richtig; für monoton fallende Folgen  $x = (x_k)$  in  $[0, \infty)$  gilt jedoch  $k x_k^r \rightarrow 0$  und daher  $x \in s(\mathbb{N})$ .

**Aufgabe 1.4** Für Folgenräume  $E = s, \omega, \ell_p, c_0$  liefert

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots) \mapsto ((x_1, x_3, x_5, \dots), (x_2, x_4, x_6, \dots))$$

eine Isomorphie von  $E$  auf  $E \times E$ . Für Funktionenräume wie  $E = L_p[0, 1] \simeq L_p[a, b]$  ist eine solche gegeben durch

$$L_p[0, 2] \ni f \mapsto (f|_{[0,1]}, f|_{[1,2]}) \in L_p[0, 1] \times L_p[1, 2].$$

Analog folgt auch  $\mathcal{C}[0, 1] \simeq \mathcal{C}[0, 1] \times \mathcal{C}[0, 1]$  wegen  $\mathcal{C}[a, b] \simeq \mathcal{C}[a, b] \times \mathbb{K}$  (vgl. [GK], Aufgabe 4.11); daraus ergibt sich übrigens auch  $\mathcal{C}[0, 1] \simeq \mathcal{C}([0, 1] \cup [2, 3])$ .

**Aufgabe 1.5** b) zeigt man wie Satz 1.8.

c) Für eine Folge  $x = (x^{(j)})$  in  $s(s)$  mit  $x^{(j)} = (x_k^{(j)}) \in s$  liefert Diagonalabzählung eine Folge  $Tx \in s$ , und  $T : s(s) \rightarrow s$  ist ein Isomorphismus.

**Aufgabe 1.6** a) folgt aus (22) und Satz 1.7 (für  $n = 1$ ).

b) Es ist  $T : \mathcal{C}^\infty[-1, 1] \rightarrow \mathcal{E}_{2\pi}^g(\mathbb{R})$  linear und injektiv. Für  $g \in \mathcal{E}_{2\pi}^g(\mathbb{R})$  hat man  $f := g \circ \arccos \in \mathcal{C}[-1, 1] \cap \mathcal{C}^\infty(-1, 1)$ . Es ist  $f' = h \circ \arccos$  mit  $h(t) = -\frac{g'(t)}{\sin t}$ . Da  $g' \in \mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R})$  ungerade ist, gilt  $g'(-\pi) = g'(\pi) = g'(0) = 0$ , und daher ist  $h \in \mathcal{E}_{2\pi}^g(\mathbb{R})$ . Es folgt auch  $f' \in \mathcal{C}[-1, 1] \cap \mathcal{C}^\infty(-1, 1)$  und rekursiv  $f \in \mathcal{C}^\infty[-1, 1]$ . Offenbar ist  $Tf = g$ . Die Stetigkeit von  $T$  und  $T^{-1}$  rechnet man mit Kettenregel nach; eine Richtung folgt auch aus dem Graphensatz.

**Aufgabe 1.7** a) Man die Isomorphismen  $\mathcal{H}(D) \simeq \Lambda_1(j)$  und  $\mathcal{H}(\mathbb{C}) \simeq \Lambda_\infty(j)$  zu Potenzreihenräumen (vgl. S. 249).

b) Es ist  $\omega' \simeq \varphi$  der Raum der endlichen Folgen (vgl. S. 155) und etwa

$$s' \simeq \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \exists j \in \mathbb{N}_0 : \sup_k |x_k| k^{-j} < \infty\}.$$

**Aufgabe 1.8** Dies zeigt man wie in [GK], Satz 3.5.

**Aufgabe 1.9** b) „ $\Rightarrow$ “: Für  $p \in \mathfrak{H}(E)$  gilt  $p(\alpha_n x_n) \leq C_p |\alpha_n| \rightarrow 0$ .

„ $\Leftarrow$ “: Ist  $B$  nicht beschränkt, so gibt es  $p \in \mathfrak{H}(E)$  und  $x_n \in B$  mit  $p(x_n) \geq n^2$ , und es ist  $\frac{1}{n} x_n \not\rightarrow 0$ .

**Aufgabe 1.10** Eine bezüglich  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^m}$  in  $\mathcal{C}^\infty[a, b]$  beschränkte Folge hat nach dem Satz von Arzelà-Ascoli eine bezüglich  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{m-1}}$  konvergente Teilfolge; dann verwendet man eine Diagonalfolge. Der Raum  $\mathcal{C}(a, b)$  ist kein Montelraum.

**Aufgabe 1.11** a) Es sei  $J_n = [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$ . Es ist  $\|\cdot\|_{\sup} = p_1$ , und für  $\psi \in \mathcal{C}_c(J_n)$  gilt  $p_v(\psi) \leq C_v \|\psi\|_{\sup}$  mit  $C_v = \|v\|_{J_n}$ .

b) „ $\Leftarrow$ “: Für  $q \in \mathfrak{H}(F)$  gibt es  $C_n \geq 0$  mit  $q(T\psi) \leq C_n \|\psi\|_{\sup}$  für  $\psi \in \mathcal{C}_c(J_n)$ . Man wählt eine der offenen Überdeckung  $(D_n := \text{int}(J_n) \setminus J_{n-2})$  von  $[a, b]$  untergeordnete stetige Zerlegung der Eins  $\{\alpha_n\}$  (vgl. S. 35) sowie  $v \in \mathcal{C}(a, b)$  mit  $v(x) \geq 2^n C_n$  auf  $D_n$ . Für  $\varphi = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \varphi \in \mathcal{C}_c(a, b)$  folgt dann

$$q(T\varphi) \leq \sum_{n \geq 1} q(T(\alpha_n \varphi)) \leq \sum_{n \geq 1} C_n \|\alpha_n \varphi\|_{\sup} \leq \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \sup_{t \in D_n} |\varphi(t)| v(t) \leq p_v(\varphi).$$

c) „ $\Rightarrow$ “: Andernfalls gibt es o.E.  $a < x_n \uparrow b$  und  $\varphi_n \in B$  mit  $\delta_n := |\varphi_n(x_n)| > 0$ . Für eine Gewichtsfunktion  $v$  mit  $v(x_n) \geq n \delta_n^{-1}$  gilt dann  $p_v(\varphi_n) \geq n$ .

Eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{C}_c(a, b)$  ist beschränkt, liegt also in einer Stufe  $\mathcal{C}_c(J_n)$ . Nach a) ist sie eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{C}_c(J_n)$  und somit konvergent. Nach dem Satz von Baire (vgl. das Beispiel b) auf S. 20) kann  $\mathfrak{T}$  nicht metrisierbar sein; es handelt sich um eine induktive Limes-Topologie, vgl. die Abschnitte 7.3 und 7.4.

**Aufgabe 1.12** a) Es sei  $\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  ein wachsendes Fundamentalsystem von Halbnormen auf  $E$ . Mit  $C_k := \sup \{p_k(x) \mid x \in B_k\}$  und  $\rho_k := C_k^{-1}$  gilt dann  $p_j(\rho_k x) \leq 1$  für  $k \geq j$  und  $x \in B_k$ , und daher ist  $\bigcup_k \rho_k B_k$  beschränkt.

b), c) Nach a) gibt es  $\rho_k > 0$ , sodass die Folge  $(\rho_k x_k)$  beschränkt ist. Man wählt dann  $\alpha_k = \lambda_k = 2^{-k} \rho_k$ .

**Aufgabe 1.13** Für  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(kx_n) = 0$ ; es gibt also Indizes  $n_k > n_{k-1}$  mit  $\phi(kx_n) \leq \frac{1}{k}$  für  $n \geq n_k$ . Die Behauptung folgt nun mit  $\alpha_n := \frac{1}{k}$  und  $y_n := kx_n$  für  $n_k \leq n < n_{k+1}$ .

**Aufgabe 1.14** siehe etwa [Köthe 1966], § 15, 12-14.

**Aufgabe 1.15** a) Wäre  $\beta$  stetig, so wäre  $L_1[0, 1]$  eine Algebra unter punktweiser Multiplikation.

b) Für eine orthonormale Folge gilt  $e_n \xrightarrow{w} 0$ , aber  $\langle e_n | e_n \rangle = 1$ .

**Aufgabe 1.16** Der lineare Operator  $T^{-1}$  hat abgeschlossenen Graphen.

**Aufgabe 1.17** Die getrennte Stetigkeit folgt aus dem Graphensatz, und dann verwendet man Satz 1.15.

**Aufgabe 2.1** Es ist  $S'_\kappa = S_{\kappa^t}$  mit  $\kappa^t(x, y) = \kappa(y, x)$ .

**Aufgabe 2.2** a) Nein, man nehme etwa  $f = 1$  und  $g \in L_1(\mathbb{R})$  mit  $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 0$ .

b) Es ist  $(\chi_\Omega * \varphi)(x) = \int_\Omega \varphi(x - y) dy = 0$  für  $x + U \subseteq \Omega$  oder  $(x + U) \cap \Omega = \emptyset$ .

**Aufgabe 2.3** Man definiert  $p_n(f) := \|f|_{K_n}\|_{L_p}$  mit  $(K_n)$  wie in (1.3).

**Aufgabe 2.5** Wie in Satz 2.8 erhält man  $(\rho_\varepsilon * (f\eta))(x) \geq 0$ . Für eine geeignete Folge  $\varepsilon_j \rightarrow 0$  folgt mit Theorem 2.4  $f(x)\eta(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} (\rho_{\varepsilon_j} * (f\eta))(x) \geq 0$  f.ü., also  $f \geq 0$  f.ü. auf  $K$ .

**Aufgabe 2.6** Für  $K \subseteq \Omega$  kompakt sei  $(\varphi_j)$  eine Folge in  $\mathcal{D}(K, \mathbb{R})$  mit  $\|\varphi_j\|_{\sup} \rightarrow 0$ . Wähle  $0 \leq \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\eta = 1$  auf  $K$ . Aus  $-\|\varphi_j\|_{\sup} \eta \leq \varphi_j \leq \|\varphi_j\|_{\sup} \eta$  folgt auch  $-\|\varphi_j\|_{\sup} u(\eta) \leq u(\varphi_j) \leq \|\varphi_j\|_{\sup} u(\eta)$ , also  $u(\varphi_j) \rightarrow 0$ . Eine Fortsetzung konstruiert man mittels Satz 2.5 wie in Aufgabe 1.8.

**Aufgabe 2.8** Es muss  $a(0) = 1$  und  $a'(0) = \dots = a^{(m)}(0) = 0$  gelten.

**Aufgabe 2.9** Für  $\varphi \in \mathcal{D}[-R, R]$  und  $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi_1(x)$  hat man

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx &= \int_{-R}^R \frac{x \mp i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx \\ &= \mp i\varphi(0) \int_{-R}^R \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} dx \\ &= \mp 2i\varphi(0) \arctan \frac{R}{\varepsilon} + \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} dx \\ &\rightarrow \mp i\pi\varphi(0) + \int_{-R}^R \varphi_1(x) dx \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.10**  $\mathcal{N}$  ist endlichdimensional und somit vollständig wegen Satz 1.3.

**Aufgabe 2.11** a) Für  $\varphi \in \mathcal{D}(I)$  ist  $u'(\varphi) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-a| \geq \varepsilon} u(x) \varphi'(x) dx$ , und man integriert partiell.

b) Man verwende a) und beachte  $\log|x| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \chi_{\{|x| \geq \varepsilon\}} \log|x|$ .

**Aufgabe 2.12** Es sei  $a = 0$ . Wähle  $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$   $\eta_k(x) = 0$  für  $|x| \leq \frac{1}{2k}$ ,  $\eta_k(x) = 1$  für  $|x| \geq \frac{1}{k}$  und  $|\partial_j \eta_k| \leq Ck$  gemäß Satz 2.6. Es gilt  $\int_{B_{1/k}(0)} \partial_j \eta_k \varphi f dx \rightarrow 0$  für  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  aufgrund der Hölderschen Ungleichung, und die Behauptung folgt mit

$k \rightarrow \infty$  aus  $\int_{\Omega} f \partial_j (\eta_k \varphi) dx = - \int_{\Omega} g \eta_k \varphi dx$ . Allgemein benötigt man  $n \geq m + 1$  und  $p \geq \frac{n}{n-m}$ .

**Aufgabe 2.14** O.E. sei  $\varphi = 0$  und  $u = 0$ . Für  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$  gilt  $\varphi_k \psi \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(K)$  mit  $K := \text{supp } \psi$ , und der Satz von Banach-Steinhaus liefert  $(\varphi_k u_k)(\psi) = u_k(\varphi_k \psi) \rightarrow 0$ .

**Aufgabe 2.15** Für  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit  $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$  setze  $I\psi(x) := \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$ ; dann ist  $I\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  und  $(I\psi)' = \psi$ . Es folgt  $R(\frac{d}{dx}) = \mathcal{D}_0 := \{\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0\}$ .

**Aufgabe 2.16** Es sei  $k = 1$ . Zu  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  definiert man  $w \in \mathcal{D}'_0$  durch  $w(\psi) := -u(I\psi)$ . Für eine Fortsetzung  $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  von  $w$  gilt dann  $v' = u$ . Weiter ist  $N(\frac{d^k}{dx^k})$  der Raum der Polynome vom Grad  $\leq k - 1$ ; vgl. dazu Satz 5.12.

**Aufgabe 2.18** a) Für  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit  $\psi(0) = 0$  liegt  $Q\psi(x) := \frac{\psi(x)}{x}$  mit  $Q\psi(0) := \psi'(0)$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Es sei  $\mathcal{N}_0 := \{\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \psi(0) = 0\}$ . Zu  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  definiert man  $w \in \mathcal{N}'_0$  durch  $w(\psi) := u(Q\psi)$ . Für eine Fortsetzung  $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  von  $w$  gilt dann  $x \cdot v = u$ .

b) Es gibt offene Mengen  $\omega_j$  mit  $I = \bigcup_j \omega_j$  sowie  $x_j \in \omega_j$  mit  $f(x) = (x - x_j)^{m_j} f_j(x)$  und  $f_j(x) \neq 0$  auf  $\omega_j$ . Nach a) gibt es  $v_j \in \mathcal{D}'(\omega_j)$  mit  $(x - x_j)^{m_j} v_j = f_j^{-1} u$  auf  $\omega_j$ , und es gilt  $v_j = v_k = f^{-1} u$  auf  $\omega_j \cap \omega_k$ . Nun verwendet man Satz 2.10.

**Aufgabe 2.19** b) Wähle  $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit  $\varphi_n(x) = 0$  für  $x < \frac{2}{3}2^{-n}$  und  $\varphi_n(x) = 1$  für  $x > \frac{3}{4}2^{-n}$ ; dann ist  $u(\varphi_n) = n$ , aber  $\|\varphi_n\|_{\text{supp } u} = 1$  und  $\|\varphi_n^{(j)}\|_{\text{supp } u} = 0$  für  $j \geq 1$ .

**Aufgabe 2.20** a) Es sei  $K := \text{supp } u$ . Gemäß Satz 2.6 wählen wir  $\chi_{\varepsilon} \in \mathcal{D}(K_{3\varepsilon})$  mit  $\chi_{\varepsilon} = 1$  auf  $K_{\varepsilon}$  und  $\sup_{\Omega} |D^{\gamma} \chi_{\varepsilon}(x)| = O(\varepsilon^{-|\gamma|})$ ; dann ist  $\varphi(1 - \chi_{\varepsilon}) = 0$  nahe  $K$ , also  $u(\varphi) = u(\chi_{\varepsilon} \varphi)$  und

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^{\alpha}(\chi_{\varepsilon} \varphi)(x)|.$$

Aus der Voraussetzung erhalten wir  $\sup_{K_{3\varepsilon}} |D^{\alpha} \varphi(x)| = O(\varepsilon^{k+1-|\alpha|})$ , also  $|u(\varphi)| = O(\varepsilon)$  und  $u(\varphi) = 0$ .

b) Für  $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  ist  $\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^{\alpha} \varphi(0)}{\alpha!} x^{\alpha} + \psi(x)$  mit  $u(\psi) = 0$  aufgrund von a). Es folgt  $u(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^{\alpha} \varphi(0)}{\alpha!} u(x^{\alpha}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{(-1)^{|\alpha|} u(x^{\alpha})}{\alpha!} \partial^{\alpha} \delta(\varphi)$ .

**Aufgabe 2.21** Es ist  $\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}$  und  $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ .

**Aufgabe 2.23** a) Es ist  $\delta' * H = \delta * H' = \delta * \delta = \delta$  und  $1 * \delta' = 1' * \delta = 0$ .

**Aufgabe 2.24** Die Streifenbedingung (37) ist erfüllt.

**Aufgabe 2.25** b) Die Abbildung  $h \mapsto \tau_h$  ist stetig von  $\mathbb{R}^n$  nach  $L_{\sigma}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n))$ : Für  $\varphi \in \mathcal{D}(K)$  gilt  $\tau_h \varphi \in \mathcal{D}(K_1)$  für  $|h| \leq 1$ , und man hat  $\partial^{\alpha}(\varphi(x) - \varphi(x - h)) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$  gleichmäßig auf  $\mathbb{R}^n$  für alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ .

d) Beachten Sie Lemma 2.15.

**Aufgabe 2.26** a) Die Stetigkeit folgt aus der Folgerung zu Satz 2.19 und dem Graphensatz, die Translationsinvarianz aus Satz 2.20.

b) Man setzt  $u(\varphi) := (U\check{\varphi})(0)$ . Wegen (42) ist  $(u * \varphi)(0) = u(\check{\varphi}) = (U\varphi)(0)$ , und  $u * \varphi = U\varphi$  ergibt sich aus der Translationsinvarianz. Die Eindeutigkeit folgt aus (42).

c) Wird auf b) zurückgeführt: Für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  sei  $g(x) := (\tau_{-x}U\tau_x\varphi)(0) = (U\tau_x\varphi)(x)$  für  $x \in \mathbb{R}^n$ . Die Voraussetzung liefert  $\text{grad } g = 0$ , also  $g(x) = g(0)$  und die Translationsinvarianz von  $U$ .

**Aufgabe 3.1** Man beachte  $\int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{-\gamma} dx < \infty$  für  $\gamma > n$ .

**Aufgabe 3.2** Wegen  $\partial_j |x|^2 = 2x_j$  ist  $\partial^\alpha (\langle x \rangle^s \psi(x))$  eine endliche Summe von Termen  $h(x) \langle x \rangle^r$  mit  $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Aufgabe 3.3** Wähle  $0 \neq \varphi \in \mathcal{D}[0, 1]$  und setze  $\varphi_n(x) = 2^{-n} \varphi(x - n)$ .

**Aufgabe 3.4** b) Es sei  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\psi(y) = 0$ . Nach a) verschwindet auch  $T\psi(x) = \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) T\psi_j(x)$  in  $y$ , und daher gilt  $T\varphi(y) = c(y)\varphi(y)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $y \in \mathbb{R}^n$  mit einer  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktion  $c$ . Wegen  $(D_j c)\varphi = D_j T\varphi - T D_j \varphi = 0$  ist  $c$  konstant.

**Aufgabe 3.5** Es ist  $\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\sin \xi}{\xi})^3 d\xi = \frac{3}{4}\pi$  und  $\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\sin \xi}{\xi})^6 d\xi = \frac{11}{20}\pi$ .

**Aufgabe 3.6** Es ist  $\int_0^\infty \frac{\sin y\xi}{\xi} d\xi = \frac{\pi}{2}$ , und wegen  $\int_0^\infty \frac{\sin y\xi}{\xi} (f(\xi) - f(0^+)) d\xi \rightarrow 0$  ist  $\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\sin y\xi}{\xi} f(\xi) d\xi = \frac{\pi}{2} f(0^+)$ . In der Tat hat man  $\int_0^1 \sin y\xi \frac{f(\xi) - f(0^+)}{\xi} d\xi \rightarrow 0$  und  $\int_1^\infty \sin y\xi \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi \rightarrow 0$  nach Satz 3.4, und es gilt auch  $\int_1^\infty \frac{\sin y\xi}{\xi} d\xi = \int_y^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi \rightarrow 0$ .

**Aufgabe 3.7** Für festes  $x \in \mathbb{R}$  hat man  $f(x) = \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$ . Nun entwickelt man beide Funktionen nach der ONB  $\{\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{ikL\xi}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  von  $L_2[-\pi/L, \pi/L]$  und verwendet die Parsevalsche Gleichung.

**Aufgabe 3.8** a) folgt aus der Definition  $(x - \frac{d}{dx})^k \exp(-\frac{x^2}{2}) = H_k(x) \exp(-\frac{x^2}{2})$ .

b) Addition von (31) und (32) liefert  $2x h_k = (V + R)h_k = \sqrt{2(k+1)} h_{k+1} + \sqrt{2k} h_{k-1}$  und somit  $2x H_k = H_{k+1} + 2k H_{k-1}$ .

c) Mit b) folgt  $H_k'' = 2k H_{k-1}' = \frac{d}{dx}(2x H_k - H_{k+1}) = 2H_k + 2x H_k' - 2(k+1)H_k$ , also  $(\frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2k) H_k(x) = 0$ .

**Aufgabe 3.9** a) Für  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  gilt  $(\frac{1}{f} \frac{d}{dx} f)(\varphi) = \frac{1}{f} \frac{d}{dx} (f\varphi) = \varphi' + \frac{f'}{f} \varphi$ , und man hat  $(\frac{1}{f} \frac{d}{dx} f)^k = \frac{1}{f} \frac{d}{dx} f \frac{1}{f} \frac{d}{dx} f \cdots \frac{1}{f} \frac{d}{dx} f = \frac{1}{f} \frac{d^k}{dx^k} f$ .

b) Es ist  $(-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} = (-1)^k [e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2}]^k = (-1)^k [e^{x^2/2} e^{x^2/2} \frac{d}{dx} e^{-x^2/2} e^{-x^2/2}]^k = (-1)^k [e^{x^2/2} (\frac{d}{dx} - x) e^{-x^2/2}]^k = e^{x^2/2} (x - \frac{d}{dx})^k e^{-x^2/2} = H_k(x)$ .

**Aufgabe 3.10** Klar ist  $g := Tf \in \mathcal{C}^\infty(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Induktiv folgt

$$g^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\tan \xi) \cos^{-2k} \xi + \sum_{j=1}^{k-1} h_{k,j}(\xi) f^{(j)}(\tan \xi) \cos^{-2j-1} \xi$$

mit Funktionen  $h_{k,j} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ . Wegen  $|\tan^\ell(\xi) f^{(k)}(\tan \xi)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\ell f^{(k)}(x)|$  ergibt sich  $|f^{(k)}(\tan \xi)| \leq C_{k,\ell} |\xi \pm \frac{\pi}{2}|^\ell$  für  $\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  und  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ . Dies zeigt  $g \in \mathcal{D}[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  und die Stetigkeit von  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Analog erhält man die Umkehrabbildung durch  $T^{-1}g = g \circ \arctan$ , und deren Stetigkeit folgt aus dem Graphensatz.

**Aufgabe 3.11** Es ist  $\mathcal{F}(e^{iax}) = \sqrt{2\pi} \delta_a$ .

**Aufgabe 3.12** a) Es ist  $f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , aber  $g(x) = e^x \cos(e^x) = \frac{d}{dx} \sin e^x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

b) Dies ist genau dann der Fall, wenn es  $m \geq 0$  und  $C \geq 0$  mit  $|a_k| \leq Ck^m$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gibt.

**Aufgabe 3.13** Es gibt  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $|u(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_k$  für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit der in (9) erklärten Norm.

**Aufgabe 3.14** Man argumentiert ähnlich wie in Abschnitt 2.5, vgl. etwa [Rudin 1973], Theorem 7.19.

**Aufgabe 3.15** a) Aus der Abschätzung folgt leicht  $\varphi \cdot \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$ .

b) Aus  $\varphi \cdot \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$  folgt  $|\varphi(x)| \leq C \langle x \rangle^k$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ . Andernfalls gibt es eine Folge  $(x_k)$  mit  $|x_k| \geq |x_{k-1}| + 2$  und  $|\varphi(x_k)| \geq \langle x_k \rangle^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann ist  $\psi(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \rho_1(x - x_k) \langle x_k \rangle^{-k} \in \mathcal{S}$ , aber  $|\varphi(x_k) \psi(x_k)| \geq \rho(0) > 0$ .

Wegen  $\partial_j \varphi \cdot \psi = \partial_j(\varphi \psi) - \varphi \partial_j \psi$  gilt auch  $\partial^\alpha \varphi \cdot \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$  für alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ , und damit folgt die behauptete Abschätzung.

c) Ist  $\varphi \cdot \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$ , so ist der Multiplikationsoperator  $M_\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  stetig aufgrund des Graphensatzes. Für  $u \in \mathcal{S}'$  ist dann  $\varphi u : \psi \mapsto u(M_\varphi \psi)$  stetig auf  $\mathcal{S}$ , also  $\varphi u \in \mathcal{S}'$ .

d) Nun gelte  $\varphi \cdot \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}'$ . Da  $M_\varphi : \mathcal{S}'_\sigma \rightarrow \mathcal{S}'_\sigma$  stetig ist, folgt  $\varphi \cdot \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$  wie in c) wegen  $(\mathcal{S}'_\sigma)' \simeq \mathcal{S}$  (vgl. Satz 8.2).

**Aufgabe 3.16** a) Für  $\xi \neq 0$  gibt es  $x_0 \in K$  mit  $H_K(\xi) = \langle x_0 | \xi \rangle$ . Damit folgt sofort  $H_K(\xi) + \varepsilon |\xi| = \langle x_0 + \varepsilon \frac{\xi}{|\xi|} | \xi \rangle \leq H_{K_\varepsilon}(\xi)$ . Die umgekehrte Ungleichung ist klar.

b) Für die Einheitskugel von  $\mathbb{R}^n$  gilt  $H_B = p_B$ .

**Aufgabe 3.17** Die erste Aussage ergibt sich sofort aus  $|e^{-ix\zeta}| = e^{x \operatorname{Im} \zeta} \leq e^{A|\operatorname{Im} \zeta|}$ . Die Umkehrung folgt ähnlich wie in Theorem 3.9: Mit der Fourier-Transformation auf  $L_2(\mathbb{R})$  setzt man  $f := \mathcal{F}^{-1}(F|_{\mathbb{R}})$  und zeigt  $\operatorname{supp} f \subseteq [-A, A]$ .

**Aufgabe 3.18** a) Für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ist  $(u * v)(\varphi) = u * (v * \check{\varphi})(0) = \check{u}(v * \check{\varphi})$ ; wegen  $\check{u} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  gilt also  $|(u * v)(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |D^\alpha(v * \check{\varphi})| = C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |D^\alpha v * \check{\varphi}|$

für ein  $k \in \mathbb{N}_0$  und eine kompakte Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ . Wegen  $D^\alpha v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  gilt für  $\varphi_j \rightarrow 0$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  auch  $D^\alpha v * \varphi_j(x) = (D^\alpha v)_y(\varphi_j(x-y)) \rightarrow 0$  lokal gleichmäßig in  $x$ , also  $(u * v)(\varphi_j) \rightarrow 0$ . Somit ist  $u * v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

b) ① Zunächst sei  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Für  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\hat{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gilt  $\mathcal{F}(u * v)(\psi) = (u * v)(\hat{\psi}) = v(\check{u} * \hat{\psi}) = (2\pi)^{n/2} \hat{v}(\hat{u}\psi) = (2\pi)^{n/2} \hat{u}\hat{v}(\psi)$  wegen  $\mathcal{F}(\hat{u}\psi) = (2\pi)^{-n/2} \check{u} * \hat{\psi}$  nach (17).

② Nun sei  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ . Für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gilt dann  $\varphi * (u * v) = (\varphi * u) * v$  und daher  $\hat{\varphi} \cdot \mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(\varphi * u) \cdot \hat{v} = (2\pi)^{n/2} \hat{\varphi} \cdot \hat{u} \cdot \hat{v}$  nach ①.

**Aufgabe 3.19** a) Es ist  $0 = \mathcal{F}(\Delta u)(\xi) = |\xi|^2 \hat{u}(\xi)$ , also  $\text{supp } \hat{u} = 0$ . Nach dem Beispiel auf S. 73 folgt  $\hat{u} = P(D)\delta = (2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}(-P)$  für ein Polynom  $P$ .

b) Nach a) ist  $u$  ein Polynom, also konstant.

**Aufgabe 3.20** Die Voraussetzung lautet  $|f(z)| \leq C \langle z \rangle^k e^{A|\text{Im } z|}$ . Man hat offenbar  $|g_s(\lambda)| \leq C$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und berechnet  $|g_s(Re^{it})| \leq C$  für  $t \in [0, \pi]$  und große  $R > 0$ . Für  $\lambda = i$  ist  $|f(x+iy)| e^{-A|y|} \leq |g_s(i)| (1+s)^{k+1}$ , und  $s \rightarrow 0$  liefert die Behauptung  $|f(z)| \leq C e^{A|\text{Im } z|}$ .

**Aufgabe 3.21** a) Nach (47) gilt  $\mathcal{F}(v_t)(\xi) = (2\pi)^{-3/2} v_t^x(e^{-i\langle x|\xi\rangle}) = \int_{|x|=t} e^{-i\langle x|\xi\rangle} d\sigma(x) = \int_{|x|=t} e^{-i|x||\xi|\cos\alpha} d\sigma(x)$  mit  $\alpha = \angle(x, \xi)$ . Dies hängt nur von  $|\xi|$  ab. Für  $\xi = |\xi|e_3$  ist  $\alpha = \vartheta \in [0, \pi]$  der Breitengrad-Winkel der Kugelkoordinaten, und es folgt  $\mathcal{F}(v_t)(\xi) = (2\pi)^{-3/2} 2\pi t^2 \int_0^\pi e^{-it|\xi|\cos\vartheta} \sin\vartheta d\vartheta = (2\pi)^{-1/2} t^2 \int_{-1}^1 e^{-it|\xi|s} ds = (2\pi)^{-3/2} 4\pi t \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}$ .

b) Es ist  $\widehat{u_t}(\xi) = \xi_1 \hat{v}_t(\xi)$ .

**Aufgabe 3.22** a) Man verwendet die Cauchy-Formel für die Taylor-Koeffizienten.

b) Aus  $|f(z)| \leq C \langle z \rangle^k e^{\varepsilon|\text{Im } z|}$  folgt  $f = \hat{u}$  für  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp } u \subseteq \overline{U_\varepsilon}(0)$  nach Theorem 3.10. Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt  $\text{supp } u = \{0\}$  und  $u = P(D)\delta$  nach Aufgabe 2.20 oder dem a) verwendenden Argument auf S. 73.

**Aufgabe 4.1** a) Wegen  $f^{(k)}(x) = \frac{Q_k(x)}{(1+x^2)^{k+1}}$  mit Polynomen  $Q_k$  vom Grad  $\leq k+1$  gilt  $f \in W^k(\mathbb{R})$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ . Natürlich ist  $f \notin \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ .

b) Mit (3.8) oder Satz 4.7 gilt  $\chi_{(-1,1)} \in H^s(\mathbb{R}) \Leftrightarrow s < \frac{1}{2}$ . Wegen  $\xi \widehat{H}(\xi) = (2\pi)^{-1/2}$  und  $\hat{1} = \sqrt{2\pi} \cdot \delta$  gilt  $H, 1 \notin H^s(\mathbb{R})$  für alle  $s \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 4.2** Es ist  $|\text{grad } f(x)| = \frac{1}{|x| |\log|x||}$ .

**Aufgabe 4.3** Es seien  $f \in \overline{\mathcal{C}}^{0,1}(\Omega)$  mit  $\|f\|_{\overline{\mathcal{C}}^{0,1}} \leq 1$ ,  $\omega \subseteq \Omega$  relativ kompakt und  $h \neq 0$  so klein, dass  $\Delta_j^h f(x) := \frac{1}{h}(f(x+he_j) - f(x))$  auf  $\omega$  definiert ist. Es gibt eine Folge  $h_k \rightarrow 0$  mit  $\Delta_j^{h_k} f \xrightarrow{w^*} g$  in  $L_\infty(\omega)$ . Es folgen  $\|g\|_{L_\infty} \leq 1$  und  $\partial_j f = g$  auf  $\omega$ , also  $\partial_j f \in L_\infty(\Omega)$  und  $\|g\|_{L_\infty(\Omega)} \leq 1$ .

**Aufgabe 4.4** a) Es ist  $g' \circ f \in L_\infty(\Omega)$  und  $f' \in L_p(\Omega)$ , also  $(g' \circ f) \circ f' \in L_p(\Omega)$ .

Wegen  $|g(u)| \leq |g(0)| + C|u|$  folgt auch  $g \circ f \in L_p(\Omega)$ . Die Kettenregel ergibt sich durch Approximation von  $f$  mittels Satz 4.2.

**Aufgabe 4.5** Für  $0 < s < 1$  gilt  $W_p^s(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega)$ , und daher hat eine Cauchy-Folge eine fast überall konvergente Teilfolge. Deren Limes ist auch ihr Grenzwert in  $W_p^s(\Omega)$  aufgrund des Lemmas von Fatou.

**Aufgabe 4.6** Beachten Sie Formel (3.16).

**Aufgabe 4.7** b) Wegen Satz 4.1 können wir o.E.  $0 < s < 1$  annehmen.

$$\|\tau_h * f - f\|_{W_p^s}^p = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(f(x-h)-f(x)-f(y-h)+f(y))|^p}{|x-y|^{n+ps}} dx dy \rightarrow 0$$

für  $h \rightarrow 0$  aufgrund von Satz 4.3 in  $L_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ .

a) Es ist  $(\rho_\varepsilon * f - f)(x) = \int_{|z| \leq \varepsilon} \rho_\varepsilon(z)(f(x-z) - f(x)) dz$ . Nach der Hölderschen Ungleichung ist  $|\int \rho_\varepsilon(z)u(z) dz|^p \leq \int \rho_\varepsilon(z)|u(z)|^p dz$ , und damit folgt

$$\begin{aligned} \|\rho_\varepsilon * f - f\|_{W_p^s}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\int_{|z| \leq \varepsilon} \rho_\varepsilon(z)(f(x-z) - f(x) - f(y-z) + f(y)) dz|^p}{|x-y|^{n+ps}} dx dy \\ &\leq \int_{|z| \leq \varepsilon} \rho_\varepsilon(z) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(f(x-z) - f(x) - f(y-z) + f(y))|^p}{|x-y|^{n+ps}} dx dy dz \\ &\leq \sup_{|z| \leq \varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(f(x-z) - f(x) - f(y-z) + f(y))|^p}{|x-y|^{n+ps}} dx dy dz \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $\varepsilon \rightarrow 0$  aufgrund von b) bzw. Satz 4.3.

**Aufgabe 4.8** a) Wegen Satz S. 78 können wir wieder  $0 < s < 1$  annehmen. Es ist

$$\begin{aligned} \|gf\|_{W_p^s}^p &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|g(x)f(x) - g(y)f(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dx dy \\ &\leq \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|g(x) - g(y)|^p |f(x)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dx dy + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|g(y)|^p |f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dx dy. \end{aligned}$$

Das zweite Integral ist  $\leq \|g\|_{\sup}^p \|f\|_{W_p^s}^p$ ; das erste zerlegen wir:

$$\begin{aligned} \int_{|x-y| < 1} \frac{|g(x) - g(y)|^p |f(x)|^p}{|x-y|^{n+ps}} d(x, y) &\leq [g]_1^p \int_{|z| < 1} \frac{1}{|z|^{n+p(s-1)}} \int_{\Omega} |f(y+z)|^p dy dz \\ &\leq C_1(n, p, s) [g]_1^p \|f\|_{L_p}^p, \\ \int_{|x-y| \geq 1} \frac{|g(x) - g(y)|^p |f(x)|^p}{|x-y|^{n+ps}} d(x, y) &\leq 2^p \|g\|_{\sup}^p \int_{|z| \geq 1} \frac{1}{|z|^{n+ps}} \int_{\Omega} |f(y+z)|^p dy dz \\ &\leq C_2(n, p, s) \|g\|_{\sup}^p \|f\|_{L_p}^p. \end{aligned}$$

b) Im Fall  $0 < s < 1$  gilt aufgrund von a)

$$\|f - f_j\|_{W_p^s} = \|(1 - \eta(\frac{x}{j}))f\|_{W_p^s(\Omega \setminus \overline{U}_j(0))} \leq C \|f\|_{W_p^s(\Omega \setminus \overline{U}_j(0))} \rightarrow 0.$$

**Aufgabe 4.9** a), b) Mittels der Aufgaben 4.7 und 4.8 ergibt sich dies wie in den Sätzen 4.2 und 4.4.

b) z.B.  $\Omega = \mathbb{C} \setminus (\{e^{i-1}t \mid t \geq 0\} \cup \{0\})$ .



**Aufgabe 4.10** Für  $p = \frac{1}{a}$ ,  $q = \frac{1}{b}$  und  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$  gilt  $(\langle \xi \rangle^{2r} |\widehat{u}(\xi)|^2)^a \in L_p(\mathbb{R}^n)$  und  $(\langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2)^b \in L_q(\mathbb{R}^n)$ , und wegen  $t = ra + sb$  folgt die Behauptung aus der Hölderschen Ungleichung.

**Aufgabe 4.11** In Satz 4.9 integriere man die  $g_\alpha$  analog zu Formel (8).

**Aufgabe 4.12** Für  $u = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f_\alpha$  und  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  gilt

$$|u(\varphi)| = \left| \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega f_\alpha (-D)^\alpha \varphi dx \right| \leq \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|f_\alpha\|_{L_q} \right)^{1/q} \|\varphi\|_{W_p^k}.$$

Durch  $g \mapsto ((-D)^\alpha g)_{|\alpha| \leq k}$  wird eine Isometrie von  $W_{p,0}^k(\Omega)$  in  $\prod_{|\alpha| \leq k} L_p(\Omega)$  definiert, und  $u \in W_{p,0}^k(\Omega)'$  lässt sich nach Hahn-Banach zu  $u \in (\prod_{|\alpha| \leq k} L_p(\Omega))' \cong \prod_{|\alpha| \leq k} L_q(\Omega)$  fortsetzen.

**Aufgabe 4.13** Nein.

**Aufgabe 4.14** b) Für  $u \in H^{s,\text{loc}}(\Omega)$  und  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  wählt man  $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$  mit  $\eta\varphi = \varphi$ ; dann ist  $\eta u \in H^s(\mathbb{R}^n)$  und  $\|u - \eta u\|_\varphi = 0$ .

c)  $H^{s,\text{loc}}(\Omega) \simeq H_c^{-s}(\Omega) = H^{-s}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(\Omega)$ .

**Aufgabe 4.15** a) Für  $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$  hat man

$$\begin{aligned} Tf &= \lambda^t \mathcal{F}(\psi \cdot \mathcal{F}^{-1}(\lambda^{-s} f)) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \lambda^t (\widehat{\psi} * (\lambda^{-s} f)), \quad \text{also} \\ Tf(x) &= \langle x \rangle^t \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(x-y) \langle y \rangle^{-s} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y) f(y) dy \quad \text{mit} \\ k(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^t \langle y \rangle^{-s} e^{-i\langle x-y, z \rangle} \psi(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^t \langle y \rangle^{-s} \langle y-x \rangle^{-2r} e^{i\langle y-x, z \rangle} (1-\Delta)^\rho \psi(z) dz \end{aligned}$$

aufgrund partieller Integration für alle  $\rho \in \mathbb{N}$ . Mit Lemma 4.12 folgt

$$|k(x,y)| \leq C(r,\psi) \langle y-x \rangle^{|s|-2\rho} \langle x \rangle^{t-s},$$

und für genügend große  $\rho$  ergibt sich  $k \in L_2(\mathbb{R}^{2n})$  wegen  $t-s < -\frac{n}{2}$ .

b) folgt aus a) wie in Satz 4.14.

**Aufgabe 4.16** c) vgl. Aufgabe 4.15 b) und Satz 11.4.

**Aufgabe 4.17** Man berechnet  $E_0\varphi(x) = \varphi(-x)$ ,  $E_1\varphi(x) = 3\varphi(-x) - 2\varphi(-2x)$  und  $E_2\varphi(x) = 6\varphi(-x) - 8\varphi(-2x) + 3\varphi(-3x)$ .

**Aufgabe 5.1** Nach (4) ist  $S(\widehat{t})f(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{-\alpha t|\xi|^2}$  und  $\frac{\partial}{\partial t} S(\widehat{t})f(\xi) = -\alpha|\xi|^2 \widehat{f}(\xi)e^{-\alpha t|\xi|^2}$ . Man verwende den Satz über majorisierte Konvergenz.

**Aufgabe 5.2** Für  $g^t := \mathcal{F}G^t$  gilt  $\mathcal{F}g^t = G^t$  nach (7). Mit (3.6) und (3.5) folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} g^t(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\tau_{-x} f}(\xi) g^t(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \tau_{-x} f(\xi) \widehat{g^t}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+\xi) G^t(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\xi) G^t(\xi) d\xi = (f * G^t)(x). \end{aligned}$$

Nun verwendet man Satz 5.1 a) und Theorem 2.4 b).

**Aufgabe 5.3**  $u(x, t) = (E_{WL} * g)(x, t) + S(t)f(x)$ .

**Aufgabe 5.4** a) Für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  gilt  $E'(\varphi) = -E(\varphi') = -\int_0^\infty e^{Ax} \varphi'(x) dx = \varphi(0) + \int_0^\infty A e^{Ax} \varphi(x) dx$ .

b) Für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  gilt  $P(\frac{d}{dx})(Hg)(\varphi) = Hg(P(-\frac{d}{dx})\varphi) = \int_0^\infty g(x) P(-\frac{d}{dx})\varphi(x) dx = \varphi(0)$  aufgrund partieller Integration.

**Aufgabe 5.5** Nach Aufgabe 2.18 gibt es  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  mit  $P(\xi) \cdot u = (2\pi)^{-n/2}$ . Es sei  $|P(\xi)| \geq 1$  für  $|\xi| \geq A$ , und wir wählen  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit  $\eta(\xi) = 1$  für  $|\xi| \leq A$ . Dann gilt  $\eta u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$  und  $(1 - \eta)u \in L_\infty(\mathbb{R})$ , also  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Für  $E := \mathcal{F}^{-1}u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  gilt dann  $P(-i\frac{d}{dx})E = \delta$ .

**Aufgabe 5.6**  $H(x) \otimes \delta_y$  und  $\delta_x \otimes H(y)$ .

**Aufgabe 5.7** Für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  gilt

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 E_W - c^2 \partial_x^2 E_W)(\varphi) &= E_W(\partial_t^2 \varphi - c^2 \partial_x^2 \varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} E_W(\partial_t^2 \varphi - c^2 \partial_x^2 \varphi) d^2(x, t) \\ &= \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^\infty \int_{|x|/c}^\infty \partial_t^2 \varphi(x, t) dt dx - \frac{c}{2} \int_0^\infty \int_{-ct}^{ct} \partial_x^2 \varphi(x, t) dx dt \\ &= -\frac{1}{2c} \int_{-\infty}^\infty \partial_t \varphi(x, \frac{|x|}{c}) dx - \frac{c}{2} \int_0^\infty (\partial_x \varphi(ct, t) - \partial_x \varphi(-ct, t)) dt \\ &= -\frac{1}{2} (\int_0^\infty \frac{1}{c} \partial_t \varphi(x, \frac{x}{c}) dx + \int_0^\infty c \partial_x \varphi(ct, t) dt) \\ &\quad -\frac{1}{2} (\int_0^\infty \frac{1}{c} \partial_t \varphi(-x, \frac{x}{c}) dx - \int_0^\infty c \partial_x \varphi(-ct, t) dt) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty (\partial_t \varphi(cu, u) + c \partial_x \varphi(cu, u)) du \\ &\quad -\frac{1}{2} \int_0^\infty (\partial_t \varphi(-cu, u) - c \partial_x \varphi(-cu, u)) du \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d}{du} \varphi(cu, u) du - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d}{du} \varphi(-cu, u) du \\ &= \frac{1}{2} \varphi(0, 0) + \frac{1}{2} \varphi(0, 0) = \varphi(0, 0). \end{aligned}$$

**Aufgabe 5.8** Es ist  $R\varphi(\xi, \tau) := \int_0^\xi \int_0^\tau \varphi(x, t) dt dx$  eine stetige lineare Rechtsinverse zu  $\partial_\xi \partial_\tau : \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ .

**Aufgabe 5.9** Für  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  ist  $E(\psi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty v_t(\psi^t) \frac{dt}{t}$ , und Aufgabe 3.21 liefert  $E(\mathcal{F}_x \psi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty v_t(\mathcal{F}_x \psi^t) \frac{dt}{t} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \mathcal{F}_x v_t(\psi^t) \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} \psi(\xi, t) d\xi dt$ . Es folgt

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta)E(\mathcal{F}_x \psi) &= E((\partial_t^2 - \Delta)\mathcal{F}_x \psi) = E(\mathcal{F}_x(\partial_t^2 + |\xi|^2 \psi)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^\infty \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} (\partial_t^2 \psi(\xi, t) + |\xi|^2 \psi(\xi, t)) dt d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^\infty (|\xi| \sin t|\xi| \cdot \psi(\xi, t) - \cos t|\xi| \cdot \partial_t \psi(\xi, t)) dt d\xi \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} \int_0^\infty \partial_t (\cos t|\xi| \cdot \psi(\xi, t)) dt d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\xi, 0) d\xi = \mathcal{F}_x \psi(0, 0) = \delta(\mathcal{F}_x \psi). \end{aligned}$$

**Aufgabe 5.10** Es ist  $E(x, t) = H(t) \exp(-i(n-2)\frac{\pi}{4}) (4\pi t)^{-n/2} \exp(-\frac{|x|^2}{4it})$  eine Fundamentallösung in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Diese ist singular auf der Hyperebene  $\{(x, t) \mid t = 0\}$ ; der Schrödinger-Operator ist also nicht hypoelliptisch.

**Aufgabe 5.11** Aus  $P(D)v = 0$  folgt  $P(\xi)\hat{v}(\xi) = 0$ , also  $v = 0$ , da  $\hat{v}$  analytisch ist.

**Aufgabe 5.13** Nein: Für einen Weg  $\gamma(t) = \alpha(t)\xi + i\beta(t)\eta$  von  $P$  nach  $Q$  in  $\Pi_2^1$  gibt es  $\tau \in \mathbb{R}$  mit  $\beta(\tau) = 0$ .

**Aufgabe 5.14** Für  $\deg P = m$  gilt  $P(\xi) \sim \langle \xi \rangle^m$ .

**Aufgabe 5.15** Für  $u \in \mathcal{C}_c(\Omega)$  und kleine  $\varepsilon > 0$  gilt  $\rho_\varepsilon * u, \rho_\varepsilon * f \in \mathcal{D}(\Omega)$ , und für  $x \in \Omega$  gilt im klassischen Sinn

$$\begin{aligned}\partial_j(\rho_\varepsilon * u)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \partial_j^x \rho_\varepsilon(x-y) dy = - \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \partial_j^y \rho_\varepsilon(x-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \rho_\varepsilon(x-y) dy = (\rho_\varepsilon * f)(x).\end{aligned}$$

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt die Behauptung aus Theorem 2.4.

**Aufgabe 5.17** Den Gevrey-Fall zeigt man wie in Satz 5.14, den reell-analytischen ebenso unter Verwendung des Satzes von Cauchy-Kovalevskaja, vgl. [Treves 1975], section 3.

**Aufgabe 5.18** a) Es genügt,  $\|\varphi\|_{L_2}^2 \leq \frac{d}{2} \|\partial_j \varphi\|_{L_2}^2$  für  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  zu zeigen. Für  $j = n$  und  $a_n := \inf \{x_n \in \mathbb{R} \mid \varphi(x', x_n) \neq 0\}$  hat man  $\varphi(x', x_n) = 0$  für  $x_n < a_n$  und  $x_n > a_n + d$ ; für  $a_n \leq x_n \leq a_n + d$  gilt

$$\begin{aligned}\varphi(x', x_n) &= \int_{a_n}^{x_n} \partial_n \varphi(x', t) dt, \quad \text{also} \\ |\varphi(x', x_n)|^2 &\leq (x_n - a_n) \int_{a_n}^{a_n+d} |\partial_n \varphi(x', t)|^2 dt;\end{aligned}$$

Integration über  $x_n$  und dann über  $x'$  liefert daher

$$\begin{aligned}\int_{a_n}^{a_n+d} |\varphi(x', x_n)|^2 dx_n &\leq \frac{d^2}{2} \int_{a_n}^{a_n+d} |\partial_n \varphi(x', t)|^2 dt, \\ \int_\Omega |\varphi(x)|^2 dx &\leq \frac{d^2}{2} \int_\Omega |\partial_n \varphi(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

b) Nach Satz 5.21 und a) gilt  $\langle Au|u \rangle_{L_2} = D_A(u) \geq \frac{2n}{d^2} \|u\|_{L_2}^2$  für  $u \in W_0^1(\Omega)$ .

**Aufgabe 5.19** a) Für  $u \in W_0^1(\Omega)$  ist  $D(\psi_j, u) = \lambda_j^{1/2} \langle \phi_j, u \rangle_{L_2}$  nach (58). Gilt umgekehrt  $\sum_{j=0}^\infty \lambda_j |\langle u, \phi_j \rangle_{L_2}|^2 < \infty$ , so konvergiert die Entwicklung (57) in  $W_0^1(\Omega)$ .

b) Es ist  $R(K) = \{Kf \mid f \in L_2(\Omega)\} = \{u \in W_0^1(\Omega) \mid Au \in L_2(\Omega)\}$ , und mit a) folgt auch  $R(K) = \{u \in L_2(\Omega) \mid \sum_{j=0}^\infty \lambda_j^2 |\langle u, \phi_j \rangle_{L_2}|^2 < \infty\}$ .

c) Für  $f \in L_2(\Omega)$  ist  $(A - \lambda_j I)u = \sum_{i=0}^\infty (\lambda_i - \lambda_j) \langle u, \phi_i \rangle_{L_2} \phi_i = \sum_{i=0}^\infty \langle f, \phi_i \rangle_{L_2} \phi_i = f$  genau dann lösbar, wenn  $\langle f, \phi_i \rangle_{L_2} = 0$  für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  mit  $\lambda_i = \lambda_j$  gilt.

d) Ein Separationsansatz  $u(x, t) = f(x)g(t)$  liefert  $f(x)\ddot{g}(t) + c^2 A f(x)g(t) = 0$ , also  $\ddot{g}(t) + \lambda g(t) = 0$  für einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$  von  $c^2 A f = \lambda f$ ,  $f \in W_0^1(\Omega)$ . Die Behauptung folgt nun durch Entwicklung der Anfangsdaten  $F$  und  $G$  nach den Eigenfunktionen dieses Randwertproblems.

e) Für  $(\partial_t + \alpha A_x)u = 0$  mit  $u \in W_0^1(\Omega)$  und  $u(x, 0) = F(x)$  auf  $\Omega$  verfährt man wie in d). Man erhält nun  $\dot{g}(t) + \lambda g(t) = 0$  und eine Lösung  $u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j e^{-\lambda_j t} \phi_j(x)$ .

**Aufgabe 6.1** Aus  $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{L_r} < \infty$  folgt  $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(t)|^r < \infty$  f.ü. nach dem Satz von B. Levi. Für  $g(t) := \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)$  f.ü. gilt  $\|g - \sum_{k=1}^n g_k\|_{L_r} \rightarrow 0$  nach dem Lemma von Fatou.

**Aufgabe 6.2** a) Die Hilfsfunktion  $h : t \rightarrow \frac{t}{1+t}$  aus (1.12) ist monoton wachsend.

b) Satz über majorisierte Konvergenz.

c) Für  $f \geq 0$  sei  $f_n(t) := \max\{f(t), n\}$ . Dann gilt  $f_n \in L_{\infty}(\mu)$  und  $f_n \rightarrow f$  punktweise, also in  $\mathcal{M}(\mu)$  nach b).

d) „ $\Rightarrow$ “: Auf  $A_n(\varepsilon) := \{t \in \Omega \mid |f_n(t)| \geq \varepsilon\}$  gilt  $\frac{|f_n(t)|}{1+|f_n(t)|} \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ , und daraus folgt  $\mu(A_n(\varepsilon)) \leq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \phi(f_n) \rightarrow 0$ .

„ $\Leftarrow$ “: Es ist  $\int_{A_n(\varepsilon)} \frac{|f_n(t)|}{1+|f_n(t)|} d\mu \leq \mu(A_n(\varepsilon))$  und  $\int_{\Omega \setminus A_n(\varepsilon)} \frac{|f_n(t)|}{1+|f_n(t)|} d\mu \leq \varepsilon \mu(\Omega)$ .

e) wird wie in Aufgabe 6.1 gezeigt: Aus  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|g_k(t)|}{1+|g_k(t)|} < \infty$  folgt auch  $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(t)| < \infty$ .

f) Für  $f \in L_r(\mu)$  ist  $\phi(f) \leq \int_{\Omega} \left(\frac{|f(t)|}{1+|f(t)|}\right)^r d\mu \leq \|f\|_{L_r}^r$ . Für  $u \in \mathcal{M}[0, 1]'$  gilt  $u = 0$  auf  $L_r[0, 1]$  nach Satz 6.5, also  $u = 0$  wegen c).

**Aufgabe 6.3** Nein: Für eine Quotientenabbildung  $\sigma : \ell_1 \rightarrow \ell_2$  lassen sich schwache Nullfolgen in  $\ell_2$  wegen des Satzes von Schur 9.37 nicht zu solchen in  $\ell_1$  liften. Es ist auch  $\sigma : \ell_1^{\sigma} \rightarrow \ell_2^{\sigma}$  eine Quotientenabbildung nach Aufgabe 8.15 und Satz 8.2.

**Aufgabe 6.5** Es sei  $(x_{\alpha})_{\alpha \in A}$  ein Cauchy-Netz. Zu  $n \in \mathbb{N}$  gibt es  $\gamma_n \geq \gamma_{n-1}$  in  $A$  mit  $d(x_{\alpha}, x_{\beta}) \leq \frac{1}{n}$  für  $\alpha, \beta \geq \gamma_n$ . Dann ist  $(x_{\gamma_n})$  eine Cauchy-Folge, und ihr Limes ist auch der Limes des Netzes  $(x_{\alpha})_{\alpha \in A}$ .

**Aufgabe 6.6** Eine Vervollständigung von  $E$  ist ein vollständiger topologischer Vektorraum  $\hat{E}$ , sodass  $E$  zu einem dichten Unterraum von  $\hat{E}$  linear isomorph ist. Die Eindeutigkeit bis auf Isomorphie folgt mittels Aufgabe 1.8.

Die Existenz von  $\hat{E}$  ist klar für metrisierbare Räume  $E$ . Wie auf S. 151 ist ein beliebiger topologischer Vektorraum zu einem Unterraum eines Produktes metrisierbarer Räume isomorph. Eine Beschreibung von  $\hat{E}$  im lokalkonvexen Fall liefert Satz 8.16.

**Aufgabe 6.7** ist klar für metrisierbare Räume  $E$ ; im allgemeinen Fall realisiert man  $E$  als Unterraum eines Produktes metrisierbarer Räume. Einen kurzen Beweis von „ $\Leftarrow$ “ mittels Ultrafilter findet man etwa in [Jarchow 1981], section 3.5.

**Aufgabe 6.8** „(c)  $\Rightarrow$  (d)“: Andernfalls gibt es zu  $x \in E$  und  $V \in \mathcal{U}(E)$  ein  $y \in V$  mit  $u(y) = u(x)$ . Somit ist  $z := x - y \in N(u)$  und  $x - z \in V$ , also  $N(u)$  dicht in  $E$ . Die Implikationen „(a)  $\Rightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (c)“ und „(d)  $\Rightarrow$  (a)“ sind klar.

**Aufgabe 6.9** Für eine Nullfolge  $(x_n)$  in  $E$  gilt  $x_n = \alpha_n y_n$  mit  $\alpha_n \rightarrow 0$  in  $\mathbb{R}$  und  $y_n \rightarrow 0$  in  $E$ . Daraus folgt  $T(x_n) = \alpha_n T(y_n) \rightarrow 0$  in  $F$ .

**Aufgabe 6.10** ergibt sich wie im Fall  $r = s = 1$  (vgl. [GK], Abschnitt 3.1).

**Aufgabe 6.11** ergibt sich wie im Fall  $r = 1$  (vgl. Abschnitt 13.1 sowie [GK], Abschnitte 4.1 und 4.3).

**Aufgabe 6.13** Nein, man setze etwa  $T_n = T + \frac{1}{n}I$  für ein  $T \in K(X)$ .

**Aufgabe 7.2** Für  $a \in A$  findet man induktiv  $a_k \in A$  und  $b_k \in B$  mit

$$a = b_1 + \frac{1}{2}a_1 = b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{4}a_2 = \cdots = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}b_k + \frac{1}{2^n}a_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt  $\frac{1}{2^n}a_n \rightarrow 0$  in  $E$ , und  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{k-1}}b_k$  konvergiert in  $E_B$  gegen  $b \in \overline{2B}^{E_B} \subseteq 3B$ .

**Aufgabe 7.3** Für die Einschränkung von  $x' \in (\hat{E}_U)'$  auf  $E$  gilt  $|\langle x|x' \rangle| \leq C p_U(x)$ , also  $x' \in E'_{U^c}$ . Die Umkehrung ist auch klar.

**Aufgabe 7.4** b) Es folgt die Injektivität von  $T$ , die Surjektivität i. A. nicht (vgl. die Abschnitte 9.3 und 12.5).

**Aufgabe 7.5** b) Für  $p \in \mathfrak{H}(E)$  ist  $p \circ i_k \in \mathfrak{H}(E_k)$ , also  $p(i_k x_k) \leq p_k(x_k)$  für ein  $p_k \in \mathbb{H}(E_k)$ . Für  $x = (x_j) = \sum_j i_j x_j \in E$  folgt  $p(x) \leq \sum_j p(i_j x_j) \leq \sum_j p_j(x_j)$ . Die Umkehrung ist klar. Im allgemeinen Fall kombiniert man (13) mit (12).

**Aufgabe 7.6** Ein Banachraum mit seiner schwachen Topologie.

**Aufgabe 7.7** a) Es gibt  $B \in \mathbb{B}(E)$  mit  $r_n x_n \in B$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und damit folgt  $x_n = \frac{1}{r_n}(r_n x_n) \rightarrow 0$  in  $E_B$ .

b) ergibt sich aus a) und Aufgabe 1.13.

c) „ $\Rightarrow$ “ Wird  $B \in \mathbb{B}(E)$  von  $A$  nicht absorbiert, so gibt es  $b_n \in B$  mit  $\frac{1}{n^2}b_n \notin A$ . Dann wird die lokale Nullfolge  $(\frac{1}{n}b_n)$  von  $A$  nicht absorbiert.

**Aufgabe 7.8** a) In Aufgabe 7.7 a) ist jetzt  $K := \overline{\Gamma\{r_n x_n\}}$  eine kompakte Kugel.

b) folgt aus a), c) dann wie in Aufgabe 7.7 c).

**Aufgabe 7.9** Es seien  $E = \text{ind}(E_k, i_k)$  und  $\sigma : E \rightarrow Q$  eine Quotientenabbildung. Dann trägt  $Q$  die induktive lokalkonvexe Topologie des Systems  $\{\sigma i_k : E_k \rightarrow Q\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

Wir definieren  $F_k := \bigoplus_{j=1}^k E_j$  und  $v_k := \bigoplus_{j=1}^k \sigma i_k \in L(F_k, Q)$ . Für die Quotientenräume

$Q_k := v_k(F_k) \simeq F_k/N(v_k)$  gilt  $Q_k \subseteq Q_{k+1}$ , die Inklusionen  $Q_k \rightarrow Q_{k+1}$  sind stetig, und es ist  $Q = \text{ind}_k Q_k$ .

**Aufgabe 7.10** a) Wir bezeichnen Einheitskugeln in  $E$  mit  $U$ , solche in  $G$  mit  $V$ . Wegen  $p \leq \rho \leq q$  auf  $G$  ist  $V_q \subseteq V_\rho \subseteq V_p$ . Für  $U := \Gamma(U_q \cup V_\rho) \cap U_p$  gilt dann

$U_q \subseteq U \subseteq U_p$ , und wir setzen  $r := p_U$ .

b) Einheitskugeln in  $Q$  bezeichnen wir mit  $W$ . Es ist  $\sigma(U_q) = W_q \subseteq W_p \subseteq W_{\tilde{p}} = \sigma(U_p)$ , und wir setzen  $U := \sigma^{-1}(W_p) \cap U_p$  sowie  $r = p_U$ .

**Aufgabe 7.11** Man identifiziert  $u \in \mathcal{D}'_\beta(\Omega)$  mit dem Tupel  $(u|_{K_j}) \in \text{proj}_j \mathcal{D}'_\beta(K_j)$  und benutzt die Regularität des induktiven Limes  $\mathcal{D}(\Omega) = \text{ind}_j \mathcal{D}(K_j)$ .

**Aufgabe 7.12** ergibt sich aus Theorem 7.20.

**Aufgabe 7.13** Nein; andernfalls wäre  $\varphi$  ein Fréchetraum im Widerspruch zum Satz von Baire.

**Aufgabe 7.14** ergibt sich aus Theorem 7.20.

**Aufgabe 7.15** ergibt sich ebenfalls aus Theorem 7.20.

**Aufgabe 7.16** a) ist klar, b) folgt mittels a) wie in Abschnitt 7.5, und auch c) ergibt sich wie dort.

**Aufgabe 7.17** a) Für Banachräume  $E$  kann man in Beweisteil e) von Theorem 7.22 jetzt an Stelle von  $U$  auch  $C_{n_1, \dots, n_k}$  nehmen.

b) folgt aus a) und der Konstruktion eines strikten Gewebes auf  $F = \text{ind}_j F_j$ : Mit  $\mathbb{U}(F_j) = \{U_n^{(j)}\}$  hat man  $C_{n_1} = F_{n_1}$  und  $C_{n_1, \dots, n_k} = F_{n_1} \cap \bigcap_{j=2}^k n_j U_j^{(n_1)}$ .

**Aufgabe 8.1** b) Für  $N := \overline{\bigcup_j M_j^\circ}^{\sigma(F, E)}$  gilt  ${}^\circ N = {}^\circ(\bigcup_j M_j^\circ) = \bigcap_j {}^\circ(M_j^\circ)$ , also  $(\bigcap_j M_j)^\circ = {}^\circ(N^\circ) = N$ .

**Aufgabe 8.2** „ $\Rightarrow$ “: Für  $y_2 \in F_2$  ist  $T^\times y_2 \in E_1^\times$  auf  $(E_1, \sigma(E_1, F_1))$  stetig, und Satz 8.2 liefert  $T^\times y_2 \in F_1$ .

**Aufgabe 8.3** a) Aus  $T(A) \subseteq B$  folgt  $B^\circ \subseteq T(A)^\circ = T'^{-1}(A^\circ)$  nach (13), und daraus folgt  $T'(B^\circ) \subseteq A^\circ$ . Ist  $B$  absolutkonvex und  $\sigma(E_2, F_2)$ -abgeschlossen, so folgt daraus  $T''({}^\circ(A^\circ)) \subseteq {}^\circ(B^\circ) = B$ , also auch die Umkehrung  $T(A) \subseteq B$ .

b) ergibt sich sofort aus a).

c) Wegen der Symmetrie genügt es, „ $\Leftarrow$ “ zu zeigen: Für  $A \in \mathfrak{S}_1$  und  $C \in \mathfrak{S}_2$  gibt es eine endliche Menge  $M \subseteq F_1$  mit  $T'(C) \subseteq M + \frac{1}{2}A^\circ$ . Nach Satz 8.8 ist  $A$  präkompakt in  $\sigma(E_1, F_1)$ ; es gibt also  $a_1, \dots, a_r \in A$  mit  $A \subseteq \bigcup_j (a_j + \frac{1}{4} {}^\circ M)$ . Daraus folgen  $A \subseteq \bigcup_j (a_j + \frac{1}{2} ({}^\circ M \cap A))$  und  $T(A) \subseteq \bigcup_j (Ta_j + \frac{1}{2} T({}^\circ M \cap A))$ , und die Behauptung ergibt sich dann aus  $\frac{1}{2} T({}^\circ M \cap A) \subseteq {}^\circ C$ :

Für  $y' \in C$  gilt  $T'y' = m + \frac{1}{2}x'$  mit  $m \in M$  und  $x' \in A^\circ$ ; für  $x \in {}^\circ M \cap A$  folgt daher  $|\langle Tx, y' \rangle| = |\langle x, T'y' \rangle| \leq |\langle x, m \rangle| + \frac{1}{2} |\langle x, x' \rangle| \leq \frac{3}{2} < 2$ .

**Aufgabe 8.4** „ $\Leftarrow$ “: Für  $z \in E'^\times$  sei  $N_\alpha = \{x' \in E' \mid \langle x', z \rangle = \alpha\}$ . Ist nun  $z|_{U^\circ}$  für alle  $U \in \mathbb{U}(E)$   $\sigma(E', E)$ -stetig, so sind alle  $N_0 \cap U^\circ$   $\sigma(E', E)$ -abgeschlossen. Nach

Voraussetzung trifft dies dann auch auf  $N_0$  zu, und nach Aufgabe 6.8 ist dann  $z$  selbst  $\sigma(E', E)$ -stetig. Nun verwendet man Satz 8.17.

„ $\Rightarrow$ “: Es ist  $H = N_\alpha$  für ein  $z \in E'^\times$ . Nach Satz 8.17 ist zu zeigen, dass  $z|_{U^\circ}$  für alle  $U \in \mathcal{U}(E)$   $\sigma(E', E)$ -stetig ist, und wegen  $\langle x', z \rangle - \langle y', z \rangle = 2 \langle \frac{x' - y'}{2}, z \rangle$  genügt es, dies in 0 zu zeigen. Andernfalls gibt es  $M \subseteq U^\circ$  mit  $0 \in \overline{M}^\sigma$  und  $\langle x', z \rangle = \mu \neq 0$  für alle  $x' \in M$ . Mit  $N_\alpha \cap U^\circ$  ist aber auch  $N_\mu \cap U^\circ$   $\sigma(E', E)$ -abgeschlossen, und wir haben einen Widerspruch.

**Aufgabe 8.5** Es sei  $\mathfrak{T}$  eine solche lokalkonvexe Topologie auf  $E'$ . Nach Satz 8.17 gilt dann  $(E', \mathfrak{T})' = E$ , also  $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(\mathfrak{S})$  für eine Bornologie  $\mathfrak{S}$  auf  $E$ . Nach Aufgabe 8.3 c) sind die Mengen in  $\mathfrak{S}$  präkompakt in  $E$ .

**Aufgabe 8.6** Für einen folgenvollständigen Raum  $E$  definieren wir  $T \in L(\ell_1, E)$  durch  $T(\lambda_n) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ . Mit der Einheitskugel  $B$  von  $\ell_1$  ist zu zeigen, dass  $T(B)$  in  $E$  abgeschlossen ist. Nun gilt  $T'y' = (\langle x_n, y' \rangle)$  für  $y' \in E'$  und somit  $T'(E') \subseteq c_0$ . Nach Aufgabe 8.2 ist daher  $T : (\ell_1, \sigma(\ell_1, c_0)) \rightarrow (E, \sigma(E, E'))$  stetig, und nach Theorem 8.6 ist  $T(B)$  schwach kompakt in  $E$ .

**Aufgabe 8.7** a) Für  $y' \in E'$  gilt  $|\langle (x_j), y' \rangle| \leq \sup_{j \in A} p_j(x_j)$  mit einer endlichen Indexmenge  $A \subseteq J$  und  $p_j \in \mathfrak{H}(E_j)$ . Dies zeigt  $y' = \bigoplus_{j \in A} y'_j$  mit  $y'_j \in E'_j$ .

b) Für  $W \in \mathfrak{W}(E')$  gilt  $\pi_j(W) \in \mathfrak{W}(E'_j)$  und  $W \subseteq \bigoplus_{j \in A} \pi_j(W)$  für eine endliche Indexmenge  $A \subseteq J$ .

c) Für  $K \in \mathfrak{K}(E)$  gilt  $\pi_j(K) \in \mathfrak{K}(E_j)$  und  $K \subseteq \prod_{j \in J} \pi_j(K)$ . Entsprechendes gilt nicht für endliche Mengen. In der Tat kann etwa die  $\ell_1$ -Norm auf  $\varphi = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{K}$  nicht durch eine Halbnorm der schwachen Topologie  $\sigma(\varphi, \omega)$  abgeschätzt werden.

**Aufgabe 8.8** a) Mit  $\overline{U}_1^E(0)$  ist auch  $\overline{U}_1^Q(0) = \sigma \overline{U}_1^E(0)$  schwach kompakt.

b) Man kann o. E. die Separabilität von  $E$  annehmen und dann Satz 1.4 verwenden.

**Aufgabe 8.9** Etwa  $E^\sigma$  für einen reflexiven Banachraum  $E$ .

**Aufgabe 8.10** a) Für  $U \in \mathcal{U}(E)$  ist die Menge  $\{T'(U^\circ) \mid T \in \mathcal{G}\}$  in  $F'$  gleichstetig aufgrund von (11). Nun verwendet man Aufgabe 8.3 a).

b) folgt sofort aus a).

c) Eine Cauchy-Folge in  $L_\beta(F, E)$  ist nach b) gleichstetig, und ihr punktweiser Limes existiert.

d) Eine Cauchy-Folge in  $L_\sigma(F, E)$  ist nach Satz 7.8 in  $L_\beta(F, E)$  beschränkt, also ebenfalls gleichstetig.

**Aufgabe 8.11** Zu  $V_k \in \mathcal{U}(E)$  gibt es  $U_k \in \mathcal{U}(F)$  mit  $T(U_k) \subseteq V_k$ . Nach Aufgabe 1.12 a) gibt es  $\rho_k > 0$ , sodass  $\bigcup_k \rho_k U_k^\circ$  im Fréchetraum  $F'_\beta$  beschränkt ist. Nach (11) ist diese Menge gleichstetig; es gibt also  $U \in \mathcal{U}(E)$  mit  $\rho_k U_k^\circ \subseteq U^\circ$  für alle  $k$ . Es folgt  $U \subseteq \rho_k^{-1} U_k$  und  $T(U) \subseteq \rho_k^{-1} V_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , d. h.  $T(U)$  ist beschränkt.

Ein metrisierbarer  $(DF)$ -Raum ist also bereits normierbar.

**Aufgabe 8.12** Mit einem Fundamentalsystem  $\{B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots\}$  beschränkter Mengen in  $\mathbb{B}(F)$  setzt man einfach  $C_{n_1, \dots, n_k} := \bigcap_{j=1}^k B_{n_j}$ .

**Aufgabe 8.13** Nein, da man nicht weiß, ob die Mengen  $C_n$  abgeschlossen sind.

**Aufgabe 8.14** a) Für  $S \in \mathfrak{S}_1$  ist  $\iota'(S^\circ)$  offen; es gibt also  $T \in \mathfrak{S}_2$  mit  $T^\circ \subseteq \iota'(S^\circ)$  und  $S \cap G \subseteq {}^\circ(\iota'(S^\circ)) \subseteq {}^\circ(T^\circ) = T$ .

b) Für  $S \in \mathfrak{S}_1$  ist  $T := S \cap G \in \mathfrak{S}_2$ , und es gilt  $(\iota T)^\circ = (S \cap G)^\circ = \overline{\Gamma(S^\circ \cup G^\circ)}^{\sigma(E', E)} = \frac{1}{2} \overline{S^\circ + G^\circ}^{\mathfrak{T}(\mathfrak{S}_1)}$ , da ja  $(E', \mathfrak{T}(\mathfrak{S}_1))' = E$  gilt. Da  $S^\circ$  eine  $\mathfrak{T}(\mathfrak{S}_1)$ -Nullumgebung in  $E'$  ist, folgt weiter  $\overline{S^\circ + G^\circ}^{\mathfrak{T}(\mathfrak{S}_1)} \subseteq S^\circ + G^\circ + S^\circ \subseteq 2(S^\circ + G^\circ)$ , also  $(\iota T)^\circ \subseteq S^\circ + G^\circ$  und  $T^\circ \subseteq \iota'((\iota T)^\circ) \subseteq \iota'(S^\circ)$ .

**Aufgabe 8.15** folgt aus Satz 8.24 und Aufgabe 8.14.

**Aufgabe 8.16** a) Es ist  $G'_\beta$  ein Fréchetraum. Zu einer Nullfolge  $(x'_n)$  in  $G'_\beta$  gibt es nach Aufgabe 1.13 Nullfolgen  $(\alpha_n)$  in  $\mathbb{R}$  und  $(y'_n)$  in  $G'_\beta$  mit  $x'_n = \alpha_n y'_n$ . Wegen (11) ist die Menge  $\{y'_n\}$  in  $G'$  gleichstetig, und der Satz von Hahn-Banach liefert eine gleichstetige Menge  $\{\eta'_n\}$  in  $E'$  mit  $\iota'(\eta'_n) = y'_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Es folgt  $\xi'_n := \alpha_n^{-1} \eta'_n \rightarrow 0$  in  $E'_\beta$  und somit  $x'_n = \iota' \xi'_n \rightarrow 0$  in der Quotiententopologie  $\iota'(E'_\beta)$  auf  $G'$ .

b) Wir können  $\overline{G} = E$  annehmen. Dann ist  $\iota'$  bijektiv, und wir verwenden a).

c) folgt aus b) mit  $E = \hat{G}$ .

d) Die Räume  $\mathcal{C}^m(\Omega)$  sind quasivollständig, die induktiven Limiten regulär sind (vgl. Aufgabe 7.14).

**Aufgabe 8.17** „ $\Rightarrow$ “ ergibt sich durch Induktion über  $r$ .

**Aufgabe 8.18** Wegen der Reflexivität von  $X$  und Satz 8.32 ist  $\overline{U}_X$  der schwache Abschluss von  $\text{co}(\partial_e \overline{U}_X)$ , aufgrund der Folgerung zu Theorem 8.29 sogar der Norm-Abschluss.

**Aufgabe 8.19** a) Für  $X = \ell_\infty$  ist  $\partial_e \overline{U} = \{(x_k) \mid |x_k| = 1 \text{ für alle } k\}$ , für  $X = \ell_1$  ist  $\partial_e \overline{U} = \{\alpha_k e_k \mid |\alpha_k| = 1 \text{ für alle } k\}$ , für  $X = L_1[a, b]$  und  $X = K(H)$  ist  $\partial_e \overline{U} = \emptyset$ .

b) ergibt sich für  $X = \ell_1$  mittels a).

c) Es seien  $x \in \overline{U}$ ,  $y_1, \dots, y_r \in \ell_2$  und  $G := [y_1, \dots, y_r]$ . Wir wählen  $\alpha \geq 0$ , sodass  $z := P_G x + \alpha(I - P_G)x$  die Norm 1 hat; dann ist  $z \in \partial_e \overline{U}$  und  $\langle x - z | y_j \rangle = 0$  für  $j = 1, \dots, r$ .

**Aufgabe 8.20** Es ist  $f : x = (x_j) \mapsto \sum_{x_j}^\infty$  eine stetige Linearform auf  $\ell_1$ ; durch  $T : (x_0, x_1, \dots) \mapsto (-f(x), x_0, x_1, \dots)$  wird ein Isomorphismus von  $\ell_1$  auf  $Y$  definiert. Für  $x \in \partial_e \overline{U}_Y$  muss  $|x_j| = 0$  oder  $|x_j| = 1$  für alle  $j$  gelten; wegen  $\|x\| = 1$  und  $f(x) = 0$  ist dies unmöglich.



**Aufgabe 8.21** a) Es sei  $z \in \partial_e(\overline{\text{co}K})$ . Für  $U \in \mathbb{U}(E)$  gibt es  $x_1, \dots, x_r \in K$  mit  $K \subseteq \bigcup_j (x_j + U)$ . Mit den kompakten Mengen  $K_j := \overline{\text{co}(K \cap (x_j + U))}$  gilt  $\overline{\text{co}K} = \text{co}(\bigcup_j K_j)$ . Daher gilt  $z = \sum_{j=1}^r \alpha_j z_j$  mit  $z_j \in K_j$  und  $\alpha_j \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$ . Nach Aufgabe 8.17 gibt es  $j$  mit  $z = z_j \in K_j \subseteq K + U$ . Somit ist  $z \in K$ , also auch  $z \in \partial_e K$ .

b) Es ist  $\overline{\Gamma K} = \overline{\text{co}L}$  mit der kompakten Menge  $L := \bigcup \{\alpha K \mid |\alpha| = 1\}$ . Nun sei  $y \in \partial_e(\overline{\Gamma K})$ . Nach a) gilt dann  $y \in L$ , also  $y = \alpha z$  für ein  $z \in \partial_e K$  und ein  $\alpha \in \mathbb{C}$  mit  $|\alpha| = 1$ .

**Aufgabe 8.22** a) „ $\supseteq$ “: Die Menge  $W := \{\mu \in C(T)^\circ \mid \mu \geq 0 \text{ und } \|\mu\| = 1\}$  ist kompakt und Extremalmenge von  $\overline{W}$ ; es genügt daher,  $\delta_t \in \partial_e W$  zu zeigen. Dazu sei  $\delta_t = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$  mit  $\mu_k \in W$ . Für  $f \in C(T)$  mit  $f(t) = 0$  gilt  $f = f_1 - f_2$  mit  $f_j \geq 0$  und  $f_j(t) = 0$ . Aus  $\delta_t(f_j) = 0$  folgt dann  $\mu_k(f_j) = 0$  wegen  $\mu_k(f_j) \geq 0$ , also auch  $\mu_k(f) = 0$ . Dies impliziert  $\mu_1 = \mu_2 = \delta_t$ .

„ $\subseteq$ “: Für  $M := \{\delta_t \mid t \in M\}$  gilt  $\overline{W} = ({}^\circ M)^\circ = \overline{\Gamma M}$ , und man verwendet Aufgabe 8.21 b).

b) „ $\Rightarrow$ “ wurde in [GK], Satz 2.8 gezeigt. „ $\Leftarrow$ “: Es ist  $\delta : T \rightarrow (M, \sigma(C(T)^\circ, C(T)))$  eine Homöomorphie, und dieser Raum ist metrisierbar aufgrund der Sätze 1.4 und 1.1.

c) „ $\Leftarrow$ “: Eine Isometrie  $u : C(T, \mathbb{R}) \rightarrow C(S, \mathbb{R})$  induziert nach a) eine Homöomorphie  $u' : M_S \rightarrow M_T$  oder  $u' : M_S \rightarrow -M_T$ .

**Aufgabe 8.23** folgt sofort aus dem Satz von Stone-Weierstraß.

**Aufgabe 9.1** a) ist klar (vgl. [GK], Satz 13.1), b) folgt sofort aus a).

**Aufgabe 9.2** a)  $T$  ist genau dann abschließbar, falls für ein Netz  $(x_\alpha)$  in  $\mathcal{D}(T)$  mit  $x_\alpha \rightarrow 0$  in  $E$  und  $Tx_\alpha \rightarrow y$  in  $F$  stets  $y = 0$  folgt.

b) vgl. [GK], Satz 13.6.

**Aufgabe 9.3** Es ist (34)  $\Leftrightarrow$  (11) klar. Für Banachräume bedeuten diese Bedingungen  $\|T'y'\| \leq 1 \Rightarrow \|y'\| \leq \rho$  für ein  $\rho > 0$ , also  $\|y'\| \leq \rho \|T'y'\|$  für alle  $y' \in D(T')$ .

**Aufgabe 9.4** „ $\Rightarrow$ “: Es gibt ein wachsendes Fundamentalsystem  $\{p_n\}$  von Halbnormen auf  $E$  mit  $E'_{p_n} \neq E'_{p_{n+1}}$ . Man wählt  $x'_n \in E'_{p_{n+1}} \setminus E'_{p_n}$  und verwendet Satz 9.11.

**Aufgabe 9.5** a) Mit den Basisfunktionen  $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  von  $\mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R})$  sind die Matrix-Elemente gegeben durch  $a_{jk} = (ik)^j$  für  $k \in \mathbb{Z}$  und  $j \in \mathbb{N}_0$ .

b) Durch  $\beta : f \mapsto (\partial^\alpha f(0))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$  wird eine Surjektion  $\beta : \mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \omega^n \simeq \omega$  definiert.

**Aufgabe 9.6** Beim Satz von Borel sind die exakten Zeilen in Theorem 9.14 gegeben durch  $0 \rightarrow G_n \rightarrow \mathcal{C}_{2\pi}^n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sigma_n} \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow 0$  mit  $\sigma_n : f \rightarrow (f^{(k)}(0))_{0 \leq k \leq n}$ . Zu zeigen ist die Dichtheit von  $G_{n+1}$  in  $G_n$ . Zu  $f \in G_n$  und  $\varepsilon > 0$  gibt es  $h \in \mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R})$  mit  $\|f - h\|_{\mathcal{C}^n} \leq \varepsilon$ , insbesondere auch  $|h^{(k)}(0)| \leq \varepsilon$  für  $k = 0, \dots, n$ . Nun wählt man

$\eta_k \in \mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R})$  mit  $\eta_k(x) = \frac{x^k}{k!}$  für  $x$  nahe 0 und  $\|\eta_k\|_{C^n} \leq C$  für  $0 \leq k \leq n$  sowie  $\|h^{(n+1)}(0)\| \|\eta_{n+1}\|_{C^n} \leq \varepsilon$ . Für  $g(x) := h(x) - \sum_{k=0}^{n+1} h^{(k)}(0)\eta_k(x)$  gilt dann  $g \in \mathcal{G}_{n+1}$  und  $\|h - g\|_{C^n} \leq (Cn + 1)\varepsilon$ .

Beim Interpolationssatz verfährt man so ähnlich und verwendet dabei den Approximationssatz von Runge (vgl. S. 330) und endliche Interpolation.

**Aufgabe 9.7** siehe [Hörmander 1964], section 3.4.

**Aufgabe 9.8** siehe [Hörmander 1964], sections 3.4 und 3.5.

**Aufgabe 9.9** Auf den surjektiven Operator  $P(D) \in L(\mathcal{D}_{P(D)}, H^{s, \text{loc}}(\Omega))$  wendet man Satz 9.28 an.

**Aufgabe 9.10** Nach (7.13) und Satz 9.32 ist ein Fundamentalsystem auf  $\mathcal{D}(\Omega)$  gegeben durch  $\{p_{r_j}(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\beta| \leq r_j} \sup_{\Omega} |\partial^{\beta}(\alpha_j(x)\varphi(x))|\}$ .

**Aufgabe 9.11** Für  $c \in \mathbb{R}$  betrachtet man  $H_c^+ := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \langle \xi | \mathbf{n} \rangle \geq c\}$  und  $H_c^- := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \langle \xi | \mathbf{n} \rangle \leq c\}$ ; dann hat  $P(D) \in L(\mathcal{E}(H_c^{\pm}))$  Inverse  $R_c^{\pm} \in L(\mathcal{E}(H_c^{\pm}))$ . Für  $c > 0$  sei  $\{\alpha^+, \alpha^-\}$  eine der Überdeckung  $H_{-c}^+ \cup H_c^-$  untergeordnete  $\mathcal{C}^{\infty}$ -ZdE; dann definiert man  $R \in L(\mathcal{E}(\mathbb{R}^n))$  durch  $R(\varphi) := R_{-c}^+(\alpha^+ \varphi) + R_c^-(\alpha^- \varphi)$ .

**Aufgabe 9.12** Dies zeigt man wie Satz 9.34.

**Aufgabe 9.13** siehe [GK], Satz 9.18.

**Aufgabe 9.14** Die Bilder der Einheitsvektoren bilden eine beschränkte Menge in  $Q$ , die zu einer solchen in  $E$  zu liften sind. Für Frécheträume  $E$  ist dies möglich, wenn  $Q$  ein Montelraum ist (Satz 8.27) oder wenn  $G$  quasinormabel ist (vgl. [Meise und Vogt 1992], Satz 26.17).

**Aufgabe 9.15** siehe [GK], Satz 10.12; dort wird in der Tat Isometrie bewiesen.

**Aufgabe 9.16** a) Man definiert  $T_U : F \rightarrow \ell_{\infty}(U^{\circ})$  durch  $T_U x := (\langle x, x' \rangle)_{x' \in U^{\circ}}$  und erhält eine Isomorphie  $T = (T_U)_{U \in \mathbb{U}(F)}$  von  $F$  in  $\prod_{U \in \mathbb{U}(F)} \ell_{\infty}(U^{\circ})$ .

b) Der Produktraum in a) ist injektiv.

c) Ein Banachraum  $F$  ist isometrisch zu einem Unterraum des  $\mathcal{P}_1$ -Raums  $\ell_{\infty}(U^{\circ})$ .

**Aufgabe 9.17** a) Es gilt genau dann  $f \leq g$  in  $L_{\infty}(\Omega)$ , wenn  $\int_{\Omega} f \varphi d\mu \leq \int_{\Omega} g \varphi d\mu$  für alle  $0 \leq \varphi \in L_1(\Omega)$  ist. Für eine Menge  $\mathcal{M} \subseteq L_{\infty}(\Omega)$  mit  $f \leq g$  für alle  $f \in \mathcal{M}$  setzt man  $\langle \varphi, s \rangle := \sup_{f \in \mathcal{M}} \int_{\Omega} f \varphi d\mu$  für  $0 \leq \varphi \in L_1(\Omega)$  und setzt  $s$  zu einer Linearform in  $L_1(\Omega)' \cong L_{\infty}(\Omega)$  fort. Man kann auch ähnlich wie im Beweis von Satz 9.35 argumentieren.

b) „①  $\Rightarrow$  ②“: Für eine Menge  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{C}(K)$  mit  $f \leq g$  für alle  $f \in \mathcal{M}$  setzt man  $h(x) := \sup_{f \in \mathcal{M}} f(x)$  und dann  $s(x) := \inf \{t(x) \mid h \leq t \in \mathcal{C}(K)\}$ . Dann ist  $h$  nach unten und  $s$  nach oben halbstetig, und die Voraussetzung über  $K$  impliziert die Ste-

tigkeit von  $s$ .

„②  $\Rightarrow$  ③“ ergibt sich wie im Beweis des Satzes von Hahn-Banach.

„③  $\Rightarrow$  ①“ Es gibt eine Projektion  $P : \ell_\infty(K) \rightarrow \mathcal{C}(K)$  mit  $\|P\| = 1$ , und diese ist positiv, d.h. es ist  $Pf \geq 0$  für  $f \geq 0$ . Für eine offene Menge  $U \subseteq K$  ergibt sich  $\chi_{\overline{U}} = P(\chi_U) \in \mathcal{C}(K)$ , und  $\overline{U}$  ist offen.

**Aufgabe 9.18** Andernfalls gibt es verschiedene Punkte  $x_n \in K$  mit  $x_n \rightarrow x$  in  $K$ . Es seien  $U_{\varepsilon_n}(x_n)$  zueinander disjunkte offene Kugeln. Dann ist  $D := \bigcup_n U_{\varepsilon_{2n}}(x_{2n})$  offen und  $x \in \overline{D}$ ,  $\overline{D}$  also nicht offen.

**Aufgabe 10.1** Einer linearen Abbildung  $u \in L_e(F'_\kappa, E)$  entspricht die Bilinearform  $B \in \mathcal{B}(E'_\kappa, F'_\kappa)$ ,  $B(x', y') := \langle uy', x' \rangle$ .

**Aufgabe 10.2** „ $\subseteq$ “: Es sei  $T \in X \varepsilon Y = L_e(Y'_\kappa, X)$ . Da  $\overline{U}_{Y'}$  in  $Y'_\kappa$  kompakt ist, gilt  $T \in K(Y', X)$ . Weiter ist  $T' : X'_\kappa \rightarrow Y$  stetig und daher auch  $T = T'' : Y'_\sigma \rightarrow X^\sigma$ .

„ $\supseteq$ “: Für  $T \in L(Y'_\sigma, X^\sigma)$  ist  $T' : X'_\sigma \rightarrow Y^\sigma$  stetig, und wegen  $T \in K(Y', X)$  und  $\|T'x'\| = \sup \{ |\langle T'x', y' \rangle| \mid \|y'\| \leq 1 \} = \sup \{ |\langle Ty', x' \rangle| \mid \|y'\| \leq 1 \}$  ist auch  $T' : X'_\kappa \rightarrow Y$  stetig. Nun folgt  $T \in X \varepsilon Y$  aus Satz 10.3.

**Aufgabe 10.3** Dies folgt aus dem letzten Satz von Abschnitt 8.1. Weiter ist  $\ell_{\infty, \kappa}(M, F)$  der Raum der  $F$ -wertigen Funktionen auf  $M$  mit präkompaktem Bild.

**Aufgabe 10.4** a) Die erste Aussage folgt wieder aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit bzw. dem letzten Satz von Abschnitt 8.1. Für die weiteren Aussagen sollte  $F$  vollständig sein; man argumentiert dann wie in Satz 10.1.

b) Es ist  $\Lambda_\kappa^\alpha(K, F) = \{f \in \Lambda^\alpha(K, F) \mid \{ \frac{f(s)-f(t)}{d(s,t)^\alpha} \mid s \neq t \} \text{ ist präkompakt in } F\}$  und  $\lambda_\sigma^\alpha(K, F) = \{f \in \Lambda^\alpha(K, F) \mid \lim_{d(s,t) \rightarrow 0} \frac{f(s)-f(t)}{d(s,t)^\alpha} = 0 \text{ bzgl. } \sigma(F, F')\}$ .

**Aufgabe 10.5** Es ist  $\omega \varepsilon F = L_e(F'_\kappa, \omega) \simeq ((F'_\kappa)')^{\mathbb{N}_0} \simeq F^{\mathbb{N}_0}$ , und  $\omega$  hat die A.E.

**Aufgabe 10.6** Man definiert  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, F)$  als Raum aller Funktionen  $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, F)$  mit

$$\forall q \in \mathbb{H}(F) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 : q_k(\psi) := \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x \rangle^k q(D^\alpha \psi(x)) < \infty.$$

Dann ist  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, F) = \mathcal{S}_\sigma(\mathbb{R}^n, F)$  nach dem letzten Satz von Abschnitt 8.1. Da  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ein Montelraum ist, folgt  $\mathcal{S}_\sigma(\mathbb{R}^n, F) = \mathcal{S}_\kappa(\mathbb{R}^n, F)$  aus Satz 10.6, und für vollständige Räume  $F$  verwendet man Satz 10.5. Die letzte Aussage folgt dann mit (17).

**Aufgabe 10.7** Man argumentiert wie in Abschnitt 10.1. Analoges gilt nicht für  $\mathcal{C}^m$ -Funktionen im Fall  $m \in \mathbb{N}$ , so ist etwa  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  der Raum der Funktionen  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ , für die auch die gemischte zweite Ableitung  $\partial_x \partial_y f$  stetig auf  $\mathbb{R}^2$  existiert.

**Aufgabe 10.8** a) Es sei  $\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  ein wachsendes Fundamentalsystem von Halbnormen auf  $E$  mit den Quotienten-Halbnormen  $\{\tilde{p}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  auf  $Q$ . Für  $y = (y_k) \in s(\mathbb{N}_0, Q)$

und  $j \in \mathbb{N}$  wählen wir Zahlen  $n_j > n_{j-1} \in \mathbb{N}$  mit  $k^j \tilde{p}_j(y_k) \leq 2^{-j}$  für  $k \geq n_j$ . Dann wählen wir Vektoren  $x_k \in E$  mit  $\pi x_k = y_k$  für  $k \in \mathbb{Z}^n$  und  $p_j(x_k) \leq 2 \tilde{p}_j(y_k)$  für  $n_j \leq k < n_{j+1}$ . Dann gilt  $k^j x_k \rightarrow 0$  in  $E$  für  $k \rightarrow \infty$  und alle  $j \in \mathbb{N}$ , also  $x := (x_k) \in s(\mathbb{N}_0, E)$ .

b) Nach a) und Satz 10.8 kann man periodische  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen liften. Nun sei  $\{U_j\}$  eine lokalendliche Überdeckung von  $\Omega$  durch offene Kugeln und  $\{\alpha_j\}$  eine untergeordnete  $\mathcal{C}^\infty$ -Zerlegung der Eins. Für  $f \in \mathcal{E}(\Omega, Q)$  betrachten wir  $\alpha_j f \in \mathcal{D}(U_j, Q)$  als  $2\pi\ell$ -periodische Funktion und konstruieren dazu ein Lifting  $g_j \in \mathcal{E}_{2\pi\ell}(\mathbb{R}^n, E)$ . Nun wählen wir  $\eta_j \in \mathcal{D}(U_j)$  mit  $\eta_j \alpha_j = \alpha_j$ . Für  $f^\vee := \sum_j \eta_j g_j \in \mathcal{E}(\Omega, E)$  gilt dann  $\pi f^\vee = \sum_j \eta_j \pi g_j = \sum_j \eta_j \alpha_j f = \sum_j \alpha_j f = f$ .

**Aufgabe 10.10** Es gibt  $\alpha \in \mathcal{H}(\Omega)$  mit  $\alpha g \in \mathcal{H}(\Omega, Q)$ . Mittels Satz 10.14 liftet man  $\alpha g$  nach  $E$  und dividiert wieder durch  $\alpha$ .

**Aufgabe 10.11** a) Man setzt  $p_K(f)^2 := \int_K |f(z)|^2 d\lambda$  für kompakte  $K \subseteq \Omega$ ; mittels Cauchy-Formel ergibt sich  $\sup_K |f(z)| \leq C_\varepsilon p_{K_\varepsilon}(f)$  für  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  und kleine  $\varepsilon > 0$ . Nun verwendet man Satz 10.18.

b) Es sei  $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine relativ kompakte Ausschöpfung von  $\Omega$  wie in (1.2). Aus a) und dem Approximationssatz von Runge folgt die Dichtheit von  $\mathcal{H}(\Omega, F)$  in  $\mathcal{H}(\Omega_n, F)$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Daher kann man wie in Satz 9.15 verfahren.

**Aufgabe 10.12** ergibt sich aus den Sätzen 10.17 und 10.9: Für einen Banachraum  $F$  ist  $C^m(\Omega) \otimes F$  dicht in  $C^m(\Omega) \varepsilon F \simeq C^m(\Omega, F)$ .

**Aufgabe 10.13** a) Es ist  $\mathcal{A}(K, F) = \{f \in \mathcal{C}(K, F) \simeq \mathcal{C}(K) \varepsilon F \mid \lambda(f)(F') \subseteq \mathcal{A}(K)\} \simeq \mathcal{A}(K) \varepsilon F$  aufgrund von Satz 10.11. Weiter wird die  $\varepsilon$ -Topologie auf  $\mathcal{R}(K) \otimes F$  von  $\mathcal{R}(K, F)$  induziert. Für  $f \in \mathcal{H}(K, F)$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $K$  mit  $f \in \mathcal{H}(U, F) \simeq \mathcal{H}(U) \hat{\otimes}_\varepsilon F$ , und daher lässt sich  $f$  durch Funktionen in  $\mathcal{H}(U) \otimes F$  approximieren. Somit ist  $\mathcal{R}(K) \otimes F$  dicht in  $\mathcal{R}(K, F)$ .

b) Für  $f \in \mathcal{A}(\overline{D}, F)$ ,  $0 < r < 1$  und  $f_r(z) := f(rz)$  gilt  $f_r \in \mathcal{H}(\overline{D}, F)$ , und man hat  $\|f - f_r\|_{\overline{D}} \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow 1$ .

c) folgt nun aus a) und Satz 10.17.

**Aufgabe 10.14** a) Die Cesàro-Mittel (vgl. [GK], Abschnitt 5.1) definieren lineare Operatoren  $\sigma_n : \mathcal{A}(\overline{D}) \rightarrow [1, z, \dots, z^n] \subseteq \mathcal{A}(\overline{D})$  mit  $\|\sigma_n\| \leq 1$ , und der Satz von Fejér liefert  $\|f - \sigma_n(f)\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

b) Mit Operatoren wie im Beweis von Satz 9.35 argumentiert man ähnlich wie im Beweis von Satz 10.16 b), vgl. etwa [Jarchow 1981], 18.5.

**Aufgabe 10.15**  $\lambda_p(A)' \simeq \{y = (y_j) \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : \|y\|_k^* := (\sum_{j=0}^\infty a_{j,k}^{-q} |y_j|^q)^{1/q} < \infty\}$  für  $1 < p < \infty$  und entsprechend für  $\ell_1(A)'$  und  $c_0(A)'$ .

**Aufgabe 10.16** „ $\Leftarrow$ “: Es ist  $\{x_n\}$  linear unabhängig, und durch  $P_m(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j) :=$

$\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j$  werden Projektionen  $P_m : [x_n] \rightarrow [x_n]_{n \leq m}$  mit  $\|P_m\| \leq C$  definiert. Diese setzt man zu Projektionen  $P_m : X \rightarrow [x_n]_{n \leq m}$  fort, und wegen  $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m x = x$  für  $x \in [x_n]$  gilt dies auch für alle  $x \in X$ .

Für „ $\Rightarrow$ “ zeigt man, dass der Raum  $(\overline{[x_n]}, \|\cdot\|)$  vollständig ist und verwendet dann den Graphensatz, vgl. etwa [Albiac und Kalton 2006], section 1.1.

**Aufgabe 10.17** a) Der Raum  $[\chi_n]_{n \in \mathbb{N}}$  enthält alle charakteristischen Funktionen von Intervallen  $[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}]$  und ist daher dicht in  $L_p[0, 1]$ . Weiter gilt die Bedingung aus Aufgabe 10.16 mit  $C = 1$  zunächst für  $n = m + 1$  und dann für alle  $n > m$ ; dabei benutzt man die elementare Abschätzung  $|a + b|^p + |a - b|^p \geq 2|a|^p$ .

b) Der Raum  $[\varphi_n]_{n \in \mathbb{N}}$  enthält alle stetigen stückweise linearen Funktionen auf  $[0, 1]$  mit „Knicken“ in den Punkten  $j2^{-k}$  und ist daher dicht in  $\mathcal{C}[0, 1]$ . Die Bedingung aus Aufgabe 10.16 gilt wieder mit  $C = 1$  zunächst für  $n = m + 1$  und dann für alle  $n > m$ .

**Aufgabe 10.18** Es seien  $P : E \rightarrow G$  eine stetige Projektion und  $Y$  ein Banachraum. Zu  $u \in G \varepsilon Y \subseteq E \varepsilon Y$  gibt es ein Netz  $v_\gamma$  in  $E \otimes Y$  mit  $v_\gamma \rightarrow u$ . Dann gilt offenbar  $(P \otimes I)v_\gamma \in G \otimes Y$  und  $(P \otimes I)v_\gamma \rightarrow (P \varepsilon I)u = u$ .

**Aufgabe 10.19**  $(E'_\kappa)'_\kappa = E$  bedeutet, dass jede absolutkonvexe  $\kappa(E', E)$ -kompakte Menge in  $E'$  gleichstetig ist; dies ist der Fall für Mackey-Räume. Nach Satz 10.17 ist die A.E. von  $E$  äquivalent zur Dichtheit von  $E \otimes E'_\kappa$  in  $E \varepsilon E'_\kappa$ , im Fall  $(E'_\kappa)'_\kappa = E$  also auch zu der von  $E'_\kappa$ . Für Montelräume gilt  $E'_\kappa = E'_\beta$ .

**Aufgabe 10.20** siehe etwa [Jarchow 1981], 16.3 und 15.4.

**Aufgabe 10.21** Lemma 10.19 liefert die in Satz 8.16 benötigte Dichtheitsaussage, da die Polaren  $U^\circ$  absolutkonvex und schwach\*-kompakt sind.

**Aufgabe 10.22** a) Wir wählen  $x_j = \frac{1}{j}e_j$  mit den Einheitsvektoren  $e_j$  von  $\ell_p$ . Für  $x' = (x'_j) \in \ell_q$  gilt  $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x_j, x' \rangle| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} |x'_j| < \infty$  nach der Hölderschen Ungleichung.

b) Eine Familie  $x : I \rightarrow E$  heißt summierbar, Notation:  $x \in \ell_1\{I, E\}$ , wenn es zu  $\varepsilon > 0$  und  $p \in \mathfrak{H}(E)$  eine endliche Indexmenge  $I_0 \in \mathfrak{E}(I)$  gibt, sodass für  $I' \in \mathfrak{E}(I)$  mit  $I' \cap I_0 = \emptyset$  stets  $p(\sum_{i \in I'} x_i) \leq \varepsilon$  gilt.

Für  $x \in \ell_1\{I, E\}$  zeigt man die Stetigkeit von  $\lambda(x) : E'_\kappa \rightarrow \ell_1(I)$  mittels Aufgabe 8.5. Durch  $\lambda : x \mapsto \lambda(x)$  wird  $\ell_1\{I, E\}$  mit einem Unterraum von  $\ell_1(I) \varepsilon E$  identifiziert, und die induzierte Topologie ist durch die Halbnormen  $\varepsilon_p(x) := \sup_{x' \in U_p^\circ} \sum_{i \in I} |\langle x_i, x' \rangle|$ ,

$p \in \mathfrak{H}(E)$ , gegeben. Für  $u \in \ell_1(I) \varepsilon E$  definiert man  $x_i := u'(\delta_i)$  für  $i \in I$  und erhält  $x \in \ell_1\{I, E\}$  sowie  $\lambda(x) = u$ ; somit ist  $\lambda$  auch surjektiv.

Die Aussage über absolutsummierbare Familien ist ein Spezialfall von Satz 10.26.

**Aufgabe 10.23** ergibt sich wie im skalaren Fall  $Y_n = \mathbb{K}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (vgl. [GK],

Abschnitt 9.4).

**Aufgabe 10.24** Für  $x \in \ell_2[0, 1]$  gilt  $\sum_{t \in [0, 1]} |\langle x | e_t \rangle|^2 < \infty$ , also  $\langle f(t) | x \rangle \neq 0$  nur für abzählbar viele  $t \in [0, 1]$ . Da die Werte von  $f$  nicht f.ü. in einem separablen Teilraum von  $\ell_2[0, 1]$  liegen, ist  $f$  nicht messbar.

**Aufgabe 10.25** a) Man verfährt wie im skalaren Fall (vgl. [GK], Satz A.3.14).

b) folgt aus dem Theorem 9.29 von Bartle und Graves.

**Aufgabe 10.26** a) Es sei  $t = \sum_k \xi_k \otimes \eta_k = 0$  in  $H \otimes G \simeq L(G, H)$ . Für  $y \in G$  folgt dann  $\sum_k \langle y | \eta_k \rangle \xi_k = t(y) = 0$  und somit auch  $\sum_k \langle x | \xi_k \rangle \langle y | \eta_k \rangle = \langle x | t(y) \rangle = 0$  für  $x \in H$ . Somit ist das Produkt wohldefiniert; es ist auch definit: Ist  $t \in H \otimes G$  mit  $\langle t | t \rangle = 0$ , so schreiben wir  $t = \sum_{i,j} c_{ij} e_i \otimes f_j$  mit orthonormalen Vektoren  $\{e_i\}$  in  $H$  und  $f_j$  in  $G$  und erhalten  $\sum_{i,j} |c_{ij}|^2 = 0$ .

b) Offenbar ist  $\{e_i \otimes f_j\}$  ein Orthonormalsystem in  $H \hat{\otimes}_2 G$ , und Fourier-Entwicklung zeigt  $H \otimes G \subseteq \overline{[e_i \otimes f_j]}$ .

c) Es seien  $\{f_j\}$  und  $\{e_i\}$  Orthonormalbasen der Räume  $L_2(\Omega)$  und  $H$ . Für Tensoren  $t = \sum_{j,i} c_{ji} f_j(s) \otimes e_i \in L_2(\Omega) \otimes H$  gilt  $\|t\|_2^2 = \sum_{j,i} |c_{ji}|^2 = \int_\Omega \|t(s)\|_H^2 d\mu$ , und daher induziert  $L_2(\Omega, H)$  auf  $L_2(\Omega) \otimes H$  die Norm  $\|\cdot\|_2$ . Nach b) ist  $L_2(\Omega) \otimes H$  dicht in  $L_2(\Omega, H)$ . Die andere Aussage ergibt sich genauso.

d) Man hat  $f(t) = \sum_i f_i(t) e_i$  mit  $f_i(t) = \langle f(t) | e_i \rangle$  und  $\hat{f}(k) = \int_{-\pi}^\pi f(t) e^{-ikt} dt = \sum_i \hat{f}_i(k) e_i$ , also  $\sum_k \|\hat{f}(k)\|^2 = \sum_{k,i} |\hat{f}_i(k)|^2 = \sum_i \int_{-\pi}^\pi |f_i(t)|^2 dt = \int_{-\pi}^\pi |f(t)|^2 dt$ .

**Aufgabe 10.27** Für  $1 \leq p < \infty$  und  $t_j \rightarrow t$  gilt  $\phi(t_j + s) \rightarrow \phi(t + s)$  in  $L_p$  nach Aufgabe 2.7. Es ist  $\hat{f}(k) = \int_{-\pi}^\pi \phi(t + s) e^{-ikt} dt = \int_{-\pi}^\pi \phi(u) e^{-iku} du e^{iks} = \hat{\phi}(k) e^{iks}$ , und es gilt  $\sum_k \|\hat{f}(k)\|^2 < \infty$  nur für  $p \geq 2$ .

**Aufgabe 11.1** Für  $T \in S_p(X, Y)$  und  $\varepsilon > 0$  gibt es  $m \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{j=m+1}^\infty \alpha_j(T)^p < \varepsilon^p$ . Es

folgt  $m \alpha_{2m}(T)^p \leq \sum_{j=m+1}^{2m} \alpha_j(T)^p < \varepsilon^p$ , und wir wählen  $F \in \mathcal{F}(X, Y)$  mit  $\text{rk } F \leq 2m$  und  $m \|T - F\|^p < \varepsilon^p$ . Es folgt  $\alpha_{2m+k}(T - F) \leq \alpha_k(T) + \alpha_{2m}(F) = \alpha_k(T)$  und somit  $\sum_{j=0}^\infty \alpha_j(T - F)^p \leq \sum_{j=0}^{3m} \alpha_j(T - F)^p + \sum_{k=m+1}^\infty \alpha_k(T)^p \leq (3m + 1) \|T - F\|^p + \varepsilon^p \leq 5\varepsilon^p$ .

**Aufgabe 11.2** a) „ $\Rightarrow$ “: Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es  $P = P^2 \in L(X)$  mit  $\text{rk } P < \infty$  und  $\|T|_{N(P)}\| \leq \varepsilon$ . Zu  $\delta := \min\{\frac{\varepsilon}{\|T\|}, 1\} > 0$  gibt es  $x_1, \dots, x_r \in \overline{U} = \overline{U}_1(0)$ , sodass  $\{Px_1, \dots, Px_r\}$  ein  $\delta$ -Netz von  $P(\overline{U})$  ist. Dann ist  $\{Tx_1, \dots, Tx_r\}$  ein  $4\varepsilon$ -Netz von  $T(\overline{U})$ .

„ $\Leftarrow$ “: Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\varepsilon$ -Netz  $\{Tx_1, \dots, Tx_r\}$  von  $T(\overline{U})$ . Nun wählen wir  $y'_j \in Y'$  mit  $\|y'_j\| = 1$  und  $\|Tx_j\| = |\langle Tx_j, y'_j \rangle| = |\langle x_j, T'y'_j \rangle|$ . Für den Raum  $N := \bigcap_{j=1}^r N(T'y'_j)$  gilt  $\text{codim } N \leq r$ , und für  $x \in \overline{U} \cap N$  gibt es ein  $j \in \{1, \dots, r\}$  mit  $\|Tx\| \leq \varepsilon + \|Tx_j\| \leq \varepsilon + |\langle Tx_j, y'_j \rangle| \leq \varepsilon + |\langle (Tx_j - Tx)y'_j \rangle| \leq 2\varepsilon$ .

b) Nach Definition ist  $c_j(T)$  unabhängig von einer „Erweiterung“ des Zielraums.

c) Für  $i_0 : \ell_1 \rightarrow c_0$  ist  $\alpha_j(i_0) \leq \|i_0\| \leq 1$  für  $j \geq 0$ . Für  $F \in \mathcal{F}(\ell_1, c_0)$  und  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\varepsilon$ -Netz  $\{y_1, \dots, y_r\}$  von  $i_0(\overline{U})$ . Mit  $y_i = (y_{ik})_{k \in \mathbb{N}_0}$  gibt es  $n \in \mathbb{N}$  mit  $|y_{in}| \leq \varepsilon$  für  $i = 1, \dots, r$ . Wir wählen  $\ell$  mit  $\|Fe_n - y_\ell\| \leq \varepsilon$  für den  $n$ -ten Einheitsvektor und erhalten  $\|i_0 - F\| \geq \|e_n - Fe_n\| \geq \|e_n - y_\ell\| - \varepsilon \geq |1 - y_{\ell n}| - \varepsilon \geq 1 - 2\varepsilon$ .

Mit  $e := (1, 1, 1, \dots) \in \ell_\infty \cong \ell'_1$  definieren wir  $F_1 := \frac{1}{2}e \otimes e \in L(\ell_1, \ell_\infty)$ . Dann ist  $\text{rk } F_1 = 1$ , und für  $i_\infty : \ell_1 \rightarrow \ell_\infty$  gilt  $\alpha_j(i_\infty) \leq \|i_\infty - F_1\| = \frac{1}{2}$  für  $j \geq 1$ . Nun sei  $F \in L(\ell_1, \ell_\infty)$  mit  $\gamma := \|i_\infty - F\| < \frac{1}{2}$ . Mit  $Fe_i = (y_{ik})$  gilt dann  $|\delta_{ik} - y_{ik}| < \gamma$ , für  $i \neq k$  also  $\|Fe_i - Fe_k\| \geq |y_{ik} - y_{kk}| = |1 - y_{ik} - (1 - y_{kk})| \geq 1 - 2\gamma$ . Somit ist  $F(\overline{U})$  nicht präkompakt, und es gilt  $F \notin \mathcal{F}(\ell_1, \ell_\infty)$ .

**Aufgabe 11.3** a) Für  $F \in L(X, Y)$  mit  $\text{rk } F \leq j$  ist  $\text{codim } N(F) \leq j$  und  $\|T|_{N(F)}\| = \|(T - F)|_{N(F)}\| \leq \|T - F\|$ , also  $c_j(T) \leq \|T - F\|$ .

b) Für Hilberträume  $X$  vgl. [GK], Satz 12.12. Nun seien  $Y$  ein  $\mathcal{P}_1$ -Raum,  $\varepsilon > 0$  und  $X_j \subseteq X$  mit  $\text{codim } X_j = j$  und  $\|T|_{X_j}\| \leq (1 + \varepsilon)c_j(T)$ . Es gibt eine Fortsetzung  $S \in L(X, Y)$  von  $T|_{X_j}$  mit  $\|S\| \leq (1 + \varepsilon)c_j(T)$ . Dann ist  $\text{rk}(T - S) \leq j$ , und es gilt  $\alpha_j(T) \leq \|T - (T - S)\| \leq (1 + \varepsilon)c_j(T)$ .

c) vgl. [GK], S. 179, dann  $c_j(T) = c_j(\iota T) = \alpha_j(\iota T)$ .

d) Es sei  $Y$  ein  $\mathcal{P}_1$ -Raum. Für  $T \in K(X, Y)$  gilt  $c_j(T) \rightarrow 0$  nach Aufgabe 11.2 a), also auch  $\alpha_j(T) \rightarrow 0$  nach b). Nun verwendet man Satz 10.20.

**Aufgabe 11.4** Für eine ONB  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  von  $L_2(\Omega)$  ist  $\{e_i(t)e_j(s)\}_{i,j \in \mathbb{N}}$  eine ONB von  $L_2(\Omega^2)$ , und es folgt  $\sum_i \|Se_i\|^2 = \sum_{i,j} |\langle Se_i | e_j \rangle|^2 = \sum_{i,j} |\hat{\kappa}(i, j)|^2 < \infty$ .

**Aufgabe 11.5** a) Für  $x \in H$  und  $t \in K$  gilt  $Tx(t) = \langle Tx, \delta_t \rangle = \langle x, T'\delta_t \rangle = \langle x | j_H^{-1} T' \delta_t \rangle$  mit der kanonischen Isometrie  $j_H : H \rightarrow H'$ . Für eine Orthonormalbasis  $\{e_i\}_{i \in I}$  von  $H$  gilt daher für jede endliche Indexmenge  $I' \subseteq I$ :  $\sum_{i=1}^m \|j T e_i\|^2 = \sum_{i=1}^m \int_K |T e_i(t)|^2 dt = \int_K \sum_{i=1}^m |\langle e_i, j_H^{-1} T' \delta_t \rangle|^2 dt \leq \int_K \|j_H^{-1} T' \delta_t\|^2 dt \leq \lambda(K) \|T'\|^2 = \lambda(K) \|T\|^2$  aufgrund der Besselschen Ungleichung.

b) Nach der Lösung von Aufgabe 10.11 a) ist eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{A}^2(\Omega)$  auch eine solche in  $\mathcal{H}(\Omega)$ .

c) Nach der Lösung von Aufgabe 10.11 a) ist  $\rho \in L(\mathcal{A}^2(\Omega), \mathcal{C}(\overline{\omega}))$ , nach a) also  $\rho \in S_2(\mathcal{A}^2(\Omega), L_2(\overline{\omega}))$ .

d) folgt mit Satz 11.2 c) durch „Dazwischenschieben“ weiterer relativ kompakter offener Mengen.

**Aufgabe 11.6** a) Es ist  $\nu(i) \geq \|i\| = 1$ . Mit  $M := \{y = (y_j) \in \mathbb{R}^n \mid y_j = \pm 1\}$  gilt  $i = 2^{-n} \sum_{y \in M} y \otimes y$  und somit  $\nu(i) \leq 1$ .

b) Mit  $\lambda_n := (\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots)$  gilt  $\nu(D_{\lambda_n}) \leq \sup_{j \leq n} |\lambda_j|$  wegen a). Ebenso folgt  $\nu(D_{\lambda_n} - D_{\lambda_m}) \leq \sup_{m < j \leq n} |\lambda_j|$  für  $m < n$ , und  $(D_{\lambda_n})$  ist Cauchy-Folge in  $N(\ell_1, \ell_\infty)$ .

Wegen der Vollständigkeit dieses Raumes folgt  $D_\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} D_{\lambda_n} \in N(\ell_1, \ell_\infty)$  und  $\nu(D_\lambda) \leq \|\lambda\|_{\sup}$ . Umgekehrt ist  $\nu(D_\lambda) \geq \|D_\lambda\| = \|\lambda\|_{\sup}$ .

**Aufgabe 11.7** „ $\Leftarrow$ “: Mit  $x'_j = (a_{jk})_k \in \ell_\infty \cong \ell'_1$  gilt offenbar  $T = \sum_j x'_j \otimes e_j$  und  $\nu(T) \leq \sum_j \|x'_j\| \|e_j\| = \sum_j \sup_k |a_{jk}|$ .

„ $\Rightarrow$ “: Zu  $\varepsilon > 0$  sei  $T = \sum_j y'_j \otimes y_j$  mit  $\sum_j \|y'_j\| \|y_j\| \leq \nu(T) + \varepsilon$ . Mit  $y'_j = (\xi_{jk}) \in \ell_\infty$  und  $y_j = (\eta_{jk}) \in \ell_1$  gilt  $Tx = \sum_j (\sum_k \xi_{jk} x_k \sum_\ell \eta_{j\ell} e_\ell) = \sum_\ell (\sum_j \sum_k \xi_{jk} \eta_{j\ell} x_k) e_\ell =: \sum_\ell (\sum_k a_{\ell k} x_k) e_\ell$  und  $\sum_\ell \sup_k |a_{\ell k}| \leq \sum_\ell \|y'_\ell\| \|y_\ell\| \leq \nu(T) + \varepsilon$ .

**Aufgabe 11.8** Es seien  $T = \sum_j x'_j \otimes y_j \in N(X, Y)$  und  $S = \sum_k y'_k \otimes z_k \in N(Y, Z)$  mit  $(\|x'_j\|), (\|y_j\|), (\|y'_k\|), (\|z_k\|) \in \ell_2$ . Wir definieren dann Operatoren  $A \in L(X, \ell_2), B \in L(\ell_2, Z)$  und  $M \in L(\ell_2)$  durch  $Ax := (\langle x, x'_j \rangle)_j, B(\zeta_k)_k := \sum_k \zeta_k z_k$  und die Matrix  $(\langle y_j, y'_k \rangle)_{jk}$ . Dann gilt  $ST = BMA$ , und wegen  $\sum_{j,k} |\langle y_j, y'_k \rangle|^2 \leq \sum_j \|y_j\|^2 \cdot \sum_k \|y'_k\|^2 < \infty$  ist  $M \in S_2(\ell_2)$ .

**Aufgabe 11.9** Zu  $\varepsilon > 0$  sei  $T = \sum_j z'_j \otimes y_j$  mit  $\sum_j \|z'_j\| \|y_j\| \leq \nu(T) + \varepsilon$ . Man setzt dann  $z'_j \in G'$  mit dem Satz von Hahn-Banach zu  $x'_j \in X'$  mit  $\|x'_j\| = \|z'_j\|$  fort.

**Aufgabe 11.10** c) Mit  $c_k := \|x'_k\| \|y_k\|$  ist  $\alpha_j(T) \leq \sum_{k=j}^\infty c_k$  und o.E.  $(c_k)$  fallend. Es gilt  $kc_k^p \rightarrow 0$ , also  $c_k \leq Mk^{-\frac{1}{p}}$  und  $\alpha_j(T) \leq Mj^{1-\frac{1}{p}}$ .

**Aufgabe 11.11** ergibt sich sofort aus Formel (35).

**Aufgabe 11.12** Die letzte Gleichung ist i. A. falsch, da für  $\nu(F)$  das Infimum über alle auch *unendlichen* Darstellungen des Operators  $F$  gebildet werden muss.

**Aufgabe 11.13** siehe [Lindenstrauß und Tzafriri 1977], 1.e.8.

**Aufgabe 11.14** siehe etwa [Meise und Vogt 1992], 16.24 und 16.26.

**Aufgabe 11.15** a) Man „multipliziert“ die beiden nuklearen Reihenentwicklungen.

b) Für  $p \in \mathfrak{H}(E), q \in \mathfrak{H}(F)$  und  $r = p \otimes_\pi q \in \mathfrak{H}(E \otimes_\pi F)$  gilt  $(E \otimes_\pi F)_r = E_p \otimes F_q$ . Nach a) ist  $E \hat{\otimes}_\pi F$  nuklear, und dies gilt dann auch für dessen Unterraum  $E \varepsilon F$ .

**Aufgabe 11.16** a) Es gibt  $q \in \mathfrak{H}(E)$ , sodass  $\hat{\rho}_q^p : \hat{E}_q \rightarrow \hat{E}_p$  nuklear ist. Für  $x \in E$  gilt also  $\rho_p x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle \rho_q x, \eta'_j \rangle \xi_j$  in  $\hat{E}_p$ , also  $E_p \subseteq \overline{[\xi_j]_{j \in \mathbb{N}}}$ .

b) Nach Satz 7.9 und a) ist  $E \hookrightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} \hat{E}_{p_n}$  separabel.

**Aufgabe 11.17** a) Es ist  $Sx = \sum_j s_j \langle x | e_j \rangle f_j$  mit Orthonormalsystemen  $\{e_j\}$  in  $H$  und  $\{f_j\}$  in  $G$  und  $\sum_j s_j^2 < \infty$ . Für  $1 \leq p \leq 2$  setzen wir  $A_p x := (s_j \langle x | e_j \rangle)$  und  $B_p(\xi_j) := \sum_j \xi_j f_j$ , für  $p > 2$  und  $p = 0$  statt dessen  $A_p x := (\langle x | e_j \rangle)$  und  $B_p(\xi_j) := \sum_j s_j \xi_j f_j$ .

b) Zu  $q \in \mathfrak{S}(E)$  gibt es  $q \leq r \in \mathfrak{S}(E)$  mit  $\hat{\rho}_r^q \in S_2(\hat{E}_r, \hat{E}_q)$ ; mit dem in a) dazu konstruierten Operator setzt man dann  $\tilde{q}_p(x) := \|A_p \rho_r x\|$  für  $x \in E$ .



**Aufgabe 11.18** a) Es seien  $E$  ein Schwartzraum und  $B \in \mathfrak{B}(E)$ . Dann sind alle  $\rho_q B$  beschränkt, also alle  $\overline{\rho_p B}$  kompakt in  $\hat{E}_p$ . Ist nun  $E \hookrightarrow \prod_p \hat{E}_p$  vollständig, so ist  $B$  relativ kompakt in  $E$ . Die Umkehrungen gelten nicht.

b) Ein Köthe-Raum  $\lambda^p(A)$  ist genau dann Schwartz, wenn gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \exists k \leq n \in \mathbb{N}_0 : \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a_{j,k}}{a_{j,n}} = 0.$$

d) Genau dann ist  $K \in \mathfrak{K}(E)$  sehr kompakt, wenn es  $C \in \mathfrak{K}(E)$  gibt, sodass  $K$  in  $E_C$  kompakt ist, falls also  $E_K \rightarrow E_C$  kompakt ist. Dies ist äquivalent zur Kompaktheit des dualen Operators  $E'_{C^o} \rightarrow E'_{K^o}$ .

e) Die induktive lokalkonvexe Topologie  $\mathfrak{T}^i = \mathfrak{T}^i\{i_{U^o} : E'_{U^o} \rightarrow E \mid U \in \mathbb{U}(E)\}$  auf  $E'$  ist ultrabornologisch und stärker als  $\beta(E', E)$ . Zu  $U \in \mathbb{U}(E)$  gibt es ein  $V \in \mathbb{U}(E)$ , sodass  $i_{V^o}^{V^o} : E'_{V^o} \rightarrow E'_{V^o}$  kompakt ist. Somit induzieren  $\sigma(E', E)$  und  $E'_{V^o}$  die gleiche Topologie auf  $U^o$ , und daher stimmen die Topologien  $\sigma(E', E)$  und  $\mathfrak{T}^i$  auf allen gleichstetigen Mengen in  $E'$  überein. Da  $E$  vollständig ist, ist  $\gamma(E', E)$  nach Aufgabe 8.5 stärker als  $\mathfrak{T}^i$ , und daraus folgt  $\beta(E', E) = \gamma(E', E) = \mathfrak{T}^i$ .

**Aufgabe 11.19** a) Ein Fundamentalsystem von Normen auf  $\Lambda_R(\alpha)$  ist gegeben durch  $\|x\|_t^2 = \sum_j e^{2t\alpha_j} |x_j|^2$  für  $t < R$ . Wegen  $\sum_j e^{(s-t)\alpha_j} < \infty$  für  $s < t$  gilt  $\hat{\rho}_s^t \in S_1$ , mittels „Dazwischenschieben“ weiterer Zahlen sogar  $\hat{\rho}_s^t \in S = \bigcup_{p>0} S_p$ .

c) Nach Aufgabe 11.5 ist  $\mathcal{H}(\Omega)$   $s$ -nuklear; dies gilt aber nicht für den Raum  $s$ .

**Aufgabe 11.20** a) Es gibt  $V \in \mathbb{U}(E)$ , sodass  $E'_{U^o} \rightarrow E'_{V^o}$  nuklear ist. Insbesondere ist  $U^o$  in  $E'_{V^o}$  kompakt und metrisierbar, und dies gilt dann auch in  $E'_\beta$ .

b) Es ist  $[0, 1]^\mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}^\mathbb{R} \simeq \varphi(\mathbb{R})'_\beta$  gleichstetig, aber nicht metrisierbar; die Behauptung folgt daher aus a).

**Aufgabe 11.21** Die erste Aussage folgt aus den Sätzen 8.28 und 11.15 b). Ein Operator  $P \in L(\mathcal{E}(\Omega), \mathcal{H}(\Omega)) \simeq \mathcal{H}(\Omega) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E}'_\beta(\Omega)$  mit  $P\iota = I$  ist eine stetige Projektion von  $\mathcal{E}(\Omega)$  auf  $\mathcal{H}(\Omega)$ , kann wegen Satz 9.34 jedoch nicht existieren.

**Aufgabe 12.1** Es gibt ein Netz  $\{X_\gamma\}$  von Unterräumen von  $X$  mit  $d(X_\gamma, \ell_\infty^{r_\gamma}) \leq \lambda$  und  $\bigcup_\gamma X_\gamma = X$ . Dazu gibt es Projektoren  $P_\gamma : X \rightarrow X_\gamma$  mit  $\|P_\gamma\| \leq \lambda$  und  $P_\gamma x \rightarrow x$  für alle  $x \in X$ .

**Aufgabe 12.2** a) Es ist  $L_e(F'_\kappa, G)$  ein topologischer Unterraum von  $L_e(F'_\kappa, E)$ .

b) folgt sofort aus a) und Satz 10.17.

c) „ $\Rightarrow$ “: Für  $u \in F \varepsilon G$  gilt  $(I \varepsilon \iota)u \in F \varepsilon E = F \hat{\otimes}_\varepsilon E$ , und es ist  $(I \hat{\otimes}_\varepsilon \sigma)(I \varepsilon \iota)u = 0$ . Nach Voraussetzung folgt  $(I \varepsilon \iota)u \in R(I \hat{\otimes}_\varepsilon \iota)$ , also  $u \in F \hat{\otimes}_\varepsilon G$ . Die A.E. von  $G$  folgt nun aus Satz 10.17. Die Umkehrung „ $\Leftarrow$ “ ist klar.

**Aufgabe 12.3** Es ist  $I \varepsilon \iota' : L(E, F) \rightarrow L(G, F)$  die Restriktionsabbildung (man beachte Aufgabe 10.19).

**Aufgabe 12.4** Es ist  $P(D)$  nach Theorem 7.33 eine Quotientenabbildung, da  $\mathcal{D}(\Omega)$  ultrabornologisch ist (Satz 9.33) und ein Gewebe besitzt (vgl. S. 166). Da  $\mathcal{D}(\Omega)$  ein Schwartz-Raum ist, ist jede kompakte Menge in  $\mathcal{D}'_\beta(\Omega)$  sehr kompakt (Aufgabe 11.18 d)). Für  $u \in L_e(F'_\kappa, \mathcal{D}'(\Omega))$  gibt es also  $C \in \mathfrak{K}(\mathcal{D}'(\Omega))$ , sodass  $u(\overline{U}_1^{F'})$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)_C$  kompakt ist, und mit Aufgabe 8.5 folgt  $u \in L_e(F'_\kappa, \mathcal{D}'(\Omega)_C)$ . Da  $\mathcal{D}(\Omega)$  nuklear ist, gibt es  $K \in \mathfrak{K}(\mathcal{D}'(\Omega))$ , sodass  $i_{CK} : \mathcal{D}'(\Omega)_C \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)_K$  nuklear ist. Nach einem Resultat von [De Wilde 1978] gibt es  $L \in \mathfrak{K}(\mathcal{D}'(\Omega))$  mit  $P(D)L = K$ , und mittels nuklearer Reihenentwicklung von  $i_{CK}$  liftet man  $i_{CK}u$  zu  $v \in L_e(F'_\kappa, \mathcal{D}'(\Omega)_L)$ .

**Aufgabe 12.5** Für  $t \in F \otimes G \subseteq F \otimes E$  und  $\varepsilon > 0$  schreibt man  $t = \sum_{j=1}^r f_j \otimes x_j$  mit  $f_j \in F$ ,  $x_j \in E$  und  $\|t\|_{F \otimes_\pi E} \geq \sum_{j=1}^r \|f_j\| \|x_j\| - \varepsilon$ . Es gibt einen Unterraum  $U$  von  $F$  mit  $f_1, \dots, f_r \in U$  und  $d(U, \ell_1^m) \leq \lambda$ . Mit Satz 10.26 folgt dann

$$\|t\|_{F \otimes_\pi E} + \varepsilon \geq \|t\|_{U \otimes_\pi E} \geq \lambda \|t\|_{U \otimes_\pi G} \geq \lambda \|t\|_{F \otimes_\pi G}.$$

Für einen  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum  $F'$  ist  $F$  ein  $\mathcal{L}_1$ -Raum und somit  $F'$  injektiv nach Satz 12.5.

**Aufgabe 12.6** Es gibt ein Netz  $\{B_\alpha\}$  in  $\mathcal{F}(X')$  mit  $\|B_\alpha\| \leq \Lambda$  für ein  $\Lambda > 0$  und  $B_\alpha \rightarrow I$  in  $L_\gamma(X')$ . Es gibt  $F_\alpha \in \mathcal{F}(X)$  mit  $B_\alpha = F'_\alpha$ . Für  $L_\alpha : L(X, Y) \rightarrow K(X, Y)$ ,  $L_\alpha(T) := TF_\alpha$ , gilt dann  $\|L_\alpha\| \leq \Lambda$  und  $\|L_\alpha(T) - T\| = \|B_\alpha T' - T'\| \rightarrow 0$  für  $T \in K(X, Y)$ .

**Aufgabe 12.7** a) Definiere  $S_\alpha : L(G, X') \rightarrow L(E, X')$  durch  $S_\alpha(T) := TL_\alpha$ . Dann ist  $\|S_\alpha\| \leq \Lambda$ , und nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki gibt es ein Teilnetz mit  $S_\gamma(T) \rightarrow S(T)$  punktweise in  $\sigma(X', X)$ . Dann ist  $S \in L(L(G, X'), L(E, X'))$  eine stetige lineare Rechtsinverse von  $\rho$ .

b) Für  $P_\alpha : L(E, X') \rightarrow L(Q, X')$ ,  $P_\alpha(T) := TR_\alpha$  liefert ein Teilnetz wie in a) eine Projektion  $P : L(E, X') \rightarrow L(Q, X')$ .

**Aufgabe 12.8** b) Für Unterräume  $V \subseteq Q$  mit  $d(V, \ell_1^v) \leq \lambda$  gibt es  $R_V \in L(V, E)$  mit  $\|R_V\| \leq \lambda$  und  $\sigma R_V y = y$  für  $y \in V$ .

c) Zu  $t = \sum_{j=1}^r f_j \otimes y_j \in F \otimes Q$  wählen wir Vektoren  $x_j \in E$  mit  $\sigma x_j = y_j$ . Wegen  $\sigma(x_j - R_\alpha y_j) \rightarrow 0$  gibt es  $\alpha$  mit  $\|\sigma(x_j - R_\alpha y_j)\| < \eta := \|t\| (\sum_j \|f_j\|)^{-1}$ . Für  $z_j \in G$  mit  $\|x_j - R_\alpha y_j - z_j\| < \eta$  setzen wir  $s := \sum_j f_j \otimes (x_j - z_j) \in F \otimes E$ . Dann gilt  $(I \otimes \sigma)s = t$  und

$$\begin{aligned} \|s\| &\leq \|s - \sum_j f_j \otimes R_\alpha x_j\| + \|\sum_j f_j \otimes R_\alpha x_j\| \\ &\leq \sup_{\|f'\| \leq 1} |\sum_j \langle f_j, f' \rangle (x_j - z_j - R_\alpha y_j)| + \sup_{\|f'\| \leq 1} |\sum_j \langle f_j, f' \rangle R_\alpha y_j| \\ &\leq \eta \sum_j \|f_j\| + \|R_\alpha\| \|y\| \leq (1 + \Lambda) \|t\|. \end{aligned}$$

**Aufgabe 12.9** Für  $u \in L_e(Q'_\kappa, F)$  gibt es  $C \in \mathfrak{K}(F)$ , sodass  $u(\overline{U}_1^{Q'})$  in  $F_C$  kompakt ist. Mit Aufgabe 8.5 folgt  $u \in L_e(Q'_\kappa, F_C) = F_C \hat{\otimes}_\varepsilon Q$ , und es gibt ein Lifting nach  $F_C \hat{\otimes}_\varepsilon E$ .

**Aufgabe 12.10** Für  $f \in \mathcal{H}v_0(\Omega, F)$  ist die Menge  $vf(\Omega)$  kompakt in  $F$ ; daher ist die Abbildung  $\lambda: \mathcal{H}v_0(\Omega, F) \rightarrow L_e(F'_\kappa, \mathcal{H}v_0(\Omega))$  aus (10.1) ein topologischer Isomorphismus. Wegen  $\delta \in \mathcal{H}v_0(\Omega, \mathcal{H}v_0(\Omega)'_\kappa)$  ist dieser surjektiv.

**Aufgabe 12.11** a) folgt leicht aus Satz 12.3.

b) Andernfalls ergibt sich mittels a) ein Widerspruch zu Theorem 12.10.

**Aufgabe 12.12** a) Wegen (34) ist  $\|\cdot\|_0$  eine Norm auf  $E$ . Für  $x \neq 0$  und  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\frac{\|x\|_k}{\|x\|_{k-1}} \leq C_k \frac{\|x\|_{k+1}}{\|x\|_k}$ , und daraus folgt  $\frac{\|x\|_k}{\|x\|_0} \leq C \frac{\|x\|_{2k}}{\|x\|_k}$ , also (9) mit  $d = 0$ .

b) Für  $x \in [a, b]$  gilt  $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{h^2}{2}f''(x+\theta h)$  mit  $\theta \in [0, 1]$ , also  $|f'(x)| \leq \frac{2}{h}\|f\|_{\sup} + \frac{h}{2}\|f''\|_{\sup}$  und  $\|f\|_1^2 \leq C_1\|f\|_0\|f\|_2$ . Nun folgt (34) durch Anwendung auf die Ableitungen von  $f$ .

c) Man argumentiert wie in b) längs Strecken in  $\Omega$ .

**Aufgabe 12.13** Anordnung der Taylor-Koeffizienten in eine Reihe über  $\mathbb{N}_0$  liefert  $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \simeq \Lambda_\infty(j^{1/n})$ . Dieser Raum hat  $(DN)$  und  $(\Omega)$ , und man verwendet Satz 12.23. Es gilt nicht  $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \simeq s$ , da  $s$  nicht  $s$ -nuklear ist (vgl. Aufgabe 11.19).

**Aufgabe 12.14** a) Zu  $p \in \mathbb{N}_0$  gibt es  $q \in \mathbb{N}_0$ , sodass  $\hat{\rho}_q^p: \hat{E}_q \rightarrow \hat{E}_p$  kompakt ist. Für  $n \in \mathbb{N}$  gibt es endliche Mengen  $A_n \subseteq E$  mit  $U_q \subseteq A_n + \frac{1}{n}U_p$  und o.E.  $A_n \subseteq A_{n+1}$ . Wir setzen  $\phi_{p,k}(r) := \max\{\|x\|_k \mid x \in A_n\}$  für  $n-1 < r \leq n$  und erhalten  $U_q \subseteq \phi_{p,k}(r)U_k + \frac{1}{r}U_p$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $r > 0$ . Nun wählen wir  $\phi > 0$  wachsend mit  $\sup_r \frac{\phi_{p,k}(r)}{\phi(r)} < \infty$  für alle  $p, k \in \mathbb{N}_0$ .

b) ergibt sich wie auf S. 307.

c) Wie in Satz 12.13 ergibt sich  $a_{j,k} \leq C\phi(a_{j,q})a_{j,p}$  für einen nuklearen Köthe-Raum  $\lambda(A)$  mit  $(\Omega_\phi)$ . Für ein Gegenbeispiel wählt man  $a_{j,1} = 1$  und rekursiv  $a_{j,k+1} \geq a_{j,k}$ , sodass  $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a_{j,k}}{a_{j,k+1}}\phi(a_{j,k}) = 0$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{j,k}}{a_{j,k+1}} < \infty$  gilt.

**Aufgabe 12.15** Zu zeigen ist die Surjektivität der Abbildung  $\rho: u \mapsto u \circ \sigma'$  von  $L(E', F)$  auf  $L(E', Q)$ . Für  $v \in L(Q', F)$  seien  $H_0 := \{(vy', -\sigma'y') \in F \times E' \mid y' \in Q'\}$  und  $H := (F \times E')/H_0$ . Durch  $(f, x') \rightarrow \iota'x'$  wird eine Surjektion  $\beta: H \rightarrow G'$  definiert, und die Inklusion  $F \rightarrow F \times E'$  induziert eine solche  $\alpha: F \rightarrow H$ . Die exakte Sequenz  $0 \rightarrow F \xrightarrow{\alpha} H \xrightarrow{\beta} G' \rightarrow 0$  splittet nach Theorem 12.16, d.h. es existiert eine Linksinverse  $P \in L(H, F)$  von  $\alpha$ . Die Inklusion  $E' \rightarrow F \times E'$  induziert eine Abbildung  $\gamma: E' \rightarrow H$ , und für  $u := P\gamma \in L(E', F)$  gilt dann  $u\sigma' = P\gamma\sigma' = P\alpha v = v$ .

**Aufgabe 12.16** ist eine Umformulierung von Aufgabe 12.15.

**Aufgabe 12.17** a) Da Theorem 12.18 für die Räume  $\mathcal{D}(K)$  gilt, folgt es für  $\mathcal{D}(\Omega)$  mittels Zerlegung der Eins bzw. Satz 9.32.

b) Nach Theorem 12.18 b) gilt Theorem 10.10 für Funktionen mit Werten in  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Aufgabe 12.18** Dies gilt für Frécheträume  $F$ , für  $F = E'_\beta$  mit  $E \in (DN)$  oder auch für  $F = \mathcal{D}'_\beta(\Omega)$ .

**Aufgabe 12.19** Zerfällt jede exakte Sequenz  $0 \longrightarrow s \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$  nuklearer Frécheträume, so muss  $Q \in (DN)$  gelten.

Zerfällt jede exakte Sequenz  $0 \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$  nuklearer Frécheträume mit  $Q \in (DN)$ , so muss  $G \in (\Omega)$  gelten.

**Aufgabe 13.1** a) Nach Aufgabe 10.14 sind die Polynome dicht in  $\mathcal{A}(\overline{D})$ .

b) Nach dem Satz von Fejér sind die Polynome in  $z$  und  $\frac{1}{z}$  dicht in  $\mathcal{C}(\partial D)$ .

**Aufgabe 13.2** Für  $a \in \mathcal{A}$  definiert man  $L_a \in L(\mathcal{A})$  durch  $L_a(x) := ax$  und dann  $\|a\|^* := \|L_a\|$ .

**Aufgabe 13.3** Auf  $\mathcal{A} \oplus [e]$  definiert man in naheliegender Weise eine Multiplikation.

**Aufgabe 13.4** Man argumentiert wie in Satz 13.19.

**Aufgabe 13.5** a) Es gibt  $A \in J$  und  $x_0 \in X$  mit  $Ax_0 = y_0 \neq 0$ . Zu  $y' \otimes x \in \mathcal{F}(X)$  wählen wir  $B \in L(X)$  mit  $By_0 = x$  sowie  $y \in X$  mit  $\langle y, y' \rangle = 1$  und setzen  $C = y' \otimes x_0 \in L(X)$ . Dann gilt  $y' \otimes x = BAC \in J$ .

b) folgt sofort aus a).

**Aufgabe 13.7** Es seien  $\sigma(x) \subseteq \Omega$  offen,  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  und  $D \subseteq \mathcal{G}_{st}(\mathbb{C})$  mit  $\sigma(x) \subseteq D \subseteq \overline{D} \subseteq \Omega$ . Dann gilt  $\sigma(x_n) \subseteq D$  für große  $n$  (vgl. [GK], Aufgabe 4.10) und  $R_{x_n}(\lambda) \rightarrow R_x(\lambda)$  gleichmäßig auf  $\partial D$ .

**Aufgabe 13.8** Man multipliziert die Reihenentwicklungen.

**Aufgabe 13.9** Mit  $n = n(f; 0)$  ist  $f(t)$  homotop zu  $e^{int}$  in  $\mathcal{C}(S^1, S^1)$ . Dazu schreiben wir  $f(e^{it}) = e^{i\vartheta(t)}$  für  $0 \leq t \leq 2\pi$  mit o. E.  $\vartheta(0) = 0$  und verwenden die Homotopie  $H(s, e^{it}) = \exp(i(snt + (1-s)\vartheta(t)))$ ,  $0 \leq s \leq 1$ .

**Aufgabe 13.10** b) Für  $a := (\delta_{k1})$  gilt  $\|a^k\| = \frac{1}{k!}$ , also  $r(a) = 0$  und  $a \in \text{rad } \mathcal{A}$ . Dies impliziert auch  $x \in \text{rad } \mathcal{A}$  für  $x = \sum_{k \geq 1} x_k a^k$ . Für  $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$  folgt  $\varphi(x) = x_0 = \delta_0(x)$  für  $x \in \mathcal{A}$ .

**Aufgabe 13.11** a) Es ist  $\Gamma(z) : \mathfrak{M}(\mathcal{H}^\infty(D)) \rightarrow \overline{D}$  stetig und wegen (18) surjektiv. Für  $\varphi \in \mathfrak{M}$  sei  $\lambda := \Gamma(z)(\varphi) = \varphi(z) \in D$ . Für  $f \in N(\delta_\lambda)$  gilt  $f(\lambda) = 0$ , also  $f(z) = (z - \lambda)g(z)$  für ein  $g \in \mathcal{H}^\infty(D)$ . Es folgt  $\varphi(f) = (\varphi(z) - \lambda)\varphi(g) = 0$ , also  $N(\delta_\lambda) \subseteq N(\varphi)$  und  $\varphi = \delta_\lambda$ . Mit  $\Delta = \delta(D)$  ist somit  $\delta = (\Gamma(z)|_\Delta)^{-1} : D \rightarrow \Delta$  eine Homöomorphie.

b) „ $\Rightarrow$ “: Wegen  $\sum_k |\Gamma f_k(z)| \geq \varepsilon > 0$  auf  $\Delta$  haben die  $f_1, \dots, f_r$  keine gemeinsame Nullstelle auf  $\mathfrak{M}$ , und man verwendet Theorem 13.12 a).

„ $\Leftarrow$ “: Es gebe  $\varphi_0 \in \mathfrak{M} \setminus \overline{\Delta}$ . Zu  $\psi \in \overline{\Delta}$  gibt es dann  $f_\psi \in \mathcal{H}^\infty$  mit  $\varphi_0(f_\psi) = 0$  und

$|\Gamma f_\psi(\psi)| = 1$ . Es folgt  $|\Gamma f_\psi(\varphi)| \geq \frac{1}{2}$  auf einer Umgebung  $U(\psi)$  von  $\psi$ , und es gibt  $\psi_1, \dots, \psi_r \in \overline{\Delta}$  mit  $\overline{\Delta} \subseteq U(\psi_1) \cup \dots \cup U(\psi_r)$ . Mit  $f_k := f_{\psi_k}$  gilt dann  $\sum_k |\Gamma f_k(z)| \geq \frac{1}{2}$  auf  $\Delta$ , also  $\sum_k |f_k(z)| \geq \frac{1}{2}$  auf  $D$ . Aus  $\sum_k g_k f_k = 1$  folgte jedoch der Widerspruch  $\varphi_0(1) = 0$ .

**Aufgabe 13.12** Zu  $w \notin K$  gibt es  $f \in (\mathbb{R}^{2n})'$  mit  $|f(w)| > \max_K |f(z)|$  nach (3.42). Mit  $z = x + iy$  gilt  $f(z) = \sum_{j=1}^n (a_j x_j + b_j y_j)$ ; mit  $c_j = a_j - ib_j$  ist  $e^{f(z)} = |h(z)|$  mit  $h(z) := \exp(\sum_{j=1}^n c_j z_j)$ . Es ist  $P_m(z) := \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (\sum_{j=1}^n c_j z_j)^k$  ein Polynom in  $z$ , und aus  $|h(w)| > \max_K |h(z)|$  folgt auch  $|P_m(w)| > \max_K |P_m(z)|$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 13.13** Man kann die Funktionen  $z_1, \dots, z_n$  in  $\mathcal{C}(K)$  wählen.

**Aufgabe 13.14**  $\mathcal{A}$  muss natürlich kommutativ sein. Mit  $\sigma = \sigma(x_1, \dots, x_n)$  sei  $\lambda \notin \hat{\sigma}$ . Es gibt  $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{A}$  mit  $\sum_k y_k (\lambda_k e - x_k) = e$ . Für  $\sigma' = \sigma(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  gilt dann  $\pi(\sigma') = \sigma$  und  $\pi(\hat{\sigma}') \subseteq \hat{\sigma}$ , aber  $\lambda \notin \pi(\hat{\sigma}')$ , da aus  $\sum_k z_{n+k} (\lambda_k - z_k) = 1$  auf  $\sigma'$  dies auch auf  $\hat{\sigma}'$  folgt. Es gibt also eine Umgebung  $U(\lambda)$  mit  $\mu \notin \pi(\hat{\sigma}')$  für  $\mu \in U(\lambda)$ . Wir überdecken  $\hat{\sigma} \setminus \Omega$  mit endlich vielen solcher Umgebungen und notieren die entsprechenden  $y$ -Tupel mit  $(y_1, \dots, y_{kn})$ . Für  $\sigma'' = \sigma(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{kn})$  gilt dann  $\pi(\hat{\sigma}'') \subseteq \hat{\sigma} \cap \Omega$ .

**Aufgabe 13.15** Auch hier muss  $\mathcal{A}$  kommutativ sein. Es sei  $\lambda = \Gamma x(\varphi_0) \in \partial\sigma(x)$  und  $|\lambda - \Gamma x(\psi)| \geq 2\delta > 0$  für  $\psi \in \partial_{Sh}(\mathcal{A})$ . Wähle  $\mu \in \rho(x)$  mit  $|\mu - \lambda| < \delta$ ; für  $y := (\mu e - x)^{-1}$  ist dann  $\Gamma y = \frac{1}{\mu - \Gamma x}$ . Es folgt  $\|\Gamma y\| \leq \sup\{|\Gamma y(\psi)| \mid \psi \in \partial_{Sh}(\mathcal{A})\} \leq \frac{1}{\delta}$  im Widerspruch zu  $|\Gamma y(\varphi_0)| = \frac{1}{|\mu - \lambda|} > \frac{1}{\delta}$ .

**Aufgabe 13.16** Ist  $\|\sigma e\| < 1$ , so gibt es  $x \in \mathcal{L}$  mit  $\|e - x\| < 1$ , und  $x = e - (e - x)$  ist invertierbar. Offenbar gilt  $\|T(y)(\sigma x)\| \leq \|y\| \|x\|$ , also auch  $\|T(y)(\sigma x)\| \leq \|y\| \|\sigma x\|$ . Wegen  $\|T(y)(\sigma e)\| = \|\sigma y\|$  gilt schließlich  $\|T(y)\| \geq \|\sigma y\|$ .

**Aufgabe 13.18** Diese ergeben sich lokal mittels Neumannscher Reihe (vgl. Formel (2)) und global mittels Zerlegung der Eins.

**Aufgabe 13.19** a) Zur Lösung von  $T(z)x = y$  sei zunächst  $z \neq \frac{1}{j}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $x_1$  frei wählbar, und  $x_j$  für  $j \geq 2$  ist eindeutig festgelegt. Im Fall  $z = \frac{1}{j}$  ist  $x_j$  frei wählbar,  $x_1 = y_j$ , und die übrigen  $x_k$  sind festgelegt.

b) Es sei  $x : U_\delta(0) \setminus \{0\} \rightarrow \omega$  eine Lösung von  $T(z)x(z) = y$ . Dann ist  $x_1(\frac{1}{j}) = 2^{j-1}$ , und die Funktion  $z^r x_1(z)$  ist für alle  $r \in \mathbb{N}$  unbeschränkt.

Mit Satz 9.13 ergibt sich jedoch, dass zu  $y \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$  eine Lösung  $x \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$  von  $Tx = y$  existiert.

**Aufgabe 14.1** Im  $\Phi^-$ -Fall sei  $P : X \rightarrow N(T)$  ein Projektor. Wir definieren einfach  $F_0 : N(T) \rightarrow Y$  injektiv mit  $R(F_0) \cap R(T) = \{0\}$  und setzen  $F := F_0 P$ .

Im  $\Phi^+$ -Fall sei  $Y = R(T) \oplus_t Y_1$  und  $N_1 \subseteq N(T)$  mit  $\dim N_1 = \dim Y_1$ . Wir definieren  $F_1 : N_1 \rightarrow Y_1$  bijektiv und setzen  $F = F_1 Q$  mit einem Projektor  $Q$  auf  $N_1$ .

**Aufgabe 14.2** Für  $z \neq 0$  gilt  $T(z)x = 0 \Leftrightarrow x_k = x_0 z^{-k}$  für  $k \in \mathbb{N}$ , also  $n_T(z) = 1$ . Für  $y \in \omega$  ist  $T(z)x = y$  offenbar lösbar, wobei  $x_1$  frei wählbar ist.

**Aufgabe 14.3** a) Es ist  $(UT)^2 = UTUT = UT$  und  $(TU)^2 = TUTU = TU$ .

b) Es sei  $N(T) = N(UT)$ . Für  $x \in X$  gilt  $UT(UT - I)x = 0$  und daher  $T(UT - I)x = 0$ . Nun sei  $R(T) = R(TU)$ . Für  $x \in X$  gibt es  $y \in Y$  mit  $Tx = T Uy$ , und es folgt  $(TU - I)Tx = (TU - I)T Uy = 0$ .

**Aufgabe 14.4** Man schreibt  $k(z, \zeta) = k(z, z) + (k(z, \zeta) - k(z, z))$ ; nach Voraussetzung besitzt  $K$  einen beschränkten Kern.

**Aufgabe 14.5** a) Es gibt  $F \in \mathcal{F}(H_1, G)$  mit  $\|T - F\| \leq \varepsilon$ , und man setzt  $H_2 := N(F)$ .

b) Es sei  $\|a\|_{\sup} = |a(z_0)|$ . Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta > 0$  mit  $|a(z)| \geq |a(z_0)| - \varepsilon$  für  $z \in U := U_\delta(z_0)$ . Nun sei  $H_1 := L_2(U) \subseteq L_2(S^1)$ . Für  $f \in H_1$  gilt dann  $\|M_a f\| \geq (\|a\|_{\sup} - \varepsilon) \|f\|$ . Für  $K \in K(L_2(S^1))$  wählen wir  $H_2 \subseteq H_1$  wie in a); für  $f \in H_2$  gilt dann  $\|(M_a + K)f\| \geq (\|a\|_{\sup} - 2\varepsilon) \|f\|$ .

**Aufgabe 14.6** a) Es ist  $a_{kj} = \langle PM_a e_j | e_k \rangle = \langle M_a e_j | P e_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} a(t) e^{i(j-k)t} dt = \hat{a}(k - j)$  für  $j, k \in \mathbb{N}_0$ . Diese Toeplitz-Matrix hat Bandstruktur für  $a \in [e_k]_{k \in \mathbb{Z}}$ .

b) Ähnlich wie in Lemma 14.11 zeigt man  $T_{ab} - T_a T_b \in K(L_2^+(S^1))$  für  $a, b \in \mathcal{C}(S^1)$ ; daraus folgt sofort „ $\Leftarrow$ “. Für „ $\Rightarrow$ “ vgl. Aufgabe 15.3.

c) Wegen Lemma 14.13 a) genügt es, den Fall  $a = e_n$  zu betrachten.

d) siehe [Gohberg, Goldberg und Kaashoek 2003], section 3.4.

**Aufgabe 14.7** a) Für  $f \in L_2^+(S^1)$  ist  $Ef(re^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) r^k e^{ikt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) r^{|k|} e^{ikt} = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(t-s)} f(s) ds$  und  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{iku} = 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} (re^{iu})^k = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos u}$ .

b) rechnet man einfach nach.

c) Nach a) ist  $\|Ef\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$ . Nach a), b) und Theorem 2.4 gilt  $(Ef)_r \xrightarrow{w^*} f$  in  $L_{\infty}(S^1)$  und somit  $\|f\|_{\infty} \leq \sup_{r < 1} \|(Ef)_r\|_{\infty} \leq \|Ef\|_{\infty}$ .

**Aufgabe 14.8** Gilt (23), so kann man aus dem singulären Summanden einen endlich-dimensionalen Projektor nach links oder nach rechts ausklammern; die angegebenen Formeln gelten dann mit  $f(z) = (z - w)^p$ . Aus beiden Formeln folgt (24), und daraus ergibt sich wiederum (23) mit  $\operatorname{rk} A_k < \infty$  für  $k < 0$ .

**Aufgabe 14.9** Es sei  $\{M(z)\}_{z \in \Omega}$  holomorph. In der Situation von (a) ist dann  $H(z) := G(z)P(z_0) + (I - P(z_0))$  nahe  $z_0$  invertierbar, und dort gilt  $P(z) = H(z)P(z_0)H(z)^{-1}$ . Offenbar gilt (a)  $\Rightarrow$  (b). Gilt (b), so folgt die Holomorphie von  $\{M(z)\}_{z \in \Omega}$  mittels  $G(z) := P(z)P(z_0) + (I - P(z))(I - P(z_0))$  nahe  $z_0$ .

**Aufgabe 14.11** In der Calkin-Algebra existieren  $\mathcal{C}^m$ - bzw.  $\mathcal{R}(K)$ -Linksinverse (vgl. Aufgabe 13.18). Nun ist  $0 \rightarrow K(Y, X) \rightarrow L(Y, X) \rightarrow Ca(Y, X) \rightarrow 0$  eine  $\otimes$ -Sequenz wegen der b.A.E. von  $X$  (vgl. S. 297), und daher können diese nach  $L(Y, X)$  geliftet werden.

**Aufgabe 14.12** Man betrachtet die Tupel  $T := (T_1, \dots, T_r)$  und  $L := (L_1, \dots, L_r)$ .

**Aufgabe 14.13** In der Konstruktion von Theorem 13.28 ist  $\Sigma(T) = \Sigma(A)$ , und diese Menge ist nach dem Beweis von Theorem 14.23 diskret, da  $A$  eine holomorphe  $\Phi^r$ -Funktion ist. Im  $\Phi^-$ -Fall gilt  $\Sigma(T) = \Sigma(T')$  aufgrund von Satz 14.1.

**Aufgabe 14.14** Es ist  $p(\sigma_e(T)) = \sigma_e(\pi T) = \{0\}$  (vgl. S. 334), also  $\sigma_e(T)$  endlich. Nach Theorem 14.15 ist  $\sigma(T) \setminus \sigma_e(T)$  eine in  $\mathbb{C} \setminus \sigma_e(T)$  diskrete Menge.

**Aufgabe 14.15** a), b): Auf  $X \oplus X$  betrachten wir die Operatoren  $A : (x, y) \rightarrow (y, 0)$  und  $B : (x, y) \rightarrow (0, x)$ . Dann gilt  $A^2 = B^2 = 0$ , jedoch sind  $A + B : (x, y) \rightarrow (y, x)$  und  $AB : (x, y) \rightarrow (x, 0)$  keine Riesz-Operatoren.

c) Für  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt  $\lambda I - T \in \Phi(X) \Leftrightarrow \lambda I - T' \in \Phi(X')$ .

**Aufgabe 14.16** Es ist  $A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(\mu)} (\lambda - \mu)^{-n-1} R_S(\lambda) d\lambda$  und für  $0 < r < s$  genauso  $A_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_s(\mu)} (\tau - \mu)^{-m-1} R_S(\tau) d\tau$ . Mit der Resolventengleichung folgt

$$\begin{aligned} A_n A_m &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial U_s(\mu)} \int_{\partial U_r(\mu)} (\lambda - \mu)^{-n-1} (\tau - \mu)^{-m-1} R_S(\lambda) R_S(\tau) d\lambda d\tau \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial U_s(\mu)} \int_{\partial U_r(\mu)} \frac{(\lambda - \mu)^{-n-1} (\tau - \mu)^{-m-1}}{\tau - \lambda} (R_S(\tau) - R_S(\lambda)) d\lambda d\tau. \end{aligned}$$

Wegen  $\tau \notin \overline{U_r(\mu)}$  ist  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(\mu)} \frac{(\lambda - \mu)^{-n-1}}{\tau - \lambda} d\lambda = \eta_n (\tau - \mu)^{-n-1}$ , und wegen  $\lambda \in U_s(\mu)$  hat man  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_s(\mu)} \frac{(\tau - \mu)^{-m-1}}{\tau - \lambda} d\tau = (1 - \eta_m) (\tau - \lambda)^{-m-1}$ , und es folgt

$$A_n A_m = \frac{\eta_n + \eta_m - 1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(\mu)} (\lambda - \mu)^{-n-m-2} R_S(\lambda) d\lambda = (\eta_n + \eta_m - 1) A_{n+m+1}.$$

**Aufgabe 14.17** a) Für  $k > \alpha$  sei  $T^k x = T^{\alpha+1} T^m x = 0$ . Dann ist auch  $T^{k-1} x = T^\alpha T^m x = 0$ , und rekursiv folgt  $T^\alpha x = 0$ . Entsprechendes gilt für die Bilder.

b), c) ① Es gilt  $N(T^\alpha) \cap R(T^\alpha) = \{0\}$ : Für  $x \in N(T^\alpha) \cap R(T^\alpha)$  gilt  $x = T^\alpha y$  und  $T^{2\alpha} y = T^\alpha x = 0$ , also auch  $x = T^\alpha y = 0$ .

② Es ist  $X = N(T^\delta) + R(T^\delta)$ : Zu  $x \in X$  gibt es  $y \in X$  mit  $T^\delta x = T^{2\delta} y$ , also  $x = (x - T^\delta y) + T^\delta y \in N(T^\delta) + R(T^\delta)$ .

③ Ist  $\alpha > \delta$ , so gibt es  $x \in N(T^\alpha) \setminus N(T^\delta)$ . Mit  $x = y + z \in N(T^\delta) + R(T^\delta)$  ist  $z \in N(T^\alpha) \cap R(T^\alpha) = \{0\}$ , und wir erhalten den Widerspruch  $x \in N(T^\delta)$ .

Ist  $\alpha < \delta$ , so gibt es  $x \in R(T^\alpha) \setminus R(T^\delta)$ . Mit  $x = y + z \in N(T^\delta) + R(T^\delta)$  ist  $y \in R(T^\alpha) \cap N(T^\alpha) = \{0\}$ , und wir erhalten den Widerspruch  $x \in R(T^\delta)$ .

④ Es ist  $T(N(T^p)) \subseteq N(T^{p+1}) = N(T^p)$  und  $T(R(T^p)) = R(T^{p+1}) = R(T^p)$ . Für  $x = T^p y \in R(T^p)$  mit  $Tx = 0$  gilt  $y \in N(T^{p+1}) = N(T^p)$ , also  $x = 0$ . Somit ist  $T : R(T^p) \rightarrow R(T^p)$  bijektiv.

d) ①  $T = S_+$  auf  $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ , ②  $T = S_-$ , ③  $T = S_+ \oplus S_-$ .

e) Es sei  $(I - S)^2 x = 0$  und  $y = (S - I)x$ . Dann ist  $(I - S)y = 0$ , also  $Sy = y$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $S^n x = \sum_{k=1}^n (S^k x - S^{k-1} x) + x = \sum_{k=1}^n S^{k-1} (Sx - x) + x = \sum_{k=1}^n S^{k-1} y + x$ , also  $S^n x = ny + x$ ; wegen  $\|S^n\| \leq C$  muss somit  $y = 0$  gelten.

**Aufgabe 14.18** Es ist  $s_{0,1}^2 = \nu \pm \sqrt{\nu^2 - 1}$  mit  $\nu = 1 + \frac{\mu^2}{2}$ .

**Aufgabe 14.19** Es gibt einen unter  $|ST|$  invarianten Unterraum  $H_n \subseteq H$  mit  $\dim H_n = n + 1$ , sodass  $(\lambda_j(|ST|))_{j=0}^n$  eine Eigenwert-Folge für  $|ST|^{(n)} := |ST|_{H_n}$  ist. Nun seien  $ST = V|ST|$  die Polarzerlegung sowie  $P$  und  $Q$  die orthogonalen Projektionen auf  $H_n$  und  $G_n := T(H_n)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^n s_j(ST) &= \prod_{j=0}^n \lambda_j(|ST|) = \prod_{j=0}^n \lambda_j(|ST|^{(n)}) = \det(PVSTP) \\ &= \det(PV SQ) \det(QTP) = \det(|PV SQ|) \det(|QTP|) \\ &= \prod_{j=0}^n s_j(PV SQ) \prod_{j=0}^n s_j(QTP) \leq \prod_{j=0}^n s_j(S) s_j(T). \end{aligned}$$

**Aufgabe 14.20** Im Fall  $p(T) \neq 0$  folgt dies aus Theorem 14.32. Im Fall  $p(T) = 0$  sei o.E.  $\deg p$  minimal unter allen Polynomen mit dieser Eigenschaft und  $p(\lambda) = (\lambda - \mu)q(\lambda)$ . Dann ist  $(T - \mu I)q(T) = 0$ , also  $\mu$  ein Eigenwert von  $T$ .

**Aufgabe 14.21** Es ist  $h := \frac{\phi}{\psi} + \frac{\psi}{\phi} \in \mathcal{H}^2(D)$ , und wegen  $|R\phi| = |R\psi| = 1$  f.ü. auf  $\partial D$  ist  $Rh$  reell auf  $\partial D$ . Nach Aufgabe 14.7 ist dann  $h$  reell auf  $D$  und somit konstant.

**Aufgabe 14.22** a) Aus  $AU = UA$  folgt auch  $AU^{-1} = U^{-1}A$  und dann  $AM_p = MpA$  für alle  $p \in [\zeta^k]_{k \in \mathbb{Z}}$ . Für  $\psi := A(1) \in L_2(S^1)$  gilt  $Ap = AM_p(1) = M_p A(1) = \psi p$ . Für  $f \in L_2(S^1)$  wählen wir  $p_n \in [\zeta^k]$  mit  $\|f - p_n\|_2 \rightarrow 0$ ; dann folgt auch  $\psi p_n = Ap_n \rightarrow Af =: g$  in  $L_2(S^1)$ . Für  $c > 0$  sei  $M = \{\zeta \in S^1 \mid |\psi(\zeta)| \geq c\}$ ; dann gilt

$$c^2 \int_M |p_n - \frac{g}{\psi}|^2 d\lambda \leq \int_M |\psi|^2 |p_n - \frac{g}{\psi}|^2 d\lambda \leq \int_{S^1} |\psi p_n - g|^2 d\lambda \rightarrow 0,$$

wegen  $p_n \rightarrow f$  in  $L_2$  also  $g = \psi f$  f.ü. auf  $M$  und dann auch  $Af = g = \psi f$  f.ü. auf  $S^1$ . Anwendung auf  $f = \chi_M$  liefert  $\|A\chi_M\|^2 \geq \int_M |\psi|^2 d\lambda \geq c^2 \lambda(M) = c^2 \|\chi_M\|^2$ , also  $\|\chi_M\| = 0$  für  $c > \|A\|$ . Dies zeigt  $\psi \in L_\infty(S^1)$  und  $\|\psi\|_\infty \leq \|A\|$ .

b) Es sei  $P$  die orthogonale Projektion auf den  $U$  reduzierenden Raum  $V \subseteq L_2(S^1)$ . Dann gilt  $PU = UP$ , nach a) also  $P = M_\psi$  für ein  $\psi \in L_\infty(S^1)$ . Aus  $P = P^* = P^2$  folgt  $\psi = \overline{\psi} = \psi^2$  f.ü., also  $\psi(\zeta) \in \{0, 1\}$  f.ü. Mit  $M = \{\zeta \in S^1 \mid \psi(\zeta) = 0\}$  folgt dann  $V = \{f \in L_2(S^1) \mid f = 0 \text{ f.ü. auf } M\}$ .

**Aufgabe 14.23** a) Für  $x = (x_k) \in \ell_2$  ist  $\Delta(z)x = (z^k x_k) = \sum_k x_k e_k z^k$  holomorph, und offenbar ist  $\|\Delta(z)\| \leq 1$ .

b) Es ist  $\|\delta(re^{it})\|_{S_p} = (\sum_k r^{kp})^{1/p} = (1 - r^p)^{-1/p} \rightarrow \infty$  für  $r \rightarrow 1$ .

c) ist klar, ebenso d); die Konvergenz gilt nicht in der Operatornorm.



e) Für  $z \in D$  ist  $\delta(z)$  kompakt und somit  $\text{ind}(A + \delta(z)) = \text{ind } A$ . Für  $\zeta \in S^1$  ist  $\delta(\zeta)$  unitär und somit  $\text{ind}(A + \delta(\zeta)) = 0$ .

f) Es ist  $z \in \Sigma(T) \Leftrightarrow z^n = \frac{1}{2}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Es gibt also  $n$  Singularitäten auf den Kreisen mit Radien  $2^{-1/n}$ , und es ist  $\sum_n n(1 - 2^{-1/n}) = \infty$ .

**Aufgabe 15.1** Dies ergibt sich wie in Satz 13.13.

**Aufgabe 15.2** Nein, für  $\text{supp } f \subseteq [1, \infty)$  gilt  $f^*f = 0$ .

**Aufgabe 15.3** a) Es genügt,  $\zeta^k \otimes \zeta^j \in \mathcal{Toep}(S^1)$  für alle  $k, j \in \mathbb{N}_0$  zu zeigen. Mit  $S_+ = T_\zeta$  und  $S_- = S_+^*$  ist auch  $P_0 := (I - 1 \otimes 1) = S_+ S_- \in \mathcal{Toep}(S^1)$ , und damit folgt  $\zeta^k \otimes \zeta^j = S_+^j P_0 S_-^k \in \mathcal{Toep}(S^1)$ .

b)–d) Man zeigt, dass  $\Theta : a \mapsto \pi(T_a)$  ein *injektiver*  $*$ -Homomorphismus von  $\mathcal{C}(S^1)$  in die  $C^*$ -Algebra  $\mathcal{Toep}(S^1)/K(L_2^+(S^1))$  ist (vgl. Satz 15.5). Nach Aufgabe 15.5 ist dieser isometrisch und damit auch surjektiv. Nun folgt d) mit  $\sigma = \Theta^{-1}$ . Für Einzelheiten sei auf [Schröder 1997], 4.4 oder [Gohberg, Goldberg und Kaashoek 1993], XXXII.1 verwiesen.

**Aufgabe 15.4** Zu  $\varepsilon > 0$  wählen wir ein Polynom  $P$  mit  $\|f - P\|_{\text{sup}} \leq \varepsilon$ . Für  $Q(\lambda) = P(\lambda) - P(0)$  gilt dann  $Q(a) \in \mathcal{B}$  und  $\|f(a) - Q(a)\| \leq \|f - Q\|_{\text{sup}} \leq 2\varepsilon$ .

**Aufgabe 15.5** a) Offenbar gilt  $\rho(a) \subseteq \rho(\Theta(a))$ . Es folgt  $\|\Theta(a)\|^2 = \|\Theta(a^*a)\| = r(\Theta(a^*a)) \leq r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$ .

b) Es sind  $\Theta \circ \Psi_a, \Psi_{\Theta(a)} : \mathcal{C}(\sigma(a)) \rightarrow B$   $*$ -Homomorphismen mit  $(\Theta \circ \Psi_a)(z) = \Theta(a) = \Psi_{\Theta(a)}(z)$ . Somit folgt  $\Theta \circ \Psi_a = \Psi_{\Theta(a)}$  und  $\Theta(f(a)) = f(\Theta(a))$ .

c) Es gebe  $\lambda \in \sigma(a) \setminus \sigma(\Theta(a))$ . Für  $f \in \mathcal{C}(\sigma(a))$  mit  $f(\lambda) = 1$  und  $f = 0$  auf  $\sigma(\Theta(a))$  ist  $f(a) \neq 0$ , aber  $\Theta(f(a)) = f(\Theta(a)) = 0$  im Widerspruch zur Injektivität von  $\Theta$ . Für  $x \in \mathcal{A}$  folgt nun  $\|x\|^2 = r(x^*x) = r(\Theta(x^*x)) = \|\Theta(x)\|^2$ .

**Aufgabe 15.6** „(a)  $\Rightarrow$  (b): Für einen Block  $B = \text{diag}(\lambda, \lambda)$  ist  $P(B)x = P(\lambda)x$  für alle Polynome und  $x$  nicht zyklisch.

„(b)  $\Rightarrow$  (a): Für  $T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  und  $z = (1, \dots, 1)^\top$  ist  $P(T)z = (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))^\top$  für Polynome  $P$ . Mittels Interpolation ist  $z$  somit zyklisch.

„(c)  $\Rightarrow$  (b): Für einen Block  $B = \text{diag}(\lambda, \lambda)$  ist  $\{B\}' = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$  !

„(b)  $\Rightarrow$  (c): Sei  $T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Aus  $AT = TA$  folgt dann auch  $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  für geeignete  $\alpha_j \in \mathbb{C}$ .

**Aufgabe 15.7** a) Für  $g(z) = \sum_k a_k z^k$  ist  $\tilde{\Psi}(g \circ f) = \tilde{\Psi}(\sum_k a_k f^k) = \sum_k a_k (\tilde{\Psi}f)^k = g(\tilde{\Psi}f)$ .

b) folgt aus dem Satz über majorisierte Konvergenz.

**Aufgabe 15.8** siehe [Rudin 1973], 12.20 und 12.21.

**Aufgabe 15.9** Nach Aufgabe 15.5 ist ein injektives  $\Psi$  bereits isometrisch. Nach dem Lemma von Urysohn gibt es  $0 \neq h \in \mathcal{C}(K)$  mit  $0 \leq h \leq \chi_U$ , also  $0 \leq \Psi(h) \leq \tilde{\Psi}(\chi_U) = E_\Psi(U)$ ; ist also  $E_\Psi(U) = 0$ , so ist  $\Psi$  nicht injektiv. Ist umgekehrt dies der Fall, so gibt es  $0 \neq h \in \mathcal{C}(K)$  mit  $\Psi(h) = 0$ . Dann ist auch  $\Psi(\bar{h}h) = 0$ , und man findet  $U$  mit  $0 \leq \chi_U \leq |h|^2$ , also  $E_\Psi(U) = \tilde{\Psi}(\chi_U) = 0$ .

**Aufgabe 15.10** a) folgt aus dem Spektralabbildungssatz für Polynome, vgl. etwa [Werner 2007], VII.1.3, auch für b).

c) Die Schwarzschen Ungleichung liefert  $|\langle Ax|y \rangle|^2 \leq \langle Ax|x \rangle \langle Ay|y \rangle$ . Mit  $y = Ax$  folgt  $\|Ax\|^4 \leq \langle Ax|x \rangle \langle A^2x|Ax \rangle \leq \langle Ax|x \rangle \|A^2x\| \|Ax\| \leq \langle Ax|x \rangle \|A\| \|Ax\|^2$ .

d) Für  $x \in H$  ist die Folge  $(\langle A_n x|x \rangle)$  wachsend und beschränkt, also konvergent. Für  $n \leq m$  gilt  $\|(A_m - A_n)x\|^2 \leq \|A_m - A_n\| \langle (A_m - A_n)x|x \rangle$  aufgrund von c), und wegen  $\|A_n\| \leq \|B\|$  existiert  $Ax := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ .

**Aufgabe 15.11** Nach Theorem 15.26 gilt  $P_\mu E\{\mu\} = E(\mu)P_\mu$ . Nach den Sätzen 14.24 und 15.29 ist  $R(E\{\mu\}) = N(\mu I - A) \subseteq R(P_\mu)$ , also  $P_\mu E\{\mu\} = E\{\mu\}$ . Auf  $R(E\{\mu\})^\perp$  ist die Resolvente  $R_A(\lambda)$  nahe  $\mu$  holomorph, und (14.33) liefert  $P_\mu(I - E\{\mu\}) = 0$ . Dies zeigt  $P_\mu = P_\mu E\{\mu\} = E\{\mu\}$ . Für die Laurent-Koeffizienten gilt (vgl. S. 377)  $A_{-m} = (A - \mu I)^{m-1} P_\mu = 0$  für  $m \geq 2$ .

**Aufgabe 15.12** Es gebe einen isolierten Punkt  $\mu \in \sigma(T)$ . Dann ist der Eigenraum  $R(E\{\mu\})$  hyperinvariant wegen  $E\{\mu\} \in \{T\}''$ , und wegen  $T \notin [I]$  ist  $R(E\{\mu\}) \neq H$ . Andernfalls gibt es eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  mit  $U \cap \sigma(T) \neq \emptyset$  und  $\sigma(T) \setminus \overline{U} \neq \emptyset$ , und  $R(E(U))$  ist hyperinvariant.

**Aufgabe 15.13** „ $\Leftarrow$ “: Es ist  $TT^* = U|T|^2U^* = |T|^2 = T^*T$ . „ $\Rightarrow$ “ ist klar.

**Aufgabe 15.14** a) Man berechnet  $\sigma_p(S_-) = D$  und  $\sigma_p(S_+) = \emptyset$ . Daraus ergibt sich dann  $\sigma_{co}(S_-) = \sigma_{co}(S_+) = \partial D$  und  $\sigma_r(S_+) = D$  wegen  $\overline{R(\lambda I - S_\pm)} = N(\bar{\lambda} I - S_\mp)^\perp$ .

b) Wegen  $|S_+| = I$  ist  $S_+ = U|S_+|$  unmöglich. Weiter ist  $|S_-| = P$  die orthogonale Projektion auf  $\overline{[e_k]_{k \geq 1}}$  und  $|S_-| = U^{-1}S_-$  unmöglich, da  $S_-$  surjektiv ist.

c) Ein gewichteter Shift  $T : (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_0, \frac{1}{2}x_1, \frac{1}{3}x_2, \dots)$ .

**Aufgabe 15.15** siehe etwa [Werner 2007], Satz VII.1.24.

**Aufgabe 15.16** a) Zu  $T \in \Phi_0(X)$  gibt es  $F \in \mathcal{F}(X)$  mit  $T + F \in GL(X)$  (vgl. Aufgabe 14.1), und  $H : s \rightarrow T + sF$  verbindet  $T$  in  $\Phi_0(X)$  mit  $T + F$ .

b) Für  $S, T \in \Phi_n(X)$  gibt es nach Satz 14.7 Operatoren  $L_j \in \Phi(X)$  und  $K_j \in K(X)$  mit  $L_1 S = I - K_1$  und  $L_2 T = I - K_2$ . Dann ist  $\text{ind } L_1 = -n$  und  $L_1 T \in \Phi_0(X)$ . Nach a) gibt es eine Homotopie  $H$  von  $L_1 S$  nach  $L_1 T$  in  $\Phi_0(X)$ , und  $L_2 H$  liefert eine solche von  $(I - K_2)S$  nach  $(I - K_2)T$  in  $\Phi_n(X)$ . Nun verbindet man  $I - K_2$  mit  $I$  in  $\Phi_0(X)$ .

**Aufgabe 16.1** „ $\subseteq$ “ ist klar, und „ $\supseteq$ “ folgt aus der Stetigkeit von  $f$ .

**Aufgabe 16.2** Wegen  $W_E(f) = \sigma(f(A))$  ist dies klar für  $\chi_{B_k} f$ , und die Behauptung folgt mit  $k \rightarrow \infty$ .

**Aufgabe 16.3** Man wende beide Seiten auf  $x \in H$  an und multipliziere mit  $y \in H$ .

**Aufgabe 16.4** Man kann  $A = M_\lambda \oplus \text{diag}\{\lambda_j \mid \lambda_j \in \sigma_p\}$  nehmen, wobei  $M_\lambda$  in  $L_2(\sigma)$  operiert.

**Aufgabe 16.6** Es ist  $\sigma(M_P) = \overline{P(\mathbb{R}^n)}$  ein abgeschlossenes Intervall. Für eine Menge  $\eta \in \mathfrak{B}_N(\mathbb{R})$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  gibt es  $\varepsilon > 0$  mit  $m(P^{-1}(\eta) \cap U_\varepsilon(x)) = 0$ . Dazu fasst man  $P$  nahe  $x$  als eine Komponente eines Diffeomorphismus auf. Nach S. 432 ist daher das Spektrum rein absolutstetig. Schließlich ist  $P(D)$  unitär äquivalent zu  $M_P$ .

**Aufgabe 16.7** a) Für  $A := \text{diag}\{\lambda_j \mid \lambda_j \in \mathbb{Q}\}$  ist  $\sigma_p(A) = \mathbb{Q}$  und  $\sigma(A_p) = \sigma(A) = \mathbb{R}$ .

b) Es sei  $\mathcal{H} = L_2[0, 2] \oplus \mathbb{C}$  und  $A(f(x) \oplus \alpha) = (xf(x) \oplus \alpha)$ . Dann gilt  $1 \in \sigma_p(A)$ , also  $1 \notin \sigma_{co}(A)$ , aber  $1 \in \sigma_c(A)$ .

c) Es ist  $\sigma(A) = \sigma(A_p) \cup \sigma_c(A)$  und andererseits  $\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \sigma_e(A)$ ; somit folgt die Behauptung aus  $\sigma_d(A) \subseteq \sigma_p(A) \subseteq \sigma(A_p)$ .

**Aufgabe 16.8** a) Nach Satz 16.12 (d) gilt  $(a, b) \cap \sigma_e(A) = \emptyset$ , und mit der Menge  $M := (a, b) \cap \sigma_d(A)$  man hat  $E(a, b) = \sum_{\lambda \in M} E\{\lambda\}$ .

b) ergibt sich aus Satz 16.12 (d) und der Kompaktheit von  $[a, b]$ .

**Aufgabe 16.9** Für  $\varepsilon > 0$  und  $\tau := t - i\varepsilon$  gilt  $\text{Re}(i\tau) > 0$ , und die Lösung ist nach Formel (5.8) für  $f_0 \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$  gegeben durch

$$e^{it\Delta} f_0(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} e^{i\tau\Delta} f_0(x, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (4\pi i\tau)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{|x-y|^2}{4i\tau}) f_0(y) d^n y.$$

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  liefert dann der Satz über majorisierte Konvergenz die Behauptung. Für  $L_2$ -Anfangsfunktionen  $f_0$  ist diese im Sinn von Formel (3.20) zu interpretieren.

**Aufgabe 16.10** Man hat  $A = -i\frac{d}{dx}$ .

**Aufgabe 16.11** „ $\subseteq$ “ folgt aus dem Beweis von Satz 16.16 d), „ $\supseteq$ “ aus dem von Theorem 16.18.

**Aufgabe 16.12** Es sei  $P$  die orthogonale Projektion auf  $V$ . Wegen  $e^{\pm itA}V \subseteq V$  wird  $V$  von allen  $e^{itA}$  reduziert, d.h. es gilt  $Pe^{itA} = e^{itA}P$ . Nach Satz 16.8 ist  $PA \subseteq AP$  zu zeigen. Für  $x \in \mathcal{D}(A)$  gilt  $PAx = P \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{it}(e^{itA}x - x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{it}(e^{itA}Px - Px)$ , also  $Px \in \mathcal{D}(A)$  und  $PAx = APx$ .

**Aufgabe 16.13** siehe [Reed und Simon 1972], VIII.5.

**Aufgabe 16.14** Für einen Projektor  $P : H \rightarrow N$  ist der orthogonale Projektor auf  $N$  gegeben durch  $Q = (PP^* + (I - P)^*(I - P))^{-1}PP^*$ . Nach dem Beweis von Satz 16.19 gibt es auf  $P(T)$  lokal reell-analytisch von  $\lambda$  abhängende Projektoren  $P(\lambda)$  auf  $N(\bar{\lambda}I - T^*)$ , und somit ist  $Q : P(T) \rightarrow L(H)$  reell-analytisch.

**Aufgabe 16.15** Wegen  $\|P_1 - P_2\| < 1$  sind die Restriktionen  $T_1 := P_1|_{R(P_2)} : R(P_2) \rightarrow R(P_1)$  und  $T_2 := P_2|_{R(P_1)} : R(P_1) \rightarrow R(P_2)$  injektiv. Wegen  $T_1^* = T_2$  hat  $T_1$  dichtes Bild. Es gibt eine Polarzerlegung  $T_1 = V|T_1|$  mit einer partiellen Isometrie  $V : \overline{R(|T_1|)} \rightarrow \overline{R(T_1)} = R(P_1)$ . Mit  $T_1$  ist auch  $|T_1|$  injektiv und somit  $R(|T_1|)$  dicht in  $R(P_2)$ . Somit ist  $V : R(P_2) \rightarrow R(P_1)$  unitär.

**Aufgabe 16.16** Im Fall  $(a, b) = \mathbb{R}$  ist  $\overline{A}$  selbstadjungiert. Die Defekt-Indizes sind  $\gamma_+(A) = 0$  und  $\gamma_-(A) = 1$  im Fall  $(a, b) = (0, \infty)$  und  $\gamma_+(A) = \gamma_-(A) = 1$  im Fall  $-\infty < a < b < +\infty$ .

**Aufgabe 16.17** Man hat  $A^* = \bigoplus_2 A_n^*$  und  $N(\mp iI - A^*) = \bigoplus_2 N(\mp iI - A_n^*)$ . Die zweite Behauptung folgt daraus mittels der Operatoren  $\pm i \frac{d}{dx}$  in  $L_2(0, \infty)$  aus Aufgabe 16.16.

**Aufgabe 16.18** vgl. etwa [Meise und Vogt 1992], § 20.

**Aufgabe 16.19** Es sei  $T : f \mapsto -f'' + Vf$  mit  $\mathcal{D}(T) = H^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(M_V)$ . Wegen Theorem 4.11 ist  $T$  symmetrisch, und aus  $A \subseteq T$  folgt  $T \subseteq T^* \subseteq A^* = \overline{A}$ .

**Aufgabe 16.20** Es ist  $H_A = W_0^1(\Omega)$  und  $\mathcal{D}(A^*) = \{f \in L_2(\Omega) \mid Af \in L_2(\Omega)\}$  sowie sogar  $\mathcal{D}(A^*) = W_2(\Omega)$  im Fall konstanter Koeffizienten.

**Aufgabe 16.21** Für  $V(x) = 1$  ist  $\sigma_e(\mathcal{H}_V) \neq \sigma_e(\mathcal{H}_0)$ , und daher ist die Einbettung  $i : H^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^3)$  nicht kompakt. Es gilt jedoch  $\beta_\Delta(i) = 0$  nach Satz 16.36. Allgemeiner ist  $i : H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$  für alle  $s > 0$  nicht kompakt. Dazu wählt man eine orthonormale Folge  $(e_k)$  in  $L_2(\mathbb{R}^n)$  mit Träger in einer festen kompakten Menge; dann ist  $(e_k)$  im Raum  $L_2(\mathbb{R}^n, \langle \xi \rangle^s)$  beschränkt. Dies gilt dann auch für die Folge  $(\mathcal{F}^{-1}e_k)$  im Raum  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , die in  $L_2(\mathbb{R}^n)$  ebenfalls orthonormal ist.

**Aufgabe 16.22** Dies ist der Fall, wenn  $P(x, \partial)\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gilt, d. h. wenn die Koeffizienten langsam wachsend im Sinn von Aufgabe 3.15 sind.

Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie

Distributionen - lokalkonvexe Methoden -

Spektraltheorie

Kaballo, W.

2014, XI, 493 S. 30 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-37793-8