

# II Lokalkonvexe Methoden der Analysis

---

## Übersicht

6	Topologische Vektorräume . . . . .	135
7	Lokalkonvexe Räume . . . . .	146
8	Dualität . . . . .	170
9	Lösung linearer Gleichungen . . . . .	197
10	Vektorfunktionen und Tensorprodukte . . . . .	231
11	Operatorideale und nukleare Räume . . . . .	263
12	Exakte Sequenzen und Tensorprodukte . . . . .	290

---

Im zweiten Teil des Buches untersuchen wir Gleichungen  $Tx = y$ , die durch *lineare Operatoren* zwischen *lokalkonvexen Räumen* gegeben sind. In einer Reihe interessanter Situationen entwickeln wir Kriterien für die *normale Auflösbarkeit* der Gleichung, speziell für die *Surjektivität* des Operators  $T$  sowie für die Existenz eines *stetigen linearen Lösungsoperators*.

Das Konzept eines lokalkonvexen Raumes geht auf J. von Neumann (1935) zurück; es basiert auf der seit 1920 von S. Banach und anderen entwickelten Theorie der *normierten Räume*, der von J. von Neumann 1929 eingeführten *schwachen Topologie* auf Hilberträumen und auf Untersuchungen von G. Köthe und O. Toeplitz (1934) über *Folgenräume*. In den folgenden 15 Jahren wurden die Grundlagen der *Dualitätstheorie* u. a. von J. Dieudonné, G. Köthe und G.W. Mackey entwickelt; in den Jahren 1950-1955 erhielt die Theorie wesentliche Impulse von L. Schwartz in Verbindung mit der Theorie der *Distributionen* und von A. Grothendieck, der u. a. die Theorie der *topologischen Tensorprodukte* und der *nuklearen Räume* entwickelte.

In Kapitel 6 stellen wir grundlegende Konzepte und Resultate über *topologische Vektorräume* vor. Für *lokalkonvexe* Räume studieren wir anschließend in Kapitel 7 *projek-*

*tive* und *induktive Konstruktionen* und gehen noch einmal auf die fundamentalen *Prinzipien der Funktionalanalysis* ein. Insbesondere behandeln wir eine allgemeine Fassung des *Satzes von der offenen Abbildung* und des *Satzes vom abgeschlossenen Graphen*, die auf M. De Wilde (1967) zurückgeht.

Für die Untersuchung lokalkonvexer Räume ist das *Zusammenspiel von Raum und Dualraum* sehr wichtig. In Kapitel 8 untersuchen wir *polare lokalkonvexe Topologien*, charakterisieren *reflexive Räume* und gehen auf *(DF)-Räume* ein, eine zu metrisierbaren Räumen „duale“ Klasse lokalkonvexer Räume. Schließlich zeigen wir den *Satz von Krein-Milman* über *Extrempunkte kompakter konvexer Mengen* und folgern daraus den *Approximationssatz von Stone-Weierstraß*.

In Kapitel 9 untersuchen wir dicht definierte abgeschlossene lineare Operatoren zwischen Frécheträumen. Wir konstruieren *duale Operatoren* und beweisen den *Satz vom abgeschlossenen Wertebereich*. Es folgen *semi-globale Kriterien* für *normale Auflösbarkeit* und *Surjektivität* sowie die „*Mittag-Leffler-Methode*“ zum Nachweis von Surjektivität. Wir geben verschiedene konkrete Anwendungen, insbesondere auf die *globale Lösbarkeit* partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Weiter zeigen wir, dass eine Surjektion  $\sigma \in L(E, Q)$  von Frécheträumen stets eine *stetige Rechtsinverse* besitzt und diskutieren die Frage, wann sogar eine *stetige lineare Rechtsinverse* existiert. Dies ist dazu äquivalent, dass der *Kern*  $G = N(\sigma)$  von  $\sigma$  in  $E$  *komplementiert* ist bzw. dass die *kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\sigma} Q \longrightarrow 0 \quad (S)$$

zerfällt oder *splittet*.

Die Frage nach *Parameterabhängigkeiten* von Lösungen linearer Gleichungen führt auf die Untersuchung von *Vektorfunktionen*. In vielen Fällen kann ein Raum  $\mathcal{G}(\Omega, F)$   $F$ -wertiger Funktionen auf einer Menge  $\Omega$  mit einem vollständigen *Tensorprodukt*  $\mathcal{G}(\Omega) \hat{\otimes} F$  des entsprechenden Raumes skalarer Funktionen mit  $F$  identifiziert werden. In Kapitel 10 behandeln wir  $\varepsilon$ -*Produkte* sowie  $\varepsilon$ - und  $\pi$ -*Tensorprodukte* und gehen auf die *Approximationseigenschaft* lokalkonvexer Räume ein. Wir *integrieren Vektorfunktionen* und zeigen grundlegende Resultate über *holomorphe Vektorfunktionen*, die wir für die *Spektraltheorie* linearer Operatoren in Teil III des Buches benötigen.

Eine wichtige Klasse lokalkonvexer Räume sind die *nuklearen Räume*, für die  $\varepsilon$ - und  $\pi$ -Tensorprodukt mit jedem anderen lokalkonvexen Raum übereinstimmen. Viele Räume von Funktionen und Distributionen, etwa  $\mathcal{H}(\Omega)$ ,  $\mathcal{E}(\Omega)$ ,  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und ihre starken Dualräume, sind nuklear. Nuklearität bedeutet die Zugehörigkeit der verbindenden kanonischen Abbildungen zwischen lokalen Banachräumen zu einem geeigneten *Operatorideal*. Kapitel 11 beginnt daher mit einer Untersuchung *approximierbarer* und *nuklearer Operatoren*; interessante Beispiele sind *Integraloperatoren*. Auf dem Raum  $N(X)$  der nuklearen Operatoren lässt sich genau dann eine *Spur* definieren, wenn der Banachraum  $X$  die *Approximationseigenschaft* hat.

Die Frage nach Parameterabhängigkeiten von Lösungen linearer Gleichungen kann nun folgendermaßen als *Lifting-Problem* formuliert werden: Wann ist für eine Surjektion  $\sigma \in L(E, Q)$  von Frécheträumen auch  $I \hat{\otimes} \sigma : F \hat{\otimes} E \rightarrow F \hat{\otimes} Q$  surjektiv? Für Frécheträume  $F$  und  $\pi$ -Tensorprodukte ist dies nach A. Grothendieck (1955) stets der Fall (Satz 10.24). In Kapitel 12 zeigen wir, dass für  $\varepsilon$ -Tensorprodukte und Banachräume das Problem eng mit der Struktur ihrer endlichdimensionalen Teilräume, also dem von J. Lindenstrauß und A. Pełczyński 1968 eingeführten Konzept der  $\mathcal{L}_p$ -Räume zusammenhängt. Natürlich ist das Lifting-Problem lösbar, wenn die Sequenz  $(S)$  zerfällt; im Banachraum-Fall genügt aber auch das *Zerfallen der dualen Sequenz*  $(S')$ .

Für *nukleare Frécheträume*  $F$  hängt die Frage nach der Surjektivität der Abbildung  $I \hat{\otimes} \sigma : F'_\beta \hat{\otimes} E \rightarrow F'_\beta \hat{\otimes} Q$  eng mit einer *Strukturtheorie* solcher Räume zusammen, die ab etwa 1975 von D. Vogt entwickelt wurde. Eine *kurze exakte Sequenz*  $(S)$  *splittet*, falls  $Q$  eine *dominierende Norm* besitzt (Eigenschaft  $(DN)$ ) und  $G$  eine weitere, recht schwache Eigenschaft  $(\Omega)$  hat. Diese Eigenschaften charakterisieren die Unterräume und die Quotientenräume des Raumes  $s$  der schnell fallenden Folgen; obige Abbildung  $I \hat{\otimes} \sigma : F'_\beta \hat{\otimes} E \rightarrow F'_\beta \hat{\otimes} Q$  ist surjektiv, falls  $F$  eine dominierende Norm und  $G$  die Eigenschaft  $(\Omega)$  hat.

## 6 Topologische Vektorräume

*Frage: Gilt der Satz von Hahn-Banach für stetige Linearformen auf  $(F)$ -normierten Räumen?*

Die Kombination von Konzepten und Resultaten der *Linearen Algebra* mit solchen der *Analysis* und der *Topologie* führt zum Konzept eines *topologischen Vektorraums*, das auf A.N. Kolmogorov (1934) und J. von Neumann (1935) zurückgeht. Eine *lineare Topologie* auf einem Vektorraum ist eine solche, bezüglich der Addition und Skalarmultiplikation *stetig* sind; sie ist stets *uniformisierbar*.

Lineare Topologien können durch  $(F)$ -*Halbnormen* erzeugt werden; in Abschnitt 6.1 stellen wir spezielle Nullumgebungsbasen sowie grundlegende topologische, uniforme und linear-topologische Konzepte vor. Ein *lokalbeschränkter Raum*  $E$  besitzt eine beschränkte kreisförmige Nullumgebung. Wir zeigen in Abschnitt 6.2, dass deren *Minkowski-Funktional* eine *Quasi-Norm* auf  $E$  liefert und dass jede Quasi-Norm für ein geeignetes  $0 < r \leq 1$  zur  $r$ -ten Potenz einer  $r$ -Norm äquivalent ist.

## 6.1 Lineare Topologien

Wir untersuchen *Vektorräume* mit *Topologien*, die mit den algebraischen Operationen *verträglich* sind:

**Definition.** Ein *topologischer Vektorraum* ist ein Vektorraum  $E$  mit einer Topologie  $\mathfrak{T}$ , für die die Abbildungen  $+: E \times E \rightarrow E$  und  $\cdot: \mathbb{K} \times E \rightarrow E$  stetig sind;  $\mathfrak{T}$  heißt dann *lineare Topologie* auf  $E$ .

Auf einem topologischen Vektorraum  $E$  sind alle *Translationen*  $x \mapsto x + a$  ( $a \in E$  fest) und *Homothetien*  $x \mapsto \lambda x$  ( $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$  fest) nach Definition *Homöomorphismen*. Die Topologie  $\mathfrak{T}$  ist *translationsinvariant* und durch das System  $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(E)$  der *Nullumgebungen* festgelegt: Es ist  $a + \mathfrak{U}$  das System der Umgebungen eines Elements  $a \in E$ . Die Stetigkeit der algebraischen Operationen bedeutet die Existenz spezieller Nullumgebungsbasen:

**Absorbierende und kreisförmige Mengen.** Es sei  $E$  ein Vektorraum.

a) Eine Menge  $M \subseteq E$  heißt *absorbierend*, falls gilt

$$\forall x \in E \exists \rho > 0 \forall \lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \rho \Rightarrow \lambda x \in M. \quad (1)$$

b) Eine Menge  $W \subseteq E$  heißt *kreisförmig*, falls für  $|\lambda| \leq 1$  und  $x \in W$  auch  $\lambda x \in W$  gilt.

c) Eine Menge  $A \subseteq E$  ist genau dann *absolutkonvex*, wenn sie konvex und kreisförmig ist. Ist in der Tat  $A$  konvex und kreisförmig und sind  $x, y \in A$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  mit  $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ , so folgt auch  $\alpha x + \beta y \in A$ . Für  $\alpha = 0$  oder  $\beta = 0$  ist das klar und folgt andernfalls aus

$$\alpha x + \beta y = (|\alpha| + |\beta|) \left( \frac{|\alpha|}{|\alpha| + |\beta|} \frac{\alpha}{|\alpha|} x + \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|} \frac{\beta}{|\beta|} y \right).$$

Umgekehrt ist eine absolutkonvexe Menge natürlich konvex und kreisförmig.

### Satz 6.1

Es sei  $E$  ein topologischer Vektorraum.

a) Jede Nullumgebung  $U \in \mathfrak{U}(E)$  ist absorbierend.

b) Zu  $U \in \mathfrak{U}(E)$  gibt es  $V \in \mathfrak{U}(E)$  mit  $V + V \subseteq U$ .

c) Zu  $U \in \mathfrak{U}(E)$  gibt es ein abgeschlossenes kreisförmiges  $W \in \mathfrak{U}(E)$  mit  $W \subseteq U$ .

BEWEIS. a) Für  $x \in E$  folgt (1) aus der (getrennten) Stetigkeit der Skalarmultiplikation in  $(0, x) \in \mathbb{K} \times E$ .

b) Die Stetigkeit der Addition in  $(0, 0) \in E \times E$  liefert Nullumgebungen  $V_1, V_2 \in \mathfrak{U}(E)$  mit  $V_1 + V_2 \subseteq U$ . Für  $V := V_1 \cap V_2 \in \mathfrak{U}(E)$  gilt dann  $V + V \subseteq U$ .

c) Zu  $U \in \mathfrak{U}(E)$  wählen wir  $V \in \mathfrak{U}(E)$  mit  $V + V \subseteq U$  gemäß b) und setzen  $D := \bigcap \{\alpha V \mid |\alpha| \geq 1\} \subseteq V$ . Da die Skalarmultiplikation in  $(0,0)$  stetig ist, gibt es  $\rho > 0$  und  $D_1 \in \mathfrak{U}(E)$  mit  $\lambda D_1 \subseteq V$  für  $|\lambda| \leq \rho$ , also  $\rho D_1 = \alpha \frac{\rho}{\alpha} D_1 \subseteq \alpha V$  für  $|\alpha| \geq 1$ . Dies zeigt  $\rho D_1 \subseteq D$  und somit  $D \in \mathfrak{U}(E)$ . Nun seien  $x \in D$  und  $0 < |\lambda| \leq 1$ . Für  $|\alpha| \geq 1$  ist auch  $|\frac{\alpha}{\lambda}| \geq 1$ , also  $x \in \frac{\alpha}{\lambda} V$  und  $\lambda x \in \alpha V$ . Dies zeigt  $\lambda x \in D$ , und somit ist  $D$  kreisförmig. Die Menge  $W := \overline{D} \in \mathfrak{U}(E)$  ist abgeschlossen und kreisförmig, und man hat  $W \subseteq D + D \subseteq V + V \subseteq U$ .  $\diamond$

Insbesondere hat also  $E$  eine Nullumgebungsbasis aus abgeschlossenen kreisförmigen Mengen. Es gilt die folgende Umkehrung von Satz 6.1:

### Satz 6.2

Es seien  $E$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  und  $\mathfrak{U}$  ein System von kreisförmigen absorbierenden Mengen in  $E$  mit

$$\forall U_1, U_2 \in \mathfrak{U} \exists V \in \mathfrak{U} : V \subseteq U_1 \cap U_2, \quad (2)$$

$$\forall U \in \mathfrak{U} \exists V \in \mathfrak{U} : V + V \subseteq U. \quad (3)$$

Dann bilden die Systeme  $\{\mathfrak{U}(a) := a + \mathfrak{U} \mid a \in E\}$  Umgebungsbasen einer linearen Topologie  $\mathfrak{T}$  auf  $E$ .

BEWEIS. a) Wir nennen eine Menge  $D \subseteq E$  offen, falls zu jedem  $a \in D$  ein  $U \in \mathfrak{U}$  mit  $a + U \subseteq D$  existiert; wegen (2) liefert dies eine Topologie  $\mathfrak{T}$  auf  $E$ . Für  $U \in \mathfrak{U}$  wählen wir  $V \in \mathfrak{U}$  gemäß (3). Für  $x \in a + V$  gilt dann  $x + V \subseteq a + U$ ; somit ist  $a + U$  eine  $\mathfrak{T}$ -Umgebung von  $x$ , und daher bilden die Systeme  $\{\mathfrak{U}(a) \mid a \in E\}$  Umgebungsbasen von  $\mathfrak{T}$ .

b) Die  $\mathfrak{T}$ -Stetigkeit der Addition folgt sofort aus (3). Wir zeigen die Stetigkeit der Skalarmultiplikation in  $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E$ : Zu  $U \in \mathfrak{U}$  gibt es nach (3) ein  $W \in \mathfrak{U}$  mit  $W + W + W \subseteq U$ . Für  $\alpha = 0$  setzen wir  $V := W$ , und für  $\alpha \neq 0$  wählen wir  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k > |\alpha|$ . Wiederum nach (3) gibt es  $V \in \mathfrak{U}$ , sodass die  $k$ -fache Summe  $V + \dots + V$  in  $W$  liegt. Es folgt  $kV \subseteq V + \dots + V \subseteq W$  und dann auch  $\alpha V \subseteq W$ , da ja  $W$  kreisförmig ist. Da  $W$  auch absorbierend ist, gibt es  $0 < \rho \leq 1$  mit  $\lambda x \in W$  für  $|\lambda| \leq \rho$ . Für diese  $\lambda$  folgt schließlich

$$(\alpha + \lambda)(x + V) \subseteq \alpha x + \lambda x + \alpha V + \lambda V \subseteq \alpha x + W + W + W \subseteq \alpha x + U. \quad \diamond$$

**(F)-Halbnormen und  $r$ -Halbnormen.** a) Für ein gerichtetes System  $\mathbb{F}$  von (F)-Halbnormen auf  $E$  (vgl. S. 9) wird durch

$$\mathfrak{U} := \{\overline{U}_{\phi, \varepsilon} = \{x \in E \mid \phi(x) \leq \varepsilon\} \mid \phi \in \mathbb{F}, \varepsilon > 0\} \quad (4)$$

gemäß Satz 6.2 eine Nullumgebungsbasis einer linearen Topologie  $\mathfrak{T}$  auf  $E$  aus (absorbierenden und) kreisförmigen Mengen definiert. Diese ist genau dann Hausdorffsch, wenn es zu  $x \neq 0$  ein  $\phi \in \mathbb{F}$  mit  $\phi(x) > 0$  gibt. Besteht  $\mathbb{F}$  aus einer (F)-Norm, so ist  $\mathfrak{T}$  metrisierbar (vgl. S. 11).

b) Eine (F)-Halbnorm bzw. (F)-Norm auf  $E$  heißt  $r$ -Halbnorm bzw.  $r$ -Norm für  $0 < r \leq 1$ , falls

$$\phi(\alpha x) = |\alpha|^r \phi(x) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{K} \text{ und } x \in E \quad (5)$$

gilt. Ein Vektorraum  $E$  unter einer  $r$ -Norm  $\|\cdot\|_r$  heißt  $r$ -normierter Raum; er heißt  $r$ -Banachraum, falls er vollständig ist. Ein topologischer Vektorraum heißt *lokal  $r$ -konvex*, falls seine Topologie durch ein gerichtetes System von  $r$ -Halbnormen gemäß a) erzeugt werden kann; im Fall  $r = 1$  erhält man *lokalkonvexe Räume*, die schon in Abschnitt 1.2 eingeführt wurden.

c) Jede lineare Topologie lässt sich durch ein gerichtetes System von (F)-Halbnormen gemäß a) erzeugen, jede *metrisierbare* lineare Topologie durch eine (F)-Norm. Wir benötigen diese Resultate hier nicht und verweisen auf [Jarchow 1981], Abschnitte 2.7 und 2.8, oder [Rudin 1973], Theorem 1.24. Im *lokalkonvexen* Fall beweisen wir die beiden Aussagen in Satz 7.1 und Satz 1.1.

**Beispiele.** a) Es sei  $\mu$  ein positives Maß auf einer  $\sigma$ -Algebra  $\Sigma$  in einer Menge  $\Omega$ . Für  $0 < r \leq 1$  definieren wir den  $r$ -halbnormierten Raum

$$\mathcal{L}_r(\mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist } \Sigma\text{-messbar und } \|f\|_{L_r} := \int_{\Omega} |f|^r d\mu < \infty\}$$

und erhalten einen  $r$ -normierten Raum  $L_r(\mu) = \mathcal{L}_r(\mu)/\mathcal{N}$  von Äquivalenzklassen modulo Nullfunktionen.

b) Mit dem Zählmaß auf  $\mathbb{N}$  erhalten wir den  $r$ -normierten Folgenraum

$$\ell_r := \{x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \mid \|x\|_r := \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^r < \infty\}.$$

c) Nun gelte  $\mu(\Omega) < \infty$ . Auf dem Raum  $\mathcal{M}(\Omega)$  der messbaren Funktionen auf  $\Omega$  wird durch

$$\phi(f) := \int_{\Omega} \frac{|f(t)|}{1+|f(t)|} d\mu(t) \quad (6)$$

eine (F)-Norm definiert. Diese induziert die *stochastische Konvergenz* bzw. die *Konvergenz dem Maße nach* auf  $\Omega$  (vgl. Aufgabe 6.2).

**Unterräume und Quotientenräume.** Gegeben seien ein topologischer Vektorraum  $E$ , ein Unterraum  $G \subseteq E$  und der entsprechende Quotientenraum  $Q = E/G$ .

a) Mit der Nullumgebungsbasis  $\{U \cap G \mid U \in \mathcal{U}(E)\}$  wird  $G$  ein topologischer Vektorraum.

b) Es sei  $\sigma : E \rightarrow Q$  die Quotientenabbildung. Der Quotient  $Q$  ist ein topologischer Vektorraum mit der Nullumgebungsbasis  $\{\sigma(U) \mid U \in \mathcal{U}(E)\}$ . Er ist genau dann *separiert*, wenn  $G$  in  $E$  abgeschlossen ist.  $\sigma$  bildet offene Mengen von  $E$  auf offene Mengen von  $Q$  ab, und  $Q$  trägt die *feinste lineare Topologie*, für die  $\sigma$  stetig ist (vgl. Abschnitt 7.3).

c) Quotienten vollständiger topologischer Vektorräume sind auch im lokalkonvexen Fall i. A. nicht vollständig, vgl. etwa [Köthe 1966], § 31.6. Es gilt jedoch:

**Satz 6.3**

Es sei  $G \subseteq E$  ein abgeschlossener Unterraum eines  $(F)$ -Raumes  $E$ . Dann ist auch  $Q = E/G$  ein  $(F)$ -Raum.

BEWEIS. Wegen Satz 6.1 gibt es eine Nullumgebungsbasis  $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$  von  $E$  mit  $U_k + U_k \subseteq U_{k-1}$  für alle  $k \geq 2$ . Für eine Cauchy-Folge  $(y_n)$  in  $Q$  gibt es Indizes  $n_k > n_{k-1}$  mit  $y_n - y_{n_k} \in \sigma(U_k)$  für  $n \geq n_k$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  wählen wir  $x_n \in E$  mit  $\sigma x_n = y_n$  und  $x_n - x_{n_1} \in U_1$  für  $n_1 < n \leq n_2$ ,  $x_n - x_{n_2} \in U_2$  für  $n_2 < n \leq n_3$ , usw. Für  $k \leq \ell$  und  $n_\ell < n \leq n_{\ell+1}$  gilt  $x_n - x_{n_\ell} \in U_\ell$ ,  $x_n - x_{n_{\ell-1}} = (x_n - x_{n_\ell}) + (x_{n_\ell} - x_{n_{\ell-1}}) \in U_\ell + U_\ell \subseteq U_{\ell-1}, \dots, x_n - x_{n_k} \in U_k$ . Somit ist  $(x_n)$  eine Cauchy-Folge in  $E$ . Nach Voraussetzung existiert  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , und es folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sigma x$ .  $\diamond$

Der Beweis von Satz 6.3 liefert auch sofort:

**Satz 6.4**

Es sei  $Q$  Quotientenraum eines  $(F)$ -Raumes  $E$  und  $\sigma : E \rightarrow Q$  die Quotientenabbildung. Zu einer Nullfolge  $y_n \rightarrow 0$  in  $Q$  gibt es dann eine Nullfolge  $x_n \rightarrow 0$  in  $E$  mit  $y_n = \sigma x_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beschränkte Mengen.** Es sei  $E$  ein topologischer Vektorraum.

a) Eine Menge  $B \subseteq E$  heißt *beschränkt*, wenn sie von jeder Nullumgebung absorbiert wird, wenn es also zu  $U \in \mathfrak{U}(E)$  ein  $\rho > 0$  mit  $\rho B \subseteq U$  gibt. Mit  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(E)$  bezeichnen wir das System aller beschränkten Teilmengen von  $E$ .

b) Für offene Nullumgebungen  $U \in \mathfrak{U}(E)$  gilt  $E = \bigcup_n nU$ ; *kompakte* Mengen sind daher beschränkt.

c) Eine Menge  $B \subseteq E$  ist genau dann beschränkt, wenn für jede Folge  $(x_n)$  in  $B$  und jede Nullfolge  $(\alpha_n)$  in  $\mathbb{K}$  stets  $\alpha_n x_n \rightarrow 0$  in  $E$  gilt.

d) Für beschränkte Mengen  $A, B \subseteq E$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  sind auch die Mengen  $\lambda A$ ,  $\overline{A}$ ,  $A \cup B$ ,  $A + B$  sowie die *kreisförmige Hülle* von  $A$  beschränkt.

e) Für einen lokalkonvexen Raum  $E$  stimmt der soeben eingeführte Beschränktheitsbegriff mit dem auf S. 11 diskutierten überein. In diesem Fall ist auch die *konvexe Hülle* einer beschränkten Menge beschränkt. Dies gilt *nicht* in allgemeinen topologischen Vektorräumen:

**Beispiel.** Für  $0 < r < 1$  betrachten wir die beschränkte Menge der „Einheitsvektoren“  $M := \{e_k = (\delta_{kj})_{j \in \mathbb{N}} \mid k \in \mathbb{N}\}$  im Folgenraum  $\ell_r$ . Wegen

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_k \right\|_r = \frac{1}{n^r} \cdot n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist die konvexe Hülle  $\text{co } M$  der Menge  $M$  nicht beschränkt.

Wir gehen nun auf einige *uniforme Begriffe* ein (vgl. [Köthe 1966], § 5, oder [Schubert 1969], Teil II). Eine lineare Topologie auf einem Vektorraum  $E$  wird durch die uniforme Struktur induziert, deren Nachbarschaften gegeben sind durch

$$\mathfrak{N}(E) := \{N(U) := \{(x, y) \in E \mid x - y \in U\} \mid U \in \mathfrak{U}(E)\}.$$

**Vollständigkeitsbegriffe.** Es sei  $E$  ein topologischer Vektorraum.

a) Ein Netz  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  in  $E$  heißt *Cauchy-Netz*, falls gilt:

$$\forall U \in \mathfrak{U}(E) \exists \gamma \in A \forall \alpha, \beta \geq \gamma : x_\alpha - x_\beta \in U. \quad (7)$$

b) Eine Menge  $M \subseteq E$  heißt *vollständig*, wenn jedes Cauchy-Netz aus  $M$  in  $M$  konvergiert.

c) Eine Cauchy-Folge ist stets beschränkt, für ein Cauchy-Netz ist dies i. A. nicht der Fall. Eine Menge  $M \subseteq E$  heißt *quasivollständig*, wenn jedes *beschränkte* Cauchy-Netz aus  $M$  in  $M$  konvergiert. Quasivollständige Mengen sind also auch *folgenvollständig*.

d) Eine *metrisierbare* Menge  $M \subseteq E$  ist genau dann vollständig im Sinne von b), wenn jede Cauchy-Folge in  $M$  konvergiert, vgl. Aufgabe 6.5.

**Präkompakte Mengen** in topologischen Vektorräumen werden wie im lokalkonvexen Fall definiert (vgl. S. 12). Es gelten alle dort gemachten Aussagen mit der Ausnahme, dass die konvexe Hülle einer präkompakten Menge i. A. nicht präkompakt sein muss.

**Lineare Abbildungen.** a) Es seien  $E, F$  topologische Vektorräume und  $T : E \rightarrow F$  eine lineare Abbildung. Analog zu Satz 1.2 sind äquivalent:

$$\textcircled{1} \quad \forall U \in \mathfrak{U}(F) \exists V \in \mathfrak{U}(E) : T(V) \subseteq U.$$

$$\textcircled{2} \quad T \text{ ist gleichmäßig stetig auf } E,$$

$$\textcircled{3} \quad T \text{ ist in einem Punkt } a \in E \text{ stetig.}$$

b) Mit  $L(E, F)$  wird der Raum der stetigen linearen Operatoren von  $E$  nach  $F$  bezeichnet;  $E' = L(E, \mathbb{K})$  ist der *Dualraum* von  $E$ .

c) Es sei  $\mathfrak{A}$  ein System von Teilmengen von  $E$ . Ein linearer Operator  $T : E \rightarrow F$  heißt  *$\mathfrak{A}$ -beschränkt*, wenn für alle  $A \in \mathfrak{A}$  die Bildmenge  $T(A)$  in  $F$  beschränkt ist. Stetige lineare Operatoren sind  $\mathfrak{B}(E)$ -beschränkt; für *metrisierbare* Räume  $E$  gilt auch die Umkehrung dieser Aussage (vgl. Aufgabe 6.9).

**Beispiele.** a) Jede beschränkte Folge  $y = (y_j) \in \ell_\infty$  definiert für  $0 < r \leq 1$  durch

$$(Jy)(x) := \sum_{j=0}^{\infty} x_j y_j \quad \text{für } x = (x_j) \in \ell_r,$$

eine stetige Linearform auf dem Folgenraum  $\ell_r$ , für die  $|(Jy)(x)| \leq \|y\|_\infty \|x\|_r$  gilt.



b) Umgekehrt sei nun  $f : \ell_r \rightarrow \mathbb{K}$  eine stetige Linearform und  $\|f\| = \sup_{\|x\|_r \leq 1} |f(x)|$ .

Mit den „Einheitsvektoren“  $e_j := (\delta_{jk})_{k \in \mathbb{N}_0}$  setzen wir  $y_j := f(e_j)$  und erhalten sofort  $|y_j| \leq \|f\|$  für alle  $j$ , also  $y := (y_j) \in \ell_\infty$  und  $\|y\|_\infty \leq \|f\|$ . Für eine Folge  $x = (x_j) \in \ell_r$  gilt  $x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j e_j$ , und wir erhalten

$$f(x) = f\left(\sum_{j=0}^{\infty} x_j e_j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j y_j = (Jy)(x).$$

Es gilt also die Isometrie  $\ell'_r \cong \ell_\infty$ .

c) Insbesondere trennt der Dualraum von  $\ell_r$  die Punkte des  $r$ -Banachraums  $\ell_r$ , d. h. für  $0 \neq x \in \ell_r$  gibt es eine stetige Linearform  $f \in \ell'_r$  mit  $f(x) \neq 0$ .

Andererseits hat man das folgende Resultat von M.M. Day (1940):

### Satz 6.5

Für  $0 < r < 1$  gilt  $L_r[0,1]' = \{0\}$ .

BEWEIS. a) Es gebe  $u \in L_r[0,1]'$  und  $f \in L_r[0,1]$  mit  $|u(f)| \geq 1$ . Die Funktion  $\varphi : y \mapsto \int_0^y |f(x)|^r dx$  ist stetig, und daher gilt  $\int_0^c |f(x)|^r dx = \frac{1}{2} \int_0^1 |f(x)|^r dx$  für ein  $0 < c < 1$ . Für die Funktionen  $g := \chi_{[0,c]} f$  und  $h := \chi_{(c,1]} f$  in  $L_r[0,1]$  gilt dann

$$f = g + h \quad \text{und} \quad \|g\|_{L_r} = \|h\|_{L_r} = \frac{1}{2} \|f\|_{L_r}.$$

Es folgt  $1 \leq |u(f)| \leq |u(g)| + |u(h)|$  und somit  $|u(g)| \geq \frac{1}{2}$  oder  $|u(h)| \geq \frac{1}{2}$ .

b) Wir setzen  $f_1 := 2g$  oder  $f_1 := 2h$  und erhalten in jedem Fall  $|u(f_1)| \geq 1$  und  $\|f_1\|_{L_r} = 2^r \|g\|_{L_r} = 2^{r-1} \|f\|_{L_r}$ . Nun fahren wir so fort und erhalten eine Folge  $(f_n)$  in  $L_r[0,1]$  mit  $|u(f_n)| \geq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\|f_n\|_{L_r} = 2^{n(r-1)} \|f\|_{L_r} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Das ist ein Widerspruch zur Stetigkeit von  $u$ .  $\diamond$

Der Satz von Hahn-Banach gilt also i. A. nicht in  $r$ -normierten Räumen für  $r < 1$ . Aus diesem Grunde werden wir uns ab Kapitel 7 auf *lokalkonvexe* Räume konzentrieren.

## 6.2 Lokalbeschränkte Räume und Quasi-Normen

Nach einem auf S. 12 erwähnten Satz von A.N. Kolmogorov (1934) ist ein separierter *lokalkonvexer* Raum bereits dann *normierbar*, wenn er eine *beschränkte Nullumgebung* besitzt. Ein separierter topologischer Vektorraum  $E$  mit dieser Eigenschaft heißt *lokalbeschränkt*. Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass lokalbeschränkte Räume *quasi-normierbar* und für ein geeignetes  $0 < r \leq 1$  auch *r-normierbar* sind.

**Quasi-Halbnormen.** a) Eine *Quasi-Halbnorm* auf einem Vektorraum  $E$  ist eine Abbildung  $q : E \rightarrow [0, \infty)$ , die

$$q(\alpha x) = |\alpha| q(x) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{K} \text{ und } x \in E \quad (8)$$

und an Stelle der Dreiecks-Ungleichung die schwächere Bedingung

$$\exists C \geq 1 \forall x, y \in E : q(x+y) \leq C(q(x) + q(y)) \quad (9)$$

erfüllt. Ein *gerichtetes System* von Quasi-Halbnormen auf  $E$  definiert wie in (4) eine lineare Topologie auf  $E$ .

b) Eine *Quasi-Norm* auf  $E$  ist eine Quasi-Halbnorm, die zusätzlich  $q(x) > 0$  für  $x \neq 0$  erfüllt. Ein Vektorraum  $E$  unter einer Quasi-Norm  $q$  heißt *quasi-normierter Raum*; er heißt *Quasi-Banachraum*, wenn er vollständig ist.

### Satz 6.6

*Ein topologischer Vektorraum  $E$  ist genau dann lokalbeschränkt, wenn er quasi-normierbar ist.*

BEWEIS. „ $\Leftarrow$ “: Die Topologie von  $E$  sei durch eine Quasi-Norm  $q$  induziert. Dann bilden die „Kugeln“  $\overline{U}_{q,\varepsilon} := \{x \in E \mid q(x) \leq \varepsilon\}$  eine Nullumgebungsbasis der Topologie von  $E$ , und diese sind wegen (8) beschränkt.

„ $\Rightarrow$ “: a) Nach Satz 6.1 gibt es eine *kreisförmige* beschränkte Nullumgebung  $U \in \mathfrak{U}(E)$ . Zu  $V \in \mathfrak{U}(E)$  gibt es  $j \in \mathbb{N}$  mit  $U \subseteq jV$ , und daher ist  $\mathbb{U} := \{\frac{1}{k}U \mid k \in \mathbb{N}\}$  eine Nullumgebungsbasis von  $E$ . Das *Minkowski-Funktional* oder *Eichfunktional*

$$p_U(x) := \inf \{t > 0 \mid x \in tU\}, \quad x \in E, \quad (10)$$

von  $U$  definiert eine *Quasi-Norm* auf  $E$ :

b) Offenbar ist  $p_U \geq 0$ . Die absolute Homogenität (8) folgt aus der Kreisförmigkeit von  $U$ . Nach Satz 6.1 b) gibt es  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{k}U + \frac{1}{k}U \subseteq U$ . Für  $x, y \in E$  mit  $p_U(x) < t$  und  $p_U(y) < s$  gilt dann

$$\frac{x+y}{t+s} = \frac{t}{t+s} \frac{x}{t} + \frac{s}{t+s} \frac{y}{s} \in U + U \subseteq kU, \quad (11)$$

und daraus folgt  $p_U(x+y) \leq k(p_U(x) + p_U(y))$ . Schließlich gelte  $p_U(x) = 0$ . Dann folgt  $x \in \frac{1}{k}U$  für alle  $\frac{1}{k}U \in \mathbb{U}$  und somit  $x = 0$ , da  $E$  nach Definition des Begriffs „lokalbeschränkt“ ein Hausdorff-Raum ist.

c) Offenbar gilt

$$U \subseteq \overline{U}_{p_U} = \{x \in E \mid p_U(x) \leq 1\} \subseteq \overline{U}, \quad (12)$$

und daher induziert die Quasi-Norm  $p_U$  die Topologie von  $E$ .  $\diamond$

Für eine  $r$ -Halbnorm  $\phi$  auf einem Vektorraum  $E$  wird durch  $q(x) = \phi(x)^{1/r}$  eine Quasi-Halbnorm mit  $C = 2^{\frac{1}{r}-1}$  in (9) definiert. Umgekehrt sei  $q$  eine Quasi-Halbnorm auf  $E$  mit der Konstanten  $C \geq 1$  in (9). Definiert man dann  $0 < r \leq 1$  durch  $2^{\frac{1}{r}-1} = C$ , so gibt es eine  $r$ -Halbnorm  $\phi$  auf  $E$ , sodass  $\phi^{1/r}$  zu  $q$  äquivalent ist. Dieses Resultat stammt von T. Aoki (1942) und S. Rolewicz (1957):

**Satz 6.7**

Es sei  $q$  eine Quasi-Halbnorm auf einem Vektorraum  $E$ , sodass (9) mit  $C \geq 1$  gilt. Weiter sei  $0 < r \leq 1$  durch  $2^{\frac{1}{r}-1} = C$  definiert. Durch

$$\phi(x) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^n q(x_j)^r \mid n \in \mathbb{N}, x_j \in E, x = \sum_{j=1}^n x_j \right\} \quad (13)$$

wird eine  $r$ -Halbnorm auf  $E$  definiert, sodass die Abschätzung

$$\phi(x) \leq q(x)^r \leq 2 \phi(x), \quad x \in E, \quad (14)$$

gilt. Ist  $q$  eine Quasi-Norm, so ist  $\phi$  eine  $r$ -Norm auf  $E$ .

BEWEIS. a) Offenbar wird in (13) eine  $r$ -Halbnorm auf  $E$  mit  $\phi(x) \leq q(x)^r$  definiert. Zum Beweis der zweiten Ungleichung in (14) beachten wir zunächst:

b) Für zwei Vektoren  $y, z \in E$  mit  $q(y)^r \leq \alpha$  und  $q(z)^r \leq \alpha$  gilt

$$q(y+z)^r \leq (C(q(y) + q(z)))^r \leq C^r (\alpha^{\frac{1}{r}} + \alpha^{\frac{1}{r}})^r \leq C^r 2^r \alpha = 2\alpha.$$

c) Nun sei  $x = \sum_{j=1}^n x_j$  mit  $x_j \in E$ . Zu zeigen ist  $q(x)^r \leq 2 \sum_{j=1}^n q(x_j)^r$ , und dazu genügt der Nachweis der Implikation

$$\sum_{j=1}^n q(x_j)^r \leq \frac{1}{2} \Rightarrow q(x)^r \leq 1. \quad (15)$$

Dazu definieren wir  $k_j \in \mathbb{N}$  mittels  $2^{-k_j-1} < q(x_j)^r \leq 2^{-k_j}$ ; dann ist  $\sum_{j=1}^n 2^{-k_j-1} \leq \frac{1}{2}$

und somit  $\sum_{j=1}^n 2^{-k_j} \leq 1$ .

Nun sei  $k := \max k_j$ . Zwei Vektoren  $x_i$  und  $x_j$  mit  $k_i = k_j = k$  fassen wir gemäß b) zu einem Vektor  $x_i + x_j$  zusammen, für den dann  $q(x_i + x_j)^r \leq 2^{-k+1}$  gilt. Ist die Anzahl dieser Vektoren ungerade, so lassen wir einen dieser Vektoren ungeändert. Damit erhalten wir eine Zerlegung  $x = \sum_{j=1}^m x'_j$  mit  $q(x'_j)^r \leq 2^{-k'_j}$  und  $\sum_{j=1}^m 2^{-k'_j} \leq 1$  sowie  $\max k'_j = k - 1$ . So fortfahrend erhalten wir schließlich  $q(x)^r \leq 1$ . Damit sind (15) und (14) bewiesen.

d) Ist nun  $q$  eine Quasi-Norm auf  $E$ , so folgt aus  $\phi(x) = 0$  auch  $q(x) = 0$  und somit  $x = 0$ ; dann ist also  $\phi$  eine  $r$ -Norm auf  $E$ .  $\diamond$

Interessante Beispiele von Quasi-Banachräumen liefern *Operatorideale*, vgl. dazu [GK], 12.5 und Kapitel 11.

### 6.3 Aufgaben

#### Aufgabe 6.1

Zeigen Sie die Vollständigkeit der Räume  $L_r(\mu)$  für  $0 < r < 1$ .

#### Aufgabe 6.2

a) Es sei  $\mu$  ein endliches Maß auf  $\Omega$ . Verifizieren Sie, dass durch (5) eine  $(F)$ -Norm auf dem Raum  $\mathcal{M}(\mu)$  der messbaren Funktionen auf  $\Omega$  definiert wird.

b) Zeigen Sie für eine Folge  $(f_n)$  in  $\mathcal{M}(\mu)$ :  $f_n \rightarrow 0$   $\mu$ -fast überall  $\Rightarrow \phi(f_n) \rightarrow 0$ .

c) Zeigen Sie, dass  $L_\infty(\mu)$  in  $\mathcal{M}(\mu)$  dicht ist.

d) Zeigen Sie für eine Folge  $(f_n)$  in  $\mathcal{M}(\mu)$ :

$$\phi(f_n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \{t \in \Omega \mid |f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

e) Beweisen Sie die Vollständigkeit des topologischen Vektorraums  $\mathcal{M}(\mu)$ .

f) Zeigen Sie, dass  $L_r(\mu)$  für  $0 < r < \infty$  stetig in  $\mathcal{M}(\mu)$  eingebettet ist und schließen Sie  $\mathcal{M}(\mu)' = \{0\}$ .

#### Aufgabe 6.3

Führen Sie den Beweis von Satz 6.4 aus. Gilt dessen Aussage auch für Quotientenräume beliebiger topologischer Vektorräume?

#### Aufgabe 6.4

Verifizieren Sie die Aussagen über beschränkte Mengen und präkompakte Mengen ab S. 139.

#### Aufgabe 6.5

Zeigen Sie, dass in einem vollständigen metrischen Raum jedes Cauchy-Netz konvergiert.

#### Aufgabe 6.6

Definieren Sie den Begriff „Vervollständigung“ eines topologischen Vektorraums und zeigen Sie, dass eine solche bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

#### Aufgabe 6.7

Es sei  $E$  ein topologischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass eine Menge  $A \subseteq E$  genau dann kompakt ist, wenn sie präkompakt und vollständig ist.

#### Aufgabe 6.8

Es seien  $E$  ein topologischer Vektorraum und  $0 \neq u : E \rightarrow \mathbb{K}$  linear. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a)  $u$  ist stetig.

(b) Der Kern  $N(u)$  ist abgeschlossen.

- (c) Der Kern  $N(u)$  ist nicht dicht in  $E$ .  
 (d)  $u$  ist auf einer Nullumgebung von  $E$  beschränkt.

### Aufgabe 6.9

Es seien  $E, F$  topologische Vektorräume,  $E$  metrisierbar und  $T : E \rightarrow F$  eine lineare Abbildung, die Nullfolgen in beschränkte Mengen abbildet. Zeigen Sie, dass  $T$  stetig ist.

HINWEIS. Beachten Sie Aufgabe 1.13.

### Aufgabe 6.10

Es seien  $0 < r, s \leq 1$ ,  $X$  ein  $r$ -normierter Raum und  $Y$  ein  $s$ -normierter Raum. Zeigen Sie:

- a) Durch  $\|T\|_s = \sup_{\|x\|_r \leq 1} \|Tx\|_s$  wird eine  $s$ -Norm auf  $L(X, Y)$  definiert.  
 b) Ist  $Y$  vollständig, so gilt dies auch für  $L(X, Y)$ . Insbesondere ist der *Dualraum*  $X' = L(X, \mathbb{K})$  von  $X$  ein *Banachraum*.  
 c) Es seien  $X' \neq \{0\}$  und  $L(X, Y)$  vollständig. Zeigen Sie, dass  $Y$  vollständig ist.

### Aufgabe 6.11

Es seien  $0 < r \leq 1$  und  $X$  ein  $r$ -Banachraum. Zeigen Sie:

- a) Für  $S \in L(X)$  mit  $\|S\|_r < 1$  existiert  $(I - S)^{-1} \in L(X)$ .  
 b) Die Gruppe  $GL(X)$  der invertierbaren Operatoren auf  $X$  ist offen, und die Inversion  $T \mapsto T^{-1}$  auf  $GL(X)$  ist stetig.

### Aufgabe 6.12

- a) Es seien  $0 < r \leq 1$ ,  $\sigma : X \rightarrow Q$  eine Quotientenabbildung von  $r$ -Banachräumen und  $T \in L(\ell_r, Q)$ . Konstruieren Sie ein *Lifting*  $T^\vee \in L(\ell_r, X)$  von  $T$ , für das also  $\sigma T^\vee = T$  gilt.  
 b) Folgern Sie, dass jede Surjektion  $\sigma \in L(X, \ell_r)$  rechtsinvertierbar ist.  
 c) Zeigen Sie, dass es zu jedem separablen  $r$ -Banachraum  $Q$  eine Quotientenabbildung  $\sigma \in L(\ell_r, Q)$  gibt.

HINWEIS. Für den Fall  $r = 1$  siehe [GK], Aufgabe 9.16 und Satz 10.12.

### Aufgabe 6.13

Es seien  $X$  ein Banachraum und  $A > 1$ . Zeigen Sie, dass durch

$$q(T) := \|T\| \text{ für } T \in K(X) \text{ und } q(T) := A\|T\| \text{ für } T \notin K(X)$$

eine Quasi-Norm auf  $L(X)$  definiert wird. Gilt  $q(T - T_n) \rightarrow 0 \Rightarrow q(T_n) \rightarrow q(T)$ ?

## 7 Lokalkonvexe Räume

*Fragen:* 1. Es sei  $E$  ein Fréchetraum, z. B.  $E = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Ist der Dualraum  $G = E'_\beta$  vollständig? Ist jede schwach\*-beschränkte Menge in  $G'$  gleichstetig?  
 2. Es seien  $E, F$  Frécheträume und  $T : E'_\beta \rightarrow F'_\beta$  eine abgeschlossene lineare Abbildung. Ist  $T$  stetig?

Ab jetzt untersuchen wir nur noch *lokalkonvexe* topologische Vektorräume. In diesem Rahmen kommen wir noch einmal auf wesentliche *Prinzipien der Funktionalanalysis* zurück und stellen *projektive* und *induktive Konstruktionen* vor. Wir beginnen mit dem *Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit* und dem *Satz von Banach-Steinhaus*, die genau im Fall *tonnelierter* Definitionsbereiche gelten.

In Abschnitt 7.2 diskutieren wir *projektive Topologien* auf lokalkonvexen Räumen, insbesondere *Produkttopologien*, *schwache Topologien*, *lokale Banachräume* und *projektive Limiten*. Dual dazu untersuchen wir im nächsten Abschnitt *induktive lokalkonvexe Topologien*, insbesondere *direkte Summen* und *Quotientenräume*. Räume, die eine induktive lokalkonvexe Topologie normierter Räume bzw. von Banachräumen tragen, heißen *bornologisch* bzw. *ultrabornologisch*. Dies ist der Fall für  $(LF)$ -Räume, abzählbare induktive Limiten von Frécheträumen, die wir in Abschnitt 7.4 untersuchen. Wichtige Beispiele sind Räume  $\mathcal{D}(\Omega)$  von *Testfunktionen* oder Räume  $\mathcal{H}(K)$  von *Keimen holomorpher Funktionen*.

Es gibt verschiedene Versionen des *Satzes von der offenen Abbildung* und des *Satzes vom abgeschlossenen Graphen* im Rahmen lokalkonvexer Räume. Nach A. Grothendieck (1954) gilt der Graphensatz für abgeschlossene lineare Abbildungen  $u : E \rightarrow F$ , wenn  $E$  ultrabornologisch und  $F$  ein  $(LF)$ -Raum ist. Nach M. De Wilde (1967) kann man allgemeiner für  $F$  Räume mit Gewebe zulassen; dies ist das Thema von Abschnitt 7.5. Frécheträume und ihre starken Dualräume besitzen Gewebe, und die Klasse dieser Räume ist abgeschlossen gegen abzählbare projektive und induktive Konstruktionen.

*Lokalkonvexe* Räume wurden auf S. 8 als diejenigen topologischen Vektorräume eingeführt, deren Topologie sich wie in (6.4) durch ein gerichtetes System von *Halbnormen* definieren lässt. Eine äquivalente Definition der lokalen Konvexität ergibt sich aus:

### Satz 7.1

*Ein topologischer Vektorraum  $E$  ist genau dann lokalkonvex, wenn er eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen besitzt.*

BEWEIS. „ $\Rightarrow$ “: Die Topologie von  $E$  sei durch das gerichtete System  $\mathbb{H}$  von Halbnormen definiert. Die abgeschlossenen „ $\varepsilon$ -Kugeln“  $\{\overline{U}_{p,\varepsilon} \mid p \in \mathbb{H}, \varepsilon > 0\}$  (vgl. S. 8) bilden dann eine Nullumgebungsbasis aus sogar *absolutkonvexen* Mengen.

„ $\Leftarrow$ “: Umgekehrt besitze  $E$  eine Nullumgebungsbasis  $\mathbb{V}$  aus *konvexen* Mengen. Für  $V \in \mathbb{V}$  ist dann wie im Beweis von Satz 6.1 c) die Menge  $U := \bigcap \{\alpha V \mid |\alpha| \geq 1\}$  ei-

ne konvexe und *kreisförmige* Nullumgebung, also absolutkonvex; somit besitzt  $E$  eine Nullumgebungsbasis  $\mathbb{U}$  aus *absolutkonvexen* Mengen. Für  $U \in \mathbb{U}$  ist nach dem Beweis von Satz 6.6, insbesondere nach der Rechnung in (6.11), das *Minkowski-Funktional*  $p_U$  gemäß (6.10) eine *Halbnorm* auf  $E$ , und wegen (6.12) wird die Topologie von  $E$  durch das gerichtete System  $\mathbb{H}(\mathbb{U}) = \{p_U \mid U \in \mathbb{U}\}$  von Halbnormen definiert.  $\diamond$

**Konventionen.** a) Für einen lokalkonvexen Raum  $E$  setzen wir stets die *Hausdorff-Eigenschaft* voraus, falls nichts anderes gesagt wird.

b) Mit  $\mathbb{U}$  oder  $\mathbb{U}(E)$  bezeichnen wir immer eine Nullumgebungsbasis aus *absolutkonvexen abgeschlossenen* Mengen von  $E$ ;  $\mathfrak{U}(E)$  bezeichnet das System aller Nullumgebungen von  $E$ .

## 7.1 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Wir wollen nun das *Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit* für möglichst allgemeine lokalkonvexe Räume zeigen. Die Analyse des Beweises von Theorem 1.13 führt auf den folgenden Begriff, der auf G.W. Mackey (1946) zurückgeht:

**Tonnen und tonnelierte Räume.** Es sei  $E$  ein lokalkonvexer Raum. Eine *Tonne* ist eine absolutkonvexe, absorbierende und abgeschlossene Menge  $A \subseteq E$ . Der Raum  $E$  heißt *tonneliert*, falls jede Tonne in  $E$  eine Nullumgebung ist.

Wir formulieren nun ein einfaches Lemma, das im Folgenden öfter verwendet wird (vgl. auch die Beweise von Theorem 1.13 und Lemma 1.19):

### Lemma 7.2

*Es seien  $E$  ein lokalkonvexer Raum und  $A \subseteq E$  absolutkonvex. Besitzt  $A$  einen inneren Punkt, so ist  $A$  eine Nullumgebung.*

BEWEIS. Es gibt  $x \in A$  und  $U \in \mathbb{U}(E)$  mit  $x + U \subseteq A$ , und daraus folgt sofort  $U = (x + U) - x \subseteq A - A \subseteq 2A$ .  $\diamond$

### Satz 7.3

*Ein lokalkonvexer Raum von zweiter Kategorie ist tonneliert. Insbesondere sind Frécheträume tonneliert.*

BEWEIS. Für eine Tonne  $A \subseteq E$  ist  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} kA$ ; da  $E$  von zweiter Kategorie ist, gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\text{int}(nA) = \text{int}(\overline{nA}) \neq \emptyset$ . Nach Lemma 7.2 ist  $A$  eine Nullumgebung und  $E$  tonneliert. Die letzte Aussage folgt dann aus dem Satz von Baire 1.12.  $\diamond$

Es gibt wichtige tonnelierte Räume, die nicht metrisierbar sind, z.B. die Räume  $\mathcal{E}'_{\beta}(\Omega)$ ,  $\mathcal{S}'_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{D}(\Omega)$  oder  $\mathcal{D}'_{\beta}(\Omega)$ , vgl. dazu Abschnitt 7.3 und Kapitel 8. Einen ton-

nelierten, aber unvollständigen *normierten* Raum findet man in [Köthe 1966], S. 372.

### Theorem 7.4 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)

Es seien  $E, F$  lokalkonvexe Räume und  $\mathcal{G} \subseteq L(E, F)$  punktweise, d. h. in  $L_\sigma(E, F)$  beschränkt. Ist  $E$  tonneliert, so ist  $\mathcal{G}$  gleichstetig.

BEWEIS. Für  $V \in \mathbb{U}(F)$  ist  $U := \bigcap_{T \in \mathcal{G}} T^{-1}(V)$  eine absolutkonvexe und abgeschlossene Teilmenge von  $E$ . Für  $x \in E$  ist die Menge  $\{Tx \mid T \in \mathcal{G}\}$  in  $F$  nach Voraussetzung beschränkt; es gibt also  $\rho > 0$  mit  $Tx \in \rho V$  für alle  $T \in \mathcal{G}$ . Dies zeigt  $x \in \rho U$ ; folglich ist  $U$  auch absorbierend und somit eine *Tonne*. Da  $E$  tonneliert ist, ist  $U$  eine Nullumgebung von  $E$ , und Bedingung (1.19) ist erfüllt.  $\diamond$

Wir werden in Satz 8.5 auf S. 173 zeigen, dass die Tonneliertheit von  $E$  für die Gültigkeit des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit auch *notwendig* ist.

### Satz 7.5 (Banach-Steinhaus)

Es seien  $E$  ein tonnelierter Raum und  $F$  ein lokalkonvexer Raum. Für ein (punktweise) beschränktes Netz  $(T_\alpha)$  in  $L_\sigma(E, F)$  existiere der Limes

$$Tx := \lim_{\alpha} T_\alpha x \quad (1)$$

für alle  $x \in E$ . Dann gilt  $T \in L(E, F)$ , und man hat  $T_\alpha \rightarrow T$  in  $L_\gamma(E, F)$ .

BEWEIS. Durch (1) wird ein linearer Operator  $T : E \rightarrow F$  definiert. Nach Theorem 7.4 ist die Menge  $\mathcal{G} := \{T_\alpha\}$  in  $L(E, F)$  gleichstetig; mittels (1.18) folgt daraus sofort auch die Stetigkeit von  $T$ . Die letzte Aussage ergibt sich dann aus Satz 1.4.  $\diamond$

**Folgerung.** Es seien  $E$  tonneliert,  $\mathfrak{S}$  eine Bornologie auf  $E$  (vgl. S. 15) und  $F$  quasivollständig. Dann ist der Raum  $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$  quasivollständig. Insbesondere sind die Dualräume  $E'_{\mathfrak{S}}$  tonnelierter Räume quasivollständig.

Wir gehen nun auf Konsequenzen aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ein, die im Folgenden eine wichtige Rolle spielen. Grundlegende Konzepte sind:

**Beschränkte Kugeln und Banach-Kugeln.** a) Es sei  $E$  ein lokalkonvexer Raum. Unter einer *Kugel* in  $E$  verstehen wir eine absolutkonvexe Menge  $B \subseteq E$ . Diese ist in dem Vektorraum  $E_B := [B]$  absorbierend, und  $\|\cdot\|_B := p_B$  liefert eine Halbnorm auf  $E_B$ .

b) Ist  $B$  beschränkt, so gilt  $p(x) \leq C_p \|x\|_B$  für  $x \in E_B$  und jede stetige Halbnorm  $p$  auf  $E$ ; man hat also die *stetige Einbettung*  $E_B \hookrightarrow E$ . Somit ist  $\|\cdot\|_B$  eine *Norm* auf  $E_B$ , da  $E$  ein Hausdorff-Raum ist. Mit  $\mathbb{B}(E)$  bezeichnen wir das System aller beschränkten Kugeln in  $E$ .

c) Eine Kugel  $B \in \mathbb{B}(E)$  heißt *Banach-Kugel*, falls  $E_B$  vollständig ist. Mit  $\widehat{\mathbb{B}}(E)$  bezeichnen wir das System aller Banach-Kugeln in  $E$ .



**Satz 7.6**

- a) Eine folgenvollständige Kugel  $B \in \mathbb{B}(E)$  ist eine Banach-Kugel.  
 b) Eine kompakte Kugel  $B \in \mathbb{B}(E)$  ist eine Banach-Kugel.

BEWEIS. a) Für eine Cauchy-Folge  $(x_n)$  im normierten Raum  $E_B$  gibt es  $\rho > 0$  mit  $\|x_n\|_B \leq \rho$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wegen  $E_B \hookrightarrow E$  ist  $(x_n)$  auch eine Cauchy-Folge in  $\rho B$  bezüglich  $\mathfrak{T}(E)$ , und somit existiert  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \rho B$ . Aufgrund der Cauchy-Bedingung in  $E_B$  gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $x_n - x_m \in \varepsilon B$  für  $n, m \geq n_0$ . Mit  $m \rightarrow \infty$  folgt auch  $x_n - x \in \varepsilon B$  für  $n \geq n_0$ , also  $\|x - x_n\|_B \rightarrow 0$ .

b) ist ein Spezialfall von a). ◇

**Lemma 7.7**

Es seien  $E$  ein lokalkonvexer Raum,  $A \subseteq E$  eine Tonne und  $B \in \widehat{\mathbb{B}}(E)$ . Dann wird  $B$  von  $A$  absorbiert, es gibt also  $\rho > 0$  mit  $B \subseteq \rho A$ .

BEWEIS. Dies folgt aus Satz 7.3, da  $A \cap E_B$  eine Tonne im Banachraum  $E_B$  ist. ◇

**Satz 7.8**

Es seien  $E, F$  lokalkonvexe Räume und  $\mathcal{G} \subseteq L_\sigma(E, F)$  beschränkt.

- a) Für jede Banach-Kugel  $B \in \widehat{\mathbb{B}}(E)$  ist dann  $\bigcup \{T(B) \mid T \in \mathcal{G}\}$  in  $F$  beschränkt.  
 b) Ist  $E$  folgenvollständig, so ist  $\mathcal{G}$  in  $L_\beta(E, F)$  beschränkt.

BEWEIS. a) Es sei  $V \in \mathcal{U}(F)$ . Wie im Beweis von Theorem 7.4 ist  $A := \bigcap_{T \in \mathcal{G}} T^{-1}(V)$  eine Tonne in  $E$ . Nach Lemma 7.7 gibt es  $\rho > 0$  mit  $B \subseteq \rho A$ , also  $T(B) \subseteq \rho V$  für alle  $T \in \mathcal{G}$ .

b) Für folgenvollständige Räume  $E$  gilt  $\mathbb{B}(E) = \widehat{\mathbb{B}}(E)$  nach Satz 7.6. ◇

**Folgerung.** Für einen folgenvollständigen lokalkonvexen Raum  $E$  ist jede schwach beschränkte Menge in  $E'$  stark beschränkt.

## 7.2 Projektive Topologien

Lokalkonvexe Räume können (unter geeigneten Bedingungen) aus Banachräumen konstruiert werden. In diesem Abschnitt untersuchen wir *projektive*, im nächsten dann *induktive* Konstruktionen.

**Projektive Systeme und Topologien.** a) Es seien  $J$  eine Indexmenge,  $(E_j, \mathfrak{T}_j)$  lokalkonvexe Räume,  $E$  ein Vektorraum und  $u_j : E \rightarrow E_j$  linear, sodass zu  $0 \neq x \in E$  ein  $j \in J$  mit  $u_j(x) \neq 0$  existiert. Die *projektive Topologie*  $\mathfrak{T}^p = \mathfrak{T}^p\{u_j : E \rightarrow E_j\}_{j \in J}$  des *projektiven Systems*  $\{u_j : E \rightarrow E_j\}_{j \in J}$  auf  $E$  ist die *größte Topologie* auf  $E$ , bezüglich der alle  $u_j$  stetig sind.

b) Es ist  $\mathfrak{T}^p$  das Supremum der Topologien  $u_j^{-1}(\mathfrak{T}_j)$ ; eine Umgebungsbasis von  $x \in E$  ist gegeben durch alle endlichen Durchschnitte der Mengen  $u_j^{-1}(V_j)$ , wobei  $V_j$  eine Umgebung von  $u_j(x)$  ist. Da die  $u_j$  linear sind, ist  $\mathfrak{T}^p$  *translationsinvariant* mit Nullumgebungsbasis

$$\mathbb{U} = \mathbb{U}(E) = \left\{ \bigcap_{j \in J'} u_j^{-1}(U_j) \mid J' \subseteq J \text{ endlich, } U_j \in \mathbb{U}(E_j) \right\}. \quad (2)$$

Nach Satz 7.1 ist  $\mathfrak{T}^p$  *lokalkonvex*. Mit allen  $\mathfrak{T}_j$  ist auch  $\mathfrak{T}^p$  Hausdorffsch.

c) Ein Fundamentalsystem von Halbnormen auf  $E$  ist gegeben durch

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}(E) = \left\{ \sup_{j \in J'} (p_j \circ u_j) \mid J' \subseteq J \text{ endlich, } p_j \in \mathbb{H}(E_j) \right\}. \quad (3)$$

d) Für einen topologischen Raum  $M$  ist eine Abbildung  $f : M \rightarrow E$  genau dann stetig, wenn alle Abbildungen  $u_j \circ f : M \rightarrow E_j$  stetig sind.

Wir stellen nun einige Beispiele projektiver Topologien vor:

**Unterräume.** Es seien  $E$  ein lokalkonvexer Raum,  $G \subseteq E$  ein *Unterraum* von  $E$  und  $i : G \rightarrow E$  die Inklusion. Die projektive Topologie  $\mathfrak{T}^p\{i : G \rightarrow E\}$  ist die von  $E$  induzierte Topologie auf  $G$ .

**Schwache Topologien.** Es sei  $E$  ein lokalkonvexer Raum. Aufgrund des Satzes von Hahn-Banach ist  $\{x' : E \rightarrow \mathbb{K}\}_{x' \in E'}$  ein projektives System; die davon erzeugte projektive Topologie  $\sigma(E, E') := \mathfrak{T}^p\{x' : E \rightarrow \mathbb{K}\}_{x' \in E'}$  heißt *schwache Topologie* auf  $E$ . Sie induziert die für normierte Räume in [GK], Kapitel 10 behandelte *schwache Konvergenz* von Folgen.

**Kartesische Produkte.** a) Es seien  $E_j$  lokalkonvexe Räume und  $E = \prod_{j \in J} E_j$  ihr kartesisches Produkt. Die *Produkttopologie* auf  $E$  ist die projektive Topologie  $\mathfrak{T}^p\{\rho_j : E \rightarrow E_j\}_{j \in J}$  der kanonischen Projektionen  $\rho_j : E \rightarrow E_j$ . Sie beschreibt die koordinatenweise Konvergenz; der Raum  $E$  ist genau dann folgenvollständig, quasivollständig oder vollständig, wenn dies auf alle  $E_j$  zutrifft.

b) Im Fall  $E_j = \mathbb{K}$  für alle  $j \in J$  ist das Produkt  $\prod_{j \in J} E_j = \mathbb{K}^J$  der Raum aller Funktionen auf  $J$  (vgl. S. 7); speziell für  $J = \mathbb{N}_0$  erhält man den Fréchetraum  $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$  aller Folgen (vgl. S. 11).

### Satz 7.9

*Ein lokalkonvexer Raum  $E$  trage die projektive Topologie  $\mathfrak{T}^p\{u_j : E \rightarrow E_j\}_{j \in J}$ . Dann ist  $E$  zu einem Unterraum von  $\prod_{j \in J} E_j$  isomorph.*

BEWEIS. Es ist  $\Phi : x \mapsto (u_j(x))_{j \in J}$  ein *Isomorphismus* von  $E$  in  $\prod_{j \in J} E_j$ . ◇

**Lokale Banachräume.** a) Es sei  $(E, \mathfrak{T})$  ein lokalkonvexer Raum. Für eine Halbnorm  $p \in \mathbb{H}(E)$  betrachten wir den Nullraum  $N_p = \{x \in E \mid p(x) = 0\}$ ; auf dem Quotientenraum  $E_p := E/N_p$  definiert  $p$  eine Norm  $\|\cdot\|_p$ . Die Vervollständigung  $\widehat{E}_p$  von  $(E_p, \|\cdot\|_p)$  heißt der durch  $p$  definierte *lokale Banachraum*. Mit  $U = U_p$  oder  $U = \overline{U}_p$  schreiben wir auch  $N_U, E_U$  und  $\widehat{E}_U$  für  $N_p, E_p$  und  $\widehat{E}_p$ .

b) Mit den *kanonischen Abbildungen*

$$\rho_p : E \rightarrow E_p \subseteq \widehat{E}_p, \quad \rho_p(x) := x + N_p, \quad (4)$$

gilt  $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^p\{\rho_p : E \rightarrow \widehat{E}_p\}_{p \in \mathbb{H}}$ . Für  $p, q \in \mathbb{H}(E)$  mit  $p \leq Cq$  gilt  $N_q \subseteq N_p$ , und wir erhalten *verbindende kanonische Abbildungen*

$$\rho_q^p : E_q \rightarrow E_p, \quad \rho_q^p(x + N_q) := x + N_p, \quad (5)$$

sowie ihre Fortsetzungen  $\widehat{\rho}_q^p : \widehat{E}_q \rightarrow \widehat{E}_p$ . Es gelten die *Kohärenz-Bedingungen*

$$\widehat{\rho}_p^p = I, \quad \widehat{\rho}_r^p = \widehat{\rho}_q^p \widehat{\rho}_r^q \quad \text{und} \quad \rho_p = \widehat{\rho}_q^p \rho_q \quad \text{für} \quad p \leq Cq \leq C'r. \quad (6)$$

Durch  $\Phi : x \mapsto (\rho_p(x))_{p \in \mathbb{H}}$  wird nach Satz 7.9 ein *Isomorphismus* von  $E$  in  $\prod_{p \in \mathbb{H}} \widehat{E}_p$  definiert. Ein *vollständiger* lokalkonvexer Raum  $E$  ist also zu einem *abgeschlossenen* Unterraum eines Produkts von Banachräumen *isomorph*.

c) Die lokalen Banachräume können als „Bausteine“ des lokalkonvexen Raumes  $E$  betrachtet werden. Wichtige Eigenschaften von  $E$  lassen sich mittels Bedingungen an die Banachräume  $\widehat{E}_p$  und/oder die kanonischen Abbildungen  $\widehat{\rho}_q^p$  beschreiben, vgl. dazu die Kapitel 11 und 12.

**Beispiele.** a) Für die  $\mathcal{C}^m$ -Norm  $p$  auf dem Fréchetraum  $E = \mathcal{C}^\infty[a, b]$  hat man  $\widehat{E}_p = \mathcal{C}^m[a, b]$ , und für die Sobolev-Norm  $p = \|\cdot\|_{W_2^s}$  ist  $\widehat{E}_p = W_2^s(a, b)$ . Der Raum  $\mathcal{C}^\infty[a, b]$  besitzt also ein Fundamentalsystem von Normen, dessen lokale Banachräume isomorph zu  $\mathcal{C}[a, b]$  sind und ein solches, dessen lokale Banachräume Hilberträume sind. Die kanonischen Abbildungen  $\widehat{\rho}_s^t : W_2^s(a, b) \rightarrow W_2^t(a, b)$  sind Hilbert-Schmidt-Operatoren für  $s - t > \frac{1}{2}$  nach [GK], Abschnitt 12.5 oder Aufgabe 4.16.

b) Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $K \subseteq \Omega$  kompakt. Für die Halbnorm  $p = p_K$  auf  $E = \mathcal{C}(\Omega)$  ist  $N_p = \{f \in \mathcal{C}(\Omega) \mid f|_K = 0\}$ . Nach dem *Fortsetzungssatz von Tietze* (vgl. [Kaballo 1997], 16.8) ist die Restriktion  $R : \mathcal{C}(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}(K)$  *surjektiv*, und daher gilt  $E_p = \mathcal{C}(\Omega)/N_p \simeq \mathcal{C}(K)$ . Insbesondere ist  $E_p$  vollständig.

**Projektive Spektren und Limiten.** a) Es sei  $I$  eine gerichtete Menge. Ein *projektives Spektrum*  $\{E_i, \rho_j^i\}_I$  ist ein System lokalkonvexer Räume  $E_i$  ( $i \in I$ ) und stetiger linearer Abbildungen  $\rho_j^i \in L(E_j, E_i)$  ( $i \leq j \in I$ ), sodass die *Kohärenz-Bedingungen*

$$\rho_i^i = I, \quad \rho_k^i = \rho_j^i \rho_k^j \quad \text{für} \quad i \leq j \leq k \quad (7)$$

gelten. Wir definieren dann den *projektiven Limes*

$$E := \text{proj}\{E_i, \rho_j^i\}_I := \text{proj}_i E_i := \{x = (x_i) \in \prod_{i \in I} E_i \mid \rho_j^i(x_j) = x_i \text{ für } i \leq j\} \quad (8)$$

und versehen ihn mit der durch die Projektionen  $\rho_i : E \rightarrow E_i$  gegebenen projektiven Topologie. Analog können wir auch projektive Spektren und Limiten von topologischen Vektorräumen oder von Vektorräumen (ohne weitere Struktur) definieren.

b) Sind alle  $E_i$  folgenvollständig, quasivollständig oder vollständig, so gilt dies auch für  $E$ .

c) Sind alle  $E_i$  Unterräume eines Vektorraumes  $F$  und sind alle  $\rho_j^i \in L(E_j, E_i)$  Inklusionen, so kann  $\text{proj}\{E_i, \rho_j^i\}_I$  mit dem Durchschnitt  $\bigcap_i E_i$  identifiziert werden.

d) Für einen lokalkonvexen Raum  $E$  ist  $\{\widehat{E}_p, \widehat{\rho}_q^p\}_{\mathbb{H}(E)}$  ein projektives Spektrum. Das Bild der nach (6) definierten Abbildung  $\Phi : E \rightarrow \prod_{p \in \mathbb{H}} \widehat{E}_p$  liegt *dicht* in  $\text{proj}\{\widehat{E}_p, \widehat{\rho}_q^p\}_{\mathbb{H}(E)}$ . Für einen *vollständigen* Raum  $E$  gilt also

$$E \simeq \text{proj}\{\widehat{E}_p, \widehat{\rho}_q^p\}_{\mathbb{H}(E)} = \text{proj}_p \widehat{E}_p. \quad (9)$$

e) Für ein projektives Spektrum  $\{E_n, \rho_m^n\}_{\mathbb{N}}$  und eine streng monoton wachsende Funktion  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  gilt  $\text{proj}\{E_n, \rho_m^n\}_{\mathbb{N}} \simeq \text{proj}\{E_{\alpha(k)}, \rho_{\alpha(\ell)}^{\alpha(k)}\}_{\mathbb{N}}$ .

f) Nun seien  $\{E_n, \rho_m^n\}_{\mathbb{N}}$  und  $\{F_n, \phi_m^n\}_{\mathbb{N}}$  projektive Spektren und  $T_n \in L(E_n, F_n)$ , sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} E & \cdots & \xrightarrow{\rho_{n+1}^n} & E_{n+1} & \xrightarrow{\rho_{n+1}^n} & E_n & \xrightarrow{\rho_n^{n-1}} & E_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{\rho_2^1} & E_1 \\ & & & \downarrow T_{n+1} & & \downarrow T_n & & \downarrow T_{n-1} & & \cdots & & \downarrow T_1 \\ F & \cdots & \xrightarrow{\phi_{n+1}^n} & F_{n+1} & \xrightarrow{\phi_{n+1}^n} & F_n & \xrightarrow{\phi_n^{n-1}} & F_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{\phi_2^1} & F_1 \end{array}$$

kommutiert. Dann gibt es genau einen Operator  $T \in L(E, F)$  mit  $T_n \rho_n = \phi_n T$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und dieser ist gegeben durch  $T : (x_n) \mapsto (Tx_n)$ .

**Beispiele.** a) Es gilt also  $\mathcal{C}^\infty[a, b] \simeq \text{proj}_m \mathcal{C}^m[a, b] \simeq \text{proj}_n W^n(a, b)$ .

b) Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen mit relativ kompakter Ausschöpfung  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (vgl. (1.2)). Mit den Restriktionen  $\rho_m^n : \mathcal{C}(\overline{\Omega_m}) \rightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega_n})$  gilt  $\mathcal{C}(\Omega) \simeq \text{proj}\{\mathcal{C}(\overline{\Omega_n}), \rho_m^n\}_{\mathbb{N}} = \text{proj}_n \mathcal{C}(\overline{\Omega_n})$ . Man kann auch  $\mathcal{C}(\Omega) \simeq \text{proj}_n \mathcal{C}(\Omega_n)$  als projektiven Limes der Fréchet-räume  $\mathcal{C}(\Omega_n)$  auffassen.

c) Analog zu b) hat man auch  $\mathcal{E}(\Omega) \simeq \text{proj}_n \mathcal{E}(\Omega_n)$  sowie  $\mathcal{H}(\Omega) \simeq \text{proj}_n \mathcal{H}(\Omega_n)$  im Fall  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ .

## 7.3 Induktive lokalkonvexe Topologien

„Dual“ zu projektiven Konstruktionen untersuchen wir nun

**Induktive lokalkonvexe Systeme und Topologien.** a) Es seien  $J$  eine Indexmenge,  $(E_j, \mathfrak{T}_j)$  lokalkonvexe Räume,  $E$  ein Vektorraum und  $v_j : E_j \rightarrow E$  linear mit  $[\bigcup_j v_j(E_j)] = E$ . Die *induktive lokalkonvexe Topologie*  $\mathfrak{T}^i = \mathfrak{T}^i\{v_j : E_j \rightarrow E\}_{j \in J}$  des *induktiven Systems*  $\{v_j : E_j \rightarrow E\}_{j \in J}$  auf  $E$  ist die *feinste* (nicht notwendig separierte) *lokalkonvexe Topologie* auf  $E$ , bezüglich der alle  $v_j$  stetig sind.

b) Aufgrund von Satz 6.2 wird durch

$$\mathbb{U}(E) := \{U \subseteq E \text{ absolutkonvex} \mid \forall j \in J : v_j^{-1}(U) \in \mathfrak{U}(E_j)\} \quad (10)$$

eine Nullumgebungsbasis einer lokalkonvexen Topologie auf  $E$  definiert, die offenbar mit  $\mathfrak{T}^i$  übereinstimmt. Es gilt auch

$$\mathbb{U}(E) := \{\Gamma(\bigcup_j v_j(V_j)) \mid V_j \in \mathfrak{U}(E_j)\}. \quad (11)$$

c) Wegen b) ist eine Halbnorm  $p$  auf  $(E, \mathfrak{T}^i)$  genau dann stetig, wenn alle  $p \circ v_j$  auf den Räumen  $E_j$  stetig sind.

d) Für einen lokalkonvexen Raum  $F$  ist eine lineare Abbildung  $T : E \rightarrow F$  genau dann stetig, wenn alle Abbildungen  $T \circ v_j : E_j \rightarrow F$  stetig sind.

Projektive Topologien sind automatisch linear und sogar lokalkonvex. Für ein induktives System  $\{v_j : E_j \rightarrow E\}_{j \in J}$  dagegen ist i. A. die induktive Topologie auf  $E$  nicht linear und auch die induktive lineare Topologie  $\mathfrak{T}^\ell$  nicht lokalkonvex (vgl. [Jarchow 1981], Beispiel 6.10.L). Für *abzählbare* Indexmengen  $J$  gilt jedoch  $\mathfrak{T}^\ell = \mathfrak{T}^i$  (vgl. [Jarchow 1981], 4.1.4 und 6.6.9).

**Der Raum der Testfunktionen.** a) Für eine offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  betrachten wir das induktive System  $\{i_K : \mathcal{D}(K) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)\}_{K \subseteq \Omega \text{ kompakt}}$  und die entsprechende induktive lokalkonvexe Topologie  $\mathfrak{T}^i$  auf  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Diese ist auch gegeben durch das *abzählbare* induktive System  $\{i_{K_j} : \mathcal{D}(K_j) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)\}_{j \in \mathbb{N}}$ , wobei  $\{K_j\}$  eine kompakte Ausschöpfung von  $\Omega$  ist (vgl. (1.3)).

b) Da alle Inklusionen  $i : \mathcal{D}(K) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  stetig sind, hat man  $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ , und insbesondere ist  $\mathfrak{T}^i$  Hausdorffsch auf  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Nach obigem Punkt d) ist eine Linearform  $u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann stetig bezüglich  $\mathfrak{T}^i$ , wenn alle Einschränkungen  $u : \mathcal{D}(K) \rightarrow \mathbb{C}$  stetig sind; somit ist also  $\mathcal{D}'(\Omega)$  der *Raum der Distributionen* auf  $\Omega$ , der bereits auf S. 37 eingeführt wurde.

Entsprechend hat man induktive lokalkonvexe Topologien auf den Räumen  $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$  der  $\mathcal{C}^m$ -Funktionen mit kompaktem Träger.

**Keime holomorpher Funktionen.** a) Es sei  $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{C}^n$  eine kompakte Menge. Für offene Umgebungen  $U, V$  von  $K$  heißen holomorphe Funktionen  $f \in \mathcal{H}(U)$  und  $g \in \mathcal{H}(V)$  *äquivalent*, wenn es eine offene Menge  $W$  mit  $K \subseteq W \subseteq U \cap V$  und  $f(z) = g(z)$  für alle  $z \in W$  gibt. Eine Äquivalenzklasse  $\tilde{f}$  dieser Relation heißt *holomorpher Funktionskeim* auf  $K$ , die Menge aller Äquivalenzklassen  $\mathcal{H}(K)$  heißt *Algebra der holomorphen Funktionskeime auf  $K$* .

b) Die kanonischen Abbildungen  $i_U : f \mapsto \tilde{f}$  bilden offenbar ein induktives System  $\{i_U : \mathcal{H}(U) \rightarrow \mathcal{H}(K)\}_{K \subseteq U}$  offen und definieren eine induktive lokalkonvexe Topologie  $\mathfrak{T}^i$  auf  $\mathcal{H}(K)$ . Mit  $\bar{U}_j := \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, K) < \frac{1}{j}\}$  ist diese auch gegeben durch das abzählbare induktive System  $\{i_{U_j} : \mathcal{H}(U_j) \rightarrow \mathcal{H}(K)\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Die stetige lineare Abbildung  $\Phi : \mathcal{H}(K) \rightarrow \mathbb{C}^{K \times \mathbb{N}_0}$ ,  $f \mapsto (f^{(j)}(z))_{z \in K, j \in \mathbb{N}_0}$  ist *injektiv*, und daher ist  $\mathfrak{T}^i$  *Hausdorffsch*.

Die Algebra  $\mathcal{H}(K)$  spielt eine Rolle beim *analytischen Funktionalkalkül* in der Operatortheorie (vgl. Abschnitt 13.2).

Im Gegensatz zum projektiven Fall müssen induktive lokalkonvexe Topologien von induktiven Systemen separierter Räume i. A. nicht separiert sein. Einfache Beispiele für diese Situation liefern

**Quotientenräume.** a) Es seien  $E$  ein lokalkonvexer Raum,  $G \subseteq E$  ein Unterraum und  $\sigma : E \rightarrow Q = E/G$  die Quotientenabbildung. Die Quotiententopologie auf  $Q$  ist die induktive Topologie  $\mathfrak{T}^i\{\sigma : E \rightarrow Q\}$ ; diese ist genau dann Hausdorffsch, wenn  $G$  in  $E$  abgeschlossen ist.

b) Für eine Nullumgebungsbasis  $\mathbb{U}(E)$  von  $E$  ist nach (11) eine solche von  $Q$  gegeben durch  $\mathbb{U}(Q) = \{\sigma(U) \mid U \in \mathbb{U}(E)\}$  in Übereinstimmung mit S. 138. Für  $U \in \mathbb{U}(E)$ ,  $p = p_U$ ,  $\tilde{p} = p_{\sigma U}$  und  $y \in Q$  ist

$$\begin{aligned} \tilde{p}(y) &= \inf\{t > 0 \mid y \in t\sigma(U)\} = \inf_{\sigma x = y} \inf\{t > 0 \mid x \in tU\}, \quad \text{also} \\ \tilde{p}(\sigma x) &:= \inf\{p(x+z) \mid z \in G\} \quad \text{für } \sigma x \in Q \text{ und } p \in \mathbb{H}(E). \end{aligned} \quad (12)$$

Diese *Quotienten-Halbnormen* bilden ein Fundamentalsystem von Halbnormen auf  $Q$ .

**Lokalkonvexe direkte Summen.** a) Es seien  $E_j$  lokalkonvexe Räume und

$$E = \bigoplus_{j \in J} E_j = \{x = (x_j) \in \prod_{j \in J} E_j \mid x_j \neq 0 \text{ nur für endlich viele } j\}$$

ihre direkte Summe. Die *kanonischen Einbettungen*

$$i_k : E_k \rightarrow E, \quad i_k(x_k) = (\delta_{jk} x_k)_{j \in J},$$

bilden ein induktives System, und wir betrachten dessen induktive lokalkonvexe Topologie  $\mathfrak{T}^i$  auf  $E$ . Wegen  $E \hookrightarrow \prod_{j \in J} E_j$  ist  $\mathfrak{T}^i$  separiert, falls dies auf alle  $E_j$  zutrifft.

b) Ein Fundamentalsystem von Halbnormen auf  $E$  ist gegeben durch (vgl. Aufgabe 7.5)

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}(E) = \{p : x = (x_j) \mapsto \sum_{j \in J} p_j(x_j) \mid p_j \in \mathbb{H}(E_j)\}. \quad (13)$$

c) Im Fall  $J = \mathbb{N}_0$  und  $E_j = \mathbb{K}$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  ist die direkte Summe  $\varphi := \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} \mathbb{K}$  der Raum aller endlichen Folgen.

### Satz 7.10

Der separierte lokalkonvexe Raum  $E$  trage die induktive lokalkonvexe Topologie  $\mathfrak{T}^i = \mathfrak{T}^i\{v_j : E_j \rightarrow E\}_{j \in J}$ . Dann ist  $E$  zu einem Quotientenraum von  $\bigoplus_{j \in J} E_j$  isomorph.

BEWEIS. Die lineare Abbildung  $\sigma : \bigoplus_j E_j \rightarrow E$ ,  $\sigma(x_j) := \sum_{j \in J} v_j(x_j)$ , ist offenbar surjektiv. Die Quotiententopologie  $\mathfrak{T}^q$  ist die feinste lokalkonvexe Topologie, für die  $\sigma$  stetig ist, also die feinste lokalkonvexe Topologie, für die alle  $v_j = \sigma \circ i_j$  stetig sind. Daher gilt  $\mathfrak{T}^q = \mathfrak{T}^i$ .  $\diamond$

Sind alle Räume  $E_j$  separiert, so ist der Raum  $(E, \mathfrak{T}^i)$  genau dann separiert, wenn der Kern  $N(\sigma)$  in  $\bigoplus_j E_j$  abgeschlossen ist.

Wir untersuchen nun zu den auf S. 151 eingeführten lokalen Banachräumen „duale“ Konstruktionen und verwenden dazu *beschränkte Kugeln* (vgl. S. 148).

**Bornologische Räume.** a) Es sei  $(E, \mathfrak{T})$  ein separierter lokalkonvexer Raum. Die Einbettungen  $i_B : E_B \rightarrow E$  definieren ein induktives System  $\{i_B : E_B \rightarrow E\}_{B \in \mathbb{B}(E)}$  normierter Räume und eine induktive lokalkonvexe Topologie  $\mathfrak{T}^b$  auf  $E$ . Der Raum  $E$  heißt *bornologisch*, falls  $\mathfrak{T}^b = \mathfrak{T}$  gilt.

b) Für  $B, C \in \mathbb{B}(E)$  mit  $B \subseteq \rho C$  für ein  $\rho > 0$  gilt  $E_B \hookrightarrow E_C$ , und wir erhalten stetige lineare *verbindende kanonische Abbildungen*  $i_{BC} : E_B \rightarrow E_C$ . Es gelten die *Kohärenz-Bedingungen*

$$i_{BB} = I, \quad i_{BD} = i_{CD} i_{BC} \quad \text{und} \quad i_C = i_{BC} i_B \quad \text{für} \quad B \subseteq \rho C \subseteq \rho' D \in \mathbb{B}(E). \quad (14)$$

Die normierten Räume  $E_B$  können als „Bausteine“ eines bornologischen Raumes  $E$  betrachtet werden.

c) Stets ist  $\mathfrak{T}^b$  feiner als  $\mathfrak{T}$ , und beide Topologien definieren die gleichen beschränkten Mengen auf  $E$ . Daher ist der Raum  $(E, \mathfrak{T}^b)$  stets bornologisch; er wird als der *zu  $E$  assoziierte bornologische Raum*  $E_b$  bezeichnet.

d) Eine Menge  $A \subseteq E$  heißt *bornivor* oder *gefräßig*, wenn sie jede beschränkte Menge absorbiert, wenn es also zu  $B \in \mathbb{B}(E)$  ein  $\rho > 0$  mit  $\rho B \subseteq A$  gibt. Nullumgebungen sind stets bornivor.

e) Es sei  $\mathfrak{A}$  ein System von Teilmengen von  $E$ . Eine lineare Abbildung  $T : E \rightarrow F$  oder eine Halbnorm  $p$  auf  $E$  heißt  *$\mathfrak{A}$ -beschränkt*, falls sie auf jeder Menge aus  $\mathfrak{A}$  beschränkt ist (vgl. S. 140).

**Satz 7.11**

Für einen lokalkonvexen Raum  $(E, \mathfrak{T})$  sind äquivalent:

- (a)  $E$  ist bornologisch.
- (b)  $E$  trägt eine induktive lokalkonvexe Topologie normierter Räume.
- (c) Jede bornivore Kugel  $A \subseteq E$  ist eine Nullumgebung.
- (d) Jede  $\mathbb{B}(E)$ -beschränkte Halbnorm  $p$  auf  $E$  ist stetig.
- (e) Jede  $\mathbb{B}(E)$ -beschränkte lineare Abbildung von  $E$  in einen lokalkonvexen Raum  $F$  ist stetig.
- (f) Jede  $\mathbb{B}(E)$ -beschränkte lineare Abbildung von  $E$  in einen Banachraum  $F$  ist stetig.

BEWEIS. „(a)  $\Rightarrow$  (b)“ ist klar aufgrund der Definition.

„(b)  $\Rightarrow$  (c)“:  $E$  trage die induktive lokalkonvexe Topologie  $\mathfrak{T}^i$  des induktiven Systems  $\{v_j : E_j \rightarrow E\}_{j \in J}$  der normierten Räume  $E_j$ . Für die Einheitskugel  $K_j$  von  $E_j$  ist  $v_j(K_j)$  in  $E$  beschränkt; es gibt also  $\rho_j > 0$  mit  $\rho_j v_j(K_j) \subseteq A$ . Da  $A$  absolutkonvex ist, folgt auch  $\Gamma(\bigcup_j v_j(\rho_j K_j)) \subseteq A$ , und wegen (11) ist  $A$  eine Nullumgebung von  $E$ .

„(c)  $\Rightarrow$  (d)“: Die Einheitskugel  $\overline{U}_p$  von  $p$  ist nach Voraussetzung bornivor und somit eine Nullumgebung; daher ist  $p$  stetig (vgl. Aufgabe 7.1).

„(d)  $\Rightarrow$  (e)“: Es seien  $T : E \rightarrow F$  linear und  $\mathbb{B}$ -beschränkt und  $q \in \mathfrak{H}(F)$ . Dann ist die Halbnorm  $q \circ T$   $\mathbb{B}$ -beschränkt, also stetig auf  $E$ . Somit existiert  $p \in \mathfrak{H}(E)$  mit  $q(Tx) \leq Cp(x)$  für alle  $x \in E$ .

„(e)  $\Rightarrow$  (f)“ ist klar.

„(f)  $\Rightarrow$  (a)“: Für  $p \in \mathfrak{H}(E_b)$  ist die kanonische Abbildung  $\rho_p : E \rightarrow \widehat{E}_p$   $\mathbb{B}(E)$ -beschränkt, also stetig. Damit ist auch die Identität  $I : E \rightarrow E_b$  stetig, und  $E = E_b$  ist bornologisch.  $\diamond$

**Satz 7.12**

a) Ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum  $E$  ist bornologisch.

b) Für einen bornologischen Raum  $E$  ist der Dualraum  $E'_\beta$  vollständig.

BEWEIS. a) Es seien  $p$  eine  $\mathbb{B}(E)$ -beschränkte Halbnorm auf  $E$  und  $\mathbb{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullumgebungsbasis von  $E$  mit  $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$ . Ist  $p$  auf jedem  $U_n$  unbeschränkt, so gibt es  $x_n \in U_n$  mit  $p(x_n) \geq n$ . Wegen  $x_n \rightarrow 0$  ist aber die Menge  $\{x_n\}$  beschränkt, und wir erhalten einen Widerspruch. Somit ist  $p$  stetig, und die Behauptung folgt aus Satz 7.11 (d).

b) Für ein Cauchy-Netz  $(u_\alpha)$  in  $E'_\beta$  existiert der Limes  $u(x) := \lim_{\alpha} u_\alpha(x)$  gleichmäßig auf den beschränkten Teilmengen von  $E$ . Es ist  $u : E \rightarrow \mathbb{K}$  linear und  $\mathbb{B}(E)$ -beschränkt, also stetig nach Satz 7.11 (e).  $\diamond$



Wichtig für den Satz vom abgeschlossenen Graphen (Theorem 7.22) sind

**Ultrabornologische Räume.** Für einen (separierten) lokalkonvexen Raum  $(E, \mathfrak{T})$  ist  $\{i : E_B \rightarrow E\}_{B \in \widehat{\mathbb{B}}(E)}$  ein induktives System von Banachräumen; dieses definiert eine induktive lokalkonvexe Topologie  $\mathfrak{T}^{ub}$  auf  $E$ . Der Raum  $E$  heißt *ultrabornologisch*, falls  $\mathfrak{T}^{ub} = \mathfrak{T}$  gilt.

**Satz 7.13**

Für einen lokalkonvexen Raum  $(E, \mathfrak{T})$  sind äquivalent:

- (a)  $E$  ist ultrabornologisch.
- (b)  $E$  trägt eine induktive lokalkonvexe Topologie von Banachräumen.
- (c) Eine Kugel  $A \subseteq E$ , die alle Banach-Kugeln absorbiert, ist eine Nullumgebung.
- (d) Jede  $\widehat{\mathbb{B}}(E)$ -beschränkte Halbnorm  $p$  auf  $E$  ist stetig.
- (e) Jede  $\widehat{\mathbb{B}}(E)$ -beschränkte lineare Abbildung von  $E$  in einen lokalkonvexen Raum  $F$  ist stetig.
- (f) Jede  $\widehat{\mathbb{B}}(E)$ -beschränkte lineare Abbildung von  $E$  in einen Banachraum  $F$  ist stetig.

Der Beweis erfolgt analog zu dem von Satz 7.11. Für „(b)  $\Rightarrow$  (c)“ beachten wir, dass jetzt  $v_j(K_j)$  eine Banach-Kugel in  $E$  ist, und für „(f)  $\Rightarrow$  (a)“ benutzen wir, dass der Raum  $(E, \mathfrak{T}^{ub})$  ultrabornologisch ist.

**Satz 7.14**

- a) Ein ultrabornologischer Raum ist bornologisch und tonneliert.
- b) Ein folgenvollständiger bornologischer Raum ist ultrabornologisch.
- c) Ein Fréchetraum ist ultrabornologisch.

BEWEIS. a) ergibt sich aus Satz 7.13 und Lemma 7.7.

b) In folgenvollständigen Räumen gilt  $\mathbb{B} = \widehat{\mathbb{B}}$  nach Satz 7.6.

c) folgt schließlich aus b) und Satz 7.12 a). ◇

Ein unvollständiger normierter Raum ist bornologisch, i. A. aber nicht tonneliert und somit auch nicht ultrabornologisch. Andererseits gibt es tonnelierte Räume, die nicht bornologisch sind (vgl. [Jarchow 1981], 13.6).

**Satz 7.15**

Ein lokalkonvexer Raum  $E$  trage die induktive lokalkonvexe Topologie  $\mathfrak{T}^i$  des induktiven Systems  $\{v_j : E_j \rightarrow E\}_{j \in J}$ . Sind alle Räume  $E_j$  tonneliert, bornologisch oder ultrabornologisch, so gilt dies auch für  $E$ .

BEWEIS. Eine Kugel  $A \subseteq E$  sei eine Tonne, bornivor oder absorbiere alle Banach-Kugeln. Dies gilt dann auch für alle Mengen  $v_j^{-1}(A)$  in  $E$ , und daher sind diese Mengen Nullumgebungen. Wegen (10) ist dann  $A \in \mathfrak{U}(E)$ .  $\diamond$

Die in Satz 7.15 betrachteten Eigenschaften bleiben unter *projektiven* Konstruktionen *nicht* erhalten, insbesondere gibt es abgeschlossene Unterräume ultrabornologischer Räume, die weder tonneliert noch bornologisch sind (vgl. [Jarchow 1981], 13.5). Andererseits ist ein kartesisches Produkt tonnelierter Räume wieder tonneliert (vgl. [Köthe 1966], § 27.1). Weiter gilt:

### Satz 7.16

Ein abzählbares Produkt  $E = \prod_{j=1}^{\infty} E_j$  ultrabornologischer Räume ist ultrabornologisch.

BEWEIS. a) Es seien  $F$  ein Banachraum und  $T : E \rightarrow F$  eine  $\widehat{\mathbb{B}}(E)$ -beschränkte lineare Abbildung. Wir zeigen die Existenz von  $m \in \mathbb{N}$ , sodass  $Tx = 0$  gilt für alle  $x = (x_j) \in E$  mit  $x_1 = \dots = x_m = 0$ . Andernfalls gibt es Tupel  $x^{(n)} \in E$  mit  $x_1^{(n)} = \dots = x_n^{(n)} = 0$  und  $\|Tx^{(n)}\| = n$ . Wegen  $x_j^{(n)} = 0$  für  $n \geq j$  ist die Menge  $\{x_j^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $E_j$  endlich und somit in einer kompakten Kugel  $K_j$  enthalten. Dann ist aber  $K := \prod_{j=1}^{\infty} K_j$  eine Banach-Kugel in  $E$  mit  $x^{(n)} \in K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und wir erhalten einen Widerspruch.

b) Der Raum  $E_m := \prod_{j=1}^m E_j = \bigoplus_{j=1}^m E_j$  ist ultrabornologisch nach Satz 7.15; mit der Injektion  $\iota : E_m \rightarrow E$  ist daher der Operator  $T\iota : E_m \rightarrow F$  stetig nach Satz 7.13. Mit der Projektion  $\pi : E \rightarrow E_m$  gilt aber  $T = T\iota\pi$  aufgrund von a), und daher ist auch  $T : E \rightarrow F$  stetig. Die Behauptung folgt nun aus Satz 7.13.  $\diamond$

Satz 7.16 gilt auch für bornologische Räume. Allgemeiner ist ein  $d$ -faches Produkt (ultra)bornologischer Räume wieder (ultra)bornologisch, falls „ $d$  kleiner als die kleinste stark unerreichbare Kardinalzahl“ ist (Satz von Mackey-Ulam, vgl. [Köthe 1966], § 28.4, oder [Jarchow 1981], 13.5). Es ist unklar, ob stark unerreichbare Kardinalzahlen existieren.

## 7.4 $(LF)$ -Räume

Wir untersuchen nun *abzählbare induktive Limiten von Einbettungsspektren*, insbesondere die von J. Dieudonné und L. Schwartz 1949 eingeführte wichtige Klasse der  $(LF)$ -Räume, die u. a. die Räume  $\mathscr{D}(\Omega)$  und  $\mathscr{H}(K)$  enthält. Für allgemeinere induktive Limiten sei auf [Floret und Wloka 1968] oder [Jarchow 1981] verwiesen.

**Induktive Limiten.** a) Es sei  $(E_k)$  eine Folge lokalkonvexer Räume mit  $E_k \subseteq E_{k+1}$ , sodass die Inklusionen  $(E_k, \mathfrak{T}_k) \rightarrow (E_{k+1}, \mathfrak{T}_{k+1})$  stetig sind. Mit  $E := \bigcup_k E_k$  und den

Inklusionen  $i_k : E_k \rightarrow E$  heißt das abzählbare induktive System  $\{i_k : E_k \rightarrow E\}_{k \in \mathbb{N}}$  ein (induktives) *Einbettungsspektrum*. Mit der induktiven lokalkonvexen Topologie  $\mathfrak{T}^i$  dieses Systems heißt  $(E, \mathfrak{T}^i) = \text{ind}_k E_k$  der *induktive Limes* des Einbettungsspektrums. Die Räume  $(E_k, \mathfrak{T}_k)$  heißen *Stufen* des induktiven Limes.

b) Ein Einbettungsspektrum bzw. ein induktiver Limes heißt *regulär*, falls es zu jeder beschränkten Menge  $B \in \mathfrak{B}(E)$  ein  $k \in \mathbb{N}$  und eine beschränkte Menge  $B_k \in \mathfrak{B}(E_k)$  mit  $B \subseteq i_k(B_k)$  gibt.

c) Ein Einbettungsspektrum heißt *strikt*, falls  $\mathfrak{T}_{k+1}$  stets die Topologie  $\mathfrak{T}_k$  auf  $E_k$  induziert. Eine direkte Summe  $E = \bigoplus_{j=1}^{\infty} E_j$  beispielsweise ist induktiver Limes des strikten Einbettungsspektrums  $\{i_k : \bigoplus_{j=1}^k E_j \rightarrow E\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

**(LF)-Räume und (LB)-Räume.** a) Ein abzählbarer induktiver Limes eines Einbettungsspektrums von *Frécheträumen* bzw. *Banachräumen* heißt *(LF)-Raum* bzw. *(LB)-Raum*.

b) Der Raum  $\mathcal{D}(\Omega)$  der Testfunktionen ist ein strikter (LF)-Raum, die Räume  $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$  sind strikte (LB)-Räume für  $0 \leq m < \infty$ .

c) Der Raum  $\mathcal{H}(K) = \text{ind}_k \mathcal{H}(U_k)$  der holomorphen Funktionskeime auf einer kompakten Menge  $K \subseteq \mathbb{C}^n$  (vgl. S. 154) ist ein (LF)-Raum. Mit den *Banachräumen*  $\mathcal{H}^\infty(U_k)$  aller *beschränkten* holomorphen Funktionen auf  $U_k$  gilt offenbar auch  $\mathcal{H}(K) = \text{ind}_k \mathcal{H}^\infty(U_k)$ , und daher ist  $\mathcal{H}(K)$  sogar ein (LB)-Raum. Das Spektrum ist nicht strikt, aber *kompakt*, da nach dem *Satz von Montel* die verbindenden kanonischen Abbildungen  $i_{k+1}^k : \mathcal{H}^\infty(U_k) \rightarrow \mathcal{H}^\infty(U_{k+1})$  kompakt sind. Von kompakten Spektren erzeugte (LB)-Räume heißen auch *(LS)-Räume*; sie sind stets *regulär* (vgl. [Floret und Wloka 1968], § 25).

Wir zeigen nun, dass ein *strikter* (LF)-Raum  $(E, \mathfrak{T}^i) = \text{ind}_k E_k$  separiert und regulär ist und dass  $\mathfrak{T}^i$  stets die Topologie  $\mathfrak{T}_k$  auf  $E_k$  induziert:

### Lemma 7.17

Es seien  $E$  ein lokalkonvexer Raum,  $G \subseteq E$  ein Unterraum und  $U \in \mathfrak{U}(G)$  absolutkonvex. Dann gibt es eine absolutkonvexe Nullumgebung  $V \in \mathfrak{U}(E)$  mit  $V \cap G = U$ . Für  $y \notin \overline{G}$  kann  $V$  so gewählt werden, dass  $y \notin V$  gilt.

BEWEIS. a) Es gibt  $W \in \mathfrak{U}(E)$  mit  $W \cap G \subseteq U$ , und wir setzen  $V := \Gamma(W \cup U)$ . Offenbar gilt  $U \subseteq V \cap G$ . Für  $x \in V \cap G$  gilt  $x = \alpha w + \beta u$  mit  $w \in W$ ,  $u \in U$  und  $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ . Aus  $\alpha w = x - \beta u \in G$  folgt  $\alpha = 0$  oder  $w \in G$ , in jedem Fall also  $x \in U$ .

b) Für  $y \notin \overline{G}$  wählen wir  $W$  so, dass  $(y + W) \cap G = \emptyset$  gilt. Aus  $y = \alpha w + \beta u \in V$  folgt der Widerspruch  $y - \alpha w \in (y + W) \cap G$ , und daher ist  $y \notin V$ .  $\diamond$

**Satz 7.18**

Es sei  $(E, \mathfrak{T}^i) = \text{ind}_k(E_k, \mathfrak{T}_k)$  ein strikter induktiver Limes lokalkonvexer Räume, sodass  $E_k$  in  $E_{k+1}$  stets abgeschlossen ist. Dann ist  $\mathfrak{T}^i$  separiert, regulär und induziert die Topologie  $\mathfrak{T}_k$  auf allen Räumen  $E_k$ . Sind alle  $E_k$  quasivollständig, so gilt dies auch für  $E$ .

BEWEIS. a) Für  $n \in \mathbb{N}$  sei eine absolutkonvexe Nullumgebung  $U_n \in \mathfrak{U}(E_n)$  gegeben. Nach Lemma 7.17 existieren für  $k \geq n$  absolutkonvexe Nullumgebungen  $U_k \in \mathfrak{U}(E_k)$  mit  $U_{k+1} \cap E_k = U_k$  für  $k \geq n$ . Nach (11) ist dann  $U := \bigcup_{k \geq n} U_k \in \mathfrak{U}(E)$ , und es gilt  $U \cap E_n = U_n$ . Somit ist  $\mathfrak{T}^i|_{E_n} = \mathfrak{T}_n$ .

b) Für  $0 \neq y \in E$  gibt es  $n \in \mathbb{N}$  mit  $0 \neq y \in E_n$  und dann  $U_n \in \mathfrak{U}(E_n)$  mit  $y \notin U_n$ . Nach Lemma 7.17 können wir die Nullumgebung  $U \in \mathfrak{U}(E)$  aus a) so wählen, dass  $y \notin U$  gilt, und somit ist  $\mathfrak{T}^i$  separiert.

c) Nun sei  $B \subseteq E$  beschränkt. Ist  $B$  in keinem  $E_k$  enthalten, so gibt es eine Folge  $(x_n)$  in  $B$  mit  $x_n \in E_{k_{n+1}} \setminus E_{k_n}$  für geeignete Indizes  $k_n < k_{n+1}$ . Nach Lemma 7.17 gibt es absolutkonvexe Nullumgebungen  $U_n \in \mathfrak{U}(E_{k_n})$  mit  $U_{n+1} \cap E_{k_n} = U_n$  und  $\frac{1}{n}x_n \notin U_{n+1}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Nach (11) ist dann  $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \in \mathfrak{U}(E)$ , und es gilt  $\frac{1}{n}x_n \notin U$  im Widerspruch zur Beschränktheit der Menge  $\{x_n\}$ .

Es gibt also  $k \in \mathbb{N}$  mit  $B \subseteq E_k$ , und nach Beweisteil a) ist  $B$  in  $E_k$  beschränkt.

d) Ein beschränktes Cauchy-Netz in  $E$  ist aufgrund der schon bewiesenen Regularität ein solches in einem  $E_k$  und somit konvergent.  $\diamond$

**Der Raum der Testfunktionen.** Ein strikter  $(LF)$ -Raum  $E$  ist also separiert, regulär und quasivollständig; eine in  $E$  konvergente Folge ist bereits in einer Stufe  $E_k$  konvergent.

Dies gilt insbesondere für den Raum  $\mathscr{D}(\Omega)$ ; der Konvergenzbegriff in  $\mathscr{D}(\Omega)$  stimmt also mit dem auf S. 37 eingeführten Begriff überein, und die beschränkten Mengen von  $\mathscr{D}(\Omega)$  lassen sich wie auf S. 119 beschreiben.

Nach einem Resultat von G. Köthe (1950) ist ein strikter  $(LF)$ -Raum sogar *vollständig* (vgl. [Köthe 1966], § 19.5). Wir behandeln hier direkte Summen:

**Satz 7.19**

Eine direkte Summe  $E = \bigoplus_{j \in J} E_j$  vollständiger Räume ist vollständig.

BEWEIS. a) Ein Cauchy-Netz  $(x^{(\alpha)})_{\alpha \in A}$  in  $E$  besitzt einen Limes  $x$  in  $\prod_{j \in J} E_j$ . Ist  $x \notin E$ , so gibt es eine unendliche Menge  $J' \subseteq J$  mit  $x_j \neq 0$  für  $j \in J'$ . Wir wählen Halbnormen  $p_j \in \mathfrak{H}(E_j)$  mit  $p_j(x_j) > 0$  und setzen  $c_j := 2p_j(x_j)^{-1}$  für  $j \in J'$ . Für die Halbnorm  $q(y) := \sum_{j \in J'} c_j p_j(y_j)$  auf  $E$  besagt die Cauchy-Bedingung:

$$\exists \alpha \in A \forall \beta \geq \alpha : \sum_{j \in J'} c_j p_j(x_j^{(\alpha)} - x_j^{(\beta)}) \leq 1.$$

Mit „ $\beta \rightarrow \infty$ “ folgt  $\sum_{j \in J'} c_j p_j(x_j^{(\alpha)} - x_j) \leq 1$ , für alle  $j \in J'$  also  $c_j p_j(x_j^{(\alpha)} - x_j) \leq 1$

und wegen  $c_j p_j(x_j) = 2$  somit der Widerspruch  $c_j p_j(x_j^{(\alpha)}) \geq 1$ .

b) Nach a) gilt also  $x \in E$ . Nach (13) sind die stetigen Halbnormen auf  $E$  gegeben durch  $p(y) = \sum_{j \in J} p_j(y_j)$  mit Halbnormen  $p_j \in \mathfrak{H}(E_j)$ . Die Cauchy-Bedingung lautet

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha_0 \in A \forall \alpha, \beta \geq \alpha_0 : \sum_{j \in J} p_j(x_j^{(\alpha)} - x_j^{(\beta)}) \leq \varepsilon ,$$

und mit „ $\beta \rightarrow \infty$ “ folgt auch  $p(x^{(\alpha)} - x) \leq \varepsilon$  für  $\alpha \geq \alpha_0$ .  $\diamond$

Aus Satz 7.19 lässt sich mittels einer Zerlegung der Eins leicht die Vollständigkeit des Raumes  $\mathcal{D}(\Omega)$  der Testfunktionen folgern, vgl. Satz 9.33 auf S. 221.

Wir untersuchen nun Erweiterungen des Satzes von der offenen Abbildung und des Satzes vom abgeschlossenen Graphen und beginnen mit dem folgenden Faktorisierungssatz aus [Grothendieck 1954]:

### Theorem 7.20 (Grothendieck)

Es seien  $E$  ein Fréchetraum,  $F$  ein lokalkonvexer Raum und  $T : E \rightarrow F$  linear mit abgeschlossenem Graphen. Weiter seien für  $k \in \mathbb{N}$  Frécheträume  $F_k$  und Abbildungen  $S_k \in L(F_k, F)$  gegeben, sodass  $T(E) \subseteq \bigcup_k S_k(F_k)$  gilt. Dann gibt es  $n \in \mathbb{N}$  mit  $T(E) \subseteq S_n(F_n)$ . Ist  $S_n$  injektiv, so gibt es  $T_n \in L(E, F_n)$  mit  $T = S_n \circ T_n$ ; insbesondere ist  $T$  dann stetig.

BEWEIS. a) Für festes  $k \in \mathbb{N}$  betrachten wir den Raum

$$H_k := \{(x, y) \in E \times F_k \mid T(x) = S_k(y)\}.$$

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ & \nearrow T & \uparrow S_k \\ E & \xrightarrow{T_n} & F_n \end{array}$$

Aus  $H_k \ni (x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$  in  $E \times F_k$  folgt offenbar sofort

$T(x_n) = S_k(y_n) \rightarrow S_k(y)$  und dann  $T(x) = S_k(y)$ , da der Graph von  $T$  abgeschlossen ist. Somit ist  $H_k$  in  $E \times F_k$  abgeschlossen und daher ein Fréchetraum.

b) Mit den Projektionen  $\rho_k : (x, y) \rightarrow x$  in  $L(H_k, E)$  gilt  $E = \bigcup_k \rho_k(H_k)$  nach Voraussetzung. Nach dem Satz von Baire 1.12 gibt es  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $\rho_n(H_n)$  in  $E$  von zweiter Kategorie ist. Nach dem Satz von der offenen Abbildung 1.16 ist  $\rho_n$  sogar surjektiv; es gilt also  $E = \rho_n(H_n)$  und somit  $T(E) \subseteq T(\rho_n(H_n)) \subseteq S_n(F_n)$ .

c) Nun sei  $S_n$  injektiv. Dann ist  $T_n := S_n^{-1}T : E \rightarrow F_n$  linear mit abgeschlossenem Graphen und somit stetig nach dem Graphensatz 1.18.  $\diamond$

Es sei darauf hingewiesen, dass der Unterraum  $\bigcup_k S_k(F_k)$  von  $F$  nicht die induktive lokalkonvexe Topologie der linearen Abbildungen  $S_k$  tragen muss. Natürlich gilt Theorem 7.20 insbesondere für (LF)-Räume  $F = \text{ind}_k F_k$ ; eine konkrete Anwendung folgt in Satz 7.27.

Aus Theorem 7.20 ergibt sich die folgende Version des Graphensatzes:

**Satz 7.21**

*Es seien  $E$  ein ultrabornologischer Raum und  $F$  ein  $(LF)$ -Raum. Dann ist jede lineare Abbildung  $T : E \rightarrow F$  mit abgeschlossenem Graphen stetig.*

BEWEIS. Der Raum  $E$  trägt die induktive lokalkonvexe Topologie des induktiven Systems  $\{i_B : E_B \rightarrow E\}_{B \in \widehat{\mathbb{B}}(E)}$  von Banachräumen. Offenbar sind die linearen Abbildungen  $T \circ i_B : E_B \rightarrow F$  abgeschlossen und daher stetig nach Theorem 7.20. Daher ist auch  $T : E \rightarrow F$  stetig.  $\diamond$

## 7.5 Gewebe und der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Nach dem Beweis seines Graphensatzes 7.21 vermutete A. Grothendieck 1954, dass dieser für eine größere Klasse von Räumen  $F$  gelten sollte, die gegen abzählbare projektive und induktive Konstruktionen abgeschlossen ist. Eine solche Klasse von *espaces à réseaux* wurde von M. De Wilde 1967 eingeführt (vgl. [De Wilde 1978]); mit der Terminologie *Räume mit Gewebe* im Deutschen folgen wir hier [Meise und Vogt 1992].

**Räume mit Gewebe.** a) Ein *Gewebe* in einem lokalkonvexen Raum  $F$  ist eine Familie  $\{C_{n_1, \dots, n_k} \mid k \in \mathbb{N}, n_j \in \mathbb{N}\}$  von Kugeln mit folgenden Eigenschaften:

- ①  $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = F$  und  $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{n_1, \dots, n_k, n} = C_{n_1, \dots, n_k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ ,
- ② Zu jeder Folge  $(n_k)$  in  $\mathbb{N}$  gibt es eine Folge  $(r_k)$  in  $(0, \infty)$ , sodass für jede Folge  $(x_k)$  in  $F$  mit  $x_k \in C_{n_1, \dots, n_k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} r_k x_k$  in  $F$  konvergiert.

b) In der Situation von ② konvergieren auch alle Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$  mit  $|\lambda_k| \leq r_k$  in  $F$ , da die Mengen  $C_{n_1, \dots, n_k}$  absolutkonvex sind.

c) Aus ② ergibt sich die folgende Aussage:

$$\forall U \in \mathbb{U}(F) \exists m \in \mathbb{N} \forall k \geq m : r_k C_{n_1, \dots, n_k} \subseteq U. \quad (15)$$

Andernfalls gibt es eine Teilfolge  $(n_{k_j})$  von  $(n_k)$  und Vektoren  $x_{k_j} \in C_{n_1, \dots, n_{k_j}}$  mit  $r_{k_j} x_{k_j} \notin U$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Wegen ② ist aber  $(r_{k_j} x_{k_j})$  eine Nullfolge in  $F$ , und wir haben einen Widerspruch.

**Beispiele.** a) Ein Fréchetraum  $F$  besitzt ein Gewebe. Mit einer Nullumgebungsbasis  $\mathbb{U}(E) = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  setzen wir

$$C_{n_1, \dots, n_k} = \bigcap_{j=1}^k n_j U_j \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist ① offenbar erfüllt. Eine Folge  $(x_k)$  mit  $x_k \in C_{n_1, \dots, n_k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist beschränkt in  $F$ , und daher ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} x_k$  in  $F$  konvergent.

b) Auch ein  $(LF)$ -Raum  $F = \text{ind}_j F_j$  besitzt ein Gewebe. Mit einem Gewebe  $\{C_{n_1, \dots, n_k}^{(j)}\}$  auf  $F_j$  setzen wir

$$D_{n_1} := F_{n_1} \quad \text{und} \quad D_{n_1, \dots, n_k} := C_{n_2, \dots, n_k}^{(n_1)} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt ①. Zu einer Folge  $(n_k)$  in  $\mathbb{N}$  gibt es  $r_2, r_3, \dots > 0$ , sodass  $\sum_{k=2}^{\infty} r_k x_k$  für jede Folge  $(x_k)_{k \geq 2}$  mit  $x_k \in C_{n_2, \dots, n_k}^{(n_1)} \subseteq F_{n_1}$  in  $F_{n_1}$  konvergiert. Für ein beliebiges  $r_1 > 0$  und  $x_1 \in F_{n_1}$  konvergiert dann  $\sum_{k=1}^{\infty} r_k x_k$  in  $F_{n_1}$  und somit auch in  $F$ ; damit ist auch ② gezeigt.

c) Ein Gewebe auf einem Raum  $(F, \mathfrak{T})$  ist auch ein Gewebe auf  $(F, \mathfrak{T}_1)$  für jede gröbere lokalkonvexe Topologie  $\mathfrak{T}_1$  auf  $F$ . Insbesondere besitzt für einen Fréchetraum  $F$  auch der Raum  $(F, \sigma(F, F'))$  mit der schwachen Topologie ein Gewebe.

d) Es sei  $F$  ein lokalkonvexer Raum mit Gewebe  $\{C_{n_1, \dots, n_k}\}$ . Auf einem abgeschlossenen Unterraum  $G \subseteq F$  ist dann  $D_{n_1, \dots, n_k} := C_{n_1, \dots, n_k} \cap G$  ein Gewebe, und mit der Quotientenabbildung  $\sigma : F \rightarrow Q = F/G$  ist  $\sigma(C_{n_1, \dots, n_k})$  ein Gewebe auf dem Quotientenraum  $Q$ .

Aufgrund von Satz 7.24 unten ist die Klasse der Räume mit Gewebe gegen abzählbare projektive und induktive Konstruktionen abgeschlossen. Der folgende *Graphensatz* ist daher eine wesentliche Erweiterung von Satz 7.21:

### Theorem 7.22 (De Wilde)

Es seien  $E$  ein ultrabornologischer Raum und  $F$  ein lokalkonvexer Raum mit Gewebe. Dann ist jede lineare Abbildung  $T : E \rightarrow F$  mit abgeschlossenem Graphen stetig.

BEWEIS. a) Aufgrund des Beweises von Satz 7.21 können wir annehmen, dass  $E$  ein Banachraum ist.

b) Mit der Einheitskugel  $\bar{V}$  von  $E$  betrachten wir die Kugel  $B := T(\bar{V})$  in  $F$ . Es ist  $T : E \rightarrow F_B$  eine Quotientenabbildung und  $F_B$  ein Banachraum, da der Kern  $N(T)$  von  $T$  in  $E$  abgeschlossen ist. Mit  $T$  ist auch die Inklusion  $i : F_B \rightarrow F$  abgeschlossen. Es ist zu zeigen, dass  $B$  in  $F$  beschränkt ist:

c) Für ein Gewebe  $\{C_{n_1, \dots, n_k}\}$  in  $F$  setzen wir  $D_{n_1, \dots, n_k} := C_{n_1, \dots, n_k} \cap F_B$  für  $k \in \mathbb{N}$  und  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ . Wegen ① und des Satzes von Baire gibt es  $n_1 \in \mathbb{N}$ , sodass  $D_{n_1}$  von zweiter Kategorie im Banachraum  $F_B$  ist. So fortfahrend finden wir eine Folge  $(n_k)$  in  $\mathbb{N}$ , sodass  $D_{n_1, \dots, n_k}$  stets von zweiter Kategorie in  $F_B$  ist. Insbesondere besitzen die Abschlüsse dieser Mengen in  $F_B$  innere Punkte und sind somit Nullumgebungen nach Lemma 7.2.

d) Es gibt also eine Folge  $(\delta_k)$  in  $(0,1]$  mit  $\delta_k B \subseteq \overline{D}_{n_1, \dots, n_k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Nun wählen wir zur Folge  $(n_k)$  eine Folge  $(r_k)$  in  $(0,1]$  gemäß ② und setzen  $\varepsilon_k := 2^{-k} r_k \delta_k$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\varepsilon_k B \subseteq 2^{-k} r_k \overline{D}_{n_1, \dots, n_k} \subseteq 2^{-k} r_k D_{n_1, \dots, n_k} + \varepsilon_{k+1} B \quad \text{für } k \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

e) Für eine Nullumgebung  $U \in \mathbb{U}(F)$  von  $F$  wählen wir nun  $m \in \mathbb{N}$  gemäß (15). Für  $y_m \in \varepsilon_m B$  konstruieren wir rekursiv mit (16) für  $k \geq m$  Vektoren  $x_k \in 2^{-k} r_k D_{n_1, \dots, n_k}$  und  $y_{k+1} \in \varepsilon_{k+1} B$  mit

$$y_k = x_k + y_{k+1} \quad \text{für alle } k \geq m. \quad (17)$$

Aufgrund von ② konvergiert die Reihe  $\sum_{k \geq m} x_k$  in  $F$ . Wegen (15) ist  $x_k \in 2^{-k} U$ ,

und daher ist  $\sum_{k=m}^{\infty} x_k \in U$ , da  $U$  in  $F$  abgeschlossen ist. Aus (17) folgt

$$y_m - \sum_{k=m}^n x_k = y_{n+1} \in \varepsilon_{n+1} B \quad \text{für alle } n \geq m. \quad (18)$$

Wegen  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  folgt  $\sum_{k=m}^{\infty} x_k = y_m$  in  $F_B$ . Da die Inklusion  $i : F_B \rightarrow F$  abgeschlossen ist, gilt auch  $\sum_{k=m}^{\infty} x_k = y_m$  in  $F$  und daher  $y_m \in U$ . Folglich ist  $\varepsilon_m B \subseteq U$ , und  $B$  ist in  $F$  beschränkt.  $\diamond$

Aus Theorem 7.22 ergibt sich nun die folgende Version des *Satzes von der offenen Abbildung*:

### Theorem 7.23 (De Wilde)

Es seien  $E$  ein ultrabornologischer Raum,  $F$  ein lokalkonvexer Raum mit Gewebe und  $T \in L(F, E)$  surjektiv. Dann ist  $T$  eine offene Abbildung.

BEWEIS. Nach Beispiel d) auf S. 163 besitzt auch  $Q := F/N(T)$  ein Gewebe. Die induzierte bijektive Abbildung  $\tilde{T}^{-1} : E \rightarrow Q$  ist abgeschlossen und daher stetig nach Theorem 7.22.  $\diamond$

Die wichtigen *Permanenzeigenschaften* von Geweben beruhen auf:

### Satz 7.24

Es seien  $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  lokalkonvexe Räume mit Gewebe. Dann besitzen auch die Räume  $\prod_{j=1}^{\infty} F_j$  und  $\bigoplus_{j=1}^{\infty} F_j$  ein Gewebe.

BEWEIS. a) Es sei  $\{C_{n_1, \dots, n_k}^{(j)}\}$  ein Gewebe auf  $F_j$ . Wir setzen zunächst

$$\begin{aligned} D_{n_1} &:= C_{n_1}^{(1)} \times F_2 \times F_3 \times \cdots \quad \text{für } n_1 \in \mathbb{N}, \quad \text{dann} \\ D_{n_1, (n_2, n_1^{(1)})} &:= C_{n_1, n_2}^{(1)} \times C_{n_1^{(1)}}^{(2)} \times F_3 \times \cdots \quad \text{für } n_2, n_1^{(1)} \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$



Wir zählen die Paare  $(n_2, n_1^{(1)})$  durch einen Index  $\tilde{n}_2$  ab. Als nächstes definieren wir

$$D_{n_1, (n_2, n_1^{(1)}), (n_3, n_2^{(1)}, \tilde{n}_1^{(2)})} := C_{n_1, n_2, n_3}^{(1)} \times C_{n_1^{(1)}, n_2^{(1)}}^{(2)} \times C_{n_1^{(2)}}^{(3)} \times F_4 \times \cdots,$$

zählen die Tripel  $(n_3, n_2^{(1)}, n_1^{(2)})$  wieder durch einen Index  $\tilde{n}_3$  ab und fahren so fort.

Für die Familie  $\{D_{n_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_k}\}$  von Kugeln in  $\prod_{j=1}^{\infty} F_j$  ist dann ① erfüllt.

Nun sei  $n_1, \tilde{n}_2 = (n_2, n_1^{(1)}), \dots, \tilde{n}_k = (n_k, n_{k-1}^{(1)}, \dots, n_1^{(k-1)}), \dots$  eine Folge von Indizes.

Es gibt Zahlen  $r_k > 0$ , sodass  $\sum_{k \geq 1} r_k x_k^{(1)}$  für  $x_k^{(1)} \in C_{n_1, \dots, n_k}^{(1)}$  in  $F_1$  konvergiert, weiter

Zahlen  $r_k^{(1)} > 0$ , sodass  $\sum_{k \geq 1} r_k^{(1)} x_k^{(2)}$  für  $x_k^{(2)} \in C_{n_1^{(1)}, \dots, n_k^{(1)}}^{(2)}$  in  $F_2$  konvergiert, usw.

Wir definieren  $\tilde{r}_1 = r_1$ ,  $\tilde{r}_2 = \inf\{r_2, r_1^{(1)}\}$ ,  $\tilde{r}_3 = \inf\{r_3, r_2^{(1)}, r_1^{(2)}\}$ , usw. Für Vektoren  $x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots) \in D_{n_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_k}$  konvergiert dann die Reihe  $\sum_{k \geq 1} \tilde{r}_k x_k^{(j)}$  für alle

$j \in \mathbb{N}$ . Somit konvergiert  $\sum_{k \geq 1} \tilde{r}_k x_k$  in  $\prod_{j=1}^{\infty} F_j$ , und ② ist gezeigt.

b) Nach a) besitzen die Räume  $E_n := \bigoplus_{j=1}^n F_j \simeq \prod_{j=1}^n F_j$  ein Gewebe  $\{D_{n_1, \dots, n_k}^{(n)}\}$ . Wie in Beispiel b) auf S. 163 setzen wir einfach  $W_{n_1} := E_{n_1}$  und  $W_{n_1, \dots, n_k} := D_{n_2, \dots, n_k}^{(n_1)}$  für  $k \geq 2$ . Dann ist  $\{W_{n_1, \dots, n_k}\}$  ein Gewebe in  $\bigoplus_{j=1}^{\infty} F_j$ .  $\diamond$

Aus Beispiel d) auf S. 163 sowie den Sätzen 7.9 und 7.10 ergibt sich schließlich die

**Folgerung.** Die Klasse der Räume mit Gewebe ist abgeschlossen gegen abzählbare projektive und induktive Konstruktionen.

Als „Basis“ für diese Konstruktionen hat man nach Beispiel a) auf S. 162 die Frécheträume. Wir zeigen nun, dass auch die starken Dualräume von Frécheträumen und sogar von  $(LF)$ -Räumen Gewebe besitzen. Dazu benutzen wir (vgl. [GK], S. 190)

**Polaren.** Es sei  $E$  ein lokalkonvexer Raum. Wir verwenden die Notation

$$\langle x, x' \rangle := x'(x) \text{ für Vektoren } x \in E \text{ und Funktionale } x' \in E'.$$

Für nicht-leere Mengen  $M \subseteq E$  und  $N \subseteq E'$  definieren wir die *Polaren* durch

$$\begin{aligned} M^\circ &:= \{x' \in E' \mid |\langle x, x' \rangle| \leq 1 \text{ für } x \in M\}, \\ {}^\circ N &:= \{x \in E \mid |\langle x, x' \rangle| \leq 1 \text{ für } x' \in N\}. \end{aligned}$$

Polaren sind stets absolutkonvex und abgeschlossen.

### Satz 7.25

Für einen  $(LF)$ -Raum  $F = \text{ind}_j F_j$  besitzt auch der Dualraum  $F'_\beta$  ein Gewebe.

BEWEIS. a) Es sei  $\mathbb{U}(F_j) = \{U_n^{(j)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullumgebungsbasis von  $F_j$ . Wir setzen

$$C_{n_1, \dots, n_k} := \bigcap_{j=1}^k (U_{n_j}^{(j)})^\circ \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N},$$

wobei die Polaren in  $F'$  gebildet werden. Wegen  $F_1 \hookrightarrow F$  ist jedes Funktional  $x' \in F'$  auf einem  $U_{n_1}^{(1)}$  beschränkt; daher gilt  $F' = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} (U_{n_1}^{(1)})^\circ$  und allgemeiner dann ①.

b) Eine Folge  $(x'_k)$  mit  $x'_k \in C_{n_1, \dots, n_k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist in  $F'_\sigma$  beschränkt. Da  $F$  tonneliert ist, ist  $\{x'_k\}$  gleichstetig, also auch in  $F'_\beta$  beschränkt. Weiter ist  $F'_\beta$  quasivollständig (nach Satz 7.12 sogar vollständig), und daher ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} x'_k$  in  $F'_\beta$  konvergent.  $\diamond$

Insbesondere besitzen die Räume  $\mathcal{S}'_\beta(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{E}'_\beta(\Omega)$  und  $\mathcal{D}'_\beta(\Omega)$  Gewebe. Weitere Beispiele liefern

**Räume reell-analytischer Funktionen.** Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Eine reell-analytische Funktion  $f \in \mathcal{A}(\Omega)$  besitzt eine eindeutig bestimmte *holomorphe Fortsetzung* auf eine Umgebung  $U \subseteq \mathbb{C}^n$  von  $\Omega$ , und daher liegen ihre Einschränkungen auf kompakte Mengen  $K \subseteq \Omega$  in  $\mathcal{H}(K)$ . Mit einer kompakten Ausschöpfung  $\{K_j\}$  von  $\Omega$  wie in (1.3) definieren wir eine lokalkonvexe Topologie auf  $\mathcal{A}(\Omega)$  durch

$$\mathcal{A}(\Omega) := \text{proj}_j \mathcal{H}(K_j).$$

Die  $(LS)$ -Räume  $\mathcal{H}(K_j)$  besitzen Gewebe, und dies gilt dann auch für ihren projektiven Limes, den  $(PLS)$ -Raum  $\mathcal{A}(\Omega)$ . In Ergänzung zu Satz 5.15 gilt:

### Satz 7.26

Auf dem Kern  $N_\Omega(P(D)) \subseteq \mathcal{A}(\Omega)$  eines elliptischen Differentialoperators  $P(D)$  stimmen die von den lokalkonvexen Räumen  $\mathcal{A}(\Omega)$  und  $\mathcal{D}'_\beta(\Omega)$  induzierten Topologien überein.

BEWEIS. Nach Theorem 5.20 gilt  $\{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid P(D)u = 0\} \subseteq \mathcal{A}(\Omega)$ , und nach Satz 5.15 stimmen die von  $\mathcal{D}'_\beta(\Omega)$  und  $\mathcal{C}(\Omega)$  auf  $N_\Omega(P(D))$  induzierten Topologien überein. Offenbar ist die Identität  $(N_\Omega(P(D)), \mathfrak{T}(\mathcal{A}(\Omega))) \rightarrow (N_\Omega(P(D)), \mathfrak{T}(\mathcal{C}(\Omega)))$  stetig; da der Raum  $(N_\Omega(P(D)), \mathfrak{T}(\mathcal{A}(\Omega)))$  ein Gewebe besitzt und  $(N_\Omega(P(D)), \mathfrak{T}(\mathcal{C}(\Omega)))$  ein Fréchetraum ist, ist sie auch offen nach Theorem 7.23.  $\diamond$

Als Anwendung einiger früherer Ergebnisse formulieren wir eine Aussage über Folgen von z. B. *harmonischen* Funktionen:

### Satz 7.27

Es sei  $P(D)$  ein elliptischer Differentialoperator. Für eine Folge  $(f_j)$  in  $N_\Omega(P(D))$  gelte  $f_j \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}'_\sigma(\Omega)$ , d. h.

$$\int_\Omega f_j(x) \varphi(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Für jede kompakte Menge  $K \subseteq \Omega$  gibt es dann eine in  $\mathbb{C}^n$  offene Menge  $U$  mit  $K \subseteq U$ , sodass alle Funktionen  $f_j$  Fortsetzungen  $\tilde{f}_j \in \mathcal{H}^\infty(U)$  besitzen und

$$\sup_{z \in U} |\tilde{f}_j(z)| \rightarrow 0 \quad \text{gilt.}$$

BEWEIS. Da  $\mathcal{D}(\Omega)$  tonneliert ist, gilt  $f_j \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}'_\gamma(\Omega)$  nach dem Satz von Banach-Steinhaus 7.5, und wegen der Montel-Eigenschaft der Frécheträume  $\mathcal{D}(K)$  folgt sogar  $f_j \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}'_\beta(\Omega)$  aufgrund von Satz 7.18. Nun folgt  $f_j \rightarrow 0$  in  $\mathcal{C}(\Omega)$  aus Satz 5.15. Nach Satz 7.26 ist die Identität  $(N_\Omega(P(D)), \mathfrak{T}(\mathcal{C}(\Omega))) \rightarrow \mathcal{A}(\Omega)$  stetig, liefert also für kompakte  $K \subseteq \Omega$  stetige Restriktionen von  $(N_\Omega(P(D)), \mathfrak{T}(\mathcal{C}(\Omega)))$  in die Räume  $\mathcal{H}(K) = \text{ind}_j \mathcal{H}^\infty(U_j)$ . Diese lassen sich nach Theorem 7.20 stetig über eine Stufe  $\mathcal{H}^\infty(U_k)$  faktorisieren, und daher gilt  $\tilde{f}_j \rightarrow 0$  in  $\mathcal{H}^\infty(U_k)$ .  $\diamond$

Für mehr Informationen über den Graphensatz verweisen wir auf [Köthe 1966], § 34 und § 35, [Horváth 1966], § 17, oder [Jarchow 1981], Kapitel 5, wo auch der Fall allgemeiner topologischer Vektorräume behandelt wird. Wir erwähnen nur kurz die folgenden Resultate:

Jede abgeschlossene lineare Abbildung von einem *tonnelierten* Raum  $E$  in einen Banachraum  $F$  ist stetig. Nach M. Mahowald (1961) gilt dies *genau* für tonnelierte Räume  $E$ ; für  $F$  kann man allgemeiner eine nach V. Pták (1958) benannte Klasse von Räumen zulassen. Diese enthält alle Frécheträume, ist aber nicht stabil unter der Bildung endlicher Produkte oder direkter Summen.

## 7.6 Aufgaben

### Aufgabe 7.1

Es seien  $E$  ein lokalkonvexer Raum und  $A \subseteq E$  eine absolutkonvexe absorbierende Menge. Zeigen Sie: Das Minkowski-Funktional  $p_A$  ist genau dann stetig, wenn  $A$  eine Nullumgebung ist, und in diesem Fall gilt

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in E \mid p_A(x) < 1\} \quad \text{und} \quad \overline{A} = \{x \in E \mid p_A(x) \leq 1\}.$$

### Aufgabe 7.2

Es seien  $E$  ein lokalkonvexer Raum,  $A \in \mathfrak{B}(E)$  und  $B \in \widehat{\mathbb{B}}(E)$  mit  $A \subseteq B + \frac{1}{2}A$ . Zeigen Sie  $A \subseteq 3B$ .

### Aufgabe 7.3

Es seien  $E$  ein lokalkonvexer Raum und  $U \in \mathbb{U}(E)$ . Zeigen Sie  $(\widehat{E}_U)' \simeq E'_{U^\circ}$  für die lokalen Banachräume.

### Aufgabe 7.4

a) Verifizieren Sie die Aussagen b)–d) über projektive Topologien ab S. 150 sowie die folgenden Aussagen über projektive Limiten.

b) In Aussage f) auf S. 152 seien alle Operatoren  $T_n$  injektiv bzw. surjektiv. Gilt dies dann auch für  $T$ ?

c) Verifizieren Sie die Ausführungen zu den Beispielen am Ende von Abschnitt 7.2.

### Aufgabe 7.5

a) Verifizieren Sie die Aussagen c) und d) auf S. 153 über induktive lokalkonvexe Topologien.

b) Verifizieren Sie (13) und geben Sie eine Formel für die stetigen Halbnormen beliebiger induktiver lokalkonvexer Topologien an.

### Aufgabe 7.6

Finden Sie einen lokalkonvexen Raum, der weder tonneliert noch bornologisch ist.

### Aufgabe 7.7

Eine Folge  $(x_n)$  in einem lokalkonvexen Raum  $E$  heißt *lokale Nullfolge*, falls es  $B \in \mathbb{B}(E)$  mit  $x_n \rightarrow 0$  in  $E_B$  gibt. Zeigen Sie:

a) Es ist  $(x_n)$  eine lokale Nullfolge, wenn es  $0 < r_n \rightarrow \infty$  mit  $r_n x_n \rightarrow 0$  in  $E$  gibt.

b) In metrisierbaren Räumen ist jede Nullfolge eine lokale Nullfolge.

c) Ein Raum  $E$  ist genau dann bornologisch, wenn jede Kugel, die alle lokalen Nullfolgen absorbiert, eine Nullumgebung ist.

### Aufgabe 7.8

Eine Folge  $(x_n)$  in einem lokalkonvexen Raum  $E$  heißt *sehr konvergent* gegen  $x \in E$ , falls es eine kompakte Kugel  $K \in \widehat{\mathbb{B}}(E)$  mit  $x_n \rightarrow x$  in  $E_K$  gibt. Zeigen Sie:

a) In einem Fréchetraum ist jede konvergente Folge sehr konvergent.

b) Eine Folge  $(x_n)$  ist genau dann sehr konvergent gegen  $x \in E$ , falls es eine Banach-Kugel  $B \in \widehat{\mathbb{B}}(E)$  mit  $x_n \rightarrow x$  in  $E_B$  gibt.

c) Ein Raum  $E$  ist genau dann ultrabornologisch, wenn jede Kugel, die alle sehr konvergenten Nullfolgen absorbiert, eine Nullumgebung ist.

### Aufgabe 7.9

Zeigen Sie, dass ein separierter Quotient eines  $(LF)$ -Raumes bzw.  $(LB)$ -Raumes ebenfalls ein  $(LF)$ -Raum bzw.  $(LB)$ -Raum ist.

### Aufgabe 7.10

a) Zeigen Sie mit Hilfe von Lemma 7.17: Es seien  $G \subseteq E$  ein Unterraum des lokalkonvexen Raumes  $E$ ,  $p \leq q \in \mathbb{H}(E)$  und  $\rho \in \mathbb{H}(G)$  mit  $p \leq \rho \leq q$  auf  $G$ . Konstruieren Sie eine Halbnorm  $r \in \mathbb{H}(E)$  mit  $r|_G = \rho$  und  $p \leq r \leq q$  auf  $E$ .

b) Es seien  $\sigma : E \rightarrow Q$  eine Quotientenabbildung lokalkonvexer Räume,  $p \leq q \in \mathbb{H}(E)$  und  $\rho \in \mathbb{H}(Q)$  mit  $\tilde{p} \leq \rho \leq \tilde{q}$  auf  $Q$ , wobei  $\tilde{\phantom{x}}$  Quotienten-Halbnormen bezeichnet. Konstruieren Sie eine Halbnorm  $r \in \mathbb{H}(E)$  mit  $\tilde{r} = \rho$  und  $p \leq r \leq q$  auf  $E$ .

**Aufgabe 7.11**

Es sei  $\{K_j\}$  eine kompakte Ausschöpfung einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  (vgl. (1.3)). Zeigen Sie  $\mathcal{D}'_\beta(\Omega) \simeq \text{proj}_j \mathcal{D}'_\beta(K_j)$ .

**Aufgabe 7.12**

Es seien  $E$  ein Fréchetraum,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $T : E \rightarrow \mathcal{C}(\Omega)$  ein stetiger linearer Operator mit  $T(E) \subseteq \mathcal{C}_c^m(\Omega)$  für ein  $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ . Zeigen Sie: Es gibt eine kompakte Menge  $K \subseteq \Omega$ , sodass  $T : E \rightarrow \mathcal{C}_c^m(K)$  stetig ist.

**Aufgabe 7.13**

Ist der Raum  $\varphi = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathbb{K}$  aller endlichen Folgen metrisierbar?

**Aufgabe 7.14**

Es sei  $E = \text{ind}_k E_k$  ein  $(LF)$ -Raum. Zeigen Sie, dass jede Banach-Kugel in  $E$  in einer Stufe  $E_m$  liegt. Schließen Sie, dass für folgenvollständige Räume  $E$  der induktive Limes regulär ist.

**Aufgabe 7.15**

Ein  $(LF)$ -Raum  $E = \text{ind}_k E_k = \text{ind}_k F_k$  sei induktiver Limes zweier Einbettungsspektren. Zeigen Sie: Zu  $k \in \mathbb{N}$  existieren Indizes  $n_k, m_k \in \mathbb{N}$  mit  $E_k \hookrightarrow F_{n_k}$  und  $F_k \hookrightarrow E_{m_k}$ .

**Aufgabe 7.16**

Ein Gewebe  $\{C_{n_1, \dots, n_k}\}$  in einem lokalkonvexen Raum  $F$  heißt *strikt*, wenn in der Situation von ② stets  $\sum_{k=m}^{\infty} r_k x_k \in C_{n_1, \dots, n_m}$  gilt (vgl. S. 162). Zeigen Sie:

- Ein Gewebe aus *abgeschlossenen* Kugeln ist strikt.
- Für einen Fréchetraum  $F$  besitzen  $F$  und  $F'_\beta$  ein striktes Gewebe.
- Die Klasse der Räume mit striktem Gewebe ist gegen abzählbare projektive und induktive Konstruktionen abgeschlossen.

**Aufgabe 7.17**

a) Zeigen Sie den folgenden *Lokalisierungssatz* von M. De Wilde:

Es seien  $E$  ein Fréchetraum,  $F$  ein Raum mit striktem Gewebe  $\{C_{n_1, \dots, n_k}\}$  und  $T : E \rightarrow F$  linear und abgeschlossen. Dann gibt es eine Folge  $(n_k)$  in  $\mathbb{N}$  und eine Folge  $(U_k)$  in  $\mathbb{U}(E)$  mit  $T(U_k) \subseteq [C_{n_1, \dots, n_k}]$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

b) Zeigen Sie, dass der Lokalisierungssatz für  $(LF)$ -Räume  $F$  den Faktorisierungssatz 7.20 von Grothendieck impliziert.

## 8 Dualität

*Frage: Sind die Räume  $\mathcal{E}'_\beta(\Omega)$  und  $\mathcal{D}'_\beta(\Omega)$  tonneliert oder bornologisch? Bestimmen Sie ihre Dualräume!*

Für die Untersuchung lokalkonvexer Räume ist das Zusammenspiel von Raum und Dualraum sehr wichtig. Mit Hilfe des *Bipolarensatzes* untersuchen wir *polare lokalkonvexe Topologien* auf  $E'$  bzw.  $E$ , die durch Bornologien auf  $E$  bzw.  $E'$  definiert werden. Wir zeigen, dass Polaren von Nullumgebungen schwach\*-kompakt sind (*Satz von Alaoglu-Bourbaki*) und charakterisieren alle polaren Topologien auf  $E$ , die den Dualraum  $E'$  liefern (*Satz von Mackey-Arens*).

Ein Raum  $E$  heißt *semi-reflexiv*, wenn die Evaluationsabbildung  $\iota : E \rightarrow E''$  surjektiv ist, und *reflexiv*, wenn  $\iota$  sogar topologischer Isomorphismus ist. In Abschnitt 8.2 geben wir verschiedene Charakterisierungen dieser wichtigen Konzepte an und untersuchen ihre Permanenzeigenschaften. *Montelräume* sind reflexiv; wichtige Beispiele sind etwa die Räume  $\mathcal{H}(\Omega)$ ,  $\mathcal{E}(\Omega)$ ,  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und ihre starken Dualräume.

In Abschnitt 8.3 untersuchen wir  $(DF)$ -Räume, eine zu metrisierbaren Räumen „duale“ Klasse. Ein  $(DF)$ -Raum besitzt ein *abzählbares Fundamentalsystem beschränkter Mengen* und ist „in abgeschwächter Form bornologisch“. Ein starker Dualraum eines Fréchetraums ist ein  $(DF)$ -Raum; ist er quasitonneiert, so muss er bereits ultrabornologisch sein.

Im nächsten Abschnitt diskutieren wir polare Topologien auf Unterräumen und auf Quotientenräumen und verwenden dazu die Sprache kurzer *exakter Sequenzen* lokalkonvexer Räume. Ist eine solche Sequenz *topologisch exakt*, so ist die *duale Sequenz* stets *algebraisch exakt*. Die Frage nach ihrer *topologischen* Exaktheit untersuchen wir im Fall von Frécheträumen und von  $(DF)$ -Räumen.

In Abschnitt 8.5 zeigen wir, dass kompakte konvexe Mengen in lokalkonvexen Räumen die *abgeschlossenen konvexen Hüllen ihrer Extrempunkte* sind (*Satz von Krein-Milman*). Als Anwendung folgt ein Beweis des *Satzes von Stone-Weierstraß* über die Approximation stetiger Funktionen auf einem kompakten Raum  $T$  durch Funktionen aus geeigneten Unteralegebren der Banachalgebra  $\mathcal{C}(T)$ .

### 8.1 Polare lokalkonvexe Topologien

Im Gegensatz zur Situation bei Banachräumen gibt es für lokalkonvexe Räume keine „natürliche“ Definition „des“ Dualraums; eine Präzisierung dieser Aussage enthält [Floret und König 1994]. Für die Dualitätstheorie spielen *verschiedene* lokalkonvexe Topologien sowohl auf dem Dualraum wie auch auf dem Raum selbst wichtige Rol-

len; deren Untersuchung in weitgehend symmetrischer Weise ermöglicht der Begriff des *Dualsystems*:

**Dualsysteme und schwache Topologien.** a) Für einen Vektorraum  $E$  bezeichnen wir mit  $E^\times$  den *algebraischen Dualraum*, d. h. den Raum aller Linearformen auf  $E$ . Für einen Unterraum  $F \subseteq E^\times$  nennen wir  $\langle E, F \rangle$  ein *Dualsystem*, falls  $F$  die Punkte von  $E$  trennt, falls also für alle  $x \in E$  gilt

$$(\forall y \in F : \langle x, y \rangle = 0) \Rightarrow x = 0. \quad (1)$$

In diesem Fall ist offenbar die durch  $\iota(x)(y) := \langle x, y \rangle$  gegebene Evaluationsabbildung  $\iota : E \rightarrow F^\times$  *injektiv*, und auch  $\langle F, E \rangle := \langle F, \iota E \rangle$  ist ein Dualsystem.

b) Für einen separierten lokalkonvexen Raum  $(E, \mathfrak{T})$  ist nach dem Satz von Hahn-Banach  $\langle E, E' \rangle$  ein Dualsystem. Auch  $\langle E', E \rangle := \langle E', \iota E \rangle$  und  $\langle E', E'' \rangle$  sind Dualsysteme.

c) Für ein Dualsystem  $\langle E, F \rangle$  wird die *schwache Topologie*  $\sigma(E, F)$  als projektive Topologie  $\mathfrak{T}^p\{x' : E \rightarrow \mathbb{K}\}_{x' \in F}$  definiert; ein Fundamentalsystem von Halbnormen ist gegeben durch

$$p_{y_1, \dots, y_r}(x) := \sup_{j=1}^r |\langle x, y_j \rangle|, \quad r \in \mathbb{N}, y_1, \dots, y_r \in F. \quad (2)$$

### Lemma 8.1

Es seien  $E$  ein Vektorraum und  $y, y_1, \dots, y_r \in E^\times$  Linearformen auf  $E$ . Aus  $\bigcap_{j=1}^r N(y_j) \subseteq N(y)$  folgt dann  $y \in [y_1, \dots, y_r]$ .

BEWEIS. Wir definieren eine lineare Abbildung  $T : E \rightarrow \mathbb{K}^r$  durch  $Tx := (\langle x, y_j \rangle)_{j=1}^r$ . Aus  $Tx = 0$  folgt dann auch  $\langle x, y \rangle = 0$ ; wir können daher  $u \in R(T)^\times$  definieren durch  $u(Tx) := \langle x, y \rangle$ . Es gibt eine lineare Fortsetzung  $v \in (\mathbb{K}^r)^\times$  von  $u$ , und diese hat die Form  $v(\xi_1, \dots, \xi_r) = \sum_{j=1}^r \alpha_j \xi_j$  mit geeigneten  $\alpha_j \in \mathbb{K}$ . Daraus folgt

$$\langle x, y \rangle = v(Tx) = \sum_{j=1}^r \alpha_j \langle x, y_j \rangle = \langle x, \sum_{j=1}^r \alpha_j y_j \rangle \quad \text{für } x \in E. \quad \diamond$$

### Satz 8.2

Für ein Dualsystem  $\langle E, F \rangle$  gilt  $(E, \sigma(E, F))' = F$ .

BEWEIS. „ $\supseteq$ “ ist klar. Gilt umgekehrt  $y \in (E, \sigma(E, F))'$ , so hat man wegen (2) eine Abschätzung  $|\langle x, y \rangle| \leq C \sup_{j=1}^r |\langle x, y_j \rangle|$  für geeignete  $y_1, \dots, y_r \in F$ . Es folgt

$$\bigcap_{j=1}^r N(y_j) \subseteq N(y) \quad \text{und daher } y \in [y_1, \dots, y_r] \subseteq F \quad \text{nach Lemma 8.1.} \quad \diamond$$

**Vollständigkeit schwacher Topologien.** a) Für ein Dualsystem  $\langle E, F \rangle$  ist  $F$  *dicht* in  $(E^\times, \sigma(E^\times, E))$ .

Andernfalls gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach  $0 \neq u \in (E^\times, \sigma(E^\times, E))'$  mit  $u(y) = 0$  für alle  $y \in F$ . Nach Satz 8.2 ist aber  $u \in E$ , und wir haben einen Widerspruch.

b) Da  $\sigma(E^\times, E)$  auf  $F$  offenbar die Topologie  $\sigma(F, E)$  induziert, ist im Fall  $F \neq E^\times$  somit  $(F, \sigma(F, E))$  *nicht vollständig*.

c) Für einen lokalkonvexen Raum  $E$  mit  $E' \neq E^\times$  ist insbesondere  $E'_\sigma$  *nicht vollständig*. Für *tonnelierte* Räume  $E$  ist  $E'_\sigma$  jedoch *quasivollständig* nach der Folgerung zum Satz von Banach-Steinhaus 7.5.

**Polaren** bezüglich eines Dualsystems  $\langle E, F \rangle$  werden wie auf S. 165 definiert:

$$\begin{aligned} M^\circ &:= \{y \in F \mid \forall x \in M : |\langle x, y \rangle| \leq 1\} \quad \text{für } \emptyset \neq M \subseteq E, \\ {}^\circ N &:= \{x \in E \mid \forall y \in N : |\langle x, y \rangle| \leq 1\} \quad \text{für } \emptyset \neq N \subseteq F. \end{aligned}$$

Sie sind stets absolutkonvex und  $\sigma(F, E)$ - bzw.  $\sigma(E, F)$ -abgeschlossen. Wesentlich für die Dualitätstheorie ist der auf dem Satz von Hahn-Banach beruhende *Bipolarensatz*. Wir formulieren diesen zuerst für ein Dualsystem  $\langle E, E' \rangle$  (vgl. [GK], Satz 10.5):

### Theorem 8.3 (Bipolarensatz)

Es sei  $E$  ein lokalkonvexer Raum. Für eine nicht-leere Menge  $M \subseteq E$  gilt

$${}^\circ(M^\circ) = \overline{\Gamma(M)}. \quad (3)$$

BEWEIS. a) Die Inklusion „ $\supseteq$ “ ist klar.

b) Zum Beweis von „ $\subseteq$ “ seien  $A := \overline{\Gamma(M)}$  und  $x_0 \in E \setminus A$ . Es gibt  $U \in \mathbb{U}(E)$  mit  $A \cap (x_0 + 2U) = \emptyset$ , also auch  $(A + U) \cap (x_0 + U) = \emptyset$ . Es ist  $C := A + U$  eine absolutkonvexe Nullumgebung, und wegen  $x_0 \notin \overline{C}$  gilt  $p(x_0) > 1$  für das Minkowski-Funktional  $p = p_C$  von  $C$ . Auf dem Raum  $[x_0]$  definieren wir eine Linearform  $x'_0$  durch  $\langle \alpha x_0, x'_0 \rangle := \alpha p(x_0)$ . Dann gilt  $|x'_0| \leq p$  auf  $[x_0]$ , und nach Theorem 1.9 lässt sich  $x'_0$  zu einer Linearform  $x' \in E'$  mit  $|\langle x, x' \rangle| \leq p(x)$  für  $x \in E$  fortsetzen. Wegen  $|\langle x, x' \rangle| \leq 1$  für  $x \in M \subseteq C$  ist  $x' \in M^\circ$ , und wegen  $|\langle x_0, x' \rangle| = p(x_0) > 1$  folgt  $x_0 \notin {}^\circ(M^\circ)$ .  $\diamond$

Für allgemeine Dualsysteme  $\langle E, F \rangle$  besagt der Bipolarensatz wegen Satz 8.2

$$({}^\circ N)^\circ = \overline{\Gamma(N)}^{\sigma(F, E)} \quad \text{für } \emptyset \neq N \subseteq F. \quad (4)$$

### Lemma 8.4

Es sei  $\langle E, F \rangle$  ein Dualsystem. Eine Menge  $N \subseteq F$  ist genau dann  $\sigma(F, E)$ -beschränkt, wenn  ${}^\circ N$  in  $E$  absorbierend ist.



BEWEIS. „ $\Rightarrow$ “: Für  $x \in E$  ist  $\rho := \sup_{y \in N} |\langle x, y \rangle| < \infty$ , also  $\frac{1}{\rho}x \in {}^\circ N$ .

„ $\Leftarrow$ “: Für  $x_1, \dots, x_r \in E$  gibt es  $\rho > 0$  mit  $\frac{1}{\rho}x_j \in {}^\circ N$  für  $j = 1, \dots, r$ . Für  $y \in N$  gilt daher  $|\langle x_j, y \rangle| \leq \rho$  für  $j = 1, \dots, r$ .  $\diamond$

Für einen lokalkonvexen Raum  $E$  ist eine Teilmenge von  $E'$  offenbar genau dann gleichstetig, wenn sie in der Polaren einer Nullumgebung enthalten ist. Aus dem Bipolarensatz ergibt sich nun eine „Umkehrung“ des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit 7.4:

### Satz 8.5

*Ein lokalkonvexer Raum  $E$  ist genau dann tonneliert, wenn jede  $\sigma(E', E)$ -beschränkte Menge  $N \subseteq E'$  gleichstetig ist.*

BEWEIS. „ $\Rightarrow$ “ ist ein Spezialfall von Theorem 7.4.

„ $\Leftarrow$ “: Für eine Tonne  $A \subseteq E$  ist  $A^\circ \subseteq E'$  nach Lemma 8.4  $\sigma(E', E)$ -beschränkt. Nach Voraussetzung gibt es eine Nullumgebung  $U \in \mathbb{U}(E)$  mit  $A^\circ \subseteq U^\circ$ , und der Bipolarensatz liefert  $U \subseteq {}^\circ(U^\circ) \subseteq {}^\circ(A^\circ) = \overline{\Gamma(A)} = A$ .  $\diamond$

Der Satz von Tychonoff besagt, dass ein topologisches Produkt kompakter Räume ebenfalls kompakt ist (vgl. etwa [Meise und Vogt 1992], § 4, oder [Köthe 1966], § 3.3). Daraus ergibt sich leicht das folgende für die Dualitätstheorie und auch für die Spektraltheorie in Banachalgebren (vgl. Abschnitt 13.3) grundlegende Resultat. Es wurde in den Jahren 1938–1940 von mehreren Autoren bewiesen und heißt üblicherweise

### Theorem 8.6 (Alaoglu-Bourbaki)

*Es seien  $E$  ein lokalkonvexer Raum und  $U \in \mathbb{U}(E)$  eine Nullumgebung. Dann ist die Polare  $U^\circ \subseteq E'$  kompakt in  $\sigma(E', E)$ .*

BEWEIS. Es sei  $p = p_U$  das Minkowski-Funktional von  $U$ . Mit den kompakten Kreisen  $D_x := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq p(x)\}$  liefert die Abbildung  $T : x' \mapsto (\langle x, x' \rangle)_{x \in E}$  eine Homöomorphie von  $(U^\circ, \sigma(E', E))$  in den Produktraum  $P := \prod_{x \in E} D_x$ . Dieser ist nach dem Satz von Tychonoff kompakt, und  $T(U^\circ)$  ist in  $P$  abgeschlossen, da sich Linearität auf punktweise Grenzwerte überträgt.  $\diamond$

**Schwach\*-konvergente Teilfolgen.** a) Für einen separablen lokalkonvexen Raum  $E$  stimmt nach Satz 1.4 auf  $U^\circ$  die Topologie  $\sigma(E', E)$  mit der Topologie  $\mathfrak{T}(\mathfrak{F}_M)$  überein, wobei  $M$  eine abzählbare dichte Teilmenge von  $E$  ist. Da  $(E', \mathfrak{T}(\mathfrak{F}_M))$  nach Satz 1.1 metrisierbar ist, ist  $U^\circ$  dann auch  $\sigma(E', E)$ -folgenkompakt. Somit hat jede Folge in  $U^\circ$  eine schwach\*-konvergente Teilfolge.

b) Für normierte Räume wurde die Aussage von a) bereits in [GK], Satz 10.13 mit einem Diagonalfolgen-Argument bewiesen. Nach dem dort folgenden Beispiel ist diese für den nicht separablen Banachraum  $E = L_\infty[0,1]$  falsch.

**Polare lokalkonvexe Topologien.** a) Es seien  $\langle E, F \rangle$  ein Dualsystem und  $\mathfrak{S}$  eine Bornologie auf  $(F, \sigma(F, E))$ . Mit  $\tilde{\mathfrak{S}}$  bezeichnen wir das System aller Teilmengen von Mengen in  $\mathfrak{S}$ ; für *saturierte* Bornologien gilt natürlich  $\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}$ . Wie auf S. 15 wird eine separierte lokalkonvexe Topologie  $\mathfrak{T}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{T}(\tilde{\mathfrak{S}})$  auf  $E = (F, \sigma(F, E))'$  definiert durch die Nullumgebungsbasis  $\{^\circ S \mid S \in \mathfrak{S}\}$  bzw. durch die Halbnormen

$$p \circ_S(x) := \sup \{ |\langle x, y \rangle| \mid y \in S \}, \quad S \in \mathfrak{S}. \quad (5)$$

Es ist  $\mathfrak{T}(\mathfrak{S})$  die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Mengen aus  $\mathfrak{S}$ .

b) Für den Dualraum gilt dann aufgrund des Bipolarenaesatzes

$$(E, \mathfrak{T}(\mathfrak{S}))' = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} (^\circ S)^\bullet = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} \overline{\Gamma S}^{\sigma(E^\times, E)} \subseteq E^\times, \quad (6)$$

wobei  $^\bullet$  die Polare in  $\langle E, E^\times \rangle$  bezeichnet.

c) Speziell betrachten wir die Bornologien  $\mathfrak{F}$  der *endlichen* Mengen,  $\mathfrak{W}$  der  $\sigma(F, E)$ -*kompakten absolutkonvexen* Mengen und  $\mathfrak{B}$  aller  $\sigma(F, E)$ -*beschränkten* Mengen in  $F$ . Die entsprechenden polaren Topologien auf  $E$  sind die schwache Topologie  $\sigma(E, F)$ , die Mackey-Topologie  $\tau(E, F)$  und die starke Topologie  $\beta(E, F)$ .

d) Nun sei  $(E, \mathfrak{T})$  ein lokalkonvexer Raum. Dann gilt  $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(\mathfrak{E})$  mit der Bornologie  $\mathfrak{E}$  der *gleichstetigen* Mengen in  $E'$ . Die Bornologie  $\mathfrak{B}^*$  aller  $\beta(E', E)$ -*beschränkten* Mengen in  $E'$  definiert eine Topologie  $\beta^*(E, E')$  auf  $E$ .

e) Auf  $E$  sind auch die Bornologien  $\mathfrak{K}$  der *kompakten absolutkonvexen* Mengen und  $\mathfrak{C}$  der *präkompakten* Mengen wichtig; sie definieren die polaren Topologien  $\kappa(E', E)$  und  $\gamma(E', E)$  auf  $E'$ . Für *quasivollständige* Räume  $E$  gilt  $\kappa(E', E) = \gamma(E', E)$ . Nach Satz 1.4 und Theorem 8.6 ist für eine Nullumgebung  $U \in \mathcal{U}(E)$  die Polare  $U^\circ \subseteq E'$  sogar kompakt in  $\gamma(E', E)$ .

Eine lokalkonvexe Topologie  $\mathfrak{T}$  auf  $E$  heißt *zulässig* für ein Dualsystem  $\langle E, F \rangle$ , wenn  $(E, \mathfrak{T})' = F$  gilt. G.W. Mackey (1946) und R. Arens (1947) bestimmten alle für  $\langle E, F \rangle$  zulässigen lokalkonvexen Topologien auf  $E$ :

### Satz 8.7 (Mackey-Arens)

*Es sei  $\langle E, F \rangle$  ein Dualsystem. Eine lokalkonvexe Topologie  $\mathfrak{T}$  auf  $E$  ist genau dann zulässig für  $\langle E, F \rangle$ , wenn  $\mathfrak{T}$  feiner als  $\sigma(E, F)$  und gröber als die Mackey-Topologie  $\tau(E, F)$  ist.*

BEWEIS. „ $\Rightarrow$ “: Aus  $(E, \mathfrak{T})' = F$  folgt sofort, dass  $\mathfrak{T}$  feiner als  $\sigma(E, F)$  ist. Nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki gilt  $\mathfrak{E} \subseteq \tilde{\mathfrak{W}}$  in  $F$ , und daher ist  $\mathfrak{T}$  gröber als  $\tau(E, F)$ .

„ $\Leftarrow$ “: Nach Satz 8.2 gilt  $(E, \sigma(E, F))' = F$ ; zu zeigen bleibt also  $(E, \tau(E, F))' = F$ : Eine Menge  $S \in \mathfrak{W}$  ist absolutkonvex und  $\sigma(E^\times, E)$ -kompakt in  $E^\times$ ; daher gilt  $\overline{\Gamma S}^{\sigma(E^\times, E)} = S$  in (6), und es folgt  $(E, \tau(E, F))' \subseteq F$ .  $\diamond$

**Satz 8.8**

Es seien  $\langle E, F \rangle$  ein Dualsystem,  $B \subseteq E$  beschränkt in  $\sigma(E, F)$  und  $S \subseteq F$  absolutkonvex und  $\sigma(F, E)$ -kompakt.

- a) Es ist  $S$  beschränkt in  $\beta(F, E)$ .
- b) Es ist  $B$  auch in  $\tau(E, F)$  beschränkt.
- c) Es ist  $B$  in  $\sigma(E, F)$  sogar präkompakt.

BEWEIS. a) Nach Satz 7.6 ist  $S$  eine Banach-Kugel, und nach Lemma 8.4 ist  $B^\circ$  eine Tonne in  $(F, \sigma(F, E))$ . Wegen Lemma 7.7 gibt es  $\rho > 0$  mit  $\rho S \subseteq B^\circ$ , und a) ist gezeigt.

b) Weiter folgt sofort  $B \subseteq {}^\circ(B^\circ) \subseteq \frac{1}{\rho} {}^\circ S$  und damit auch Aussage b).

c) Es ist  $B^\circ$  eine  $\beta(F, E)$ -Nullumgebung in  $F$ . Nach Theorem 8.6 ist die Polare  $B^{\circ\circ} \subseteq (F, \beta(F, E))'$  kompakt in der Topologie  $\sigma(F^\times, F)$ . Daher ist  $B \subseteq B^{\circ\circ}$  präkompakt in  $\sigma(F^\times, F)$  und somit auch in  $\sigma(E, F)$ .  $\diamond$

Alle für ein Dualsystem  $\langle E, F \rangle$  zulässigen lokalkonvexen Topologien auf  $E$  besitzen also die gleichen beschränkten Mengen. Insbesondere ist eine schwach beschränkte Menge in einem lokalkonvexen Raum  $(E, \mathfrak{T})$  auch in  $\mathfrak{T}$  beschränkt.

**8.2 Reflexive Räume**

**Bidualräume.** a) Für einen lokalkonvexen Raum  $(E, \mathfrak{T})$  heißt  $E'' := (E'_\beta)'$  *Bidualraum* von  $E$ . Man hat die durch

$$\iota(x)(x') := \langle x, x' \rangle \quad \text{für } x \in E \text{ und } x' \in E'$$

gegebene *kanonische Inklusion* oder *Evaluationsabbildung*  $\iota = \iota_E : E \rightarrow E''$ .

b) Für einen normierten Raum sind  $E'_\beta$  und der *starke Bidualraum*  $E''_\beta := (E'_\beta)'_\beta$  Banachräume, und  $\iota_E$  ist eine *Isometrie* von  $E$  in  $E''_\beta$ .

c) Im Allgemeinen induziert  $E''_\beta$  via  $\iota$  auf  $E$  die Topologie  $\beta^*(E, E') = \mathfrak{T}(\mathfrak{B}^*)$  (vgl. die polare Topologie d) auf S. 174); die Ausgangstopologie  $\mathfrak{T}$  auf  $E$  wird von der *natürlichen Topologie*  $\eta(E'', E') := \mathfrak{T}(\mathfrak{E})$  induziert.

d) Aufgrund von Theorem 8.6 und Satz 8.8 a) hat man die Inklusionen

$$\mathfrak{E} \subseteq \widetilde{\mathfrak{W}} \subseteq \mathfrak{B}^* \subseteq \mathfrak{B} \tag{7}$$

für Systeme beschränkter Mengen in  $E'$ ; für die entsprechenden Topologien auf  $E$  ergibt sich daraus

$$\mathfrak{T} \subseteq \tau(E, E') \subseteq \beta^*(E, E') \subseteq \beta(E, E'). \tag{8}$$

**Quasitonnelierte Räume.** a) Ein lokalkonvexer Raum  $(E, \mathfrak{T})$  heißt *quasitonneliert*, falls  $\iota_E : E \rightarrow E''_\beta$  eine *topologische Isomorphie* von  $E$  in  $E''_\beta$  ist, falls also  $\mathfrak{T} = \beta^*(E, E')$  gilt. Dies ist dazu äquivalent, dass jede in  $E'$  stark beschränkte Menge gleichstetig ist.

b) Für einen quasitonnelierten Raum gilt offenbar auch  $\mathfrak{T} = \tau(E, E')$ ; Räume mit dieser Eigenschaft heißen *Mackey-Räume*.

c) Nach Satz 8.5 ist  $E$  genau dann *tonneliert*, wenn  $\mathfrak{T} = \beta(E, E')$  gilt; tonnelierte Räume sind also auch quasitonneliert. Umgekehrt ist nach der Folgerung zu Satz 7.8 ein *folgendvollständiger* quasitonnelierter Raum bereits tonneliert.

d) Auch *bornologische* Räume sind quasitonneliert; dies ergibt sich wegen Satz 7.11 aus dem folgenden

### Satz 8.9

*Ein lokalkonvexer Raum  $E$  ist genau dann quasitonneliert, wenn jede bornivore Tonne  $A \subseteq E$  eine Nullumgebung ist.*

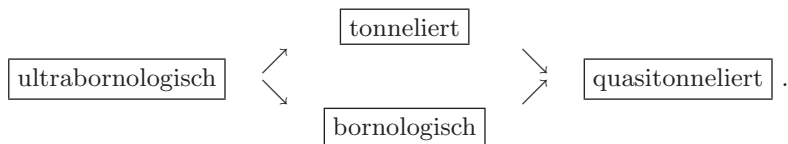
BEWEIS. „ $\Rightarrow$ “: Für  $B \in \mathbb{B}(E)$  gibt es  $\rho > 0$  mit  $\rho B \subseteq A$ , also  $A^\circ \subseteq \frac{1}{\rho} B^\circ$ . Daher ist  $A^\circ$  in  $\beta(E', E)$  beschränkt und somit gleichstetig, da  $E$  quasitonneliert ist. Nach dem Bipolarensatz ist dann  $A$  eine Nullumgebung von  $E$ .

„ $\Leftarrow$ “: Nun sei  $C \subseteq E'$  in  $\beta(E', E)$  beschränkt. Dann ist  ${}^\circ C$  in  $E$  eine Tonne und bornivor: Für  $B \in \mathbb{B}(E)$  gibt es  $\rho > 0$  mit  $\rho C \subseteq B^\circ$ , also  $B \subseteq \frac{1}{\rho} {}^\circ C$ . Nach Voraussetzung ist dann  ${}^\circ C$  eine Nullumgebung in  $E$  und  $C$  gleichstetig in  $E'$ .  $\diamond$

**Folgerungen.** a) Wie in Satz 7.15 vererbt sich die Eigenschaft „quasitonneliert“ auf induktive lokalkonvexe Topologien.

b) Für einen metrisierbaren Raum ist auch der Bidualraum  $E''_\beta$  metrisierbar. In der Tat ist  $E$  bornologisch, also auch quasitonneliert; somit trägt  $E''_\beta$  die natürliche Topologie  $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ . Ist nun  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullumgebungsbasis von  $E$ , so ist  $\{U_n^{\circ\circ}\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine solche von  $E''_\beta$ .

Wir fassen Implikationen zwischen einigen wichtigen Eigenschaften lokalkonvexer Räume in folgendem Diagramm zusammen:



Wir untersuchen nun die *Surjektivität der Evaluationsabbildung*.

**Semi-reflexive und reflexive Räume.** a) Ein lokalkonvexer Raum  $E$  heißt *semi-reflexiv*, falls  $\iota_E : E \rightarrow E''$  surjektiv ist; er heißt *reflexiv*, falls  $\iota_E : E \rightarrow E''_\beta$  sogar ein topologischer Isomorphismus ist. Offenbar ist  $E$  genau dann reflexiv, wenn  $E$  semi-reflexiv und quasitonneliert ist.

b) Für einen reflexiven Raum  $(E, \mathfrak{T})$  ist auch der Raum  $E^\sigma := (E, \sigma(E, E'))$  *semi-reflexiv*, da ja  $(E^\sigma)'_\beta = E'_\beta$  gilt. Offenbar ist aber  $\iota : E^\sigma \rightarrow E''_\beta$  kein topologischer Isomorphismus (falls  $\sigma(E, E') \neq \mathfrak{T}$  gilt). Somit ist  $E^\sigma$  *nicht reflexiv* und insbesondere *nicht quasitonneliert* (und auch kein Mackey-Raum).

Die Spezialisierung von Formel (6) auf das Dualsystem  $\langle E', E \rangle$  und  $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}$  liefert:

**Satz 8.10**

a) Es sei  $E$  ein lokalkonvexer Raum. Der Bidualraum  $E''$  ist die Vereinigung aller  $\sigma(E'^\times, E')$ -Abschlüsse in  $E'^\times$  aller beschränkten Teilmengen von  $E$  :

$$E'' = \bigcup_{B \in \mathbb{B}(E)} \overline{B}^{\sigma(E'^\times, E')} \subseteq E'^\times. \quad (9)$$

b) Jedes Element  $x'' \in E''$  ist  $\sigma(E'', E')$ -Limes eines beschränkten Netzes aus  $E$ .

c) Die Einheitskugel eines normierten Raumes  $E$  ist  $\sigma(E'', E')$ -dicht in der von  $E''$ .

Nun können wir semi-reflexive Räume charakterisieren:

**Theorem 8.11**

Für einen lokalkonvexen Raum  $E$  sind äquivalent:

- (a) Der Raum  $E$  ist semi-reflexiv.
- (b) Der Raum  $(E', \tau(E', E))$  ist tonneliert.
- (c) Jede beschränkte Teilmenge von  $E$  ist in einer schwach kompakten Teilmenge von  $E$  enthalten.
- (d) Der Raum  $(E, \sigma(E, E'))$  ist quasivollständig.

BEWEIS. „(a)  $\Rightarrow$  (b)“: Wegen (a) ist  $\beta(E', E)$  zulässig für das Dualsystem  $\langle E', E \rangle$ , und mit dem Satz von Mackey-Arens folgt  $\beta(E', E) = \tau(E', E)$ . Für eine Tonne  $A$  in  $(E', \tau(E', E))$  ist  $A^\circ \subseteq E$  nach Lemma 8.4 in  $\sigma(E, E')$ , nach Satz 8.8 dann auch in  $E$  beschränkt. Da  $A$  auch  $\sigma(E', E)$ -abgeschlossen ist, ist  $A = {}^\circ(A^\circ)$  eine Nullumgebung in  $\beta(E', E) = \tau(E', E)$ .

„(b)  $\Rightarrow$  (c)“: Es ist  $E$  der Dualraum des tonnelierten Raumes  $E'_\tau$ ; eine beschränkte Menge  $B \subseteq E$  ist also gleichstetig. Somit gibt es  $U \in \mathbb{U}(E'_\tau)$  mit  $B \subseteq U^\circ$ , und nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki ist  $U^\circ$   $\sigma(E, E')$ -kompakt.

„(c)  $\Rightarrow$  (d)“ ist klar, da kompakte Mengen vollständig sind.

„(d)  $\Rightarrow$  (a)“ schließlich folgt sofort aus Satz 8.10. ◇

**Folgerungen.** a) Ein Banachraum ist also genau dann *reflexiv*, wenn seine Einheitskugel *schwach kompakt* oder *schwach vollständig* ist.

b) Ein semi-reflexiver Raum  $E = (E'_\tau)'$  ist nach der Folgerung zum Satz von Banach-Steinhaus 7.5 quasivollständig, da  $E'_\tau$  tonneliert ist.

c) Ein reflexiver Raum ist tonneliert, da er quasitonneiert und nach b) auch quasivollständig ist (vgl. S. 149).

Wir gehen nun auf *Permanenzeigenschaften* (semi-)reflexiver Räume ein:

### Satz 8.12

*Semi-Reflexivität vererbt sich auf abgeschlossene Unterräume, topologische Produkte und reguläre induktive Limiten.*

BEWEIS. a) Es seien  $E$  semi-reflexiv und  $G \subseteq E$  ein abgeschlossener Unterraum. Nach dem Satz von Hahn-Banach ist  $G$  auch in  $\sigma(E, E')$  abgeschlossen, und diese Topologie induziert  $\sigma(G, G')$  auf  $G$ . Eine beschränkte Menge  $B \subseteq G$  ist dann relativ kompakt in  $\sigma(E, E')$  und somit auch in  $\sigma(G, G')$ .

b) Es seien  $E_j$  semi-reflexive Räume und  $E = \prod_{j \in J} E_j$ . Nach Aufgabe 8.7 ist  $\sigma(E, E')$  die Produkttopologie der  $\sigma(E_j, E'_j)$ , und  $E$  ist semi-reflexiv nach Theorem 8.11 (c) und dem Satz von Tychonoff (vgl. S. 173).

c) Es seien  $E_k$  semi-reflexive Räume, und der induktive Limes  $E = \text{ind}_k E_k$  sei regulär. Eine beschränkte Menge  $B \subseteq E$  ist dann in einem  $E_k$  beschränkt, also relativ schwach kompakt in  $E_k$  und somit in  $E$ .  $\diamond$

(Semi-)Reflexivität vererbt sich nicht auf Quotientenräume, vgl. dazu Aussage c) über Montelräume auf S. 179.

### Satz 8.13

*Für einen reflexiven lokalkonvexen Raum  $E$  ist auch  $E'_\beta$  reflexiv.*

BEWEIS. Nach dem Beweisteil „(a)  $\Rightarrow$  (b)“ von Theorem 8.11 ist  $E'_\beta = E'_\tau$  tonneliert. Da  $E$  quasitonneiert ist, ist eine in  $E'_\beta$  beschränkte Menge gleichstetig, nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki also  $\sigma(E', E)$ - und damit auch  $\sigma(E', E'')$ -relativ kompakt.  $\diamond$

### Satz 8.14

*Es sei  $E$  ein Fréchetraum.*

a) *Ist  $E$  reflexiv, so gilt dies auch für jeden abgeschlossenen Unterraum  $G \subseteq E$ .*

b) *Ist  $E'_\beta$  reflexiv, so gilt dies auch für  $E$ .*

BEWEIS. Aussage a) folgt aus Satz 8.12, da  $G$  als Fréchetraum nach Satz 7.3 tonneliert ist.

b) Der Dualraum  $E'_\beta$  ist nach Folgerung b) aus Satz 8.9 metrisierbar, nach der Folgerung zum Satz von Banach-Steinhaus 7.5 vollständig und nach Satz 8.13 reflexiv. Da  $\iota_E : E \rightarrow E''_\beta$  ein topologischer Isomorphismus ist, ist auch  $E$  reflexiv.  $\diamond$

**Banachräume und schwache Topologien.** a) Ein Quotientenraum eines reflexiven Banachraumes ist ebenfalls reflexiv, vgl. [GK], Satz 9.13 und Aufgabe 8.8 a).

b) In einem reflexiven Banachraum ist die Einheitskugel auch *schwach folgenkompakt*, vgl. [GK], Theorem 10.14 und Aufgabe 8.8 b).

c) Es gilt auch die Umkehrung von b); nach Resultaten von V. Shmulyan (1940) und W. Eberlein (1947) sind für schwache Topologien auf Banachräumen (sogar Frécheträumen) die Begriffe „kompakt“, „folgenkompakt“ und „abzählbar kompakt“ äquivalent (vgl. [Jarchow 1981], Abschnitt 9.8).

d) Der Banachraum  $\ell_1$  ist nicht (semi-)reflexiv; nach Theorem 8.11 ist daher  $\ell_1$  *nicht schwach quasivollständig*. Nach dem Satz von Schur 9.37 (vgl. [GK], Satz 10.11) ist  $\ell_1$  jedoch *schwach folgenvollständig*.

**Beispiele.** a) Beispiele reflexiver Banachräume werden in [GK], Abschnitte 9 und 10 untersucht. Insbesondere sind  $L_p(\mu)$ -Räume für  $1 < p < \infty$  reflexiv.

b) Ein lokaler Sobolev-Raum  $H^{s,\text{loc}}(\Omega)$  (vgl. S. 90) ist aufgrund von Satz 8.12 ein reflexiver Fréchetraum, da er nach Satz 7.9 zu einem abgeschlossenen Unterraum eines abzählbaren Produkts von Hilberträumen isomorph ist. Nach Satz 8.13 ist auch der Dualraum  $H^{s,\text{loc}}(\Omega)'_\beta \simeq H_c^{-s}(\Omega)$  (vgl. Satz 9.24) reflexiv.

**Montelräume.** a) Aufgrund von Theorem 8.11 sind *Fréchet-Montelräume* (vgl. S. 12) reflexiv; Beispiele solcher Räume sind etwa die Folgenräume  $s$  und  $\omega$  sowie die Funktionenräume  $C^\infty[a, b]$ ,  $\mathcal{E}(\Omega)$ ,  $\mathcal{D}(K)$  und  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

b) Allgemeiner heißt ein lokalkonvexer Raum  $E$  *Semi-Montelraum*, falls jede beschränkte Menge in  $E$  relativ kompakt ist;  $E$  heißt *Montelraum*, falls  $E$  Semi-Montelraum und quasitonneliert ist.

c) Die Permanenzeigenschaften von Satz 8.12 gelten auch für Semi-Montelräume. Nach [Köthe 1966], § 31.5, oder [Meise und Vogt 1992], 27.22, gibt es jedoch einen Fréchet-Montelraum, der einen Quotientenraum isomorph zum nicht reflexiven Banachraum  $\ell_1$  besitzt.

### Satz 8.15

Für einen Montelraum  $E$  ist auch  $E'_\beta$  ein Montelraum.

BEWEIS. Nach Satz 8.13 ist  $E'_\beta$  reflexiv. Eine in  $E'_\beta$  beschränkte Menge ist gleichstetig, nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki also  $\sigma(E', E)$ - und wegen Satz 1.4 auch  $\gamma(E', E) = \beta(E', E)$ -relativ kompakt.  $\diamond$

Insbesondere sind aufgrund der Sätze 7.15 und 8.12 die Räume  $\mathcal{D}(\Omega)$  der Testfunktionen, nach Satz 8.15 dann auch die Räume  $\mathcal{S}'_\beta(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{E}'_\beta(\Omega)$  und  $\mathcal{D}'_\beta(\Omega)$  von Distributionen Montelräume.

Nun gehen wir auf die *Vervollständigung* lokalkonvexer Räume ein. Für einen normierten Raum  $E$  ist eine solche durch den Abschluss von  $\iota_E(E)$  in  $E''$  gegeben. Für eine analoge Konstruktion im allgemeinen Fall müssen wir auf  $E''$  die *natürliche Topologie*  $\eta = \mathfrak{T}(\mathfrak{E})$  verwenden; die Vollständigkeit von  $E''_\eta$  ist jedoch nicht gesichert. Eine *Vervollständigung* von  $E$  ist nach A. Grothendieck gegeben durch den Raum

$$\widehat{E} := \{z \in E'^\times \mid \forall U \in \mathbb{U}(E) : z|_{U^\circ} \text{ ist } \sigma(E', E) - \text{stetig}\} :$$

### Satz 8.16

Die Evaluationsabbildung  $\iota_E : E \rightarrow \widehat{E}$  ist ein topologischer Isomorphismus von  $E$  auf einen dichten Unterraum des vollständigen Raumes  $(\widehat{E}, \eta(\widehat{E}, E'))$ .

BEWEIS. Offenbar ist  $\iota_E$  ein topologischer Isomorphismus, und auch die Vollständigkeit von  $(\widehat{E}, \eta(\widehat{E}, E'))$  ist klar. Zu zeigen bleibt also die *Dichtheit* von  $\iota_E(E)$  in  $(\widehat{E}, \eta(\widehat{E}, E'))$ :

Die Topologie  $\sigma(E', \widehat{E})$  ist feiner als  $\sigma(E', E)$ , und nach Definition von  $\widehat{E}$  stimmen beide auf gleichstetigen Mengen überein. Für  $U \in \mathbb{U}(E)$  ist also  $U^\circ$  absolutkonvex und  $\sigma(E', \widehat{E})$ -kompakt, und daher ist  $\eta(\widehat{E}, E')$  nach dem Satz von Mackey-Arens zulässig für das Dualsystem  $\langle \widehat{E}, E' \rangle$ . Zu  $f \in \widehat{E}'$  gibt es also  $x' \in E'$  mit  $\langle z, f \rangle = \langle x', z \rangle$  für alle  $z \in \widehat{E}$ . Aus  $f \in \iota_E(E)^\perp$  folgt dann  $\langle x, x' \rangle = \langle x', \iota_E x \rangle = \langle \iota_E x, f \rangle = 0$  für alle  $x \in E$ , also  $x' = 0$  und somit  $f = 0$ .  $\diamond$

Offenbar ist  $E$  genau dann vollständig, wenn  $\iota_E(E) = \widehat{E}$  gilt. Somit folgt:

### Satz 8.17 (Vollständigkeitssatz von Grothendieck)

Ein lokalkonvexer Raum  $E$  ist genau dann vollständig, falls ein Funktional  $z \in E'^\times$  bereits dann  $\sigma(E', E)$ -stetig ist, wenn dies auf die Einschränkungen von  $z$  auf alle gleichstetigen Mengen in  $E'$  zutrifft.

## 8.3 $(DF)$ -Räume

Dual zur Metrisierbarkeit eines lokalkonvexen Raumes wurde in [Grothendieck 1954] das Konzept eines  $(DF)$ -Raumes eingeführt. Alle Resultate in diesem Abschnitt stammen aus dieser Arbeit Grothendiecks.



Zunächst sei  $E$  ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum mit der abzählbaren Nullumgebungsbasis  $\mathbb{U}(E) = \{U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots\}$ . Da  $E$  quasitonneliert ist, bilden die Polaren  $\{U_1^\circ \subseteq U_2^\circ \subseteq \dots\}$  ein abzählbares Fundamentalsystem beschränkter Mengen in  $F := E'_\beta$ . Der Raum  $F$  muss nicht quasitonneliert sein (vgl. [Köthe 1966], § 31.7); es gilt jedoch die folgende Abschwächung dieser Eigenschaft:

**Satz 8.18**

*Es sei  $E$  ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum. Der Dualraum  $F = E'_\beta$  besitzt dann die folgende Eigenschaft:*

$$\forall \{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{U}(F) : \quad V := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \text{ bornivor} \Rightarrow V \in \mathbb{U}(F). \quad (10)$$

BEWEIS. Da  $V$  bornivor ist, gibt es  $r_n > 0$  mit  $2r_n U_n^\circ \subseteq V$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und weiter existieren Kugeln  $D_n \in \mathbb{B}(E)$  mit  $2D_n^\circ \subseteq V_n$ , da  $V_n$  eine Nullumgebung in  $F = E'_\beta$  ist. Die Mengen  $C_n := \Gamma(\bigcup_{k=1}^n r_k U_k^\circ)$  sind  $\sigma(E', E)$ -kompakt, und daher sind die Mengen  $W_n := D_n^\circ + C_n \subseteq V_n$  absolutkonvex und  $\sigma(E', E)$ -abgeschlossen in  $E'$ . Für  $m \in \mathbb{N}$  gilt  $r_m U_m^\circ \subseteq C_n$  für  $n \geq m$ , und für  $n < m$  wird  $U_m^\circ$  von  $D_n^\circ$  absorbiert; daher wird  $U_m^\circ$  von der Menge  $W := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n \subseteq V$  absorbiert. Daher ist  $W$  eine Tonne in  $E'_\sigma$ ; nach Lemma 8.4 ist  ${}^\circ W$  in  $E$  beschränkt und somit  $W = ({}^\circ W)^\circ$  eine Nullumgebung in  $F = E'_\beta$ .  $\diamond$

**Definition.** Ein lokalkonvexer Raum  $F$  heißt (DF)-Raum, falls er ein abzählbares Fundamentalsystem beschränkter Mengen besitzt und Eigenschaft (10) erfüllt.

Durch Übergang zu Polaren erhält man die folgende äquivalente Formulierung von Eigenschaft (10):

$$\forall \{M_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{E}(F') : \quad M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \in \mathfrak{B}(F'_\beta) \Rightarrow M \in \mathfrak{E}(F'). \quad (11)$$

**Beispiele und Bemerkungen.** a) Starke Dualräume metrisierbarer Räume sind also vollständige (DF)-Räume nach den Sätzen 8.18 und 7.12.

b) Normierte Räume sind bornologische (DF)-Räume.

c) Ein regulärer abzählbarer induktiver Limes normierter Räume ist ebenfalls ein bornologischer (DF)-Raum. Konkrete Beispiele für diese Situation sind etwa die Räume  $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$  aller  $\mathcal{C}^m$ -Funktionen mit kompaktem Träger in einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  für  $0 \leq m < \infty$ .

d) Mit einem Fundamentalsystem  $\{B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots\}$  beschränkter Mengen in  $\mathbb{B}(F)$  gilt umgekehrt  $F = \text{ind}_n F_{B_n}$  für jeden bornologischen (DF)-Raum.

e) Wir zeigen in Satz 8.25, dass ein Quotientenraum eines (DF)-Raumes ebenfalls ein (DF)-Raum ist. Dagegen vererbt sich die (DF)-Eigenschaft nicht auf Unterräume, vgl. [Köthe 1966], § 31.5.

**Satz 8.19**

Für einen  $(DF)$ -Raum  $F$  ist  $F'_\beta$  ein Fréchetraum.

BEWEIS. Nach Satz 1.1 ist  $F'_\beta$  metrisierbar. Eine Cauchy-Folge in  $F'_\beta$  ist nach (11) gleichstetig, und daher ist ihr punktwiser Limes eine stetige Linearform auf  $F$ .  $\diamond$

**Folgerung.** Für einen Fréchetraum  $E$  ist auch  $E''_\beta$  ein Fréchetraum, und man kann  $E$  als abgeschlossenen Unterraum von  $E''_\beta$  auffassen.

**Satz 8.20**

Ein separabler  $(DF)$ -Raum  $F$  ist quasitonneliert.

BEWEIS. Es sei  $A$  eine bornivore Tonne in  $F$ . In der offenen Menge  $F \setminus A$  gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Nach dem Bipolaresatz gibt es Funktionale  $x'_n \in A^\circ$  mit  $\gamma_n := |\langle x_n, x'_n \rangle| > 1$ . Mit  $V_n := \{x \in F \mid |\langle x, x'_n \rangle| < \gamma_n\} \in \mathbb{U}(F)$  setzen wir  $V := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ . Wegen  $A \subseteq V$  ist  $V$  bornivor, nach (10) also eine Nullumgebung in  $F$ . Aus  $x_n \in F \setminus V$  für alle  $n$  folgt  $F \setminus A \subseteq F \setminus V^\circ$ , also  $V^\circ \subseteq A$  und  $A \in \mathfrak{U}(F)$ .  $\diamond$

Der Beweis zeigt, dass Satz 8.20 für jeden separablen Raum mit Eigenschaft (10) gilt.

Das folgende Resultat ist wichtig im Hinblick auf den Graphensatz:

**Theorem 8.21**

Es sei  $E$  ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum. Ist dann der Dualraum  $E'_\beta$  quasitonneliert, so ist er sogar ultrabornologisch.

BEWEIS. a) Nach Satz 7.12 ist  $E$  bornologisch und somit  $E'_\beta$  vollständig. Nach Satz 7.14 genügt es zu zeigen, dass  $E'_\beta$  bornologisch ist.

b) Dazu sei  $\mathbb{U}(E) = \{U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots\}$  eine Nullumgebungsbasis von  $E$ . Weiter sei  $V \subseteq E'_\beta$  eine bornivore Kugel. Wir wählen  $r_n > 0$  mit  $2r_n U_n^\circ \subseteq V$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und setzen  $C_n := \Gamma(\bigcup_{k=1}^n r_k U_k^\circ)$  sowie  $C := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq \frac{1}{2}V$ . Dann ist  $C$  absorbierend in  $E'$  und daher  $\overline{C}$  eine Tonne in  $E'_\beta$ . Somit ist  $\overline{C}$  eine Nullumgebung in  $E'_\beta$ , da dieser Raum nach der Folgerung zu Satz 7.8 tonneliert ist.

c) Wir zeigen nun  $\overline{C} \subseteq 2C$ : Es sei  $x' \in E' \setminus 2C$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt dann  $x' \notin 2C_n$ ; da diese Menge  $\sigma(E', E)$ -kompakt ist, gibt es  $D_n \in \mathbb{U}(E'_\beta)$  mit  $(x' + D_n) \cap 2C_n = \emptyset$ . Wir setzen  $W_n := D_n + C_n$  und  $W := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n$ ; wie im Beweis von Satz 8.18 absorbiert  $W$  alle gleichstetigen Mengen  $U_m^\circ$  und ist daher nach (10) eine Nullumgebung in  $E'_\beta$ . Offenbar ist  $(x' + W_n) \cap C_n = \emptyset$  und somit  $(x' + W) \cap C = \emptyset$ , also  $x' \notin \overline{C}$ . Insgesamt ist also  $C$  und damit auch  $V$  eine Nullumgebung in  $E'_\beta$ .  $\diamond$

In der Situation von Theorem 8.21 ist  $E'_\beta = \text{ind}_n E'_{U_n^\circ}$  ein  $(LB)$ -Raum. Zusammenfassend formulieren wir:

**Satz 8.22**

Es sei  $E$  ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum. Ist der Dualraum  $E'_\beta$  separabel oder  $E$  reflexiv, so ist  $E'_\beta$  ultrabornologisch.

BEWEIS. Die erste Aussage folgt aus Satz 8.20 und Theorem 8.21, die zweite aus Satz 8.13 und Theorem 8.21.  $\diamond$

Auch der starke Dualraum  $E'_\beta$  eines strikten induktiven Limes  $E = \text{ind}_n E_n$  reflexiver Frécheträume ist ultrabornologisch (vgl. [Grothendieck 1954] oder [Horváth 1966], 3.16). Dies gilt insbesondere für den Raum  $\mathcal{D}'_\beta(\Omega)$  der Distributionen auf einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ; in Satz 9.33 folgt ein anderer Beweis dieser Tatsache.

## 8.4 Exakte Sequenzen

Wir untersuchen nun die Dualität von *Unterraum-Topologien* und *Quotientenraum-Topologien*. Für die Formulierung der Resultate benutzen wir die folgenden aus der *homologischen Algebra* stammenden Konzepte:

**Sequenzen und Komplexe.** Eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow E_{k-1} \xrightarrow{T_{k-1}} E_k \xrightarrow{T_k} E_{k+1} \longrightarrow \cdots \quad (12)$$

von Vektorräumen  $E_k$  und linearen Abbildungen  $T_k : E_k \rightarrow E_{k+1}$  heißt *Komplex*, falls stets  $T_k T_{k-1} = 0$  ist, d. h. wenn stets  $R(T_{k-1}) \subseteq N(T_k)$  gilt.

**Algebraisch und topologisch exakte Sequenzen.** a) Ein Komplex (12) heißt *exakt* an der Stelle  $E_k$ , wenn  $R(T_{k-1}) = N(T_k)$  ist; er heißt *exakt*, wenn er an jeder Stelle exakt ist. Die *Homologiegruppen*  $H^k := N(T_k)/R(T_{k-1})$  messen den „Grad der Nicht-Exaktheit“ eines Komplexes.

b) Einen an der Stelle  $E_k$  exakten Komplex (12) *lokalkonvexer Räume* und *stetiger* linearer Abbildungen nennen wir auch dort *algebraisch exakt*. Er heißt dort *topologisch exakt*, wenn zusätzlich  $T_{k-1} : E_{k-1} \rightarrow R(T_{k-1})$  eine offene Abbildung ist; in diesem Fall bezeichnen wir auch  $T_{k-1} \in L(E_{k-1}, E_k)$  als *offen*.

c) Da die Bildräume  $R(T_{k-1})$  in  $E_k$  abgeschlossen sind, ist nach dem *Satz von der offenen Abbildung* 1.16 eine algebraisch exakte Sequenz von *Frécheträumen* automatisch topologisch exakt.

**Kurze exakte Sequenzen** sind gegeben durch

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\sigma} Q \longrightarrow 0. \quad (S)$$

Exaktheit bedeutet, dass  $\iota$  *injektiv* ist,  $R(\iota) = N(\sigma)$  gilt und  $\sigma$  *surjektiv* ist. Topologische Exaktheit bedeutet, dass zusätzlich  $\iota$  und  $\sigma$  offen sind. Bis auf Isomorphie ist dann  $G$  ein Unterraum von  $E$  und  $\sigma : E \rightarrow Q \simeq E/G$  die Quotientenabbildung.

**Duale Operatoren.** a) Für lokalkonvexe Räume  $E, F$  und  $T \in L(E, F)$  definieren wir den *dualen* oder *transponierten* linearen Operator  $T' : F' \rightarrow E'$  durch

$$T'y' := y' \circ T, \quad \text{also} \quad \langle x, T'y' \rangle := \langle Tx, y' \rangle \quad \text{für} \quad y' \in F', x \in E.$$

b) Für Bornologien  $\mathfrak{S}_1$  und  $\mathfrak{S}_2$  auf  $E$  und  $F$  ist  $T' : F'_{\mathfrak{S}_2} \rightarrow E'_{\mathfrak{S}_1}$  stetig, falls  $T(\mathfrak{S}_1) \subseteq \mathfrak{S}_2$  gilt. Insbesondere ist  $T' : F'_\alpha \rightarrow E'_\alpha$  stetig für  $\alpha = \sigma, \kappa, \gamma, \tau, \beta$ .

c) Für eine Menge  $A \subseteq E$  gilt die *Polarformel*

$$T(A)^\circ = T'^{-1}(A^\circ). \quad (13)$$

In der Tat ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} T(A)^\circ &= \{y' \in F' \mid \forall x \in A : |\langle Tx, y' \rangle| = |\langle x, T'y' \rangle| \leq 1\} \\ &= \{y' \in F' \mid T'y' \in A^\circ\} = T'^{-1}(A^\circ). \end{aligned}$$

### Satz 8.23

Für eine kurze topologisch exakte Sequenz  $(S)$  lokalkonvexer Räume ist die folgende duale Sequenz algebraisch exakt:

$$0 \longleftarrow G' \xleftarrow{\iota'} E' \xleftarrow{\sigma'} Q' \longleftarrow 0. \quad (S')$$

BEWEIS. a) Es sei  $y' \in Q'$  mit  $\sigma'y' = 0$ . Dann ist  $\langle \sigma x, y' \rangle = \langle x, \sigma'y' \rangle = 0$  für alle  $x \in E$ , und wegen der Surjektivität von  $\sigma$  folgt  $y' = 0$ . Somit ist  $\sigma'$  injektiv.

b) Offenbar ist  $\iota'\sigma' = (\sigma\iota)' = 0$ . Für  $x' \in E'$  mit  $\iota'x' = 0$  ist  $x'|_{\iota G} = x'|_{N(\sigma)} = 0$ ; durch  $z' : \sigma x \rightarrow \langle x, x' \rangle$  wird daher ein lineares Funktional  $z'$  auf  $Q$  definiert. Nun trägt  $Q$  die von  $\sigma : E \rightarrow Q$  induzierte induktive lokalkonvexe Topologie; wegen der Stetigkeit von  $z'\sigma = x'$  ist dann auch  $z'$  stetig, und offenbar gilt  $\sigma'z' = x'$ . Somit ist  $N(\iota') = R(\sigma')$ .

c) Ein Funktional  $y' \in G'$  definiert ein  $z' \in (\iota G)'$ , das sich nach dem Satz von Hahn-Banach zu einem Funktional  $x' \in E'$  fortsetzen lässt. Dann gilt  $y' = \iota'x'$ , und  $\iota'$  ist surjektiv.  $\diamond$

**Folgerung.** Für eine kurze topologisch exakte Sequenz  $(S)$  von  $(DF)$ -Räumen ist die *stark duale Sequenz*  $(S'_\beta)$  auch *topologisch* exakt, da es sich nach Satz 8.19 um eine Sequenz von Frécheträumen handelt.

Diese Folgerung gilt *nicht* allgemein, insbesondere i. A. nicht für exakte Sequenzen von Frécheträumen. Wir diskutieren zunächst die Frage, wann die injektive Abbildung  $\sigma' : Q' \rightarrow E'$  *offen* ist:

**Satz 8.24**

Es seien  $(S)$  eine kurze topologisch exakte Sequenz lokalkonvexer Räume, und für saturierte (vgl. S. 15) Bornologien  $\mathfrak{S}_1$  auf  $E$  und  $\mathfrak{S}_2$  auf  $Q$  gelte  $\sigma(\mathfrak{S}_1) \subseteq \mathfrak{S}_2$ . Dann ist  $\sigma' : Q'_{\mathfrak{S}_2} \rightarrow E'_{\mathfrak{S}_1}$  genau dann offen, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall M \in \mathfrak{S}_2 \exists S \in \mathfrak{S}_1 : M \subseteq \overline{\sigma(S)}. \quad (14)$$

BEWEIS. Es seien Mengen  $M \in \mathfrak{S}_2$  und  $S \in \mathfrak{S}_1$  gegeben, die wir wegen der Saturiertheit der Bornologien als absolutkonvex und abgeschlossen annehmen können. Nach dem Bipolarenausatz und der Polarformel (13) gilt

$$M \subseteq \overline{\sigma(S)} \Leftrightarrow M^\circ \supseteq \sigma(S)^\circ = \sigma'^{-1}(S^\circ).$$

Wegen der Injektivität von  $\sigma'$  ist dies äquivalent zu  $\sigma'(M^\circ) \supseteq S^\circ \cap R(\sigma')$ , und daher ist (14) äquivalent dazu, dass  $\sigma'$  offen ist (vgl. auch Formel (9.2) auf S. 199).  $\diamond$

Für einen  $(DF)$ -Raum  $E$  ist  $\sigma' : Q'_\beta \rightarrow E'_\beta$  stets offen:

**Satz 8.25**

Es seien  $E$  ein  $(DF)$ -Raum und  $\sigma : E \rightarrow Q$  eine Quotientenabbildung. Dann ist  $\sigma' : Q'_\beta \rightarrow E'_\beta$  offen; es gilt Bedingung (14) für beschränkte Mengen, und  $Q$  ist ebenfalls ein  $(DF)$ -Raum.

BEWEIS. a) Es ist  $R := (R(\sigma'), \beta(E', E))$  metrisierbar. Für eine Nullfolge  $(x'_n = \sigma' y'_n)$  in  $R$  gibt es nach Aufgabe 1.13 eine Folge  $\lambda_n \rightarrow \infty$  mit  $\lambda_n x'_n \rightarrow 0$  in  $R$ . Nun ist  $E$  ein  $(DF)$ -Raum, nach (11) also die Menge  $\{\lambda_n x'_n\}$  gleichstetig in  $E'$ . Es gibt also  $U \in \mathcal{U}(E)$  mit  $\sigma'(\lambda_n y'_n) \in U^\circ$ , nach (13) also  $\lambda_n y'_n \in \sigma(U)^\circ$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Insbesondere ist die Menge  $\{\lambda_n y'_n\}$  in  $Q'_\beta$  beschränkt, und es folgt  $y'_n = \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_n y'_n) \rightarrow 0$  in  $Q'_\beta$ . Somit ist  $\sigma' : Q'_\beta \rightarrow E'_\beta$  offen.

b) Aus a) und Satz 8.24 folgt nun Bedingung (14) für beschränkte Mengen, und daher besitzt  $Q$  ein abzählbares Fundamentalsystem beschränkter Mengen. Da nach a)  $\sigma' : Q'_\beta \rightarrow E'_\beta$  ein topologischer Isomorphismus ist, vererbt sich Eigenschaft (11) von  $E$  auf  $Q$ , und somit ist  $Q$  ein  $(DF)$ -Raum.  $\diamond$

**Bemerkung.** Satz 8.25 ist für Frécheträume i. A. nicht richtig: Wie auf S. 179 erwähnt, gibt es nach [Köthe 1966], § 31.5 einen Fréchet-Montelraum  $E$  mit einem Quotientenraum  $Q \simeq \ell_1$ . Würde nun Bedingung (14) für beschränkte Mengen gelten, so müsste jede beschränkte Teilmenge von  $\ell_1$  relativ kompakt sein!

Wir zeigen jedoch in Satz 8.27, dass im Fall von Frécheträumen Bedingung (14) für die Bornologien  $\mathfrak{C}$  der präkompakten Mengen und  $\mathfrak{K}$  der kompakten absolutkonvexen Mengen erfüllt ist.

**Sehr kompakte Mengen und Folgen.** Es sei  $E$  ein lokalkonvexer Raum. Eine Menge  $S \subseteq E$  heißt *sehr kompakt*, wenn es eine kompakte Banach-Kugel  $K \in \mathfrak{K}(E)$  gibt, sodass  $S$  im Banachraum  $E_K$  kompakt ist. Eine Folge in  $E$  heißt *sehr konvergent*, wenn sie für ein geeignetes  $K \in \mathfrak{K}(E)$  in  $E_K$  konvergiert (vgl. Aufgabe 7.8). Es gilt:

**Satz 8.26**

Es sei  $E$  ein Fréchetraum.

- a) Zu einer Menge  $C \in \mathfrak{C}(E)$  gibt es eine Nullfolge  $(x_n)$  in  $E$  mit  $C \subseteq \overline{\Gamma\{x_n\}}$ .
- b) Jede konvergente Folge in  $E$  ist sehr konvergent.
- c) Jede kompakte Menge in  $E$  ist sehr kompakt.

BEWEIS. a) ① Es sei  $\mathbb{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullumgebungsbasis aus kreisförmigen abgeschlossenen Mengen von  $E$  mit  $U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Ausgehend von  $C_0 := C$  konstruieren wir eine Folge weiterer präkompakter Mengen in  $E$ :

Ist  $C_{n-1}$  bereits konstruiert, so wählen wir eine endliche Menge  $M_n \subseteq C_{n-1}$  mit  $C_{n-1} \subseteq M_n + 2^{-n}U_n$  und setzen  $C_n := (C_{n-1} - M_n) \cap 2^{-n}U_n$ .

② Nun zählen wir die Elemente der Mengen  $2^n M_n$  nacheinander ab und erhalten eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $E$  mit  $x_k \in 2^n M_n$  für  $\ell_n \leq k < \ell_{n+1}$ . Dann gilt  $x_k \rightarrow 0$  in  $E$  wegen  $M_n \subseteq C_{n-1} \subseteq 2^{-n+1}U_{n-1}$ .

③ Für  $x \in C = C_0$  finden wir nun rekursiv  $y_n \in M_n$  mit  $x - \sum_{j=1}^n y_j \in C_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sind  $y_1, \dots, y_{n-1}$  bereits gewählt, so gibt es nach a) ein  $y_n \in M_n$  mit  $x - \sum_{j=1}^{n-1} y_j - y_n \in 2^{-n}U_n \subseteq C_n$ . Folglich gilt mit geeigneten  $\ell_j \leq \alpha(j) < \ell_{j+1}$ :

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} y_j = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} x_{\alpha(j)} \in \overline{\Gamma\{x_n\}}.$$

b) Zu einer Nullfolge  $(x_n)$  in  $E$  gibt es nach Aufgabe 1.13 Nullfolgen  $(\alpha_n)$  in  $\mathbb{R}$  und  $(y_n)$  in  $E$  mit  $x_n = \alpha_n y_n$ . Die Kugel  $K := \overline{\Gamma\{y_n\}}$  ist kompakt in  $E$ , und man hat  $\|x_n\|_{E_K} \leq |\alpha_n| \rightarrow 0$ .

c) Für eine (prä)kompakte Menge  $C \subseteq E$  gibt es nach a) eine Nullfolge  $(x_n)$  in  $E$  mit  $C \subseteq \overline{\Gamma\{x_n\}}$ . Für die Banachkugel  $K$  aus b) stimmt dieser Abschluss in  $E$  mit dem in  $E_K$  überein, und daher ist  $\overline{\Gamma\{x_n\}}$  kompakt in  $E_K$ .  $\diamond$

Der Beweis von Aussage a) zeigt, dass diese in allen metrisierbaren topologischen Vektorräumen gilt. Nun folgt:

**Satz 8.27**

Es seien  $E$  ein Fréchetraum und  $\sigma : E \rightarrow Q$  eine Quotientenabbildung. Zu einer präkompakten Menge  $C \subseteq Q$  gibt es dann eine präkompakte Menge  $D \subseteq E$  mit  $C = \sigma(D)$ .

BEWEIS. Nach Satz 8.26 gibt es eine Nullfolge  $(y_n)$  in  $Q$  mit  $C \subseteq \overline{\Gamma\{y_n\}}$ . Nach Satz 6.4 gibt es eine Nullfolge  $(x_n)$  in  $E$  mit  $y_n = \sigma x_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Kugel  $K := \overline{\Gamma\{x_n\}}$  ist kompakt in  $E$ , und  $\sigma(K)$  ist kompakt in  $Q$ . Aus  $y_n \in \sigma(K)$  folgt  $C \subseteq \sigma(K)$ , und mit  $D := K \cap \sigma^{-1}(C)$  ergibt sich die Behauptung.  $\diamond$

Entsprechend lassen sich auch kompakte (und absolutkonvexe) Mengen liften. Wegen  $\kappa(E', E) = \gamma(E', E)$  für Frécheträume  $E$  gilt das folgende Resultat auch für  $\kappa$ -duale Sequenzen:

**Satz 8.28**

Für eine kurze topologisch exakte Sequenz  $(S)$  von Frécheträumen ist die  $\gamma$ -duale Sequenz  $(S'_\gamma)$  topologisch exakt.

BEWEIS. a) Aufgrund der Sätze 8.24 und 8.27 ist  $\sigma' : Q'_\gamma \rightarrow E'_\gamma$  offen.

b) Wir zeigen nun, dass auch die Surjektion  $\iota' : E'_\gamma \rightarrow G'_\gamma$  offen ist. Da  $\iota : G \rightarrow E$  stetig und offen ist, gibt es zu einer präkompakten Menge  $C \in \mathfrak{C}(E)$  genau ein  $A \in \mathfrak{C}(G)$  mit  $\iota A = C \cap G$ . Nach Aufgabe 8.1 folgt

$$(\iota A)^\circ = (C \cap G)^\circ = \overline{\Gamma(C^\circ \cup G^\circ)}^{\sigma(E', E)} \subseteq \overline{C^\circ + G^\circ}^{\sigma(E', E)} = \overline{C^\circ + G^\circ}^{\gamma(E', E)},$$

da  $\gamma(E', E)$  für das Dualsystem  $\langle E', E \rangle$  zulässig ist. Nun ist  $C^\circ$  eine Nullumgebung in  $E'_\gamma$ , und daher folgt weiter

$$(\iota A)^\circ \subseteq C^\circ + G^\circ + \varepsilon C^\circ = (1 + \varepsilon) C^\circ + G^\circ \quad \text{für } \varepsilon > 0. \quad (15)$$

Für  $\iota' x' \in A^\circ$  gilt  $x' \in \iota'^{-1}(A^\circ) = (\iota A)^\circ$  nach (13), und wegen  $\iota'(G^\perp) = 0$  folgt mit (15) dann  $\iota' x' \in (1 + \varepsilon) \iota'(C^\circ)$ . Somit gilt  $A^\circ \subseteq (1 + \varepsilon) \iota'(C^\circ)$ , und  $\iota'$  ist offen.  $\diamond$

Allgemeinere Aussagen zur Offenheit von  $\iota' : E' \rightarrow G'$  werden in Aufgabe 8.14 formuliert. Aus Satz 8.28 ergibt sich sofort:

**Folgerung.** Für eine kurze topologisch exakte Sequenz  $(S)$  von Fréchet-Montelräumen ist die stark duale Sequenz  $(S'_\beta)$  topologisch exakt.

Die Aussage dieser Folgerung gilt allgemeiner dann, wenn der Raum  $G$  *quasinormabel* ist, vgl. dazu [Meise und Vogt 1992], Satz 26.17.

## 8.5 Kompakte konvexe Mengen

In diesem Abschnitt beweisen wir den *Satz von Krein-Milman*; dieser besagt, dass kompakte konvexe Mengen in lokalkonvexen Räumen die *abgeschlossenen konvexen Hüllen ihrer Extrempunkte* sind. In Verbindung mit dem Satz von Alaoglu-Bourbaki ergeben sich Aussagen über die Nicht-Isometrie konkreter Banachräume zu Dualräumen.

Als Anwendung des Satzes von Krein-Milman geben wir einen Beweis des *Satzes von Stone-Weierstraß* über die Dichtheit von Funktionenalgebren in der Banachalgebra  $\mathcal{C}(T)$  der stetigen Funktionen auf einem kompakten Raum  $T$ .

Wir beginnen mit einem *Trennungssatz für konvexe Mengen*, einer *geometrischen Version* des Satzes von Hahn-Banach:

**Theorem 8.29**

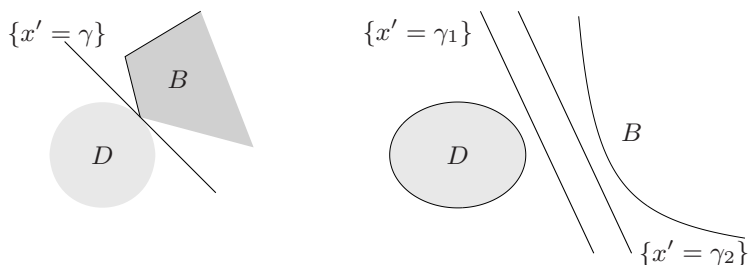
Es seien  $E$  ein lokalkonvexer Raum und  $\emptyset \neq D, B \subseteq E$  disjunkte konvexe Mengen.

a) Ist  $D$  offen, so gibt es  $x' \in E'$  und  $\gamma \in \mathbb{R}$  mit

$$\operatorname{Re} \langle d, x' \rangle < \gamma \leq \operatorname{Re} \langle b, x' \rangle \quad \text{für } d \in D, b \in B. \quad (16)$$

b) Ist  $D$  kompakt und  $B$  abgeschlossen, so gibt es  $x' \in E'$  und  $\gamma_1 < \gamma_2 \in \mathbb{R}$  mit

$$\operatorname{Re} \langle d, x' \rangle \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \operatorname{Re} \langle b, x' \rangle \quad \text{für } d \in D, b \in B. \quad (17)$$



**Abb. 8.1:** Trennung konvexer Mengen

Der Beweis in [GK], 10.3 für normierte Räume lässt sich fast wörtlich auf den lokalkonvexen Fall übertragen. Er verläuft ähnlich wie der des Bipolarsatzes 8.3 unter Verwendung eines *Fortsetzungssatzes* von Hahn-Banach für *sublineare Funktionale* (vgl. [GK], Theorem 9.1). Wie in [GK], 10.15 ergibt sich aus dem Trennungssatz:

**Folgerung.** Eine abgeschlossene *konvexe* Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes  $E$  ist auch schwach abgeschlossen.

**Extremalmengen und Extrempunkte.** a) Für Punkte  $x, y \in E$  in einem Vektorraum  $E$  über  $\mathbb{K}$  bezeichnen wir mit

$$(x, y) := \{tx + (1 - t)y \mid 0 < t < 1\} \quad \text{bzw.} \quad [x, y] := \{tx + (1 - t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

die offene bzw. abgeschlossene *Strecke* zwischen  $x$  und  $y$ .

b) Nun sei  $\emptyset \neq C \subseteq E$  gegeben. Eine Menge  $S \subseteq C$  heißt *Extremalmenge* von  $C$ , falls für  $x, y \in C$  aus  $(x, y) \cap S \neq \emptyset$  stets  $x, y \in S$  folgt.



c) Ein Punkt  $z \in C$  heißt *Extremalpunkt* von  $C$ , falls  $\{z\}$  eine Extremalmenge von  $C$  ist. Dies ist offenbar äquivalent zu

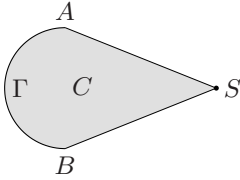
$$\forall x, y \in C \quad \forall 0 < t < 1 : z = tx + (1-t)y \Rightarrow x = y = z. \quad (18)$$

Mit  $\partial_e C$  bezeichnen wir die Menge aller Extremalpunkte von  $C$ .

d) Für *konvexe* Mengen  $C$  genügt es, in (18)  $t = \frac{1}{2}$  zu betrachten. Weiter ist dann  $z \in C$  genau dann ein Extremalpunkt, wenn gilt:

$$\forall y \in E : z \pm y \in C \Rightarrow y = 0. \quad (19)$$

**Beispiele.** a) Die Extremalmengen der konvexen Menge  $C$  in Abb. 8.2 sind  $C$ , alle Teilmengen des Halbkreises  $\Gamma$ , die Strecken  $[A, S]$  und  $[B, S]$  sowie die Spitze  $\{S\}$ ; Extremalpunkte sind alle Punkte in  $\Gamma$  sowie die Spitze  $S$ .



**Abb. 8.2:** Extremalmengen

b) Ein normierter Raum  $X$  heißt *strikt normiert*, oder *strikt konvex*, wenn seine Einheitskugel  $S = \partial U$  keine Strecke enthält (vgl. Abb. 8.3 a)), falls also gilt

$$\forall x, y \in X : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|z = \frac{1}{2}(x+y)\| = 1 \Rightarrow x = y = z. \quad (20)$$

Wegen (18) für  $t = \frac{1}{2}$  gilt offenbar  $\partial_e \overline{U} = S$  in einem strikt normierten Raum. Hilberträume und  $L_p$ -Räume im Fall  $1 < p < \infty$  sind strikt konvex, sogar *uniform konvex* (vgl. [GK], S. 184 und Abschnitt 10.3).

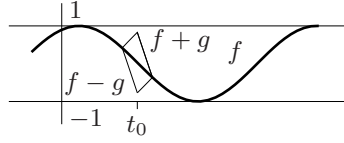
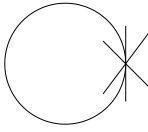
c) Für den Raum  $c_0$  aller Nullfolgen dagegen ist  $\partial_e \overline{U} = \emptyset$ . Für  $z \in c_0$  mit  $\|z\| = 1$  gibt es  $j \in \mathbb{N}_0$  mit  $|z_j| < \frac{1}{2}$ , und dann gilt offenbar auch  $\|z + \alpha e_j\| \leq 1$  für  $|\alpha| < \frac{1}{2}$ .

d) Es sei  $T$  ein kompakter Raum. In  $\mathcal{C}(T)$  gilt dann

$$\partial_e \overline{U} = \{f \in \mathcal{C}(T) \mid |f(t)| = 1 \text{ für alle } t \in T\}. \quad (21)$$

In der Tat folgt „ $\supseteq$ “ sofort aus der Gültigkeit von (20) für komplexe Zahlen (vgl. Abb. 8.3 a)). Ist umgekehrt  $|f(t_0)| < 1$  für ein  $t_0 \in T$ , so gibt es eine Funktion  $0 \neq g \in \mathcal{C}(T)$  mit Träger nahe  $t_0$  und  $\|f \pm g\| \leq 1$  (vgl. Abb. 8.3 b)).

Für *zusammenhängendes*  $T$  besitzt also die Einheitskugel des Raumes  $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})$  nur die beiden Extremalpunkte  $f_{\pm} := \pm 1$ .

Abb. 8.3: a)  $\partial_e \overline{D} = \partial D$ 

b) Eine nicht extremale Funktion

Das folgende Theorem 8.31 stammt von M.G. Krein und D. Milman (1940), der angegebene Beweis von J.L. Kelley (1951). Wir beginnen mit einem

### Lemma 8.30

Es seien  $E$  ein lokalkonvexer Raum,  $K \subseteq E$  kompakt und  $\mathfrak{X}$  das System aller kompakten Extremalmengen von  $K$ .

a) Gilt  $\{S_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{X}$  und  $S := \bigcap_i S_i \neq \emptyset$ , so ist auch  $S \in \mathfrak{X}$ .

b) Es seien  $S \in \mathfrak{X}$ ,  $x' \in E'$  und  $m := \max \{\operatorname{Re} \langle x, x' \rangle \mid x \in S\}$ . Dann gilt auch  $S(x') := \{x \in S \mid \operatorname{Re} \langle x, x' \rangle = m\} \in \mathfrak{X}$ .

BEWEIS. a) Für  $x, y \in K$  mit  $(x, y) \cap S \neq \emptyset$  folgt  $x, y \in S_i$  für alle  $i \in I$ .

b) Es seien  $x, y \in K$  und  $0 < t < 1$  mit  $z := tx + (1-t)y \in S(x') \subseteq S$ . Wegen  $S \in \mathfrak{X}$  folgt  $x, y \in S$ , also  $\operatorname{Re} \langle x, x' \rangle \leq m$  und  $\operatorname{Re} \langle y, x' \rangle \leq m$ ; aus  $\operatorname{Re} \langle z, x' \rangle = m$  folgt dann auch  $\operatorname{Re} \langle x, x' \rangle = \operatorname{Re} \langle y, x' \rangle = m$  und somit  $x, y \in S(x')$ .  $\diamond$

### Theorem 8.31 (Krein-Milman)

Es seien  $E$  ein lokalkonvexer Raum und  $K \subseteq E$  kompakt. Dann gilt  $K \subseteq \overline{\operatorname{co}(\partial_e K)}$ ; ist  $K$  zusätzlich konvex, so ist  $K = \overline{\operatorname{co}(\partial_e K)}$ .

BEWEIS. a) Wie in Lemma 8.30 sei  $\mathfrak{X}$  das System aller kompakten Extremalmengen von  $K$ . Wegen  $K \in \mathfrak{X}$  ist  $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ . Wir wählen eine feste Extremalmenge  $S \in \mathfrak{X}$  und betrachten das System  $S(\mathfrak{X}) := \{M \in \mathfrak{X} \mid M \subseteq S\}$ . Offenbar ist  $\emptyset \neq S(\mathfrak{X})$  durch Inklusion nach unten halbgeordnet. Für eine Kette  $\mathfrak{C} \subseteq S(\mathfrak{X})$  gilt  $D(\mathfrak{C}) := \bigcap \{M \mid M \in \mathfrak{C}\} \neq \emptyset$ , da ja ein Durchschnitt kompakter Mengen gebildet wird. Nach Lemma 8.30 a) ist  $D(\mathfrak{C}) \in S(\mathfrak{X})$  und somit eine untere Schranke von  $\mathfrak{C}$ . Nach dem Zornschen Lemma besitzt daher  $S(\mathfrak{X})$  ein minimales Element  $Z \in S(\mathfrak{X})$ .

b) Für  $x' \in E$  muss  $\operatorname{Re} x'$  nach Lemma 8.30 b) auf  $Z$  konstant sein, und die Anwendung dieser Aussage auf  $ix'$  liefert sie auch für  $\operatorname{Im} x'$ . Nach dem Satz von Hahn-Banach ist somit  $Z = \{x\}$  einpunktig, und  $x$  ist ein Extrempunkt von  $K$ . Somit enthält jede Extremalmenge  $S \in \mathfrak{X}$  einen Extrempunkt, und insbesondere ist  $\partial_e K \neq \emptyset$ .

c) Es sei nun  $A := \overline{\operatorname{co}(\partial_e K)}$ . Gibt es nun  $x_0 \in K \setminus A$ , so liefert der Trennungssatz 8.29 ein Funktional  $x' \in E'$  mit  $\operatorname{Re} \langle x, x' \rangle < \operatorname{Re} \langle x_0, x' \rangle$  für alle  $x \in A$ . Dann ist  $A \cap K(x') = \emptyset$ ; dies ist aber unmöglich, da  $K(x')$  nach Lemma 8.30 b) eine Extremalmenge von  $K$  ist und somit nach b) einen Extrempunkt enthalten muss.

d) Nach c) ist  $K \subseteq A$ , und für *konvexe* kompakte Mengen  $K$  gilt auch  $A \subseteq K$ .  $\diamond$

In Verbindung mit dem *Satz von Alaoglu-Bourbaki* 8.6 ergibt sich nun:

### Satz 8.32

Es sei  $X$  ein Banachraum. Dann ist die Einheitskugel  $\overline{U}_{X'}$  des Dualraums der schwach\*-Abschluss von  $\text{co}(\partial_e \overline{U}_{X'})$ .

**Duale Banachräume.** a) Ist für einen Banachraum  $Y$  (mit  $\dim Y = \infty$ ) die Menge  $\partial_e \overline{U}$  der Extrempunkte der Einheitskugel leer oder endlich, so kann  $Y$  nicht zu einem dualen Banachraum isometrisch und insbesondere nicht reflexiv sein. Beispiele solcher Banachräume sind etwa  $c_0$ ,  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ,  $L_1[a, b]$  oder der Raum  $K(H)$  der kompakten Operatoren auf einem Hilbertraum (vgl. Aufgabe 8.19).

b) In der Situation von a) kann  $Y$  durchaus zu einem dualen Banachraum isomorph sein, vgl. dazu Aufgabe 8.20.

Als Anwendung des Satzes von Krein-Milman beweisen wir nun den *Approximationsatz von Stone-Weierstraß*. Dieser wird im Beweis des *Satzes von Gelfand-Naimark* 15.3 über *kommutative  $C^*$ -Algebren* verwendet. „Elementare“ Beweise des Satzes von Stone-Weierstraß findet man in vielen Lehrbüchern der Analysis, etwa in [Kaballo 1997], 12.3.

### Theorem 8.33 (Stone-Weierstraß)

Es seien  $T$  ein kompakter topologischer Raum und  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(T, \mathbb{K})$  eine Funktionenalgebra. Dann ist  $\mathcal{A}$  dicht in  $\mathcal{C}(T, \mathbb{K})$ , falls die folgenden drei Bedingungen gelten:

- ①  $1 \in \mathcal{A}$ ,
- ② Zu  $x, y \in T$  mit  $x \neq y$  gibt es  $f \in \mathcal{A}$  mit  $f(x) \neq f(y)$ ,
- ③  $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$ .

BEWEIS. a) Zunächst sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ; dann ist Bedingung ③ offenbar leer. Die Menge  $K := \overline{U}_{\mathcal{C}(T)'} \cap \mathcal{A}^\perp$  ist (absolut)konvex und nach dem *Satz von Alaoglu-Bourbaki* auch schwach\*-kompakt. Ist  $\mathcal{A}$  nicht dicht in  $\mathcal{C}(T)$ , so ist  $K \neq \{0\}$ , und nach dem *Satz von Krein-Milman* besitzt  $K$  einen Extrempunkt  $\Phi \in \mathcal{A}^\perp$  mit  $\|\Phi\| = 1$ .

b) Nach dem *Rieszschen Darstellungssatz* gibt es (genau) ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $T$  und (genau) eine Funktion  $g \in L_\infty(\mu)$  mit  $|g| = 1$   $\mu$ -fast überall und  $\Phi(f) = \int_T f g d\mu$  für alle  $f \in \mathcal{C}(T)$  (vgl. [Meise und Vogt 1992], 13.10, oder [GK], 9.16 für metrisierbare Räume  $T$ ). Der Träger  $S := \text{supp } \mu$  von  $\mu$  (oder des Funktionals  $\Phi$  in Übereinstimmung mit S. 42) ist die kleinste abgeschlossene Menge  $S \subseteq T$  mit  $\mu(S) = \mu(T) = 1$ .

c) Für  $h \in \mathcal{A}$  mit  $\frac{1}{3} \leq h(t) \leq \frac{2}{3}$  für alle  $t \in S$  definieren wir Funktionale auf  $\mathcal{C}(T)$  durch  $\Phi_1(f) = \Phi(hf) = \int_T f h g d\mu$  und  $\Phi_2(f) = \Phi((1-h)f) = \int_T f(1-h)g d\mu$ ; dann

gilt  $\lambda_j := \|\Phi_j\| > 0$  und  $\lambda_1 + \lambda_2 = \int_T h|g|d\mu + \int_T (1-h)|g|d\mu = 1$ . Für  $f \in \mathcal{A}$  hat man  $\Phi_1(f) = \Phi(hf) = 0$  und ebenso  $\Phi_2(f) = 0$ , da ja  $\mathcal{A}$  eine Funktionenalgebra ist. Somit ist  $\Psi_j := \frac{1}{\lambda_j} \Phi_j \in K$ , und aus  $\Phi = \lambda_1 \Psi_1 + \lambda_2 \Psi_2$  folgt dann  $\Phi = \Psi_1 = \Psi_2$ .

d) Somit ist  $\int_T fhg d\mu = \Phi_1(f) = \lambda_1 \Phi(f) = \int_T f \lambda_1 g d\mu$  für alle  $f \in \mathcal{C}(T)$ , und wegen der Stetigkeit von  $h$  muss  $h(t) = \lambda_1$  für alle  $t \in S$  sein. Ist nun  $h \in \mathcal{A}$  beliebig, so gibt es  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $\frac{1}{3} \leq h_1 := ah + b \leq \frac{2}{3}$  auf  $S$ . Mit  $h_1$  ist dann auch  $h$  auf der Menge  $S$  konstant. Nun impliziert Bedingung ②, dass  $S = \{s\}$  einpunktig sein muss, und das bedeutet  $\Phi = \pm \delta_s$ . Dann ist aber  $\Phi(1) \neq 0$ , und wegen  $\Phi \in \mathcal{A}^\perp$  widerspricht dies Bedingung ①.

e) Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  gilt  $\mathcal{B} := \{\operatorname{Re} f \mid f \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{A}$  aufgrund von Bedingung ③, und für die reelle Algebra  $\mathcal{B}$  gelten Bedingungen ① und ②. Somit ist  $\mathcal{B}$  dicht in  $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})$  und daher auch  $\mathcal{A}$  dicht in  $\mathcal{C}(T, \mathbb{C})$ .  $\diamond$

**Beispiele.** a) Für eine kompakte Menge  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  ist die Algebra  $\mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$  der Polynome dicht in der Banachalgebra  $\mathcal{C}(T, \mathbb{K})$ .

b) Im komplexen Fall ist der Satz von Stone-Weierstraß ohne Bedingung ③ nicht richtig. Ein Beispiel für diese Situation ist mit  $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  die in  $\mathcal{C}(\overline{D})$  abgeschlossene *Disc-Algebra*  $\mathcal{A}(\overline{D}) := \mathcal{C}(\overline{D}) \cap \mathcal{H}(D)$  der auf  $\overline{D}$  stetigen und in  $D$  holomorphen Funktionen.

**Repräsentierende Maße.** Abschließend diskutieren wir eine Umformulierung des Satzes von Krein-Milman und weitgehende Verschärfungen dieses Resultats.

a) Es seien  $E$  ein lokalkonvexer Raum und  $K \subseteq E$  eine kompakte konvexe Menge. Eine Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *affin*, falls

$$f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y) \quad \text{für alle } x, y \in K \text{ und } 0 \leq t \leq 1$$

gilt;  $A(K)$  bezeichnet den Banachraum aller stetigen affinen Funktionen auf  $K$ .

b) Für  $T := \overline{\partial_e K}$  ist  $K = \overline{\operatorname{co} T}$  nach Theorem 8.31. Daher gilt  $\|f\|_{\mathcal{C}(K)} = \|f\|_{\mathcal{C}(T)}$  für alle  $f \in A(K)$ , und wir können  $A(K)$  als abgeschlossenen Unterraum von  $\mathcal{C}(T)$  auffassen. Für  $x \in K$  hat das Dirac-Funktional  $\delta_x : f \mapsto f(x)$  eine Fortsetzung  $\tilde{\delta}_x \in \mathcal{C}(T)'$  mit  $\|\tilde{\delta}_x\| = 1$  und  $\tilde{\delta}_x(1) = 1$ . Daher ist  $\tilde{\delta}_x$  positiv, und nach dem *Rieszschen Darstellungssatz* gibt es ein *Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß*  $\mu_x$  auf  $T$  mit

$$\langle x, x' \rangle = \int_{\overline{\partial_e K}} \langle y, x' \rangle d\mu_x(y) \quad \text{für alle } x' \in E', \quad (22)$$

kurz  $x = \int_{\overline{\partial_e K}} y d\mu_x(y)$  (vgl. Formel (10.13)). Dann heißt  $\mu_x$  ein *repräsentierendes Maß* für  $x$ , und  $x$  heißt *Schwerpunkt* des Maßes  $\mu_x$ .

c) Es kann durchaus  $K = \overline{\partial_e K}$  gelten (vgl. Aufgabe 8.19 c)); in diesem Fall ist die Aussage von (22) leer. Man möchte daher ein repräsentierendes Maß finden, das sogar auf  $\partial_e K$  *konzentriert* ist. Nach G. Choquet (1956) ist dies möglich, wenn  $K$  *metrisierbar* ist; in diesem Fall ist  $\partial_e K$  eine  $G_\delta$ -Menge, und man kann  $\mu_x(\partial_e K) = 1$  erreichen.

d) Im allgemeinen Fall muss  $\partial_e K$  keine Borel-Menge sein; nach E. Bishop und K. de Leeuw (1959) kann man aber  $\mu_x(B) = 0$  für jede Baire-Menge  $B \subseteq K \setminus \partial_e K$  erreichen.

Für die soeben kurz skizzierte *Choquet-Theorie* und ihre Anwendungen sei auf [Alfsen 1971] oder [Phelps 2001] verwiesen.

## 8.6 Aufgaben

### Aufgabe 8.1

Es seien  $\langle E, F \rangle$  ein Dualsystem. Zeigen Sie:

- a) Aus  $rM \subseteq N$  in  $E$  folgt  $rN^\circ \subseteq M^\circ$  in  $F$ .
- b) Für Mengen  $M_j \subseteq E$  gilt  $(\bigcup_j M_j)^\circ = \bigcap_j M_j^\circ$  und  $(\bigcap_j M_j)^\circ = \overline{\Gamma(\bigcup_j M_j^\circ)^{\sigma(F, E)}}$ , falls  $\bigcap_j M_j \neq \emptyset$  ist.

### Aufgabe 8.2

Es seien  $\langle E_1, F_1 \rangle$  und  $\langle E_2, F_2 \rangle$  Dualsysteme und  $T: E_1 \rightarrow F_1$  linear. Zeigen Sie, dass  $T: (E_1, \sigma(E_1, F_1)) \rightarrow (E_2, \sigma(E_2, F_2))$  genau dann stetig ist, wenn  $T^\times(F_2) \subseteq F_1$  für die *algebraisch duale Abbildung*  $T^\times: F_2^\times \rightarrow F_1^\times$  gilt.

### Aufgabe 8.3

In der Situation von Aufgabe 8.2 heißt  $T' := T^\times|_{F_2}: F_2 \rightarrow F_1$  die *duale Abbildung* zu  $T$ . Zeigen Sie:

- a) Aus  $T(A) \subseteq B$  in  $E_2$  folgt  $T'(B^\circ) \subseteq A^\circ$  in  $F_1$ . Wann gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?
- b) Für Bornologien  $\mathfrak{S}_j$  auf  $E_j$  ist  $T': (F_2, \mathfrak{T}(\mathfrak{S}_2)) \rightarrow (F_1, \mathfrak{T}(\mathfrak{S}_1))$  genau dann stetig, wenn  $T(\mathfrak{S}_1) \subseteq \mathfrak{S}_2$  gilt.
- c) Für Bornologien  $\mathfrak{S}_j$  auf  $E_j$  ist genau dann  $T(A)$  präkompakt in  $\mathfrak{T}(\mathfrak{S}_2)$  für alle  $A \in \mathfrak{S}_1$ , wenn  $T'(C)$  präkompakt in  $\mathfrak{T}(\mathfrak{S}_1)$  für alle  $C \in \mathfrak{S}_2$  ist.

### Aufgabe 8.4

Zeigen Sie: Ein lokalkonvexer Raum  $E$  ist genau dann vollständig, wenn jede affine Hyperebene  $H \subseteq E'$  bereits dann in  $\sigma(E', E)$  abgeschlossen ist, wenn dies für  $H \cap U^\circ$  für alle  $U \in \mathbb{U}(E)$  gilt.

### Aufgabe 8.5

Zeigen Sie: Für einen vollständigen lokalkonvexen Raum  $E$  ist  $\gamma(E', E)$  die feinste lokalkonvexe Topologie auf  $E'$ , die auf allen gleichstetigen Mengen in  $E'$  mit  $\sigma(E', E)$  zusammenfällt.

Für einen Fréchetraum  $E$  ist  $\gamma(E', E)$  sogar *die feinste Topologie* auf  $E'$ , mit dieser Eigenschaft (*Satz von Banach-Dieudonné*, vgl. [Köthe 1966], § 21.10, oder [Jarchow 1981], 9.4).

**Aufgabe 8.6**

Es seien  $E$  ein lokalkonvexer Raum und  $(x_n)$  eine Nullfolge in  $E^\sigma$ . Zeigen Sie:

$$\overline{\Gamma\{x_n\}} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \mid \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1 \right\}.$$

**Aufgabe 8.7**

Es sei  $E = \prod_{j \in J} E_j$  ein kartesisches Produkt lokalkonvexer Räume.

- Zeigen Sie die algebraische Isomorphie  $E' \simeq \bigoplus_{j \in J} E'_j$ .
- Zeigen Sie  $\sigma(E, E') = \prod_{j \in J} \sigma(E_j, E'_j)$  und  $\tau(E, E') = \prod_{j \in J} \tau(E_j, E'_j)$ .
- Zeigen Sie  $\kappa(E', E) = \bigoplus_{j \in J} \kappa(E'_j, E_j)$ . Gilt auch  $\sigma(E', E) = \bigoplus_{j \in J} \sigma(E'_j, E_j)$ ?

**Aufgabe 8.8**

Es sei  $E$  ein reflexiver Banachraum.

- Zeigen Sie, dass Quotientenräume von  $E$  ebenfalls reflexiv sind.
- Schließen Sie aus Theorem 8.11, dass die Einheitskugel schwach folgenkompakt ist.

**Aufgabe 8.9**

Finden Sie einen semi-reflexiven Raum, der nicht vollständig ist. (Nach Y. Komura (1964) gibt es sogar unvollständige reflexive Räume).

**Aufgabe 8.10**

Es seien  $F$  ein  $(DF)$ -Raum und  $E$  ein lokalkonvexer Raum. Zeigen Sie:

- Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $\mathcal{G}_n$  gleichstetige Mengen in  $L(F, E)$ , sodass  $\mathcal{G} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$  in  $L_\beta(F, E)$  beschränkt ist. Dann ist  $\mathcal{G}$  gleichstetig.
- Eine abzählbare in  $L_\beta(F, E)$  beschränkte Menge ist gleichstetig.
- Ist  $E$  ein Fréchetraum, so gilt dies auch für  $L_\beta(F, E)$ .
- Sind  $F$  und  $E$  folgenvollständig, so gilt dies auch für  $L_\sigma(F, E)$ .

**Aufgabe 8.11**

Es seien  $F$  ein  $(DF)$ -Raum und  $E$  ein metrisierbarer Raum. Zeigen Sie, dass alle stetigen linearen Operatoren  $T \in L(F, E)$  und  $S \in L(E, F)$  beschränkt sind, d. h. eine Nullumgebung in eine beschränkte Menge abbilden. Kann ein  $(DF)$ -Raum metrisierbar sein?

**Aufgabe 8.12**

Zeigen Sie, dass ein folgenvollständiger  $(DF)$ -Raum ein Gewebe besitzt.

**Aufgabe 8.13**

Lässt sich der Beweis von Theorem 8.21 auf den Fall eines folgenvollständigen  $(DF)$ -Raumes übertragen?

**Aufgabe 8.14**

Es seien  $(S)$  eine kurze topologisch exakte Sequenz lokalkonvexer Räume und  $\mathfrak{S}_1$  bzw.  $\mathfrak{S}_2$  saturierte Bornologien auf  $E$  bzw.  $G$ . Zeigen Sie:

- a) Ist  $\iota' : E'_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow G'_{\mathfrak{S}_2}$  offen, so gilt  $\iota\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1 \cap G$ .
- b) Im Fall  $(E'_{\mathfrak{S}_1})' = E$  gilt auch die Umkehrung von Aussage a).

**Aufgabe 8.15**

Es sei  $(S)$  eine kurze topologisch exakte Sequenz lokalkonvexer Räume. Zeigen Sie, dass die schwach duale Sequenz  $(S'_\sigma)$  topologisch exakt ist.

**Aufgabe 8.16**

Ein  $(DF)$ -Raum  $G$  sei Unterraum eines lokalkonvexen Raumes  $E$ . Zeigen Sie:

- a) Die Restriktionsabbildung  $\iota' : E'_\beta \rightarrow G'_\beta$  ist offen.
- b) Zu einer beschränkten Menge  $B \in \mathfrak{B}(\overline{G})$  gibt es  $C \in \mathfrak{B}(G)$  mit  $B \subseteq \overline{C}$ .
- c) Ein quasivollständiger  $(DF)$ -Raum ist vollständig.
- d) Die Räume  $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$  sind für  $0 \leq m < \infty$  vollständig.

**Aufgabe 8.17**

Es seien  $E$  ein Vektorraum und  $C \subseteq E$  konvex. Für  $z \in C$  zeigen Sie:

$$z \in \partial_e C \Leftrightarrow \forall x_1, \dots, x_r \in C : z \in \text{co}\{x_1, \dots, x_r\} \Rightarrow x_1 = \dots = x_r = z.$$

**Aufgabe 8.18**

Zeigen Sie, dass für einen reflexiven Banachraum  $X$  die Einheitskugel  $\overline{U}_X$  der *Norm*-Abschluss von  $\text{co}(\partial_e \overline{U}_{X'})$  ist.

**Aufgabe 8.19**

- a) Bestimmen Sie alle Extrempunkte der Einheitskugeln der Räume  $\ell_\infty$ ,  $\ell_1$ ,  $L_1[a, b]$  und  $K(H)$  für einen Hilbertraum  $H$ .
- b) Zeigen Sie, dass für  $X = \ell_\infty$  und  $X = \ell_1$  die Einheitskugel  $\overline{U}_X$  der *Norm*-Abschluss von  $\text{co}(\partial_e \overline{U}_X)$  ist.
- c) Zeigen Sie, dass  $\partial_e \overline{U}$  im Fall des Hilbertraumes  $\ell_2$  in  $\overline{U}$  schwach dicht ist.

**Aufgabe 8.20**

Es sei  $Y := \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \in \ell_1 \mid \sum_{j=0}^{\infty} x_j = 0\}$ . Zeigen Sie  $Y \simeq \ell_1$ , aber  $\partial_e \overline{U} = \emptyset$  für die Einheitskugel von  $Y$ .

**Aufgabe 8.21**

Es seien  $E$  ein quasivollständiger lokalkonvexer Raum und  $K \subseteq E$  kompakt.

- a) Zeigen Sie Milmans „Umkehrung“ des Satzes von Krein-Milman:  $\partial_e(\overline{\text{co } K}) \subseteq \partial_e K$ .
- b) Zeigen Sie  $\partial_e(\overline{\Gamma K}) \subseteq \{\alpha z \mid |\alpha| = 1, z \in \partial_e K\}$ .

**Aufgabe 8.22**

- a) Es sei  $T$  ein kompakter topologischer Raum. Zeigen Sie  $\partial_e \overline{U} = \{\pm \delta_t \mid t \in T\}$  für die Einheitskugel von  $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})'$ .
- b) Folgern Sie, dass  $T$  genau dann metrisierbar ist, wenn der Banachraum  $\mathcal{C}(T)$  separabel ist.
- c) Folgern Sie den *Satz von Banach-Stone*: Zwei kompakte topologische Räume  $T, S$  sind genau dann homöomorph, wenn die Banachräume  $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})$  und  $\mathcal{C}(S, \mathbb{R})$  isometrisch sind.

**Aufgabe 8.23**

Es seien  $T, S$  kompakte topologische Räume. Zeigen Sie, dass die Algebra

$$\mathcal{C}(T) \otimes \mathcal{C}(S) := \left\{ \sum_{k=1}^n f_k(t) g_k(s) \mid n \in \mathbb{N}, f_k \in \mathcal{C}(T), g_k \in \mathcal{C}(S) \right\}$$

(vgl. Beispiel a) auf S. 247) in der Banachalgebra  $\mathcal{C}(T \times S)$  dicht ist.



## 9 Lösung linearer Gleichungen

*Fragen: 1. Zeigen Sie, dass der Cauchy-Riemann-Operator  $\bar{\partial} : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  für jede offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  surjektiv ist. Existiert eine stetige oder sogar eine stetige lineare Rechtsinverse?*

*2. Für eine offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  seien eine diskrete Menge  $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\Omega$  und Zahlen  $c_k \in \mathbb{C}$  gegeben. Finden Sie eine holomorphe Funktion  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  mit  $f(w_k) = c_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .*

*3. Es seien  $0 \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$  eine kurze topologisch exakte Sequenz lokalkonvexer Räume und  $F$  ein weiterer lokalkonvexer Raum. Wann hat ein Operator  $T \in L(G, F)$  eine Fortsetzung  $\tilde{T} \in L(E, F)$ ? Wann hat ein Operator  $T \in L(F, Q)$  ein Lifting  $T^\vee \in L(Q, E)$ ?*

In diesem Kapitel entwickeln wir *Lösbarkeitskriterien* für lineare Gleichungen  $Tx = y$  und insbesondere *Surjektivitätskriterien* für lineare Operatoren  $T$ . Im Hinblick auf Anwendungen auf lineare *Differentialoperatoren in Banachräumen* (vgl. [GK], Kapitel 13 und 16) oder in *lokalen Sobolev-Räumen* (vgl. Abschnitt 9.4) betrachten wir *dicht definierte abgeschlossene* Operatoren zwischen lokalkonvexen Räumen, insbesondere Frécheträumen, die i. A. weder auf dem ganzen Raum definiert noch stetig sein müssen.

Im ersten Abschnitt führen wir Grundbegriffe der Operatortheorie ein und konstruieren *duale* oder *transponierte* Operatoren. Ein Operator  $T$  von  $E$  nach  $F$  heißt *normal auflösbar*, wenn  $R(T) = {}^\perp N(T')$  gilt. Dies bedeutet, dass für  $y \in F$  die lineare Gleichung  $Tx = y$  genau dann lösbar ist, wenn  $y$  die „natürliche“ Bedingung  $\langle y, y' \rangle = 0$  für alle  $y' \in N(T')$  erfüllt. Wegen  $R(T)^\perp = N(T')$  ist  $T$  genau dann normal auflösbar, wenn  $R(T)$  abgeschlossen ist. Gilt zusätzlich  $N(T') = \{0\}$ , so ist  $T$  *surjektiv*.

Im zweiten Abschnitt zeigen wir zunächst den *Satz vom abgeschlossenen Wertebereich* für lineare Operatoren zwischen Frécheträumen: Die *normale Auflösbarkeit von  $T$*  ist zu der von  $T'$  äquivalent. Es folgen weitere, insbesondere „semi-globale“ Äquivalenzen und als ein Spezialfall in Theorem 9.10 ein Surjektivitätskriterium, das in vielen konkreten Situationen leicht nachprüfbar ist. In Abschnitt 9.3 stellen wir als weiteres wichtiges Surjektivitätskriterium die „Mittag-Leffler-Methode“ vor, eine abstrakte Fassung eines Beweises dieses funktionentheoretischen Satzes mittels „konvergenzerzeugender Summanden“.

In Abschnitt 9.4 wenden wir die bisher entwickelte Theorie auf das Problem der *globalen Lösbarkeit linearer Differentialgleichungen* mit konstanten Koeffizienten an. Für eine offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ist nach B. Malgrange (1954) die *Surjektivität von  $P(D) : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$*  zu einer Eigenschaft „*P-konvex*“ von  $\Omega$  äquivalent. Mit Hilfe des *Satzes von Paley-Wiener 3.9* ergibt sich, dass jede *konvexe* Menge diese Eigenschaft besitzt; für *elliptische* Operatoren ist sogar *jede* offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  *P-konvex*.

In den folgenden Abschnitten suchen wir *Lösungsoperatoren*  $R : Q \rightarrow E$  zu Surjektio-

nen  $\sigma \in L(E, Q)$  von Frécheträumen. Zunächst zeigen wir, dass es stets einen *stetigen* (nicht notwendig linearen) *Lösungsoperator* gibt. Dieses Resultat folgt aus einem *Auswahlsatz* von E. Michael (1956) und stammt für Banachräume in etwas präziserer Form von R.G. Bartle und R.M. Graves (1952).

In Abschnitt 9.6 zeigen wir, dass es zu einer Surjektion  $\sigma \in L(E, Q)$  genau dann einen *stetigen linearen Lösungsoperator*  $R \in L(Q, E)$  gibt, wenn in  $E$  eine stetige Projektion auf den Kern von  $\sigma$  existiert. Wir diskutieren einige Beispiele und zeigen insbesondere, dass für den Wellenoperator  $\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 : \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$  ein solcher Lösungsoperator existiert. Nach A. Grothendieck (1955) ist dies jedoch für einen *elliptischen* Operator  $P(D) : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  nicht der Fall.

In Abschnitt 9.7 diskutieren wir *Fortsetzungs- und Lifting-Probleme* für lineare Operatoren sowie *injektive* und *projektive* lokalkonvexe Räume. Wesentliche Ergebnisse sind ein *Fortsetzungssatz* vom „Hahn-Banach-Typ“ für Operatoren nach  $L_\infty(\Omega)$  und die auf A. Pelczyński (1960) zurückgehende *Isomorphie*  $L_\infty[0,1] \simeq \ell_\infty$ .

## 9.1 Abgeschlossene Operatoren und duale Operatoren

Wir beginnen mit grundlegenden Definitionen und Konstruktionen für nicht notwendig stetige lineare Operatoren mit dichtem Definitionsbereich zwischen lokalkonvexen Räumen.

**Lineare Operatoren und Graphen.** Es seien  $E, F$  lokalkonvexe Räume.

a) Ein linearer *Operator* von  $E$  nach  $F$  ist eine lineare Abbildung  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow F$  mit einem Unterraum  $\mathcal{D}(T) \subseteq E$  als Definitionsbereich. Mit  $R(T) \subseteq F$  bezeichnen wir das Bild von  $T$ . Für eine Menge  $M \subseteq E$  schreiben wir kurz  $T(M) := T(M \cap \mathcal{D}(T))$ . Im Fall  $E = F$  nennen wir  $T$  einen *Operator in  $E$* .

b) Es ist  $\Gamma(T) := \{(x, Tx) \mid x \in \mathcal{D}(T)\} \subseteq E \times F$  der *Graph* von  $T$ . Durch

$$\tau : \mathcal{D}(T) \rightarrow \Gamma(T), \quad \tau x := (x, Tx), \quad (1)$$

wird eine *lineare Isomorphie* von  $\mathcal{D}(T)$  auf den Graphen  $\Gamma(T)$  definiert.

c) Mittels  $\tau$  transportieren wir die von  $E \times F$  auf  $\Gamma(T)$  induzierte lokalkonvexe Topologie zur *Graphen-Topologie*  $\mathfrak{T}_T$  auf  $\mathcal{D}(T)$  und schreiben  $\mathcal{D}_T := (\mathcal{D}(T), \mathfrak{T}_T)$ . Ein Fundamentalsystem von Halbnormen auf  $\mathcal{D}_T$  ist gegeben durch

$$(p \times q)(x)^2 := p(x)^2 + q(Tx)^2, \quad x \in \mathcal{D}(T), \quad p \in \mathbb{H}(E), \quad q \in \mathbb{H}(F).$$

Die Inklusion  $i : \mathcal{D}_T \rightarrow E$  und der Operator  $T : \mathcal{D}_T \rightarrow F$  sind offenbar stetig.

d) Ein Operator  $T$  von  $E$  nach  $F$  heißt *abgeschlossen*, falls sein Graph  $\Gamma(T)$  in  $E \times F$  abgeschlossen ist. In diesem Fall ist der Kern  $N(T)$  ein *abgeschlossener* Unterraum von  $E$ .

**Offene und fast offene lineare Operatoren.** a) Ein Operator  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow F$  heißt *offen*, wenn er offene Teilmengen von  $\mathcal{D}(T)$  auf offene Teilmengen von  $R(T)$  abbildet, d. h. falls gilt

$$\forall U \in \mathbb{U}(E) \exists V \in \mathbb{U}(F) : V \cap R(T) \subseteq T(U). \quad (2)$$

b) Ein Operator  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow F$  heißt *fast offen*, falls gilt

$$\forall U \in \mathbb{U}(E) \exists V \in \mathbb{U}(F) : V \cap \overline{R(T)} \subseteq \overline{T(U)}. \quad (3)$$

Offene lineare Operatoren sind auch fast offen.

Eine Umformulierung des Satzes von der offenen Abbildung 1.16 ist:

**Satz 9.1**

*Es seien  $E, F$  Frécheträume und  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow F$  ein abgeschlossener linearer Operator. Äquivalent sind:*

- (a)  $T$  ist offen.
- (b)  $T$  ist fast offen.
- (c)  $R(T)$  ist abgeschlossen in  $F$ .

BEWEIS. „(a)  $\Rightarrow$  (b)“ ist klar.

„(b)  $\Rightarrow$  (c)“: Wir betrachten zunächst  $T$  als Operator von  $\mathcal{D}(T)$  nach  $\overline{R(T)}$ ; für  $U \in \mathbb{U}(E)$  gilt dann  $\overline{T(U)} \subseteq (1 + \varepsilon)T(U)$  für  $\varepsilon > 0$  nach Lemma 1.20. Nun betrachten wir  $T$  wieder als Operator von  $\mathcal{D}(T)$  nach  $F$ . Wegen (3) existiert dann  $V \in \mathbb{U}(F)$  mit  $V \cap \overline{R(T)} \subseteq \overline{T(U)} \subseteq (1 + \varepsilon)T(U)$ , und daher gilt  $\overline{R(T)} \subseteq R(T)$ .

„(c)  $\Rightarrow$  (a)“: Der Operator  $T$  induziert den abgeschlossenen bijektiven Operator  $T^\wedge$  von  $E/N(T)$  auf  $R(T)$  mit Definitionsbereich  $\mathcal{D}(T)/N(T)$ . Nach dem Graphensatz 1.18 ist  $(T^\wedge)^{-1} : R(T) \rightarrow E/N(T)$  stetig und somit  $T$  offen.  $\diamond$

**Konvention.** In diesem Kapitel betrachten wir nur *abgeschlossene* lineare Operatoren mit *dichtem Definitionsbereich*  $\mathcal{D}(T) \subseteq E$ .

Nun führen wir *duale* oder *transponierte Operatoren* ein. Für *stetige* lineare Operatoren haben wir dies auf S. 184 bereits getan, für lineare Operatoren in *Banachräumen* in [GK], Kapitel 13.

**Duale Operatoren.** a) Für lokalkonvexe Räume  $E, F$  identifizieren wir den Dualraum von  $E \times F$  mit dem Produkt  $F' \times E'$  durch

$$\langle (x, y), (y', x') \rangle := \langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle.$$

b) Für einen Operator  $T$  von  $E$  nach  $F$  ist

$$\Gamma(-T)^\perp = \{(y', x') \in F' \times E' \mid \langle x, x' \rangle - \langle Tx, y' \rangle = 0 \text{ für } x \in \mathcal{D}(T)\}$$

Graph eines Operators von  $F'$  nach  $E'$ , da  $\mathcal{D}(T)$  als *dicht* in  $E$  vorausgesetzt wird. Der durch

$$\Gamma(T') := \Gamma(-T)^\perp$$

definierte Operator heißt *dualer* oder *transponierter Operator* zu  $T$ . Dieser ist *abgeschlossen*, der Graph ist sogar abgeschlossen in  $\sigma(F' \times E', E \times F)$ . Man hat

$$\mathcal{D}(T') = \{y' \in F' \mid \exists x' \in E' \forall x \in \mathcal{D}(T) : \langle Tx, y' \rangle = \langle x, x' \rangle\} \quad (4)$$

und  $T'y' = x'$  für  $y' \in \mathcal{D}(T')$ .

c) Wir betrachten  $T$  auch als stetigen linearen Operator  $T_c \in L(\mathcal{D}_T, F)$ ; dieser definiert den dualen Operator  $T'_c : F' \rightarrow \mathcal{D}'_T$ . Per Restriktion können wir  $E'$  als Unterraum von  $\mathcal{D}'_T$  auffassen, und wegen (4) gilt

$$\mathcal{D}(T') = \{y' \in F' \mid T'_c y' \in E'\}. \quad (5)$$

Wir zeigen nun zwei nützliche *Polarformeln* aus [Mennicken und Sagraloff 1980], deren erste Formel (8.13) erweitert:

### Satz 9.2

Es seien  $E, F$  lokalkonvexe Räume. Für einen Operator  $T$  von  $E$  nach  $F$ ,  $U \in \mathbb{U}(E)$  und  $V \in \mathbb{U}(F)$  gelten die Polarformeln

$$T(U)^\circ = T'^{-1}(U^\circ), \quad (6)$$

$$(T^{-1}(V))^\circ = T'(V^\circ). \quad (7)$$

BEWEIS. (6) „ $\supseteq$ “: Es sei  $y' \in T'^{-1}(U^\circ)$ . Dann ist  $y' \in \mathcal{D}(T')$  und  $T'y' \in U^\circ$ , also  $|\langle x, T'y' \rangle| \leq 1$  für alle  $x \in U$  und insbesondere  $|\langle Tx, y' \rangle| \leq 1$  für alle  $x \in U \cap \mathcal{D}(T)$ . Somit ist  $y' \in T(U)^\circ$ .

„ $\subseteq$ “: Für  $y' \in T(U)^\circ$  gilt umgekehrt  $|\langle Tx, y' \rangle| \leq 1$  für alle  $x \in U \cap \mathcal{D}(T)$ . Daher ist  $x \mapsto \langle Tx, y' \rangle$  eine stetige Linearform auf  $\mathcal{D}(T)$ , definiert also ein Funktional  $T'y' \in E'$  mit  $|\langle x, T'y' \rangle| \leq 1$  für alle  $x \in U \cap \mathcal{D}(T)$  und dann auch für alle  $x \in U$ . Somit ist  $T'y' \in U^\circ$ .

(7) „ $\supseteq$ “: Für  $y' \in V^\circ \cap \mathcal{D}(T')$  und  $x \in T^{-1}(V)$  gilt  $x \in \mathcal{D}(T)$  und  $Tx \in V$ , also  $|\langle x, T'y' \rangle| = |\langle Tx, y' \rangle| \leq 1$  und somit  $T'y' \in (T^{-1}(V))^\circ$ .

„ $\subseteq$ “: Es sei  $q = q_V$  das Minkowski-Funktional von  $V$  und  $x' \in (T^{-1}(V))^\circ$  gegeben. Für  $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$  folgt aus  $Tx_1 = Tx_2$  dann  $T(x_1 - x_2) = 0$ , also  $x_1 - x_2 \in \varepsilon T^{-1}(V)$  für alle  $\varepsilon > 0$  und somit  $\langle x_1 - x_2, x' \rangle = 0$ . Durch  $f : Tx \mapsto \langle x, x' \rangle$  wird daher auf  $R(T)$  eine Linearform definiert mit  $|f(Tx)| = |\langle x, x' \rangle| \leq q(Tx)$  wegen  $x' \in (T^{-1}(V))^\circ$ . Nach dem Satz von Hahn-Banach 1.9 existiert ein Funktional  $y' \in F'$  mit  $\langle Tx, y' \rangle = f(Tx) = \langle x, x' \rangle$  für  $x \in \mathcal{D}(T)$  und  $|\langle y, y' \rangle| \leq q(y)$  für alle  $y \in F$ . Dies zeigt  $x' = T'y'$  mit  $y' \in \mathcal{D}(T')$  und  $y' \in V^\circ$ .  $\diamond$

Für einen Unterraum  $G$  eines lokalkonvexen Raumes stimmen Polare  $G^\circ$  und Annihilator  $G^\perp$  natürlich überein. Es gilt (vgl. [GK], Satz 13.8):

**Satz 9.3**

Es seien  $E, F$  lokalkonvexe Räume. Für einen Operator  $T$  von  $E$  nach  $F$  ist  $\mathcal{D}(T')$  schwach\*-dicht in  $F'$ . Weiter gelten die Formeln

$$R(T)^\perp = N(T') \quad \text{und} \quad {}^\perp R(T') = N(T), \quad (8)$$

$$\overline{R(T)} = {}^\perp N(T') \quad \text{und} \quad \overline{R(T')}^{\sigma(E', E)} = N(T)^\perp. \quad (9)$$

BEWEIS. a) Für  $y \in {}^\perp \mathcal{D}(T')$  und  $y' \in \mathcal{D}(T')$  gilt  $\langle (0, y), (y', T'y') \rangle = \langle y, y' \rangle = 0$ , also  $(0, y) \in {}^\perp \Gamma(T') = {}^\perp (\Gamma(-T)^\perp) = \Gamma(-T)$  und somit  $y = 0$ , da  $T$  abgeschlossen ist. Somit ist  $\mathcal{D}(T')$  in der Tat  $\sigma(F', F)$ -dicht in  $F'$ .

b) Die erste Aussage in (8) ist der Spezialfall  $U = E$  in (6). Klar ist  $N(T) \subseteq {}^\perp R(T')$ . Für  $x \in {}^\perp R(T')$  schließlich gilt  $(x, 0) \in {}^\perp \Gamma(T') = \Gamma(-T)$  und somit  $x \in N(T)$ .

c) Die Aussagen in (9) folgen sofort aus (8) und dem Bipolarensatz.  $\diamond$

Die Polarformel (6) liefert die folgende Umformulierung von Bedingung (3):

**Satz 9.4**

Es seien  $E, F$  lokalkonvexe Räume. Ein Operator  $T$  von  $E$  nach  $F$  ist genau dann fast offen, falls gilt:

$$\forall U \in \mathbb{U}(E) \exists V \in \mathbb{U}(F) : U^\circ \cap R(T') \subseteq T'(V^\circ). \quad (10)$$

BEWEIS. „ $\Rightarrow$ “: Zu  $U \in \mathbb{U}(E)$  wählen wir  $V \in \mathbb{U}(F)$  gemäß (3). Mit (6) folgt dann mittels Aufgabe 8.1

$$T'^{-1}(U^\circ) = T(U)^\circ \subseteq \overline{\Gamma(V^\circ \cup R(T)^\perp)}^{\sigma(F', F)} \subseteq V^\circ + R(T)^\perp,$$

da  $V^\circ$  schwach\*-kompakt und  $R(T)^\perp$  schwach\*-abgeschlossen ist. Für ein Funktional  $x' = T'y' \in U^\circ \cap R(T')$  gilt dann  $y' \in V^\circ + R(T)^\perp$ , wegen (8) also  $x' \in T'(V^\circ)$ .

„ $\Leftarrow$ “: Zu  $U \in \mathbb{U}(E)$  wählen wir  $V \in \mathbb{U}(F)$  gemäß (10). Es folgt

$$T(U)^\circ = T'^{-1}(U^\circ) \subseteq V^\circ + N(T') = V^\circ + R(T)^\perp \subseteq (V \cap \overline{R(T)})^\circ$$

wegen (6) und (8), und der Bipolarensatz impliziert (3).  $\diamond$

Insbesondere gilt das folgende *Surjektivitätskriterium*:

**Satz 9.5**

Für Frécheträume  $E, F$  ist ein Operator  $T$  von  $E$  nach  $F$  genau dann surjektiv, falls gilt:

$$\forall U \in \mathbb{U}(E) \exists V \in \mathbb{U}(F) : T'^{-1}(U^\circ) \subseteq V^\circ. \quad (11)$$

BEWEIS. Aufgrund der Polarformel (6) liefert der Bipolarensatz die Äquivalenz von (11) zu

$$\forall U \in \mathbb{U}(E) \exists V \in \mathbb{U}(F) : V \subseteq \overline{T(U)}. \quad (12)$$

Dies bedeutet, dass  $\overline{R(T)} = F$  und  $T$  fast offen ist; nach Satz 9.1 wiederum ist dies äquivalent zur Surjektivität von  $T$ .  $\diamond$

**Bemerkung.** Für Banachräume  $E, F$  ist (11) äquivalent zur Abschätzung

$$\exists \rho > 0 \forall y' \in \mathcal{D}(T') : \|y'\| \leq \rho \|T'y'\|. \quad (13)$$

## 9.2 Normal auflösbare und surjektive Operatoren

Wir zeigen nun, dass im Fall von Frécheträumen  $E, F$  die *normale Auflösbarkeit eines Operators  $T$  zu der von  $T'$  äquivalent* ist. Dieses wichtige Resultat geht für stetige lineare Operatoren zwischen Banachräumen auf S. Banach (1929) und F. Hausdorff (1932) zurück, für solche zwischen Frécheträumen auf J. Dieudonné und L. Schwartz (1949) und für abgeschlossene lineare Operatoren zwischen Frécheträumen auf F.E. Browder (1959). Für die nun folgenden Charakterisierungen der normalen Auflösbarkeit kombinieren wir Ausführungen in [Meise und Vogt 1992], § 26, und [Mennicken 1983].

### Theorem 9.6 (vom abgeschlossenen Wertebereich)

Es seien  $E, F$  Frécheträume und  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow F$  ein abgeschlossener linearer Operator mit  $\overline{\mathcal{D}(T)} = E$ . Äquivalent sind:

- (a)  $T$  ist normal auflösbar, d. h. es gilt  $R(T) = {}^\perp N(T')$ .
- (b)  $R(T)$  ist abgeschlossen in  $F$ .
- (c) Es gilt  $R(T') = N(T)^\perp$ .
- (d)  $R(T')$  ist abgeschlossen in  $E'_\sigma$ .
- (e)  $R(T')$  ist abgeschlossen in  $E'_\beta$ .
- (f) Es ist  $U^\circ \cap R(T')$  eine Banach-Kugel für alle  $U \in \mathbb{U}(E)$ .
- (g) Es gilt Bedingung (10):

$$\forall U \in \mathbb{U}(E) \exists V \in \mathbb{U}(F) : U^\circ \cap R(T') \subseteq T'(V^\circ).$$

BEWEIS. Die Äquivalenzen „(a)  $\Leftrightarrow$  (b)“ und „(c)  $\Leftrightarrow$  (d)“ folgen sofort aus Formel (9), die Implikation „(d)  $\Rightarrow$  (e)“ ist klar.

„(b)  $\Rightarrow$  (c)“: Für  $x' \in E'$  gibt es  $U \in \mathbb{U}(E)$  mit  $x' \in U^\circ$ , und für  $x' \in N(T)^\perp$  gilt dann auch  $x' \in (U + N(T))^\circ = (T^{-1}(T(U)))^\circ$ . Wegen (b) und Satz 9.1 gibt es  $V \in \mathbb{U}(F)$  mit  $V \cap R(T) \subseteq T(U)$ , und damit folgt  $x' \in (T^{-1}(V \cap R(T)))^\circ = (T^{-1}(V))^\circ = T'(V^\circ)$  aufgrund der Polarformel (7). Insbesondere ist  $x' \in R(T')$ .

„(e)  $\Rightarrow$  (f)“: Es ist  $U^\circ \cap R(T')$  abgeschlossen in dem vollständigen  $(DF)$ -Raum  $E'_\beta$ , nach Satz 7.6 also eine Banach-Kugel.

„(f)  $\Rightarrow$  (g)“: Für  $V \in \mathbb{U}(F)$  ist  $V^\circ$  kompakt in  $\sigma(F', F)$  und daher  $T'_c(V^\circ)$  kompakt in  $\sigma(\mathcal{D}'_T, \mathcal{D}_T)$ . Für  $U \in \mathbb{U}(E)$  und  $B := U^\circ \cap R(T')$  ist

$$E'_B \cap T'(V^\circ \cap \mathcal{D}(T')) = E'_B \cap T'_c(V^\circ)$$

aufgrund von (5), und mit der stetigen Inklusion  $E'_B \hookrightarrow (\mathcal{D}'_T, \sigma(\mathcal{D}'_T, \mathcal{D}_T))$  ergibt sich, dass diese Menge in  $E'_B$  abgeschlossen ist.

Nun sei  $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Nullumgebungsbasis von  $F$ . Dann gilt  $\mathcal{D}(T') = \bigcup_k (V_k^\circ \cap \mathcal{D}(T'))$  und daher

$$E'_B = E'_B \cap R(T') = \bigcup_k (E'_B \cap T'(V_k^\circ)).$$

Da  $B$  eine Banach-Kugel ist, gibt es nach dem Satz von Baire ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $E'_B \cap T'(V_n^\circ)$  einen inneren Punkt in  $E'_B$  besitzt. Nach Lemma 7.2 gibt es  $\rho > 0$  mit  $\rho B \subseteq T'(V_n^\circ)$ , und somit gilt (10).

„(g)  $\Rightarrow$  (b)“: Nach Satz 9.4 ist  $T$  fast offen, und Satz 9.1 impliziert  $\overline{R(T)} = R(T)$ .  $\diamond$

Als erste Anwendung von Theorem 9.6 zeigen wir diese Umkehrung von Satz 8.23:

### Satz 9.7

*Eine kurze Sequenz*

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\sigma} Q \longrightarrow 0 \quad (S)$$

*von Frécheträumen ist genau dann exakt, wenn die duale Sequenz exakt ist:*

$$0 \longleftarrow G' \xleftarrow{\iota'} E' \xleftarrow{\sigma'} Q' \longleftarrow 0. \quad (S')$$

BEWEIS. Aussage „ $\Rightarrow$ “ folgt aus Satz 8.23, zu zeigen bleibt also „ $\Leftarrow$ “: Nach (8) gilt  $N(\iota) = {}^\perp R(\iota') = {}^\perp G' = \{0\}$ , also ist  $\iota$  injektiv. Nach Theorem 9.6 ist  $R(\iota)$  abgeschlossen in  $E$ , und aus (9) folgt  $N(\sigma) = {}^\perp R(\sigma') = {}^\perp N(\iota') = R(\iota)$ . Nach Theorem 9.6 ist auch  $R(\sigma)$  abgeschlossen in  $Q$ , und aus (9) folgt  $R(\sigma) = {}^\perp N(\sigma') = Q$ .  $\diamond$

Eine Konsequenz aus den Sätzen 8.23 und 9.7 ist:

### Satz 9.8

*Für eine kurze topologisch exakte Sequenz (S) metrisierbarer Räume ist auch die Sequenz  $(\hat{S})$  der Vervollständigungen exakt.*

BEWEIS. Die dualen Sequenzen  $(S') = (\hat{S}')$  von (S) und  $(\hat{S})$  stimmen überein. Nach Satz 8.23 ist  $(S')$  algebraisch exakt, und nach Satz 9.7 impliziert dies die Exaktheit von  $(\hat{S})$ .  $\diamond$

Wir geben nun „*semi-globale*“ äquivalente Formulierungen der normalen Auflösbarkeit an. Diese sind nur in *Frécheträumen ohne stetige Norm* wie etwa  $\omega$  oder  $\mathcal{E}(\Omega)$  nicht-trivial, jedoch wichtig für Anwendungen z. B. auf lineare Differentialoperatoren. Theorem 9.9 stammt aus [Mennicken und Sagraloff 1980], der Spezialfall Theorem 9.10 aus [Treves 1967], Theorem 37.3. Für Halbnormen  $p \in \mathbb{H}(E)$  verwenden wir die Vektorräume  $N_p := \{x \in E \mid p(x) = 0\}$  und die Banachräume  $E'_p := E'_{U_p^\circ}$ .

### Theorem 9.9

Es seien  $E, F$  Frécheträume und  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow F$  ein abgeschlossener linearer Operator mit  $\overline{\mathcal{D}(T)} = E$ . Äquivalent sind:

- (a)  $T$  ist normal auflösbar, d. h. es gilt  $R(T) = {}^\perp N(T')$ .
- (b)  $\forall p \in \mathbb{H}(E) \exists q \in \mathbb{H}(F) : E'_p \cap R(T') \subseteq T'(F'_q) \text{ und } \overline{R(T)} \subseteq R(T) + N_q$ .
- (c)  $\forall p \in \mathbb{H}(E) \exists q \in \mathbb{H}(F) : E'_p \cap R(T') \subseteq T'(N_q^\perp) \text{ und } \overline{R(T)} \subseteq R(T) + N_q$ .
- (d)  $\forall p \in \mathbb{H}(E) \exists q \in \mathbb{H}(F) : \overline{R(T)} \cap N_q \subseteq \overline{T(U_p)} \text{ und } \overline{R(T)} \subseteq R(T) + N_q$ .

BEWEIS. „(a)  $\Rightarrow$  (b)“: Die erste Inklusion in (b) folgt sofort aus (10), die zweite ist klar wegen  $\overline{R(T)} = R(T)$ .

„(b)  $\Rightarrow$  (c)“ folgt sofort aus  $F'_q \subseteq N_q^\perp$ .

„(c)  $\Rightarrow$  (d)“ Aufgrund von (c) hat man

$$T'^{-1}(U_p^\circ) \subseteq T'^{-1}(E'_p) = T'^{-1}(R(T') \cap E'_p) \subseteq T'^{-1}(T'(N_q^\perp)) = N_q^\perp + N(T').$$

Wegen (6) und (8) bedeutet dies  $T(U_p)^\circ \subseteq N_q^\perp + N(T') = N_q^\perp + R(T)^\perp$ , und der Bipolarenaussatz liefert  $\overline{R(T)} \cap N_q \subseteq \overline{T(U_p)}$ .

„(d)  $\Rightarrow$  (a)“: Für  $p \in \mathbb{H}(E)$  wählen wir  $q \in \mathbb{H}(F)$  gemäß (d) und zeigen, dass  $\overline{T(U_p)}$  in  $\overline{R(T)}$  absorbierend ist: Für  $y \in \overline{R(T)}$  hat man  $y = y_1 + y_2$  mit  $y_1 \in R(T)$  und  $y_2 \in N_q$ . Es gibt  $\rho > 0$  mit  $y_1 \in \rho T(U_p)$ , und es folgt  $y_2 = y - y_1 \in \overline{R(T)} \cap N_q$ , also  $y_2 \in \overline{T(U_p)}$  nach (d). Somit ist  $y \in (1 + \rho) \overline{T(U_p)}$ .

Es ist also  $\overline{T(U_p)}$  eine Tonne in  $\overline{R(T)}$  und daher dort eine Nullumgebung. Daher ist  $T$  fast offen, und die Behauptung folgt aus Satz 9.1.  $\diamond$

Speziell gilt als Variante zu Satz 9.5 das folgende *Surjektivitätskriterium*:

### Theorem 9.10

Es seien  $E, F$  Frécheträume und  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow F$  ein abgeschlossener linearer Operator mit  $\overline{\mathcal{D}(T)} = E$ . Genau dann ist  $T$  surjektiv, falls diese beiden Bedingungen gelten:

$$\forall q \in \mathbb{H}(F) : F \subseteq R(T) + N_q, \quad (14)$$

$$\forall p \in \mathbb{H}(E) \exists q \in \mathbb{H}(F) \forall y' \in \mathcal{D}(T') : T'y' \in E'_p \Rightarrow y' \in N_q^\perp. \quad (15)$$



BEWEIS. „ $\Rightarrow$ “: Ist  $T$  surjektiv, so gilt (14). Weiter ist  $T'$  injektiv, und daher folgt (15) aus Bedingung (c) in Satz 9.9.

„ $\Leftarrow$ “: Aus (14) folgt  $\overline{R(T)} = F$  und mit (15) dann Bedingung (c) in Satz 9.9.  $\diamond$

Als erste Anwendung von Theorem 9.10 zeigen wir das folgende Resultat von M. Eidelheit (1937) über die *universelle Lösbarkeit linearer Gleichungen*:

**Satz 9.11 (Eidelheit)**

Für einen Fréchetraum  $E$  und eine Folge  $(x'_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  in  $E'$  sind äquivalent:

(a) Das lineare Gleichungssystem

$$\langle x, x'_j \rangle = \xi_j, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad (16)$$

besitzt für alle Folgen  $\xi = (\xi_j) \in \omega$  eine Lösung  $x \in E$ .

(b) Der durch  $T : x \mapsto (\langle x, x'_j \rangle)$  definierte Operator  $T \in L(E, \omega)$  ist surjektiv.

(c) Die Folge  $(x'_j)$  ist linear unabhängig, und es gilt  $\dim([x'_j] \cap E'_p) < \infty$  für alle Halbnormen  $p \in \mathbb{H}(E)$ .

BEWEIS. Die Äquivalenz von (a) und (b) ist klar.

„(c)  $\Rightarrow$  (b)“: Ein Fundamentalsystem von Halbnormen auf  $\omega$  ist gegeben durch

$$q_m(\xi) = \sup_{j=0}^m |\xi_j|, \quad \xi = (\xi_j)_{j=0}^\infty \in \omega, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

und somit ist  $N_{q_m} = \{\xi \in \omega \mid \xi_0 = \dots = \xi_m = 0\}$ . Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionale  $\{x'_j\}$  sind für alle festen  $m \in \mathbb{N}_0$  die endlich vielen linearen Gleichungen  $\langle x, x'_j \rangle = \xi_j$ ,  $j = 0, \dots, m$  für alle  $\xi \in \omega$  lösbar, und daher gilt Bedingung (14). Insbesondere ist  $T'$  injektiv.

Für  $\eta = (\eta_j) \in \varphi \simeq \omega'$  und  $x \in E$  gilt

$$\langle Tx, \eta \rangle = \sum_j \langle x, x'_j \rangle \eta_j = \langle x, \sum_j \eta_j x'_j \rangle,$$

und daher ist  $T'\eta = \sum_j \eta_j x'_j$  und  $R(T') = [x'_j]$ . Für eine Halbnorm  $p \in \mathbb{H}(E)$  gilt also  $\dim(R(T') \cap E'_p) < \infty$  und dann auch  $\dim T'^{-1}(E'_p) < \infty$  wegen der Injektivität von  $T'$ . Daher existiert  $m \in \mathbb{N}$  mit  $T'^{-1}(E'_p) \subseteq N_{q_m}^\perp = \{\eta \in \varphi \mid \eta_j = 0 \text{ für } j > m\}$ , und es gilt (15).

„(b)  $\Rightarrow$  (c)“: Umgekehrt folgt aus (14) die lineare Unabhängigkeit der Funktionale  $\{x'_j\}$ ; wegen der Injektivität von  $T'$  ergibt sich  $\dim(R(T') \cap E'_p) < \infty$  für alle Halbnormen  $p \in \mathbb{H}(E)$  aus (15), und wegen  $R(T') = [x'_j]$  somit die Behauptung.  $\diamond$

Für Folgenräume  $E$  kann der Operator  $T$  durch eine unendliche Matrix repräsentiert werden, und der Satz von Eidelheit gibt ein Kriterium für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbekannten.

Es folgen zwei konkrete Anwendungen:

**Satz 9.12 (Borel)**

Es sei  $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  eine beliebige Folge. Dann gibt es eine Funktion  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R})$  mit  $f^{(j)}(0) = \xi_j$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$ .

BEWEIS. Die Funktionale  $(-1)^j \delta^{(j)} : f \mapsto f^{(j)}(0)$  sind offenbar linear unabhängig. Für die  $\mathcal{C}^k$ -Norm  $p = \|\cdot\|_{\mathcal{C}^k}$  auf  $E := \mathcal{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R})$  besteht  $E'_p$  aus Distributionen der Ordnung  $\leq k$ , und daher ist  $\dim([\delta^{(j)}] \cap E'_p) < \infty$ .  $\diamond$

Einen elementaren Beweis des Satzes von Borel findet man etwa in [Kaballo 2000], 36.11.

Nun zeigen wir einen *Interpolationssatz für holomorphe Funktionen*:

**Satz 9.13**

Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $S = \{w_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$  eine diskrete Menge. Weiter seien Zahlen  $c_{k,0}, \dots, c_{k,m_k} \in \mathbb{C}$  für  $k \in \mathbb{N}$  gegeben. Dann gibt es eine holomorphe Funktion  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  mit  $f^{(j)}(w_k) = c_{k,j}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $j = 0, \dots, m_k$ .

BEWEIS. Die Funktionale  $(-1)^j \delta_k^{(j)} : f \mapsto f^{(j)}(w_k)$  sind offenbar linear unabhängig. Für eine kompakte Menge  $K \subseteq \Omega$  und  $p = \|\cdot\|_K$  auf  $E := \mathcal{H}(\Omega)$  ist  $E'_p$  der Raum der Funktionale  $u \in \mathcal{H}'(\Omega)$ , die eine Abschätzung  $|u(f)| \leq C \sup_{z \in K} |f(z)|$  erfüllen, und daher ist  $\dim([\delta_k^{(j)}] \cap E'_p) < \infty$ .  $\diamond$

Einen „direkteren“ Beweis dieses Satzes findet man etwa in [Rudin 1974], 15.13.

## 9.3 Die Mittag-Leffler-Methode

Wir kommen nun zu einem weiteren wichtigen Surjektivitätskriterium, das wir in der Sprache der *projektiven Spektren* (vgl. S. 151) formulieren:

**Theorem 9.14**

Es seien  $\{G_n, \theta_n^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{E_n, \rho_n^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  und  $\{Q_n, \tau_n^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  projektive Spektren von Vektorräumen mit projektiven Limiten  $G, E$  und  $Q$  sowie  $\iota_n : G_n \rightarrow E_n$  und  $\sigma_n : E_n \rightarrow Q_n$  lineare Abbildungen, sodass alle Diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G_n & \xrightarrow{\iota_n} & E_n & \xrightarrow{\sigma_n} & Q_n \\ & & \uparrow \theta_{n+1}^n & & \uparrow \rho_{n+1}^n & & \uparrow \tau_{n+1}^n \\ 0 & \longrightarrow & G_{n+1} & \xrightarrow{\iota_{n+1}} & E_{n+1} & \xrightarrow{\sigma_{n+1}} & Q_{n+1} \end{array}$$

kommutieren. Alle Zeilen seien exakt, und es gelte

$$\forall n \in \mathbb{N} : \tau_n(Q) \subseteq \sigma_n(E_n). \quad (17)$$

Weiter sei  $\{G_n, \theta_m^n\}_{\mathbb{N}}$  ein projektives Spektrum von Frécheträumen mit stetigen linearen Abbildungen  $\theta_m^n \in L(G_m, G_n)$ . Dieses sei dicht, d. h. es gelte

$$\forall n \in \mathbb{N} : G_n = \overline{\theta_{n+1}^n(G_{n+1})}. \quad (18)$$

Dann ist die induzierte Sequenz der projektiven Limiten exakt:

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\sigma} Q \longrightarrow 0. \quad (S)$$

Bedingung (17) ist natürlich insbesondere dann erfüllt, wenn alle  $\sigma_n : E_n \rightarrow Q_n$  surjektiv sind, wenn also sogar die Sequenzen

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\iota_n} E_n \xrightarrow{\sigma_n} Q_n \longrightarrow 0$$

exakt sind. Bedingung (18) ist insbesondere dann erfüllt, wenn sogar stets  $\theta_n(G)$  in  $G_n$  dicht ist; ein solches projektives Spektrum heißt *reduziert*.

Theorem 9.14 wird als *Mittag-Leffler-Methode* bezeichnet, da es sich um eine abstrakte Fassung eines Beweises dieses funktionentheoretischen Satzes handelt:

**Satz 9.15 (Mittag-Leffler)**

Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $S = \{w_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$  eine diskrete Menge. Für  $k \in \mathbb{N}$  seien Hauptteile  $P_k(z) = \sum_{j=0}^{m_k} c_{j,k} (z - w_k)^{-j}$  gegeben. Dann gibt es eine meromorphe Funktion  $f$  auf  $\Omega$ , die auf  $\Omega \setminus S$  holomorph ist und für alle  $k \in \mathbb{N}$  in  $w_k$  genau den Hauptteil  $P_k$  besitzt.

BEWEIS. Es sei  $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine relativ kompakte Ausschöpfung von  $\Omega$  wie in (1.2). Die Mengen  $S_n := \Omega_n \cap S$  sind endlich. Nun seien  $\mathcal{P}_k := [(z - w_k)^{-j}]_{j \in \mathbb{N}_0}$  der Raum aller Hauptteile in  $w_k$  und  $\mathcal{M}_S(\Omega)$  der Raum aller meromorphen Funktionen auf  $\Omega$  mit Polen höchstens in  $S \subseteq \Omega$ . Weiter sei  $\sigma f$  das Tupel aller Hauptteile einer meromorphen Funktion  $f$ . Mit Restriktionen von Funktionen von  $\Omega_{n+1}$  auf  $\Omega_n$  erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}(\Omega_n) & \xrightarrow{\iota_n} & \mathcal{M}_{S_n}(\Omega_n) & \xrightarrow{\sigma_n} & \prod_{k \in S_n} \mathcal{P}_k \\ & & \uparrow \theta_{n+1}^n & & \uparrow \rho_{n+1}^n & & \uparrow \tau_{n+1}^n \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}(\Omega_{n+1}) & \xrightarrow{\iota_{n+1}} & \mathcal{M}_{S_{n+1}}(\Omega_{n+1}) & \xrightarrow{\sigma_{n+1}} & \prod_{k \in S_{n+1}} \mathcal{P}_k \end{array}$$

wie in Theorem 9.14. Da  $S_n$  endlich ist, ist  $\sigma_n : \mathcal{M}_{S_n}(\Omega_n) \rightarrow \prod_{k \in S_n} \mathcal{P}_k$  surjektiv; Bedingung (17) ist also erfüllt. Nach dem *Approximationssatz von Runge* (1885; vgl. [Rudin 1974], Kapitel 13 und auch S. 330 in diesem Buch) sind die Restriktionen der Funktionen aus  $\mathcal{H}(\Omega)$  dicht in  $\mathcal{H}(\Omega_n)$ , sodass auch Bedingung (18) erfüllt ist. Nach Theorem 9.14 ist somit die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}(\Omega) \xrightarrow{\iota} \mathcal{M}_S(\Omega) \xrightarrow{\sigma} \prod_{k \in S} \mathcal{P}_k \longrightarrow 0$$

der projektiven Limiten *exakt*, und dies impliziert die Behauptung.  $\diamond$

Beachten Sie bitte, dass in Theorem 9.14 nur die Räume  $G_n$ , nicht aber die Räume  $E_n$  und  $Q_n$  Frécheträume sein müssen. Dies ist für Satz 9.15 wichtig, da auf den Vektorräumen  $\mathcal{P}_k \simeq \varphi$  in der Tat keine Fréchetraum-Strukturen definiert werden können (vgl. Beispiel b) auf S. 20). Wir kommen nun zum

**Beweis von Theorem 9.14.** a) Die Injektivität von  $\iota : G \ni (z_n) \mapsto (\iota_n z_n) \in E$  ist klar, ebenso  $\sigma \iota = 0$ . Für  $x = (x_n) \in E$  gelte  $\sigma x = (\sigma x_n) = 0$ . Dann gibt es eindeutig bestimmte  $z_n \in G_n$  mit  $x_n = \iota_n z_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Wegen  $\iota_{n-1}(z_{n-1} - \theta_n^{n-1} z_n) = \iota_{n-1} z_{n-1} - \rho_n^{n-1} \iota_n z_n = x_{n-1} - \rho_n^{n-1} x_n = 0$  ist  $z_{n-1} = \theta_n^{n-1} z_n$ , und für  $z := (z_n) \in G$  gilt  $\iota z = x$ . Zu zeigen ist also im Wesentlichen die *Surjektivität* von  $\sigma : E \rightarrow Q$ :

b) Zu  $y \in Q$  gibt es nach (17) Vektoren  $\xi_n \in E_n$  mit  $\sigma_n \xi_n = \tau_n y$ . Wie in a) ist  $\sigma_n(\xi_n - \rho_{n+1}^n \xi_{n+1}) = \sigma_n \xi_n - \tau_{n+1}^n \sigma_{n+1}^n \xi_{n+1} = 0$ . Daraus können wir *nicht*  $\xi_n = \rho_{n+1}^n \xi_{n+1}$  schließen; es gibt jedoch  $z_n \in G_n$  mit

$$\xi_n - \rho_{n+1}^n \xi_{n+1} = \iota_n z_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

c) Mit Hilfe der Voraussetzungen an das projektive Spektrum  $\{G_n, \theta_m^n\}_{\mathbb{N}}$  konstruieren wir nun Vektoren  $\zeta_n \in G_n$  mit

$$z_n = \zeta_n - \theta_{n+1}^n \zeta_{n+1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Für  $x_n := \xi_n - \iota_n \zeta_n$  gilt dann ebenfalls  $\sigma_n \xi_n = \tau_n y$ , aber auch  $x_n = \rho_{n+1}^n x_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Somit ist  $x := (x_n) \in E$  und  $\sigma x = y$ .

d) Wir möchten die  $\zeta_n$  gerne mittels

$$\zeta_n := z_n + \theta_{n+1}^n z_{n+1} + \theta_{n+2}^n z_{n+2} + \theta_{n+3}^n z_{n+3} + \cdots$$

konstruieren. Da diese Reihen in  $G_n$  nicht konvergieren müssen, fügen wir *konvergenzerzeugende Summanden* ein:

Wir wählen nacheinander wachsende Fundamentalsysteme  $\{\| \cdot \|_j^n\}_{j \in \mathbb{N}}$  von Halbnormen auf  $G_n$ , sodass stets  $\|\theta_{n+1}^n z_{n+1}\|_n^n \leq \|z_{n+1}\|_{n+1}^{n+1}$  gilt. Nach (18) gibt es zu  $z_1 \in G_1$  ein  $h_2 \in G_2$  mit  $\|z_1 - \theta_2^1 h_2\|_1^1 \leq 2^{-1}$ . Zu  $z_2 + h_2 \in G_2$  wählen wir dann  $h_3 \in G_3$  mit  $\|(z_2 + h_2) - \theta_3^2 h_3\|_2^2 \leq 2^{-2}$  und fahren entsprechend fort: Sind  $h_2, \dots, h_n$  bereits gewählt, so finden wir  $h_{n+1} \in G_{n+1}$  mit  $\|(z_n + h_n) - \theta_{n+1}^n h_{n+1}\|_n^n \leq 2^{-n}$ . Mit  $h_1 := 0$  sind dann die Reihen

$$\begin{aligned} \zeta_n := & (z_n - \theta_{n+1}^n h_{n+1}) + \theta_{n+1}^n (z_{n+1} + h_{n+1} - \theta_{n+2}^{n+1} h_{n+2}) \\ & + \theta_{n+2}^n (z_{n+2} + h_{n+2} - \theta_{n+3}^{n+2} h_{n+3}) + \cdots \end{aligned}$$

in den Frécheträumen  $G_n$  konvergent, und (19) ist erfüllt.  $\diamond$

Die Surjektivität von  $\sigma : E \rightarrow Q$  beruht also auf der Existenz der Zerlegungen (19), d. h. auf der Surjektivität des Operators  $T \in L(\prod_n G_n)$ ,  $T : (\zeta_n) \mapsto (\zeta_n - \theta_{n+1}^n \zeta_{n+1})$ . Der Quotientenraum  $\prod_n G_n / R(T)$  wird auch mit  $\text{proj}^1\{G_n, \theta_m^n\}_{\mathbb{N}}$  bezeichnet; die Surjektivität von  $\sigma : E \rightarrow Q$  folgt also aus der Bedingung „ $\text{proj}^1\{G_n, \theta_m^n\}_{\mathbb{N}} = \{0\}$ “. *Homologische Methoden* zur Untersuchung linearer Operatoren zwischen lokalkonvexen Räumen gehen auf V.P. Palamodov (1968/71) zurück; dazu sei auf [Wengenroth 2003] verwiesen.

Eine wesentliche Verfeinerung der Mittag-Leffler-Methode stammt von [Vogt 1977a]; diesen *Splitting-Satz* stellen wir in Abschnitt 12.5 vor.

## 9.4 Globale Lösbarkeit linearer Differentialgleichungen

Wir wenden nun Theorem 9.10 auf lineare partielle Differentialgleichungen  $P(D)u = f$  über offenen Mengen  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  an, wobei die rechte Seite in  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  oder in einem lokalen Sobolev-Raum  $H^{s,\text{loc}}(\Omega)$  liegt.

Auf dem Fréchetraum  $\mathcal{E}(\Omega)$  ist ein Fundamentalsystem von Halbnormen gegeben durch (vgl. Formel (1.4))

$$p_{K,j}(f) := \sum_{|\alpha|=0}^j \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)|, \quad K \subseteq \Omega \text{ kompakt}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Für den stetigen linearen Operator  $P(D) : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  ist daher aufgrund des Satzes von Malgrange-Ehrenpreis 5.9 über die *Existenz einer Fundamentallösung* (vgl. auch Satz 5.3) Bedingung (14) erfüllt. Daher ist  $P(D)$  genau dann surjektiv, wenn auch Bedingung (15) erfüllt ist. Diese formulieren wir nun um:

**$P$ -konvexe offene Mengen.** a) Offenbar ist  $N(p_{K,j})^\perp = \mathcal{E}'(K)$  der Raum der Distributionen auf  $\Omega$  mit Träger in  $K$ , und  $\mathcal{E}(\Omega)'_{p_{K,j}}$  ist der Unterraum der Distributionen der Ordnung  $\leq j$  von  $\mathcal{E}'(K)$ . Wegen  $P(D)' = P(-D)$  lautet Bedingung (15) dann so:

$$\forall K \Subset \Omega \forall j \in \mathbb{N}_0 \exists K' \Subset \Omega \forall v \in \mathcal{E}'(\Omega) : P(-D)v \in \mathcal{E}(\Omega)'_{p_{K,j}} \Rightarrow \text{supp } v \subseteq K'. \quad (20)$$

b) Eine offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt  $P$ -konvex, falls

$$\forall K \Subset \Omega \exists K' \Subset \Omega \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \text{supp } P(-D)\varphi \subseteq K \Rightarrow \text{supp } \varphi \subseteq K'. \quad (21)$$

Aus (20) folgt offenbar (21). Es gilt auch die Umkehrung:

c) Für  $K \Subset \Omega$  gibt es  $\alpha > 0$ , sodass auch  $K_\alpha \Subset \Omega$  gilt. Zu  $K_\alpha$  wählen wir  $K'$  gemäß (21). Nun sei  $v \in \mathcal{E}'(\Omega)$  mit  $\text{supp } P(-D)v \subseteq K$ . Mit den Glättungsfunktionen  $\rho_\varepsilon$  aus (2.1) gilt dann  $\text{supp } P(-D)(\rho_\varepsilon * v) = \text{supp } (\rho_\varepsilon * P(-D)v) \subseteq K_\alpha$  für  $0 < \varepsilon < \alpha$ . Wegen (21) folgt daraus  $\text{supp } \rho_\varepsilon * v \subseteq K'$ , und mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergibt sich auch  $\text{supp } v \subseteq K'$ .

Wir haben nun das folgende Resultat aus [Malgrange 1955] bewiesen:

**Theorem 9.16 (Malgrange)**

Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge. Ein Differentialoperator  $P(D) : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  ist genau dann surjektiv, wenn  $\Omega$   $P$ -konvex ist.

B. Malgrange bewies dieses Resultat ohne Verwendung von Dualitätstheorie mittels der *Mittag-Leffler-Methode* 9.14, vgl. dazu Bemerkung b) auf S. 213.

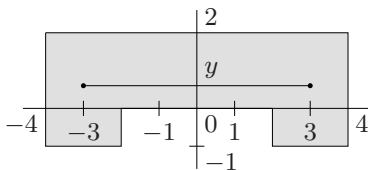


Abb. 9.1: Illustration der Beispiele

**Beispiele.** a) Wir untersuchen die Operatoren  $\frac{\partial}{\partial x}$  und  $\frac{\partial}{\partial y}$  auf dem Gebiet

$$\Omega := ((-4,4) \times (0,2)) \cup ((-4,-2) \times (-1,1)) \cup ((2,4) \times (-1,1))$$

(vgl. Abb. 9.1). Für  $f \in \mathcal{E}(\Omega)$  wird durch

$$u(x, y) := \int_1^y f(x, t) dt, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (22)$$

eine Lösung von  $\frac{\partial u}{\partial y} = f$  gegeben; der Operator  $\frac{\partial}{\partial y} : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  ist also *surjektiv*.

b) Nun wählen wir  $\eta \in \mathcal{D}(-1,1)$  mit  $\int_{-1}^1 \eta(x) dx > 0$  und definieren  $f \in \mathcal{E}(\Omega)$  durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{\eta(x)}{y} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad y \leq 0 \end{cases}. \text{ Für } u \in \mathcal{E}(\Omega) \text{ mit } \frac{\partial u}{\partial x} = f \text{ gilt dann}$$

$$u(3, y) - u(-3, y) = \int_{-3}^3 \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dx = \frac{1}{y} \int_{-3}^3 \eta(x) dx \quad \text{für } y > 0,$$

und es folgt  $u(3, y) - u(-3, y) \rightarrow \infty$  für  $y \rightarrow 0^+$  im Widerspruch zur Stetigkeit von  $u$  auf  $\Omega$ . Der Operator  $\frac{\partial}{\partial x} : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  ist also *nicht surjektiv*.

Wir zeigen nun mit Hilfe des *Satzes von Paley-Wiener* 3.9, dass *konvexe* offene Mengen stets  $P$ -konvex sind. Dazu benötigen wir zwei Hilfsaussagen:

**Lemma 9.17**

Es seien  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ,  $h \in \mathcal{H}(\overline{D})$  und  $P(z) = Az^m + \dots$  ein Polynom vom Grad  $m$ . Dann gilt

$$|Ah(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{it})h(e^{it})| dt \leq \sup_{|z|=1} |P(z)h(z)|. \quad (23)$$

BEWEIS. Für das Polynom  $Q(z) := z^m \overline{P}(\frac{1}{z})$  gilt  $Q(0) = \overline{A}$  und  $|Q(e^{it})| = |P(e^{it})|$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ ; daher folgt (23) aus der Cauchyschen Integralformel mittels

$$|Q(0)h(0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{Q(z)h(z)}{z} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Q(e^{it})h(e^{it})| dt. \quad \diamond$$

### Lemma 9.18

Für ein Polynom  $P \in \Pi_n^m$  vom Grad  $m \geq 1$  gibt es eine lineare Koordinatentransformation  $z = Sw$  des  $\mathbb{C}^n$ , sodass  $P(S(w_1, \dots, w_n)) = Aw_1^m + \dots$  mit  $A \neq 0$  gilt.

BEWEIS. Es gibt  $a \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  mit  $P_m(a) \neq 0$ . Wir wählen  $b_k \in \mathbb{C}^n$ , sodass die Matrix  $S := (a, b_2, \dots, b_n)$  regulär ist. Es folgt  $A := P_m(S(1, 0, \dots, 0)) = P_m(a) \neq 0$  und somit  $P_m(S(w_1, 0, \dots, 0)) = Aw_1^m$ .  $\diamond$

### Satz 9.19

Für einen Differentialoperator  $P(D)$  und eine Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\text{co}(\text{supp } \varphi) = \text{co}(\text{supp } P(D)\varphi). \quad (24)$$

BEWEIS. Die Inklusion „ $\supseteq$ “ ist klar. Für „ $\subseteq$ “ seien  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\psi := P(D)\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und  $K := \text{co}(\text{supp } \psi) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Nun sei  $\deg P = m$ ; nach Lemma 9.18 können wir die Koordinaten von  $\mathbb{C}^n$  so wählen, dass  $A \neq 0$  für den Koeffizienten von  $\zeta_1^m$  in  $P$  gilt. Lemma 9.17 liefert dann die Abschätzung

$$\begin{aligned} |A\widehat{\varphi}(\zeta)| &\leq \sup_{|z|=1} |P(\zeta_1 + z, \zeta_2, \dots, \zeta_n)\widehat{\varphi}(\zeta_1 + z, \zeta_2, \dots, \zeta_n)|, \quad \text{also} \\ |A\widehat{\varphi}(\zeta)| &\leq \sup_{|z|=1} |\widehat{\psi}(\zeta_1 + z, \zeta_2, \dots, \zeta_n)| \end{aligned} \quad (25)$$

wegen  $\widehat{\psi}(\zeta) = P(\zeta)\widehat{\varphi}(\zeta)$  aufgrund von Lemma 3.2. Nach dem Satz von Paley-Wiener gelten Abschätzungen (3.45)

$$|\widehat{\psi}(\zeta)| \leq C_j \langle \zeta \rangle^{-j} e^{H_K(\text{Im } \zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

für alle  $j \in \mathbb{N}_0$ , und wegen (25) gelten diese dann auch für  $\widehat{\varphi}$  (mit anderen  $C_j$ ). Der Satz von Paley-Wiener impliziert nun die Behauptung  $\text{supp } \varphi \subseteq K$ .  $\diamond$

**Folgerung.** Eine konvexe offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ist  $P$ -konvex für alle Polynome  $P \in \mathcal{P}_n$ .

Es gilt auch die folgende Umkehrung dieser Aussage (vgl. [Hörmander 1983b], 10.8.4): Ist ein Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$   $P$ -konvex für alle Polynome vom Grad 1, so muss  $\Omega$  konvex sein.

Für elliptische Operatoren  $P(D)$  dagegen ist jede offene Menge  $P$ -konvex. Dies beruht auf Theorem 5.20 und dem Identitätssatz für reell-analytische Funktionen:

**Satz 9.20**

Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  reell-analytisch. Gibt es  $x_0 \in \Omega$  mit  $\partial^\alpha f(x_0) = 0$  für alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ , so ist  $f = 0$ .

BEWEIS. Die Menge  $M := \{y \in \Omega \mid \partial^\alpha f(y) = 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$  ist nicht leer und wegen der Stetigkeit der Ableitungen  $\partial^\alpha f$  abgeschlossen in  $\Omega$ . Für  $y \in M$  gilt  $f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial^\alpha f(y)}{\alpha!} (x - y)^\alpha$  für  $x$  nahe  $y$ , und daher ist  $M$  auch offen in  $\Omega$ . Somit ist  $M = \Omega$ , da  $\Omega$  zusammenhängend ist.  $\diamond$

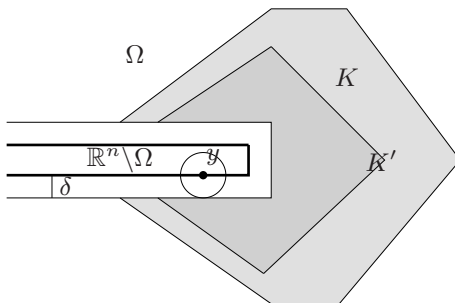
**Satz 9.21**

Es sei  $P(D)$  ein elliptischer Differentialoperator.

- a) Jede offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ist  $P$ -konvex.
- b) Für jede offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ist der Operator  $P(D) : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  surjektiv.

BEWEIS. a) Für eine kompakte Menge  $K \subseteq \Omega$  ist  $\delta := d(K, \partial\Omega) > 0$ , und die Menge  $K' := \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) \geq \delta\} \cap \text{co } K \subseteq \Omega$  ist ebenfalls kompakt (vgl. Abb. 9.2). Nun sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  mit  $\text{supp } P(-D)\varphi \subseteq K$ . Nach Satz 9.19 gilt  $\text{supp } \varphi \subseteq \text{co } K$ . Für  $y \in \partial\Omega$  gilt  $P(-D)\varphi = 0$  in  $U_\delta(y)$ . Da auch  $P(-D)$  elliptisch ist, ist  $\varphi$  in  $U_\delta(y)$  reell-analytisch nach Theorem 5.20. Wegen  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  ist  $\varphi = 0$  nahe  $y \in \partial\Omega$ , und der Identitätssatz 9.20 impliziert  $\varphi = 0$  in  $U_\delta(y)$ . Somit gilt  $\text{supp } \varphi \subseteq K'$ .

b) folgt sofort aus a) und dem Satz von Malgrange 9.16.  $\diamond$



**Abb. 9.2:** Illustration des Beweises

Umgekehrt muss ein Differentialoperator  $P(D)$  elliptisch sein, wenn jede offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$   $P$ -konvex ist. Dazu sei auf [Hörmander 1983b], 10.8 verwiesen; dort wird auch die geometrische Bedeutung der  $P$ -Konvexität genauer untersucht.

Wir notieren einen wichtigen Spezialfall von Satz 9.21:

**Satz 9.22**

Der Cauchy-Riemann-Operator  $\bar{\partial} : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  ist über jeder offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  surjektiv.



Aus Satz 9.22 lässt sich der Satz von Mittag-Leffler 9.15 folgern, vgl. Satz 10.13 auf S. 244. Umgekehrt liefert die Mittag-Leffler-Methode 9.14 die folgende Erweiterung von Satz 9.22:

**Satz 9.23**

Der Cauchy-Riemann-Operator  $\bar{\partial} : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  ist über jeder offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  surjektiv.

BEWEIS. Mit einer relativ kompakten Ausschöpfung  $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  von  $\Omega$  wie in (1.2) erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}(\Omega_n) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega_n) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{D}'(\Omega_n) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}(\Omega_{n+1}) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega_{n+1}) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{D}'(\Omega_{n+1}) \end{array}$$

wie in Theorem 9.14. Nach Satz 5.3 ist Bedingung (17) erfüllt, und der Approximationssatz von Runge liefert (18). Die Behauptung folgt nun aus Theorem 9.14.  $\diamond$

**Bemerkungen.** a) Wegen der Hypoelliptizität von  $\bar{\partial}$  ist Satz 9.22 ein Spezialfall von Satz 9.23, ergibt sich aber auch genauso wie dieser aus Theorem 9.14.

b) Allgemeiner lässt sich auch Theorem 9.16 mit der Mittag-Leffler-Methode 9.14 beweisen. Dazu benötigt man, dass das projektive Spektrum der Kerne

$$N_{\Omega_n}(P(D)) := \{f \in \mathcal{E}(\Omega_n) \mid P(D)f = 0\}$$

von  $P(D)$  für  $P$ -konvexes  $\Omega$  *dicht* ist. Für einen Beweis dieser Verallgemeinerung des Satzes von Runge sei auf [Hörmander 1983b], 10.5 verwiesen, vgl. auch die Aufgaben 9.7 und 9.8.

c) Mittels b) ergibt sich auch die Surjektivität von  $P(D) : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  über  $P$ -konvexen offenen Mengen  $\Omega$  für *hypoelliptische* Operatoren  $P(D)$  wie in Satz 9.23.

d) Allgemein ist ein Operator  $P(D) : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  nach L. Hörmander (1962) genau dann surjektiv, wenn  $\Omega$   $P$ -konvex ist und zusätzlich eine zu (21) analoge Bedingung für *singuläre Träger*

$$\text{singsupp } u := \Omega \setminus \{x \in \Omega \mid u \in C^\infty \text{ nahe } x\}, \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

gilt, vgl. dazu [Hörmander 1983b], 10.7, und [Wengenroth 2003], 3.4.5. Für *hypoelliptische* Operatoren ist natürlich  $\text{singsupp } P(D)u = \text{singsupp } u$ . *Konvexe* offene Mengen  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  sind stets auch  $P$ -konvex für singuläre Träger, und nach [Kalmes 2011] folgt im Fall  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  diese Eigenschaft bereits aus der  $P$ -Konvexität (21) für Träger.

**Differentialoperatoren in lokalen Sobolev-Räumen.** a) Für eine offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , ein Polynom  $P \in \mathcal{P}_n$  und  $s \in \mathbb{R}$  betrachten wir den Differentialoperator  $P(D)$  im lokalen Sobolev-Raum  $H^{s,\text{loc}}(\Omega)$  mit Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(P(D)) = \{u \in H^{s,\text{loc}}(\Omega) \mid P(D)u \in H^{s,\text{loc}}(\Omega)\}.$$

Wegen der Stetigkeit von  $P(D) : H^{s,\text{loc}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  ist  $P(D)$  ein abgeschlossener Operator in  $H^{s,\text{loc}}(\Omega)$ , und wegen  $\mathcal{E}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}(P(D))$  ist  $P(D)$  auch dicht definiert.

b) Wir zeigen  $H^{s,\text{loc}}(\Omega)'_{\beta} \simeq H_c^{-s}(\Omega)$  im folgenden Satz 9.24; der *duale Operator* zu  $P(D)$  ist daher der Operator  $P(-D)$  in  $H_c^{-s}(\Omega)$  mit Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(P(-D)) = \{v \in H_c^{-s}(\Omega) \mid P(-D)v \in H_c^{-s}(\Omega)\}.$$

c) Für eine offene Menge  $\omega \Subset \Omega$  ist  $2\delta := d(\bar{\omega}, \partial\Omega) > 0$ . Wir definieren die Funktionenmenge  $\mathcal{F}_{\omega} := \{\eta \in \mathcal{D}(\bar{\omega}_{\delta}) \mid \eta = 1 \text{ nahe } \bar{\omega}\}$  und die Halbnorm

$$p_{\omega}(u) := \inf \{\|\eta u\|_s \mid \eta \in \mathcal{F}_{\omega}\}, \quad u \in H^{s,\text{loc}}(\Omega), \quad (26)$$

auf  $H^{s,\text{loc}}(\Omega)$ ; wegen Lemma 4.12 ist dann  $\{p_{\omega} \mid \omega \Subset \Omega\}$  ein Fundamentalsystem von Halbnormen auf diesem Raum.

### Satz 9.24

a) Die Einschränkung eines Funktionals aus  $H^{s,\text{loc}}(\Omega)'$  auf  $\mathcal{E}(\Omega)$  liefert eine Isomorphie von  $H^{s,\text{loc}}(\Omega)'_{\beta}$  auf  $H_c^{-s}(\Omega)$ .

b) Für  $\omega \Subset \Omega$  gilt  $H^{s,\text{loc}}(\Omega)'_{p_{\omega}} = N_{p_{\omega}}^{\perp} = H_c^{-s}(\bar{\omega})$ .

BEWEIS. ① Für  $v \in H_c^{-s}(\Omega)$  gibt es  $\omega \Subset \Omega$  mit  $v \in H_c^{-s}(\bar{\omega})$ . Für  $\phi \in \mathcal{E}(\Omega)$  und  $\eta \in \mathcal{F}_{\omega}$  gilt dann (vgl. Satz 4.8)  $|v(\phi)| = |v(\eta\phi)| \leq \|v\|_{H^{-s}} \|\eta\phi\|_{H^s}$ , also  $|v(\phi)| \leq \|v\|_{H^{-s}} p_{\omega}(\phi)$ . Somit lässt sich  $v$  auf eindeutige Weise zu einem linearen Funktional in  $H^{s,\text{loc}}(\Omega)'_{p_{\omega}} \subseteq H^{s,\text{loc}}(\Omega)'$  erweitern.

② Umgekehrt sei nun  $w \in H^{s,\text{loc}}(\Omega)'_{p_{\omega}}$  und  $v$  die Einschränkung von  $w$  auf  $\mathcal{E}(\Omega)$ . Aus  $|v(\phi)| \leq C p_{\omega}(\phi)$  für  $\phi \in \mathcal{E}(\Omega)$  folgt sofort  $\text{supp } v \subseteq \bar{\omega}$ . Für  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gilt mit einem festen  $\eta \in \mathcal{F}_{\omega}$

$$|v(\psi)| \leq C p_{\omega}(\psi) \leq C \|\eta\psi\|_{H^s} \leq C'(\eta) \|\psi\|_{H^s}$$

aufgrund von (4.12), und aus Satz 4.8 folgt  $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ .

③ Nun sind a) und  $H^{s,\text{loc}}(\Omega)'_{p_{\omega}} = H_c^{-s}(\bar{\omega})$  gezeigt; die Inklusion  $H^{s,\text{loc}}(\Omega)'_{p_{\omega}} \subseteq N_{p_{\omega}}^{\perp}$  ist klar. Für  $v \in H_c^{-s}(\Omega)$  mit  $\text{supp } v \not\subseteq \bar{\omega}$  gibt es  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  mit  $\varphi = 0$  nahe  $\bar{\omega}$  und  $v(\varphi) \neq 0$ , und daher ist  $v \notin N_{p_{\omega}}^{\perp}$ .  $\diamond$

Wir erhalten nun die folgende Version des Satzes von Malgrange:

**Theorem 9.25**

Es seien  $P \in \mathcal{P}_n$  ein Polynom und  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge. Für  $s \in \mathbb{R}$  existiert genau dann zu jedem  $f \in H^{s,\text{loc}}(\Omega)$  ein  $u \in H^{s,\text{loc}}(\Omega)$  mit  $P(D)u = f$ , wenn  $\Omega$   $P$ -konvex ist.

BEWEIS. Für den Differentialoperator  $P(D)$  in  $H^{s,\text{loc}}(\Omega)$  ist aufgrund von Satz 5.10 Bedingung (14) erfüllt. Bedingung (15) lautet

$$\forall K \Subset \Omega \exists K' \Subset \Omega \forall v \in H_c^{-s}(\Omega) : \text{supp } P(-D)v \subseteq K \Rightarrow \text{supp } v \subseteq K'$$

aufgrund von Satz 9.24, und ihre Äquivalenz zur  $P$ -Konvexität (21) von  $\Omega$  ergibt sich wie auf S. 209.  $\diamond$

Mittels Aussage (5.33) lassen sich auch Lösungen mit „besseren“ Regularitätseigenschaften konstruieren, vgl. [Hörmander 1983b], Theorem 10.6.7. Für einen *elliptischen* Operator  $P(D)$  der Ordnung  $m \in \mathbb{N}$  ergeben sich solche sofort aus Satz 5.18: Jede Lösung von  $P(D)u = f \in H^{s,\text{loc}}(\Omega)$  liegt in  $H^{s+m,\text{loc}}(\Omega)$ . In Verbindung mit Satz 9.21 ergibt sich somit:

**Theorem 9.26**

Es sei  $P(D)$  ein elliptischer Differentialoperator mit  $\deg P = m$ . Für jede offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  und alle  $s \in \mathbb{R}$  ist dann  $P(D) : H^{s+m,\text{loc}}(\Omega) \rightarrow H^{s,\text{loc}}(\Omega)$  ein surjektiver stetiger linearer Operator.

Für weitere Untersuchungen zur normalen Auflösbarkeit linearer Differentialoperatoren, auch mit *variablen* Koeffizienten, sei auf [Sagraloff 1980] oder [Mennicken 1983] verwiesen.

## 9.5 Stetige Lösungsoperatoren

In diesem Kapitel haben wir eine Reihe von *Kriterien* für die *Existenz von Lösungen* einer linearen Gleichung  $\sigma x = y$  hergeleitet, wobei die Lösungen i. A. *nicht eindeutig* sind. Eine weitere wichtige Frage ist die nach der *Stabilität* von Lösungen gegen kleine Störungen der Daten. Natürlich kann diese nicht erwartet werden, wenn (nicht eindeutige) Lösungen willkürlich ausgewählt werden; die Frage lautet daher, ob man Stabilität durch eine geeignete *Auswahl von Lösungen* erreichen kann. Insbesondere suchen wir zu einer surjektiven Abbildung  $\sigma : E \rightarrow Q$  *Rechtsinverse* bzw. *Lösungsoperatoren*  $R : Q \rightarrow E$  mit  $\sigma R y = y$  für  $y \in Q$  und gewissen *Regularitätseigenschaften*.

Zu einer *linearen* Surjektion  $\sigma : E \rightarrow Q$  von Vektorräumen gibt es stets einen *linearen* Lösungsoperator. Wir zeigen nun, dass zu einer *stetigen linearen* Surjektion  $\sigma \in L(E, Q)$  von *Frécheträumen* stets ein *stetiger* Lösungsoperator  $R : Q \rightarrow E$  existiert. Dieses Resultat folgt aus einem *Auswahlsatz* von E. Michael (1956) und wurde für Banachräume bereits 1952 von R.G. Bartle und R.M. Graves gezeigt.

Auf die Frage nach der Existenz eines *stetigen und linearen* Lösungsoperators gehen wir in den folgenden Abschnitten und in Kapitel 12 ein.

**Mengenwertige Abbildungen.** a) Es seien  $M, E$  topologische Räume. Eine Abbildung  $\alpha : M \rightarrow 2^E$  von  $M$  in die Potenzmenge von  $E$  heißt *unterhalbstetig*, wenn für jede offene Menge  $D$  in  $E$  die Menge  $\alpha^{-1}(D) := \{t \in M \mid \alpha(t) \cap D \neq \emptyset\}$  in  $M$  offen ist.

b) Für eine Quotientenabbildung  $\sigma : E \rightarrow Q$  lokalkonvexer Räume ist die mengenwertige Abbildung  $\alpha := \sigma^{-1} : Q \rightarrow 2^E$  unterhalbstetig; für eine offene Menge  $D \subseteq E$  ist in der Tat  $\alpha^{-1}(D) = \sigma D$  offen in  $Q$ .

**Theorem 9.27 (Auswahlsatz von Michael)**

Es seien  $M$  ein parakompakter topologischer Raum,  $E$  ein Fréchetraum und  $\alpha : M \rightarrow 2^E$  unterhalbstetig, sodass  $\alpha(t)$  für alle  $t \in M$  konvex und abgeschlossen in  $E$  ist. Dann gibt es eine stetige Funktion  $\rho : M \rightarrow E$  mit  $\rho(t) \in \alpha(t)$  für alle  $t \in M$ .

BEWEIS. a) Wir konstruieren zuerst *approximative* stetige Auswahlen zu  $\alpha$ . Dazu sei  $U \in \mathfrak{U}(E)$  offen und absolutkonvex. Für  $\tau \in M$  wählen wir  $\psi(\tau) \in \alpha(\tau)$ . Die Menge

$$\begin{aligned} V(\tau) &:= \{t \in M \mid \psi(\tau) \in \alpha(t) + U\} = \{t \in M \mid (\psi(\tau) - U) \cap \alpha(t) \neq \emptyset\} \\ &= \alpha^{-1}(\psi(\tau) - U) \end{aligned}$$

ist offen in  $M$ , da  $\alpha$  unterhalbstetig ist. Da der Raum  $M$  parakompakt ist, gibt es eine einer lokalendlichen Verfeinerung der offenen Überdeckung  $\{V(\tau)\}_{\tau \in M}$  von  $M$  untergeordnete stetige Zerlegung der Eins  $\{\varphi_j\}_{j \in J}$  mit  $\text{supp } \varphi_j \subseteq V(\tau_j)$  für geeignete  $\tau_j \in M$  (vgl. S. 35). Durch

$$\eta(t) := \sum_{j \in J} \varphi_j(t) \psi(\tau_j), \quad t \in M$$

wird eine stetige Funktion  $\eta : M \rightarrow E$  definiert. Im Fall  $\varphi_j(t) \neq 0$  gilt dann  $\psi(\tau_j) \in \alpha(t) + U$ , und wegen der Konvexität dieser Menge folgt  $\eta(t) \in \alpha(t) + U$ .

b) Nun sei  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ein wachsendes Fundamentalsystem von Halbnormen auf  $E$ . Wir setzen  $U_n := U_{p_n, 2^{-n}} = \{x \in E \mid p_n(x) < 2^{-n}\}$  und konstruieren rekursiv stetige Funktionen  $\rho_n : M \rightarrow E$  mit

$$\rho_n(t) \in \alpha(t) + U_n \quad \text{und} \quad p_n(\rho_{n+1}(t) - \rho_n(t)) \leq 2^{-n+1} \quad \text{für } t \in M : \quad (27)$$

Die Konstruktion von  $\rho_1$  ergibt sich sofort aus a). Sind  $\rho_1, \dots, \rho_n : M \rightarrow E$  mit (27) bereits konstruiert, so sind die Mengen  $\alpha_n(t) := (\rho_n(t) + U_n) \cap \alpha(t)$  für  $t \in M$  nicht leer und konvex. Wir zeigen, dass  $\alpha_n$  unterhalbstetig ist:

c) Es sei  $D \subseteq E$  offen und  $\tau \in M$  mit  $\alpha_n(\tau) \cap D \neq \emptyset$ . Wir wählen  $\psi(\tau) \in \alpha_n(\tau) \cap D$ ; dann gilt  $\psi(\tau) \in \alpha(\tau)$  und  $p_n(\psi(\tau) - \rho_n(\tau)) = 2^{-n} - 2\varepsilon$  mit  $\varepsilon > 0$ . Nun wählen wir  $W \in \mathfrak{U}(E)$  offen und absolutkonvex mit  $W \subseteq U_{p_n, \varepsilon}$  und  $\psi(\tau) + W \subseteq D$ . Die Menge

$$S := \{t \in M \mid \psi(\tau) \in \alpha(t) + W\} \cap \{t \in M \mid \psi(\tau) \in \rho_n(t) + U_{p_n, 2^{-n}-\varepsilon}\}$$

ist offen in  $M$ , da  $\alpha$  unterhalbstetig ist. Für  $t \in S$  gilt dann  $\psi(\tau) = \psi(t) + w = \rho_n(t) + v$  mit  $\psi(t) \in \alpha(t)$ ,  $w \in W$  und  $v \in U_{p_n, 2^{-n-\varepsilon}}$ . Daraus ergeben sich sofort  $\psi(t) \in \alpha(t) \cap (\rho_n(t) + U_n) = \alpha_n(t)$  und  $\psi(t) \in \psi(\tau) + W \subseteq D$ , also auch  $\alpha_n(t) \cap D \neq \emptyset$ .

d) Nach a) gibt es eine stetige Funktion  $\rho_{n+1} : M \rightarrow E$  mit  $\rho_{n+1}(t) \in \alpha_n(t) + U_{n+1}$  für  $t \in M$ . Dies bedeutet insbesondere  $\rho_{n+1}(t) \in \alpha(t) + U_{n+1}$  sowie

$$\rho_{n+1}(t) \in \rho_n(t) + U_n + U_{n+1} \subseteq \rho_n(t) + 2U_n,$$

und damit ist (27) bewiesen. Somit ist die Folge  $(\rho_n)$  auf  $M$  gleichmäßig konvergent. Die Grenzfunktion  $\rho : M \rightarrow E$  ist stetig, und für  $t \in M$  gilt  $\rho(t) \in \alpha(t) + \overline{U_n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , also  $\rho(t) \in \overline{\alpha(t)} = \alpha(t)$ .  $\diamond$

Aus dem Auswahlssatz von Michael ergibt sich sofort:

### Satz 9.28

Es sei  $\sigma : E \rightarrow Q$  eine Surjektion von Frécheträumen.

a) Es gibt einen stetigen Lösungsoperator  $R : Q \rightarrow E$ , für den also  $\sigma(R(y)) = y$  für alle  $y \in Q$  gilt.

b) Für einen topologischen Raum  $M$  gibt es zu jeder stetigen Funktion  $f \in \mathcal{C}(M, Q)$  ein Lifting  $f^\vee \in \mathcal{C}(M, E)$  mit  $\sigma f^\vee(t) = f(t)$  für alle  $t \in M$ .

BEWEIS. a) Wir können Theorem 9.27 auf die unterhalbstetige Abbildung  $\sigma^{-1} : Q \rightarrow 2^E$  anwenden, da die Werte von  $\sigma^{-1}$  abgeschlossene affine Unterräume von  $E$  sind.

b) Wir setzen einfach  $f^\vee := R \circ f$ .  $\diamond$

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & f^\vee \nearrow & \downarrow \sigma \\ M & \xrightarrow{f} & Q \end{array}$$

Satz 9.28 gilt insbesondere für surjektive Differentialoperatoren  $P(D) : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ .

Im nächsten Kapitel lösen wir entsprechende Lifting-Probleme auch für holomorphe Funktionen und  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen.

Satz 9.28 gilt nicht für Quotientenabbildungen beliebiger lokalkonvexer Räume, vgl. dazu Aufgabe 12.3. Andererseits gibt es im Fall von *Banachräumen* sogar einen *stetigen, homogenen* und „beschränkten“ Lösungsoperator:

### Theorem 9.29 (Bartle und Graves)

Es sei  $\sigma : X \rightarrow Q$  eine Quotientenabbildung von Banachräumen. Zu  $\lambda > 1$  gibt es eine stetige Rechtsinverse  $R : Q \rightarrow E$  zu  $\sigma$  mit  $R(\alpha y) = \alpha R(y)$  für  $\alpha \in \mathbb{K}$  und  $y \in Q$  sowie

$$\|R(y)\| \leq \lambda \|y\| \quad \text{für alle } y \in Q. \quad (28)$$

BEWEIS. a) Wir betrachten die Einheitssphäre  $S$  von  $Q$  und für  $y \in S$  die in  $E$  abgeschlossenen und konvexen Mengen

$$\alpha(y) := \sigma^{-1}(y) \cap \overline{U}_\lambda = \{x \in E \mid \sigma x = y \text{ und } \|x\| \leq \lambda\}.$$

Die Abbildung  $\alpha : S \rightarrow 2^E$  ist unterhalbstetig, und nach dem Auswahlssatz von Michael gibt es eine stetige Abbildung  $\rho : S \rightarrow E$  mit  $\rho(y) \in \alpha(y)$  für alle  $y \in S$ . Dies bedeutet  $\sigma\rho(y) = y$  und  $\|\rho(y)\| \leq \lambda$  für alle  $y \in S$ .

b) Durch  $\rho(0) := 0$  und  $\rho(y) := \|y\| \rho(\frac{y}{\|y\|})$  für  $y \neq 0$  wird nun eine stetige Rechtsinverse  $\rho : Q \rightarrow E$  von  $\sigma$  mit (28) definiert, die *positiv* homogen ist, also  $\rho(ty) = t\rho(y)$  für  $t \geq 0$  erfüllt. Eine entsprechende *homogene* Rechtsinverse ist dann im reellen bzw. komplexen Fall gegeben durch

$$R(y) := \frac{1}{2} (\rho(y) - \rho(-y)) \quad \text{bzw.} \quad R(y) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it} \rho(e^{it}y) dt;$$

die Definition des Integrals holen wir in Formel (10.13) auf S. 238 nach.  $\diamond$

In [Bartle und Graves 1952] werden auch *variable* Surjektionen zwischen Banachräumen untersucht; darauf gehen wir in Theorem 13.29 ein.

Zu Quotientenabbildungen  $\sigma : E \rightarrow Q$  von Frécheträumen existiert i. A. *kein* Lösungsoperator mit einer Abschätzung wie (28), da beschränkte Mengen in  $Q$  i. A. nicht zu beschränkten Mengen in  $E$  geliftet werden können (vgl. die Bemerkung nach Satz 8.25 auf S. 185).

## 9.6 Stetige lineare Lösungsoperatoren und Projektionen

Wir beginnen nun mit einer Untersuchung des interessanten und schwierigen Problems, wann es zu einer Surjektion  $\sigma \in L(E, Q)$  lokalkonvexer Räume einen *stetigen und linearen* Lösungsoperator  $R \in L(Q, E)$  gibt. Zunächst formulieren wir das Problem um und diskutieren dazu wie in [GK], Abschnitt 9.5

**Projektionen.** a) Es sei  $E$  ein lokalkonvexer Raum. Ein stetiger linearer Operator  $P \in L(E)$  heißt *Projektion*, falls  $P^2 = P$  gilt. In diesem Fall ist auch  $I - P$  eine Projektion wegen  $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$ .

b) Für *alle* linearen Operatoren  $P \in L(E)$  ist offenbar

$$R(P) + R(I - P) = E \quad \text{und} \quad N(P) \cap N(I - P) = \{0\}.$$

Für eine Projektion gilt wegen  $P = P^2$

$$y \in R(P) \Leftrightarrow \exists x \in E : y = Px = P^2x \Leftrightarrow y = Py \Leftrightarrow y \in N(I - P).$$

Somit ist  $R(P) = N(I - P)$  *abgeschlossen*. Weiter ist  $N(P) = R(I - P)$  und daher

$$E = R(P) \oplus N(P).$$

c) Nun gelte umgekehrt  $E = G \oplus H$  mit Unterräumen  $G$  und  $H$  von  $E$ . Für die Abbildung  $P : y \oplus z \mapsto y$  gilt dann  $P^2 = P$ ,  $R(P) = G$  und  $N(P) = H$ ;  $P$  ist also die *lineare Projektion* von  $E$  auf  $G$  entlang  $H$ . Ist  $P$  stetig, so heißen  $G$  und  $H$  *stetig projiziert*; die direkte Summe  $G \oplus H$  heißt dann *topologisch direkt*, und wir schreiben

$$E = G \oplus_t H. \quad (29)$$

Nach b) müssen in diesem Fall  $G$  und  $H$  *abgeschlossene* Unterräume von  $E$  sein. Umgekehrt liefert der Graphensatz:

**Satz 9.30**

*Ein ultrabornologischer Raum mit Gewebe  $E = G \oplus H$  sei die direkte Summe der abgeschlossenen Unterräume  $G$  und  $H$ . Dann ist die Summe topologisch direkt, und es gilt  $E \simeq G \times H$ .*

BEWEIS. Mit  $E$  besitzen auch  $G$ ,  $H$  und  $G \times H$  ein Gewebe (vgl. Satz 7.24). Die lineare Abbildung

$$T : G \times H \rightarrow E, \quad T(y, z) := y + z,$$

ist bijektiv und stetig, und nach Theorem 7.23 ist dann auch  $T^{-1} : E \rightarrow G \times H$  stetig. Offenbar ist die Projektion  $\rho_1 : (y, z) \mapsto y$  von  $G \times H$  auf  $G$  stetig, und dies gilt dann auch für  $P = \rho_1 T^{-1} : E \rightarrow G$ .  $\diamond$

Die in Satz 9.30 an  $E$  gemachten Voraussetzungen gelten für Frécheträume, für folgenvollständige bornologische  $(DF)$ -Räume oder auch für die Räume  $\mathcal{D}(\Omega)$  und  $\mathcal{D}'_\beta(\Omega)$  (vgl. Kapitel 7 und Satz 9.33).

**Stetig projizierte Unterräume.** a) Nach dem Satz von Hahn-Banach ist ein *endlichdimensionaler* Unterraum eines lokalkonvexen Raumes stets stetig projiziert, vgl. Aufgabe 9.13 oder [GK], Satz 9.18.

b) Aufgrund von Satz 9.30 nennt man einen stetig projizierten Unterraum eines ultrabornologischen Raumes mit Gewebe auch *komplementiert*.

c) *Orthogonale* Summen in Hilberträumen sind stets topologisch direkt; dort ist also *jeder* abgeschlossene Unterraum komplementiert. In Banachräumen ist dies i. A. nicht der Fall, ein Gegenbeispiel ist etwa der Unterraum  $c_0$  der Nullfolgen des Raumes  $\ell_\infty$  aller beschränkten Folgen (vgl. [Meise und Vogt 1992], 10.15).

d) Nach [Lindenstrauß und Tzafriri 1973], S. 221 muss ein Banachraum, in dem *alle* abgeschlossenen Unterräume komplementiert sind, zu einem *Hilbertraum isomorph* sein.

e) Nach [Gowers und Maurey 1993] gibt es einen unendlichdimensionalen Banachraum  $X$ , in dem aus  $X = G \oplus_t H$  stets  $\dim G < \infty$  oder  $\dim H < \infty$  folgt.

Den Zusammenhang zwischen stetigen linearen Lösungsoperatoren und stetigen Projektionen formulieren wir so:

**Satz 9.31**

Für eine kurze topologisch exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\sigma} Q \longrightarrow 0 \quad (S)$$

lokalkonvexer Räume sind äquivalent:

(a)  $\sigma$  besitzt eine stetige lineare Rechtsinverse  $R \in L(Q, E)$ .

(b) Der Raum  $N(\sigma) = R(\iota)$  ist stetig projiziert in  $E$ .

(c)  $\iota$  besitzt eine stetige lineare Linksinverse  $L \in L(E, G)$ .

Ist dies der Fall, so gilt  $E \simeq G \times Q$ .

BEWEIS. „(a)  $\Rightarrow$  (b)“: Es ist  $P := R\sigma \in L(E)$  wegen  $P^2 = R\sigma R\sigma = R\sigma = P$  eine stetige Projektion mit  $N(\sigma) = N(P)$ , und daher ist  $I - P$  eine stetige Projektion von  $E$  auf  $N(\sigma)$ .

„(b)  $\Rightarrow$  (a)“: Es sei  $E = N(\sigma) \oplus H$ . Dann ist  $\sigma|_H : H \rightarrow Q$  eine bijektive topologische Isomorphie, da ja  $\sigma$  stetig und offen ist. Durch  $R : y \mapsto (\sigma|_H)^{-1}y$  wird dann ein Operator  $R \in L(Q, E)$  mit  $\sigma R = I_Q$  definiert.

„(b)  $\Rightarrow$  (c)“: Es sei  $P \in L(E)$  eine Projektion auf  $R(\iota)$ . Mit der Umkehrabbildung  $\iota^{-1}$  von  $\iota : G \rightarrow R(\iota)$  setzen wir einfach  $L = \iota^{-1}P \in L(E, G)$ . Offenbar gilt dann  $L\iota y = y$  für  $y \in G$ .

„(c)  $\Rightarrow$  (b)“: Es ist  $P = \iota L \in L(E)$  wegen  $P^2 = \iota L \iota L = \iota L = P$  eine stetige Projektion mit  $R(P) \subseteq R(\iota)$  und  $P(\iota y) = \iota L \iota y = \iota y$  für  $\iota y \in R(\iota)$ .

Gelten (a)–(c), so ist  $E = N(\sigma) \oplus H \simeq G \times Q$  nach dem Beweis von „(b)  $\Rightarrow$  (a)“.  $\diamond$

**Beispiele.** a) Nach dem Satz von Borel 9.12 wird durch  $\beta : f \mapsto (f^{(j)}(0))_{j \in \mathbb{N}_0}$  eine stetige lineare Surjektion von  $\mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R})$  auf  $\omega$  definiert. Gibt es einen stetigen linearen Lösungsoperator zu  $\beta$ , so ist  $\omega$  nach Satz 9.31 zu einem Unterraum von  $\mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R})$  isomorph. Dies ist jedoch unmöglich, da auf  $\omega$  keine stetige Norm existiert.

b) Für ein Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  liefert der Interpolationssatz 9.13 eine stetige lineare Surjektion  $T : \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \omega$ . Da auch auf dem Fréchetraum  $\mathcal{H}(\Omega)$  stetige Normen existieren, gibt es auch zu  $T$  keinen stetigen linearen Lösungsoperator.

Als weitere Beispiele diskutieren wir Räume  $\mathcal{D}(\Omega) = \text{ind}_j \mathcal{D}(\overline{\Omega}_j)$  von Testfunktionen und  $\mathcal{D}'_\beta(\Omega) = \text{proj}_j \mathcal{D}'_\beta(\overline{\Omega}_j)$  von Distributionen (vgl. Aufgabe 7.11); hierbei ist  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\{\Omega_j\}$  eine relativ kompakte Ausschöpfung von  $\Omega$  wie in (1.3). Mit  $i_j : \mathcal{D}(\overline{\Omega}_j) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$  bezeichnen wir Inklusionen, mit  $\rho_j = i'_j : \mathcal{D}'_\beta(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'_\beta(\overline{\Omega}_j)$  Restriktionen. Mittels einer der offenen Überdeckung  $\{\Omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  von  $\Omega$  untergeordneten  $C^\infty$ -Zerlegung der Eins  $\{\alpha_j\}$  können wir die Sätze 7.10 und 7.9 verschärfen:



**Satz 9.32**

a) Die Quotientenabbildung  $\sigma : \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{D}(\overline{\Omega}_j) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\sigma(\varphi_j) := \sum_{j=1}^{\infty} i_j \varphi_j$ , besitzt eine stetige lineare Rechtsinverse.

a) Die Inklusion  $\Phi : \mathcal{D}'_{\beta}(\Omega) \rightarrow \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{D}'_{\beta}(\overline{\Omega}_j)$ ,  $\Phi(\varphi) := (\rho_j \varphi)_{j \in \mathbb{N}}$ , besitzt eine stetige lineare Linksinverse.

BEWEIS. a) Wir setzen einfach  $R\varphi = (\alpha_j \varphi)_{j \in \mathbb{N}}$  für  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

b) Wir setzen einfach  $L(\varphi_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j$  für  $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{D}'_{\beta}(\overline{\Omega}_j)$ .  $\diamond$

Satz 9.32 wurde von D. Keim (1973) allgemeiner für *induktive* bzw. *projektive Limiten* mit (abstrakter) *Zerlegung der Eins* im Sinne von M. De Wilde (1971) gezeigt.

Es folgen zwei Anwendungen dieses Resultats. Aussage a) ergibt sich wegen der Reflexivität von  $\mathcal{D}(\Omega)$  auch aus Aussage b) und Satz 7.12 b).

**Satz 9.33**

a) Der Raum  $\mathcal{D}(\Omega)$  der Testfunktionen auf  $\Omega$  ist vollständig.

b) Der Raum  $\mathcal{D}'_{\beta}(\Omega)$  der Distributionen auf  $\Omega$  ist ultrabornologisch.

BEWEIS. a) Nach Satz 9.32 und Satz 9.31 ist  $\mathcal{D}(\Omega)$  zu einem abgeschlossenen (sogar komplementierten) Unterraum von  $\bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{D}(\overline{\Omega}_j)$  isomorph, und dieser Raum ist vollständig nach Satz 7.19.

b) Nach Satz 9.32 und Satz 9.31 ist  $\mathcal{D}'_{\beta}(\Omega)$  zu einem Quotientenraum von  $\prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{D}'_{\beta}(\overline{\Omega}_j)$  isomorph. Da  $\mathcal{D}(\overline{\Omega}_j)$  reflexiv (sogar ein Montelraum) ist, ist  $\mathcal{D}'_{\beta}(\overline{\Omega}_j)$  ultrabornologisch nach Satz 8.22. Nach Satz 7.16 gilt dies dann auch für  $\prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{D}'_{\beta}(\overline{\Omega}_j)$  und schließlich für  $\mathcal{D}'_{\beta}(\Omega)$  nach Satz 7.15.  $\diamond$

Nun diskutieren wir das Problem, wann ein *surjektiver linearer Differentialoperator*  $P(D) : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  einen *stetigen linearen Lösungsoperator* besitzt.

**Wellenoperatoren.** a) Der Differentialoperator  $\diamond := \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} : \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$  ist surjektiv. Durch

$$(R\phi)(x, y) := \int_0^x \int_0^y \phi(u, v) dv du, \quad \phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2), \quad (30)$$

wird offenbar ein stetiger linearer Lösungsoperator  $R \in L(\mathcal{E}(\mathbb{R}^2))$  definiert.

b) Zur Untersuchung des *Wellenoperators*  $\square := \partial_t^2 - c^2 \partial_x^2$  in einer Raumdimension verwenden wir die lineare Koordinatentransformation  $A : (x, t) \mapsto (\frac{1}{2}(ct + x), \frac{1}{2c}(ct - x))$  aus (5.24). Durch  $S\phi := \phi \circ A$  ist ein Isomorphismus in  $L(\mathcal{E}(\mathbb{R}^2))$  gegeben mit  $S^{-1}\phi = \phi \circ A^{-1}$ , und es gilt  $\square = cS^{-1}\diamond S$ . Somit ist  $\frac{1}{c}S^{-1}RS \in L(\mathcal{E}(\mathbb{R}^2))$  ein stetiger linearer Lösungsoperator für den Wellenoperator.

c) Nach Satz 5.7 besitzt  $\square$  eine *Fundamentallösung* mit Träger in einem *Kegel*, der in einem *Halbraum*  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  enthalten ist. Daraus ergibt sich, dass  $\square$  ein *Isomorphismus* auf dem Raum  $\mathcal{E}(H) := \{\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) \mid \text{supp } \phi \subseteq H\}$  ist (eindeutige Lösbarkeit des *Cauchy-Problems*), und damit lässt sich ebenfalls ein stetiger linearer Lösungsoperator für  $\square$  konstruieren (vgl. Aufgabe 9.11). Diese Argumentation gilt auch für den Wellenoperator in  $n$  Raumdimensionen und allgemeiner für *hyperbolische* Differentialoperatoren; wir verweisen dazu auf [Hörmander 1983b], Kapitel 12.

Andererseits gilt das folgende Resultat von A. Grothendieck (1955):

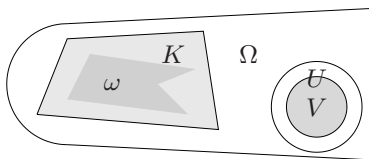
**Satz 9.34**

Es seien  $n \geq 2$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $P(D)$  ein elliptischer Differentialoperator. Dann gibt es keinen stetigen linearen Lösungsoperator zu  $P(D) : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ .

BEWEIS. a) Es gebe  $R \in L(\mathcal{E}(\Omega))$  mit  $P(D)R\phi = \phi$  für alle  $\phi \in \mathcal{E}(\Omega)$ . Zu einer offenen Menge  $\omega \Subset \Omega$  gibt es  $k \in \mathbb{N}_0$  und eine kompakte Menge  $K \subseteq \Omega$  mit

$$\sup_{x \in \bar{\omega}} |R\phi(x)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |D^\alpha \phi(x)| \quad \text{für } \phi \in \mathcal{E}(\Omega). \quad (31)$$

Wir wählen eine offene Kugel  $U \Subset \Omega$  mit  $U \cap (\bar{\omega} \cup K) = \emptyset$  und zeigen, dass der Operator  $P(D) : \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathcal{D}(U)$  *surjektiv* ist:



**Abb. 9.3:** Illustration des Beweises

b) Für  $\varphi \in \mathcal{D}(U)$  gilt  $\text{supp } \varphi \subseteq V$  für eine Kugel  $V \Subset U$ , und wegen  $n \geq 2$  ist  $\Omega \setminus V$  zusammenhängend. Wegen  $P(D)R\varphi = \varphi$  und Theorem 5.20 ist  $R\varphi$  auf  $\Omega \setminus V$  reell-analytisch, und wegen  $V \cap K = \emptyset$  ist  $R\varphi = 0$  auf  $\omega \subseteq \Omega \setminus V$  aufgrund von (31). Der Identitätssatz 9.20 impliziert dann  $R\varphi = 0$  auf  $\Omega \setminus V$ , also  $\text{supp } R\varphi \subseteq \bar{V} \Subset U$ .

c) Da nun  $P(D) : \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathcal{D}(U)$  surjektiv ist, muss  $P(-D) : \mathcal{D}'(U) \rightarrow \mathcal{D}'(U)$  *injektiv* sein. Dies ist jedoch falsch, da  $P(-D)e^{i\langle z, x \rangle} = 0$  für  $z \in \mathbb{C}^n$  mit  $P(-z) = 0$  gilt.  $\diamond$

Insbesondere ist also der Kern  $N_\Omega(P(D)) = \{\phi \in \mathcal{E}(\Omega) \mid P(D)\phi = 0\}$  eines elliptischen Operators ein abgeschlossener, aber *nicht komplementierter* Unterraum von  $\mathcal{E}(\Omega)$ . Dies gilt insbesondere für den Raum der *harmonischen* Funktionen und, im Fall  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ , für den Raum  $\mathcal{H}(\Omega)$  der *holomorphen* Funktionen auf  $\Omega$ .

Es ist eine schwierige Frage, wann genau ein stetiger linearer Lösungsoperator zu  $P(D) : \mathcal{F}(\Omega) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega)$  auf einem Raum  $\mathcal{F}(\Omega)$  von Funktionen oder Distributionen existiert; eine Reihe von Autoren haben Beiträge zu dieser Frage geleistet. Nach D. Vogt (1983) gibt es auch zu *hypoelliptischen* Operatoren  $P(D) : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  *keinen* stetigen linearen Lösungsoperator. In [Meise et al. 1990] zeigten R. Meise, B.A. Taylor und D. Vogt, dass die Existenz eines Lösungsoperators zu  $P(D) : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  zu einer „*quantitativen Variante*“ der  $P$ -Konvexität und auch zur Existenz eines Lösungsoperators zu  $P(D) : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  äquivalent ist. Im Fall  $\Omega = \mathbb{R}^n$  ist die Existenz von *Fundamentallösungen mit „großen Löchern im Träger“* eine weitere äquivalente Bedingung. Für *konvexe* offene Mengen  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  lässt sich mittels *Fourier-Analysis* zeigen, dass die Existenz eines Lösungsoperators auch zu einer *Phragmen-Lindelöf-Bedingung* für plurisubharmonische Funktionen auf der Nullstellen-Varietät von  $P$  äquivalent ist. Für  $n \geq 3$  erhält man so Beispiele nicht hyperbolischer Operatoren, für die Lösungsoperatoren existieren.

## 9.7 Fortsetzung und Lifting linearer Operatoren

Wir kommen nun auf die Situation von Satz 9.31 zurück.

**Splitting exakter Sequenzen.** a) Eine kurze topologisch exakte Sequenz  $(S)$  lokalkonvexer Räume *splittet* oder *zerfällt*, wenn eine der Bedingungen (a), (b) oder (c) aus Satz 9.31 erfüllt ist; dann gelten also alle diese drei Bedingungen. Setzt man nur die algebraische Exaktheit sowie (a) *und* (c) voraus, so ist die Sequenz automatisch topologisch exakt.

b) Zerfällt eine exakte Sequenz  $(S)$ , so gilt dies auch für die dualen Sequenzen

$$0 \longleftarrow G'_\alpha \xleftarrow{\iota'} E'_\alpha \xleftarrow{\sigma'} Q'_\alpha \longleftarrow 0 \quad (S'_\alpha)$$

in allen Fällen  $\alpha = \sigma, \kappa, \tau, \gamma, \beta$ . In der Tat sind diese algebraisch exakt, und aus  $\sigma R = I_Q$  bzw.  $L\iota = I_G$  folgt sofort  $R'\sigma' = I_{Q'}$  bzw.  $\iota' L' = I_{G'}$ .

c) Die Umkehrung von Aussage b) ist i. A. nicht richtig, vgl. dazu das Beispiel auf S. 226 sowie Abschnitt 12.2.

**Projektive lokalkonvexe Räume.** a) Ein lokalkonvexer Raum  $F$  heißt *projektiv*

[in einer Klasse von Räumen], wenn für jede kurze topologisch exakte Sequenz  $(S)$  lokalkonvexer Räume [in dieser Klasse] jeder stetige lineare Operator  $T \in L(F, Q)$  ein *Lifting*  $T^\vee \in L(F, E)$  besitzt, das also  $\sigma T^\vee = T$  erfüllt. In diesem Fall *splittet jede* kurze topologisch exakte Sequenz

$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\sigma} F \longrightarrow 0$  [in dieser Klasse], da man die Identität auf  $F$  zu einer Rechtsinversen zu  $\sigma$  liften kann.

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow^{T^\vee} & \downarrow \sigma \\ F & \xrightarrow{T} & Q \end{array}$$

b) Endlichdimensionale Räume sind offenbar projektiv, ebenso lokalkonvexe direkte Summen projektiver Räume. Insbesondere ist der  $(DF)$ -Raum  $\varphi$  der finiten Folgen projektiv. Nach V.A. Geiler (1972) ist jeder projektive lokalkonvexe Raum isomorph zu  $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{K}$  für eine geeignete Indexmenge  $I$ .

c) Für eine Indexmenge  $I$  ist der Raum  $\ell_1(I)$  projektiv in der Klasse der Banachräume (vgl. [GK], Aufgaben 9.16 und 9.14). Nach A. Grothendieck (1955) und G. Köthe (1966) ist jeder projektive Banachraum isomorph zu  $\ell_1(I)$  für eine geeignete Indexmenge.

**Injektive lokalkonvexe Räume.** a) Ein lokalkonvexer Raum  $F$  heißt *injektiv*

[in einer Klasse von Räumen] wenn für jede kurze topologisch exakte Sequenz  $(S)$  lokalkonvexer Räume [in dieser Klasse] jeder stetige lineare Operator  $T \in L(G, F)$  eine Fortsetzung  $\tilde{T} \in L(E, F)$  besitzt, die also  $\tilde{T}\iota = T$  erfüllt.

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \uparrow \iota & & \searrow \tilde{T} \\ G & \xrightarrow{T} & F \end{array}$$

In diesem Fall *splittet jede* kurze topologisch exakte Sequenz

$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\sigma} Q \longrightarrow 0$  [in dieser Klasse], da man die Identität auf  $F$  zu einer Linksinversen zu  $\iota$  fortsetzen kann.

b) Nach dem Satz von Hahn-Banach sind endlichdimensionale Räume injektiv, und dies gilt offenbar auch für topologische Produkte injektiver Räume. Insbesondere ist der Fréchetraum  $\omega$  aller Folgen injektiv.

c) Nach einem Satz von Sobczyk (1941) ist der Raum  $c_0$  aller Nullfolgen injektiv in der Klasse der separablen Banachräume (vgl. [Meise und Vogt 1992], 10.10). Dies gilt nicht in der Klasse aller Banachräume, da  $c_0$  in  $\ell_\infty$  nicht komplementiert ist (vgl. [Meise und Vogt 1992], 10.15).

d) Für eine Indexmenge  $I$  ist der Raum  $\ell_\infty(I)$  injektiv (vgl. [GK], Satz 9.20). Allgemeiner gilt das folgende Resultat von L.V. Kantorovich (1935), für das wir in Aufgabe 9.17 und auf S. 295 auch alternative Beweise angeben:

### Satz 9.35

Es seien  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum,  $E$  ein lokalkonvexer Raum und  $G \subseteq E$  ein Unterraum. Jeder stetige lineare Operator  $T \in L(G, L_\infty(\Omega))$  besitzt eine Fortsetzung  $\tilde{T} \in L(E, L_\infty(\Omega))$ . Ist  $E$  ein Banachraum, so kann man  $\tilde{T}$  so wählen, dass  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$  gilt.

BEWEIS. a) Wir betrachten bis auf Nullmengen disjunkte abzählbare Zerlegungen  $Z$  von  $\Omega$  in messbare Teilmengen  $\omega \in \Sigma$  mit  $0 < \mu(\omega) < \infty$ . Das System  $\mathcal{Z}$  aller Zerlegungen von  $\Omega$  ist ein gerichtetes System unter der Halbordnung

$$Z \prec Z' :\Leftrightarrow \forall \omega' \in Z' \exists \omega \in Z : \mu(\omega \setminus \omega') = 0.$$

b) Für  $Z \in \mathcal{Z}$  und  $\omega \in Z$  sind durch die *Mittelwerte*  $\alpha_\omega(f) := \frac{1}{\mu(\omega)} \int_\omega f(t) d\mu \in \mathbb{K}$  stetige Linearformen auf  $L_\infty(\Omega)$  mit  $\|\alpha_\omega\| \leq 1$  gegeben. Damit definieren wir einen linearen *Mittelungsoperator* auf  $L_\infty(\Omega)$  durch

$$A_Z(f) := \sum_{\omega \in Z} \alpha_\omega(f) \chi_\omega = \sum_{\omega \in Z} \left( \frac{1}{\mu(\omega)} \int_\omega f(t) d\mu \right) \chi_\omega, \quad f \in L_\infty(\Omega).$$

Dann gelten offenbar  $\|A_Z\| \leq 1$  und  $\lim_Z \|f - A_Z f\|_\infty = 0$  für  $f \in L_\infty(\Omega)$ .

c) Für  $T \in L(G, L_\infty(\Omega))$  gibt es  $p \in \mathbb{H}(E)$  und  $C \geq 0$  mit  $\|Ty\| \leq Cp(y)$  für  $y \in G$ ; im Fall eines Banachraumes  $E$  wählen wir  $p = \|\cdot\|$  und  $C = \|T\|$ . Für die Funktionale  $T'\alpha_\omega \in G'$  gilt dann  $|\langle y, T'\alpha_\omega \rangle| = |\langle Ty, \alpha_\omega \rangle| \leq \|Ty\| \leq Cp(y)$  für  $y \in G$ . Der Satz von Hahn-Banach liefert Fortsetzungen  $x'_\omega \in E'$  mit  $|\langle x, x'_\omega \rangle| \leq Cp(x)$  für alle  $x \in E$  und alle  $\omega$ . Für  $Z \in \mathcal{Z}$  definieren wir durch

$$\tilde{T}_Z(x) := \sum_{\omega \in Z} \langle x, x'_\omega \rangle \chi_\omega, \quad x \in E,$$

Operatoren  $\tilde{T}_Z \in L(E, L_\infty(\Omega))$  mit  $\|\tilde{T}_Z x\| \leq Cp(x)$  für  $x \in E$  und  $\tilde{T}_Z y = A_Z Ty$  für alle  $y \in G$ .

d) Es gilt die Isometrie  $L_\infty(\Omega) \cong L_1(\Omega)'$  (vgl. [GK], Theorem 9.15), und nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki 8.6 sind die Kugeln  $\bar{U}_r$  um 0 in  $L_\infty(\Omega)$  für  $r > 0$  schwach\*-kompakt. Nach dem Satz von Tychonoff (vgl. S. 173) ist auch das Produkt  $K := \prod_{x \in E} \bar{U}_{Cp(x)} \subseteq L_\infty(\Omega)^E$  kompakt. Das Netz  $(\tilde{T}_Z)_{Z \in \mathcal{Z}}$  in  $K$  besitzt somit einen Berührungspunkt  $\tilde{T} \in K$ . Die Abbildung  $\tilde{T} : E \rightarrow L_\infty(\Omega)$  ist offenbar linear und erfüllt  $\|\tilde{T}x\| \leq Cp(x)$ , im Fall eines Banachraumes  $E$  also  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ . Für  $y \in G$  schließlich gilt nach b)

$$Ty = \lim_Z A_Z Ty = \lim_Z \tilde{T}_Z y = \tilde{T}y. \quad \diamond$$

Zusammenfassend halten wir fest: Eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\sigma} Q \longrightarrow 0 \tag{S}$$

von Banachräumen splittet, falls  $G \simeq L_\infty(\Omega)$  (oder injektiv),  $X$  zu einem Hilbertraum isomorph oder  $Q \simeq \ell_1(I)$  ist.

**$\mathcal{P}_1$ -Banachräume.** Nach Satz 9.35 können im Fall von Banachräumen also Fortsetzungen von Operatoren nach  $L_\infty(\Omega)$  unter Erhaltung der Norm konstruiert werden; Banachräume mit dieser Eigenschaft heißen  $\mathcal{P}_1$ -Räume. Diese Räume lassen sich genau angeben (eine entsprechende Charakterisierung der injektiven Banachräume ist nicht bekannt):

Ein topologischer Raum  $K$  heißt *extrem unzusammenhängend*, wenn der Abschluss einer offenen Menge in  $K$  wieder offen ist. Das folgende Resultat stammt von L. Nachbin (1950), D.B. Goodner (1950) und J.L. Kelley (1952) im reellen und von M. Hasumi (1958) im komplexen Fall:

**Satz 9.36**

Ein Banachraum  $X$  ist genau dann ein  $\mathcal{P}_1$ -Raum, wenn er zu  $\mathcal{C}(K)$  isometrisch ist für einen extrem unzusammenhängenden kompakten Raum  $K$ .

Für einen Beweis verweisen wir auf [Lacey 1974], § 11 und skizzieren nur kurz einen solchen:

Für „ $\Leftarrow$ “ zeigt man, dass in dem Banach-Verband  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt. Damit lassen sich  $\mathcal{C}(K)$ -wertige Operatoren wie im Beweis des Satzes von Hahn-Banach für den skalaren Fall fortsetzen (vgl. [GK], Theorem 9.1).

Für „ $\Rightarrow$ “ konstruiert man zunächst ähnlich wie im Beweis des Satzes von Krein-Milman einen *minimalen schwach\*-abgeschlossenen Rand*  $K \subseteq \overline{U}_X$  für  $X$ ; dann liefert die Evaluationsabbildung eine Isometrie  $j : X \rightarrow \mathcal{C}(K)$ . Es gibt eine Projektion  $P : \mathcal{C}(K) \rightarrow j(X)$  mit  $\|P\| = 1$ , und wegen der Minimalität von  $K$  ist  $P$  *injektiv*. Dies zeigt  $X \cong \mathcal{C}(K)$ . Schließlich gibt es eine Projektion  $Q : \ell_\infty(K) \rightarrow \mathcal{C}(K)$  mit  $\|Q\| = 1$ , und daher muss  $K$  extrem unzusammenhängend sein.

**Gelfand-Theorie.** Einen Zusammenhang zwischen den Sätzen 9.35 und 9.36 liefert die *Gelfand-Theorie*, die wir ab Kapitel 13 behandeln: Es ist  $L_\infty(\Omega)$  eine *kommutative  $\mathcal{C}^*$ -Algebra* und daher mittels *Gelfand-Transformation* zu einer Algebra  $\mathcal{C}(\mathfrak{M})$  isometrisch, wobei  $\mathfrak{M}$  der kompakte Raum der multiplikativen Funktionale auf dieser  $\mathcal{C}^*$ -Algebra ist (Satz von Gelfand-Naimark, vgl. Theorem 15.3). Im Fall der Algebra  $L_\infty(\Omega)$  muss  $\mathfrak{M}$  extrem unzusammenhängend sein (vgl. [Gamelin 2005], I.9, oder [Sakai 1971], 1.18).

**Bemerkungen.** Ein Raum  $\mathcal{C}(K)$  ist genau dann *separabel*, wenn  $K$  *metrisierbar* ist (vgl. Aufgabe 8.22). Nun ist ein kompakter metrischer Raum nur dann extrem unzusammenhängend, wenn er *endlich* ist (vgl. Aufgabe 9.18); folglich ist ein  $\mathcal{P}_1$ -Raum *endlichdimensional oder nicht separabel*. Diese Aussage gilt auch für alle *injektiven Banachräume*  $X$ ; im Fall  $\dim X = \infty$  enthält  $X$  stets einen zu  $\ell_\infty$  isomorphen Unterraum (vgl. [Lindenstrauß und Tzafriri 1977], Theorem 2.f.3).

Für das folgende Beispiel erinnern wir an den in [GK], 10.11 bewiesenen

**Satz 9.37 (Schur)**

Eine Folge in  $\ell_1$  ist genau dann schwach konvergent, wenn sie Norm-konvergent ist.

**Beispiel.** a) Für eine offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ist  $L_1(\Omega)$  *separabel* (vgl. [GK], Satz 2.9). Nach [GK], Satz 10.11 (vgl. auch Aufgabe 9.15) gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\iota} \ell_1 \xrightarrow{\sigma} L_1(\Omega) \longrightarrow 0. \quad (32)$$

b) Zerfällt diese Sequenz, so ist  $L_1(\Omega)$  zu einem Unterraum von  $\ell_1$  isomorph. Dies ist jedoch nicht der Fall, da der *Satz von Schur in  $L_1(\Omega)$  nicht gilt*: Dazu betrachten wir

einen Quader  $Q \subseteq \Omega$  mit  $\lambda(Q) > 0$  und eine Folge  $(k_j)$  in  $\mathbb{Z}^n$  mit  $|k_j| \rightarrow \infty$ . Die Folge  $(f_j(x) := e^{i\langle k_j, x \rangle} \chi_Q)$  ist nach dem *Lemma von Riemann-Lebesgue* (vgl. [GK], 5.13) eine schwache Nullfolge in  $L_1(\Omega)$ , aber offenbar gilt  $\|f_j\|_{L_1} = \lambda(Q)$ . Somit *splittet* die Sequenz (32) *nicht*.

c) Andererseits *splittet* die zu (32) *duale Sequenz*

$$0 \longleftarrow G' \xleftarrow{\iota'} \ell_\infty \xleftarrow{\sigma'} L_\infty(\Omega) \longleftarrow 0, \quad (33)$$

da  $L_\infty(\Omega)$  nach Satz 9.35 ein injektiver Banachraum ist.

Das folgende Resultat von A. Pelczyński (1958) gilt z. B. für Intervalle:

### Satz 9.38

Für eine offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $L_\infty(\Omega) \simeq L_\infty(\Omega) \times L_\infty(\Omega)$  gilt die Isomorphie  $L_\infty(\Omega) \simeq \ell_\infty$ .

BEWEIS. a) Da die Sequenz (33) splittet, ist  $L_\infty(\Omega)$  zu einem *komplementierten* Unterraum von  $\ell_\infty$  isomorph, es gilt also  $\ell_\infty \simeq L_\infty(\Omega) \times X$  mit einem Banachraum  $X$ .

b) Es gibt eine disjunkte Folge  $(\omega_j)$  messbarer Mengen in  $\Omega$  mit  $\mu(\omega_j) > 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Durch  $V : (\xi_j) \mapsto \sum_j \xi_j \chi_{\omega_j}$  wird eine Isometrie von  $\ell_\infty$  in  $L_\infty(\Omega)$  definiert; es gilt also auch  $L_\infty(\Omega) \simeq \ell_\infty \times Y$  für einen Banachraum  $Y$ .

c) Wegen  $L_\infty(\Omega) \simeq L_\infty(\Omega) \times L_\infty(\Omega)$  folgt nun

$$L_\infty(\Omega) \times \ell_\infty \simeq L_\infty(\Omega) \times L_\infty(\Omega) \times X \simeq L_\infty(\Omega) \times X \simeq \ell_\infty,$$

und genauso ergibt sich  $L_\infty(\Omega) \times \ell_\infty \simeq L_\infty(\Omega)$ . ◇

## 9.8 Aufgaben

### Aufgabe 9.1

a) Zeigen Sie, dass ein linearer Operator  $T$  von  $E$  nach  $F$  genau dann abgeschlossen ist, falls für ein Netz  $(x_\alpha)$  in  $\mathcal{D}(T)$  mit  $x_\alpha \rightarrow x$  in  $E$  und  $Tx_\alpha \rightarrow y$  in  $F$  stets  $x \in \mathcal{D}(T)$  und  $Tx = y$  folgt.

b) Zeigen Sie, dass der Kern eines abgeschlossenen linearen Operators ein abgeschlossener Unterraum von  $E$  ist.

### Aufgabe 9.2

Ein linearer Operator  $T$  von  $E$  nach  $F$  heißt *abschließbar*, falls  $\overline{\Gamma(T)}$  ein Graph ist.

a) Charakterisieren Sie die Abschließbarkeit von  $T$  analog zu Aufgabe 9.1 a).

b) Nun gelte  $\overline{\mathcal{D}(T)} = E$ . Zeigen Sie, dass  $T$  genau dann abschließbar ist, wenn  $\mathcal{D}(T')$  schwach\*-dicht in  $F$  ist.

c) Nun seien  $E, F$  Frécheträume und  $T$  ein abschließbarer linearer Operator von  $E$  nach  $F$ . Konstruieren Sie einen *Abschluss* von  $T$  ähnlich wie im Fall von Banachräumen (vgl. [GK], Abschnitt 13.1).

### Aufgabe 9.3

Zeigen Sie die Äquivalenz von Bedingung (11) zu

$$\forall U \in \mathbb{U}(E) \exists V \in \mathbb{U}(F) \forall y' \in \mathcal{D}(T') : T'y' \in U^\circ \Rightarrow y' \in V^\circ \quad (34)$$

und verifizieren Sie die Bemerkung zu Satz 9.5.

### Aufgabe 9.4

Zeigen Sie, dass ein Fréchetraum  $E$  genau dann nicht zu einem Banachraum isomorph ist, wenn eine stetige Surjektion von  $E$  auf  $\omega$  existiert.

### Aufgabe 9.5

a) Repräsentieren Sie die surjektive Borel-Abbildung  $\beta : \mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}) \rightarrow \omega$  mittels  $\mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}) \simeq s(\mathbb{Z})$  durch eine unendliche Matrix.

b) Formulieren und beweisen Sie eine Version des Satzes von Borel für Funktionen von mehreren Variablen.

### Aufgabe 9.6

Beweisen Sie den Satz 9.12 von Borel und den Interpolationssatz 9.13 mit Hilfe der Mittag-Leffler-Methode.

### Aufgabe 9.7

Für einen Differentialoperator  $P(D)$  sei

$$E_P(\mathbb{R}^n) := \{Q(x)e^{i\langle \zeta | x \rangle} \in N_{\mathbb{R}^n}(P(D)) \mid Q \in \mathcal{P}_n, \zeta \in \mathbb{C}^n\} \subseteq \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$$

der Raum der *Exponentiallösungen*. Zeigen Sie für  $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ :

- Ist  $v \in E_P(\mathbb{R}^n)^\perp$ , so ist  $\zeta \mapsto \frac{\hat{v}(\zeta)}{P(-\zeta)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$  eine ganze Funktion auf  $\mathbb{C}^n$ .
- Genau dann gilt  $\frac{\hat{v}(\zeta)}{P(-\zeta)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ , wenn es  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  mit  $P(-D)u = v$  gibt. In diesem Fall ist  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  eindeutig bestimmt, und es gilt  $\text{co}(\text{supp } u) = \text{co}(\text{supp } v)$ .
- Es ist  $E_P(\mathbb{R}^n)$  dicht in  $N_{\mathbb{R}^n}(P(D))$ .

### Aufgabe 9.8

a) Zeigen Sie, dass eine offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  genau dann  $P$ -konvex ist, wenn  $d(\text{supp } v, \partial\Omega) = d(\text{supp } P(-D)v, \partial\Omega)$  für alle  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  bzw. für alle  $v \in \mathcal{E}'(\Omega)$  gilt.

b) Zeigen Sie, dass für eine  $P$ -konvexe offene Menge  $\Omega$  das projektive Spektrum  $\{N_{\Omega_n}(P(D)), \rho_m^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dicht ist, und beweisen Sie mit der Mittag-Leffler-Methode 9.14 die Surjektivität von  $P(D) : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ .



**Aufgabe 9.9**

Es seien  $P \in \mathcal{P}_n$  ein Polynom,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $P$ -konvexe offene Menge und  $s \in \mathbb{R}$ . Konstruieren Sie eine stetige Abbildung  $R : H^{s,\text{loc}}(\Omega) \rightarrow H^{s,\text{loc}}(\Omega)$  mit  $P(D)(Rf) = f$  für alle  $f \in H^{s,\text{loc}}(\Omega)$ .

**Aufgabe 9.10**

Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\mathfrak{V}$  das System aller *lokalendlichen* Folgen  $v = (v_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{N}_0^n}$  in  $\mathcal{C}(\Omega)$  mit  $v_\gamma \geq 0$ . Zeigen Sie mittels Satz 9.32, dass durch

$$p_v(\varphi) := \sum_{|\gamma|=0}^{\infty} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\gamma \varphi(x)| v_\gamma(x), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad v = (v_\gamma) \in \mathfrak{V}, \quad (35)$$

ein Fundamentalsystem stetiger Halbnormen auf  $\mathcal{D}(\Omega)$  gegeben ist.

**Aufgabe 9.11**

Es seien  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Halbraum, und der Differentialoperator  $P(D)$  sei ein *Isomorphismus* auf dem Raum  $\mathcal{E}(H)$  (dies ist genau dann der Fall, wenn  $P(D)$  hyperbolisch bezüglich eines Normalenvektors zu  $H$  ist). Konstruieren Sie einen stetigen linearen Lösungsoperator zu  $P(D) : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ .

**Aufgabe 9.12**

Es seien  $s \in \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $P(D)$  ein elliptischer Operator der Ordnung  $m \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass es zu  $P(D) : H^{s+m,\text{loc}}(\Omega) \rightarrow H^{s,\text{loc}}(\Omega)$  keinen stetigen linearen Lösungsoperator gibt.

**Aufgabe 9.13**

Es seien  $E$  ein lokalkonvexer Raum und  $G \subseteq E$  ein Unterraum mit  $\dim G = n < \infty$ . Konstruieren Sie eine stetige Projektion von  $E$  auf  $G$  und zeigen Sie, dass man im Fall eines Banachraumes  $\|P\| \leq n$  erreichen kann.

**Aufgabe 9.14**

Es sei  $(S)$  eine kurze topologisch exakte Sequenz lokalkonvexer Räume. Konstruieren Sie für  $T \in L(\ell_1(I), Q)$  ein Lifting  $T^\vee \in L(\ell_1(I), E)$  unter geeigneten Annahmen.

**Aufgabe 9.15**

Zeigen Sie, dass jeder Banachraum  $X$  zu einem Quotientenraum von  $\ell_1(I)$  isometrisch ist und dass man  $I = \mathbb{N}_0$  für einen separablen Raum  $X$  wählen kann.

**Aufgabe 9.16**

- Zeigen Sie, dass ein lokalkonvexer Raum  $F$  zu einem Unterraum eines Produkts  $\prod_{U \in \mathcal{U}(F)} \ell_\infty(U^\circ)$  isomorph ist.
- Nun sei  $F$  ein lokalkonvexer Raum, für den jede kurze topologisch exakte Sequenz  $0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$  splittet. Zeigen Sie, dass  $F$  injektiv ist.
- Zeigen Sie, dass ein Banachraum  $F$  genau dann ein  $\mathcal{P}_1$ -Raum ist, wenn jede Isometrie  $\iota : F \rightarrow X$  in einen Banachraum eine Linksinverse der Norm 1 besitzt.

**Aufgabe 9.17**

a) Zeigen Sie, dass im Banach-Verband  $L_\infty(\Omega, \mathbb{R}) \cong L_1(\Omega, \mathbb{R})'$  jede nach oben beschränkte Menge ein *Supremum* besitzt und beweisen Sie Satz 9.35 ähnlich wie den Satz von Hahn-Banach für den skalaren Fall (vgl. [GK], Theorem 9.1).

b) Es sei  $K$  ein kompakter Hausdorff-Raum. Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen

- ① Der Raum  $K$  ist extrem unzusammenhängend.
- ② Im Banach-Verband  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  besitzt jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum.
- ③ Der Banachraum  $\mathcal{C}(K)$  ist ein  $\mathcal{P}_1$ -Raum.

**Aufgabe 9.18**

Zeigen Sie, dass ein extrem unzusammenhängender kompakter metrischer Raum endlich ist.

## 10 Vektorfunktionen und Tensorprodukte

*Fragen: 1. Es seien  $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ,  $Y$  ein Banachraum und  $f : [0,1] \rightarrow Y$  eine Funktion, sodass  $\langle f, y' \rangle \in C^m[0,1]$  für alle  $y' \in Y'$  gilt. Folgt dann  $f \in C^m([0,1], Y)$  ?  
2. Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $F$  ein vollständiger lokalkonvexer Raum. Ist der Cauchy-Riemann-Operator  $\bar{\partial} : \mathcal{E}(\Omega, F) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega, F)$  surjektiv?*

Die Frage nach *Parameterabhängigkeiten* von Lösungen linearer Gleichungen führt auf die Untersuchung von *Vektorfunktionen*; dazu sind in vielen Fällen *Tensorprodukt-Darstellungen* hilfreich. Die Theorie der *topologischen Tensorprodukte* wurde um 1955 von A. Grothendieck entwickelt, ebenso die damit eng zusammenhängende Theorie der *nuklearen Räume*, die wir im nächsten Kapitel vorstellen.

In diesem Kapitel behandeln wir  $\varepsilon$ -Produkte sowie  $\varepsilon$ - und  $\pi$ -Tensorprodukte. Wir integrieren *Vektorfunktionen* und zeigen grundlegende Resultate über *holomorphe Funktionen*, die wir für die *Spektraltheorie* linearer Operatoren in Teil III des Buches benötigen.

Es sei  $F$  ein vollständiger lokalkonvexer Raum. Eine stetige  $F$ -wertige Funktion  $f \in \mathcal{C}(\Omega, F)$  kann mit dem Operator  $\lambda(f) : y' \mapsto y' \circ f$  in  $L(F'_\kappa, \mathcal{C}(\Omega))$  identifiziert werden. Allgemein wird das  $\varepsilon$ -Produkt lokalkonvexer Räume als  $E \varepsilon F := L_\varepsilon(F'_\kappa, E)$  mit der durch die Bornologie  $\mathfrak{E}$  der gleichstetigen Mengen in  $F'$  gegebenen Topologie definiert. Für viele durch  $o$ -Bedingungen definierte *Funktionenräume* mit *Supremums-Halbnormen* gilt dann  $\mathcal{G}(\Omega, F) \simeq \mathcal{G}(\Omega) \varepsilon F$ , und für den *Raum der kompakten linearen Operatoren* zwischen Banachräumen hat man  $K(X, Y) \simeq Y \varepsilon X'$ .

In Abschnitt 10.2 führen wir das  $\varepsilon$ -Produkt von Operatoren ein und integrieren damit *stetige Vektorfunktionen* über kompakte Räume. Für  $C^\infty$ -Vektorfunktionen zeigen wir *Fourier-Entwicklungen* und beweisen den Satz von Malgrange 9.16 auch für Funktionen mit Werten in *Frécheträumen*.

Im nächsten Abschnitt untersuchen wir *holomorphe  $F$ -wertige Funktionen*. Für diesen Begriff gibt es mehrere äquivalente Definitionen, so ist z.B. eine *schwach holomorphe* Funktion bereits holomorph. Wir lösen *additive Cousin-Probleme* mit Werten in *Frécheträumen* und folgern daraus den *Satz von Mittag-Leffler* sowie einen *Lifting-Satz* für holomorphe Funktionen.

Das *Tensorprodukt*  $E \otimes F$  lokalkonvexer Räume kann mit dem Raum der endlichdimensionalen Operatoren in  $E \varepsilon F$  identifiziert werden; die induzierte Topologie heißt  $\varepsilon$ -Topologie auf  $E \otimes F$ . Ein Raum  $E$  besitzt die *Approximationseigenschaft (A.E.)*, falls  $E \otimes F$  dicht in  $E \varepsilon F$  ist für alle lokalkonvexen Räume  $F$ ; es genügt, dies mit allen *dualen Banachräumen* zu testen. Wir gehen kurz auf *Schauder-Basen* ein und zeigen die A.E. für viele konkrete Räume; damit erhalten wir z.B. Isomorphismen  $C^m(\Omega, F) \simeq C^m(\Omega) \widehat{\otimes}_\varepsilon F$  und  $\mathcal{H}(\Omega, F) \simeq \mathcal{H}(\Omega) \widehat{\otimes}_\varepsilon F$  für vollständige Räume  $F$ . Das von A. Grothendieck 1955 formulierte Problem, ob *alle* lokalkonvexen Räume die A.E. besitzen, wurde von P. Enflo 1972 *negativ* gelöst.

In Abschnitt 10.5 gehen wir auf die *projektive* oder  $\pi$ -Topologie auf  $E \otimes F$  ein und zeigen insbesondere im Fall von Frécheträumen Grothendiecks *Entwicklungssatz* für Elemente in der Vervollständigung  $E \widehat{\otimes}_{\pi} F$  des  $\pi$ -Tensorprodukts. Weiter zeigen wir  $L_1(\Omega, Y) \cong L_1(\Omega) \widehat{\otimes}_{\pi} Y$  für den Raum der *Bochner-integrierbaren Funktionen* mit Werten in einem Banachraum  $Y$ .

## 10.1 Funktionenräume und $\varepsilon$ -Produkte

**Stetige Funktionen.** a) Es seien  $\Omega$  ein *lokal kompakter* topologischer Raum und  $F$  ein lokalkonvexer Raum. Auf dem Raum  $\mathcal{C}(\Omega, F)$  der stetigen Funktionen von  $\Omega$  nach  $F$  betrachten wir die lokalkonvexe Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz; sie ist gegeben durch das Fundamentalsystem von Halbnormen

$$q_K(f) := \sup \{q(f(t)) \mid t \in K\}, \quad q \in \mathbb{H}(F), \quad K \subseteq \Omega \text{ kompakt.}$$

b) Mit  $F$  ist offenbar auch  $\mathcal{C}(\Omega, F)$  vollständig, quasivollständig oder folgenvollständig.

c) Ist  $\Omega$   $\sigma$ -kompakt, d. h. eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen, so ist mit  $F$  auch  $\mathcal{C}(\Omega, F)$  metrisierbar bzw. ein Fréchetraum.

d) Eine stetige Funktion  $f \in \mathcal{C}(\Omega, F)$  ist natürlich auch *schwach stetig*, d. h. für alle  $y' \in F'$  sind die skalaren Funktionen  $y' \circ f$  auf  $\Omega$  stetig. Die Umkehrung ist i. A. nicht richtig:

**Beispiel.** Auf den Intervallen  $I_n := (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$  wählen wir Funktionen  $\varphi_n \in \mathcal{C}_c(I_n)$  mit  $\|\varphi_n\|_{\sup} = 1$ . Für eine orthonormale Folge  $(e_n)$  in einem Hilbertraum  $H$  definieren wir  $f: [0,1] \rightarrow H$  durch  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) e_n$ . Offenbar ist  $f$  stetig auf  $(0,1]$ , nicht aber in 0. Für  $x \in H$  gilt jedoch  $|\langle f(t)|x \rangle| \leq |\langle e_n|x \rangle|$  für  $t \in I_n$  und daher  $\langle f(t)|x \rangle \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow 0$ . Somit ist  $f$  schwach stetig auf  $[0,1]$ .

Für eine *schwach stetige* Funktion  $f \in \mathcal{C}_{\sigma}(\Omega, F)$  von  $\Omega$  nach  $F$  definieren wir eine lineare Abbildung

$$\lambda(f): F' \rightarrow \mathcal{C}(\Omega) \quad \text{durch} \quad \lambda(f): y' \mapsto y' \circ f \quad \text{für} \quad y' \in F'. \quad (1)$$

Die (starke) Stetigkeit von  $f$  lässt sich dann durch Eigenschaften von  $\lambda(f)$  charakterisieren:

### Satz 10.1

Für eine schwach stetige Funktion  $f: \Omega \rightarrow F$  sind äquivalent:

- (a)  $f: \Omega \rightarrow F$  ist stetig.
- (b)  $\lambda(f): F' \rightarrow \mathcal{C}(\Omega)$  ist stetig.
- (c) Für  $U \in \mathbb{U}(F)$  ist  $\lambda(f)(U^{\circ})$  kompakt in  $\mathcal{C}(\Omega)$ .
- (d) Für  $U \in \mathbb{U}(F)$  ist  $\lambda(f)(U^{\circ})$  relativ kompakt in  $\mathcal{C}(\Omega)$ .

BEWEIS. „(a)  $\Rightarrow$  (b)“: Für eine kompakte Menge  $K \subseteq \Omega$  ist  $f(K)$  kompakt in  $F$ , und es folgt

$$\sup_{t \in K} |\lambda(f)y'(t)| = \sup_{t \in K} |\langle f(t), y' \rangle| = \sup_{y \in f(K)} |\langle y, y' \rangle|.$$

„(b)  $\Rightarrow$  (c)“: Nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki und Satz 1.4 ist  $U^\circ$  kompakt in  $F'_\gamma$  und daher  $\lambda(f)(U^\circ)$  kompakt in  $\mathcal{C}(\Omega)$ .

„(c)  $\Rightarrow$  (d)“ ist klar.

„(d)  $\Rightarrow$  (a)“: Für  $q \in \mathbb{H}(F)$  und  $t, s \in \Omega$  gilt

$$\begin{aligned} q(f(t) - f(s)) &= \sup \{ |\langle f(t) - f(s), y' \rangle| \mid y' \in U_q^\circ \}, \quad \text{also} \\ q(f(t) - f(s)) &= \sup \{ |\lambda(f)y'(t) - \lambda(f)y'(s)| \mid y' \in U_q^\circ \}. \end{aligned} \quad (2)$$

Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist  $\lambda(f)(U_q^\circ)$  auf kompakten Teilmengen von  $\Omega$  gleichstetig und somit  $f : \Omega \rightarrow F$  stetig.  $\diamond$

Wir können also  $\mathcal{C}(\Omega, F)$  als Unterraum des Operatorenraumes  $L(F'_\gamma, \mathcal{C}(\Omega))$  auffassen. Wegen (2) wird die Topologie von  $\mathcal{C}(\Omega, F)$  von der Topologie  $\mathfrak{T}(\mathfrak{E})$  auf  $L(F'_\gamma, \mathcal{C}(\Omega))$  induziert, wobei  $\mathfrak{E}$  die Bornologie der *gleichstetigen* Mengen in  $F'$  bezeichnet. Wir schreiben kurz  $L_e(F'_\gamma, \mathcal{C}(\Omega))$  für  $(L(F'_\gamma, \mathcal{C}(\Omega)), \mathfrak{T}(\mathfrak{E}))$ . Für einen *kompakten* Raum  $\Omega$  und einen *Banachraum*  $F$  wird  $\mathfrak{T}(\mathfrak{E})$  von der *Operatornorm* auf  $L(F', \mathcal{C}(\Omega))$  induziert, und  $\lambda : \mathcal{C}(\Omega, F) \rightarrow L_e(F'_\gamma, \mathcal{C}(\Omega))$  ist eine *Isometrie*.

Wir zeigen nun die *Surjektivität* von  $\lambda : \mathcal{C}(\Omega, F) \rightarrow L_e(F'_\gamma, \mathcal{C}(\Omega))$  für *quasivollständige* Räume  $F$ . In diesem Fall gilt  $\gamma(F', F) = \kappa(F', F)$ , und nach dem Satz von Mackey-Arens 8.7 ist  $(F'_\kappa)' = F$ .

### Satz 10.2

Für einen quasivollständigen lokalkonvexen Raum  $F$  ist  $\lambda$  ein topologischer Isomorphismus von  $\mathcal{C}(\Omega, F)$  auf  $L_e(F'_\kappa, \mathcal{C}(\Omega))$ .

BEWEIS. Für  $u \in L(F'_\kappa, \mathcal{C}(\Omega))$  gilt  $u' : \mathcal{C}(\Omega)' \rightarrow (F'_\kappa)' = F$  für die duale Abbildung. Mit den Dirac-Funktionalen  $\delta_t \in \mathcal{C}(\Omega)'$  definieren wir die Funktion  $f := u' \circ \delta : \Omega \rightarrow F$ . Dann ist  $f$  schwach stetig mit  $\lambda(f) = u$  wegen

$$\langle f(t), y' \rangle = \langle u' \delta_t, y' \rangle = \langle u y', \delta_t \rangle = u y'(t) \quad \text{für } y' \in F' \text{ und } t \in \Omega.$$

Nun folgt die Stetigkeit von  $f : \Omega \rightarrow F$  aus Satz 10.1 wegen  $u \in L(F'_\kappa, \mathcal{C}(\Omega))$ .  $\diamond$

**$\varepsilon$ -Produkte.** a) Der Operatorenraum in Satz 10.2 heißt  $\varepsilon$ -Produkt der Räume  $\mathcal{C}(\Omega)$  und  $F$ . Dieses wichtige Konzept wurde in [Grothendieck 1955] (mit  $F'_\gamma$ ) und [Schwartz 1957b] (mit  $F'_\kappa$ ) eingeführt und untersucht. Für *quasivollständige* Räume  $F$  stimmen beide Konzepte überein, i. A. aber muss  $\lambda(f) : F'_\kappa \rightarrow \mathcal{C}(\Omega)$  nicht stetig sein, andererseits  $(F'_\gamma)' = F$  nicht gelten.

b) Wir folgen hier L. Schwartz und definieren

$$E \varepsilon F := L_e(F'_\kappa, E)$$

als  $\varepsilon$ -Produkt lokalkonvexer Räume  $E, F$ . Die lokalkonvexe  $\varepsilon$ -Topologie ist gegeben durch das Fundamentalsystem von Halbnormen

$$(p \varepsilon q)(u) := \sup \{p(uy') \mid y' \in U_q^\circ\}, \quad u \in E \varepsilon F, \quad p \in \mathbb{H}(E), \quad q \in \mathbb{H}(F). \quad (3)$$

Nach Satz 10.2 gilt dann also  $\mathcal{C}(\Omega, F) \simeq \mathcal{C}(\Omega) \varepsilon F$  für quasivollständige Räume  $F$ .

c) Für Banachräume  $X, Y$  wird die Topologie von  $X \varepsilon Y$  von der Operatornorm auf  $L(Y', X)$  induziert, es gilt dann z. B.  $\mathcal{C}(\Omega, Y) \cong \mathcal{C}(\Omega) \varepsilon Y$  für kompakte Räume  $\Omega$  und Banachräume  $Y$ . Da die Einheitskugel  $\bar{U}$  von  $Y'$  in  $Y'_\kappa$  kompakt ist, ist  $X \varepsilon Y$  ein Unterraum des Raumes  $K(Y', X)$  der kompakten Operatoren von  $Y'$  nach  $X$  (vgl. auch Satz 10.4 und Aufgabe 10.2).

### Satz 10.3

Es seien  $E, F$  lokalkonvexe Räume.

a) Die Transposition  $u \mapsto u'$  liefert einen topologischen Isomorphismus von  $E \varepsilon F$  auf  $F \varepsilon E$ , der im Fall von Banachräumen sogar eine Isometrie ist.

b) Mit  $E$  und  $F$  ist auch  $E \varepsilon F$  vollständig, quasivollständig oder folgenvollständig.

BEWEIS. a) Für  $u \in L(F'_\kappa, E)$  liegt die duale Abbildung  $u' : E' \rightarrow (F'_\kappa)' = F$  im Raum  $L(E'_\kappa, F)$ , da  $u'$  sogar stetig von  $E'_\kappa$  nach  $(F'_\kappa)'_\kappa$  ist. Wegen  $u = u''$  liefert also die Transposition  $u \mapsto u'$  einen linearen Isomorphismus von  $E \varepsilon F$  auf  $F \varepsilon E$ . Nach (3) gilt

$$(p \varepsilon q)(u) = \sup \{|\langle uy', x' \rangle| \mid y' \in U_q^\circ, x' \in U_p^\circ\} = (q \varepsilon p)(u') \quad (4)$$

für  $p \in \mathbb{H}(E)$  und  $q \in \mathbb{H}(F)$ ; daher ist die Transposition ein topologischer Isomorphismus und im Fall von Banachräumen eine Isometrie.

b) Nun seien  $E$  und  $F$  vollständig. Ein Cauchy-Netz  $(u_\alpha)$  in  $E \varepsilon F = L_e(F'_\kappa, E)$  konvergiert wegen der Vollständigkeit von  $E$  gleichmäßig auf allen Mengen in  $\mathfrak{E}(F')$  gegen eine lineare Abbildung  $u : F' \rightarrow E$ , und wegen der Vollständigkeit von  $F$  konvergiert auch  $(u'_\alpha)$  gleichmäßig auf allen Mengen in  $\mathfrak{E}(E')$  gegen eine lineare Abbildung  $v : E' \rightarrow F$ . Offenbar gilt  $\langle uy', x' \rangle = \langle vx', y' \rangle$  für  $x' \in E'$  und  $y' \in F'$ .

Für  $p \in \mathbb{H}(E)$  ist  $U_p^\circ$  kompakt in  $E'_\kappa$ , und wegen  $u'_\alpha \rightarrow v$  gleichmäßig auf  $U_p^\circ$  gilt  $C := v(U_p^\circ) \in \mathfrak{K}(F)$ . Für  $y' \in F'$  gilt

$$\begin{aligned} p(uy') &= \sup \{|\langle uy', x' \rangle| \mid x' \in U_p^\circ\} = \sup \{|\langle vx', y' \rangle| \mid x' \in U_p^\circ\}, \quad \text{also} \\ p(uy') &= \sup \{|\langle y, y' \rangle| \mid y \in C\} = p_{C^\circ}(y'), \end{aligned} \quad (5)$$

und somit ist  $u : F'_\kappa \rightarrow E$  stetig.

Ebenso folgt aus der Quasivollständigkeit bzw. Folgenvollständigkeit von  $E$  und  $F$  auch die von  $E \varepsilon F$ .  $\diamond$

Satz 10.3 und insbesondere Formel (4) legen es nahe,  $E \varepsilon F$  als Raum von *Bilinearformen* auf  $E' \times F'$  zu interpretieren, vgl. Aufgabe 10.1. Dadurch wird die *Symmetrie* des  $\varepsilon$ -Produkts in den „Faktoren“  $E$  und  $F$  klarer, und in der Tat ist dies die ursprüngliche Definition von L. Schwartz.

#### Satz 10.4

Für Banachräume  $X$  und  $Y$  gelten die durch Transposition gegebenen Isometrien  $K(X, Y) \cong X' \varepsilon Y \cong Y \varepsilon X'$ .

BEWEIS. a) Für einen kompakten Operator  $u \in K(X, Y)$  ist  $C := u(\overline{U}_1(0))$  relativ kompakt in  $Y$ . Wie in (5) gilt  $u' \in L_e(Y'_\kappa, X') = X' \varepsilon Y \subseteq K(Y', X')$ , und es ist  $\|u'\| = \|u\|$ .

b) Für  $v \in X' \varepsilon Y$  gilt  $v' \in Y \varepsilon X' = L_e((X')'_\kappa, Y) \subseteq K(X'', Y)$  und  $\|v'\| = \|v\|$  aufgrund von Satz 10.3. Für  $u := v' \circ \iota_X \in K(X, Y)$  gilt dann offenbar  $u' = v$ .  $\diamond$

Die Sätze 10.1 und 10.2 lassen sich übertragen auf allgemeinere

**Funktionenräume.** a) Unter einem *Funktionenraum* verstehen wir in diesem Abschnitt einen lokalkonvexen Raum  $\mathcal{G}(M)$  skalarer Funktionen auf einer beliebigen Menge  $M$ , für den die Inklusionsabbildung in das kartesische Produkt  $\mathbb{K}^M$  stetig ist; dann liefern die Dirac-Funktionale stetige Linearformen  $\delta_t \in \mathcal{G}(M)'$  für alle  $t \in M$ .

b) Beispiele solcher Funktionenräume sind etwa *Folgenräume*  $\ell_p$ ,  $c_0$  und  $s$  oder Räume  $C^m(\Omega)$ ,  $\mathcal{H}(\Omega)$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $H^s(\mathbb{R}^n)$  für  $s > \frac{n}{2}$ . Nicht erfasst werden  $L_p$ -Räume über nicht diskreten Maßräumen wie etwa  $L_p[0, 1]$ .

c) Für einen lokalkonvexen Raum  $F$  definieren wir den Raum der *F-wertigen schwachen  $\mathcal{G}$ -Funktionen* als

$$\mathcal{G}_\sigma(M, F) := \{f : M \rightarrow F \mid y' \circ f \in \mathcal{G}(M) \text{ für alle } y' \in F'\}.$$

Für  $f \in \mathcal{G}_\sigma(M, F)$  definieren wir wie in (1) die lineare Abbildung  $\lambda(f) : F' \rightarrow \mathcal{G}(M)$  durch  $\lambda(f) : y' \mapsto y' \circ f$  für  $y' \in F'$  und betrachten den Raum

$$\mathcal{G}_\kappa(M, F) := \{f \in \mathcal{G}_\sigma(M, F) \mid \forall U \in \mathbb{U}(F) : \lambda(f)(U^\circ) \text{ relativ kompakt}\}.$$

Es sei  $Y$  ein lokalkonvexer Raum. Eine Menge  $S \subseteq Y'$  trennt die Punkte von  $Y$ , wenn  ${}^\perp S = \{0\}$  ist; in diesem Fall ist  $[S]$  dicht in  $Y'_\kappa$ .

#### Satz 10.5

Es seien  $\mathcal{G}(M)$  ein Funktionenraum und  $F$  ein vollständiger lokalkonvexer Raum.

a) Für  $f \in \mathcal{G}_\sigma(M, F)$  gilt  $\lambda(f) \in \mathcal{G}(M) \varepsilon F \Leftrightarrow f \in \mathcal{G}_\kappa(M, F)$ .

b) Es ist  $\lambda$  eine Bijektion von  $\mathcal{G}_\kappa(M, F)$  auf  $\mathcal{G}(M) \varepsilon F$ .

BEWEIS. a) „ $\Rightarrow$ “: Es sei  $U \in \mathbb{U}(F)$ . Wie im Beweis von Satz 10.1 ist  $U^\circ$  kompakt in  $F'_\kappa$  und daher  $\lambda(f)(U^\circ)$  kompakt in  $\mathcal{G}(M)$ .

„ $\Leftarrow$ “: Für eine Funktion  $f \in \mathcal{G}_\kappa(M, F)$  ist  $\lambda(f)' : \mathcal{G}(M)'_\kappa \rightarrow (F'^\times, \mathfrak{T}(\mathfrak{E}))$  stetig. Wegen  $\langle \lambda(f)'(\delta_t), y' \rangle = \langle f(t), y' \rangle$  für  $y' \in F'$  gilt  $\lambda(f)'(\delta_t) = f(t) \in F$  für alle  $t \in M$ . Da  $\{\delta_t \mid t \in M\}$  die Punkte von  $\mathcal{G}(M)$  trennt, ist diese Menge der Dirac-Funktionale dicht in  $\mathcal{G}(M)'_\kappa$ . Da  $F$  vollständig und daher in  $(F'^\times, \mathfrak{T}(\mathfrak{E}))$  abgeschlossen ist, folgt  $\lambda(f)'(\mathcal{G}(M)'_\kappa) \subseteq F$ . Dies zeigt  $\lambda(f)' \in F \varepsilon \mathcal{G}(M)$  und somit  $\lambda(f) \in \mathcal{G}(M) \varepsilon F$  aufgrund von Satz 10.3.

b) Die Injektivität von  $\lambda$  ist klar; die Surjektivität ergibt sich wie in Satz 10.2.  $\diamond$

**Unterräume von Funktionenräumen.** a) Für einen abgeschlossenen Unterraum  $\mathcal{A}(M)$  eines Funktionenraumes  $\mathcal{G}(M)$  gilt offenbar

$$\mathcal{A}_\kappa(M, F) = \{f \in \mathcal{G}_\kappa(M, F) \mid \forall y' \in F' : y' \circ f \in \mathcal{A}(M)\}. \quad (6)$$

b) Ist  $F$  vollständig, so gilt nach Satz 10.5 auch

$$\mathcal{A}_\kappa(M, F) = \{f \in \mathcal{G}_\kappa(M, F) \mid \forall y' \in S : y' \circ f \in \mathcal{A}(M)\} \quad (7)$$

für jede die Punkte von  $F$  trennende Menge  $S \subseteq F'$ .

**$\mathcal{C}^m$ -Funktionen.** a) Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $F$  ein quasivollständiger lokalkonvexer Raum. Für eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow F$  und den  $j$ -ten Einheitsvektor  $e_j \in \mathbb{R}^n$  definieren wir die partielle Ableitung nach  $x_j$  durch

$$\partial_j f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + te_j) - f(x)) \in F,$$

falls dieser Limes existiert. Für  $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{C}^m(\Omega, F)$  den Raum der  $m$ -mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen von  $\Omega$  nach  $F$ ; wie im skalaren Fall ist eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion auch stets total differenzierbar. Die  $\mathcal{C}^m$ -Halbnormen

$$q_{K,m}(f) := \sum_{|\alpha| \leq m} \sup \{q(D^\alpha f(t)) \mid t \in K\}, \quad q \in \mathbb{H}(F), \quad K \subseteq \Omega \text{ kompakt}$$

liefern eine lokalkonvexe Topologie auf  $\mathcal{C}^m(\Omega, F)$ ; im Fall  $m = \infty$  verwenden wir natürlich alle  $\mathcal{C}^m$ -Halbnormen und schreiben auch  $\mathcal{E}(\Omega, F) = \mathcal{C}^\infty(\Omega, F)$ . Mit  $F$  ist auch  $\mathcal{C}^m(\Omega, F)$  vollständig bzw. ein Fréchetraum. Wegen

$$D^\alpha(y' \circ f) = y' \circ D^\alpha f \quad \text{für alle } y' \in F' \quad (8)$$

ergibt sich wie im Fall  $m = 0$

$$\mathcal{C}^m(\Omega, F) = \mathcal{C}_\kappa^m(\Omega, F) \simeq \mathcal{C}^m(\Omega) \varepsilon F \quad \text{für } m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}. \quad (9)$$



b) Wir erklären *Träger* von Vektorfunktionen wie im skalaren Fall, setzen

$$\mathcal{C}_c^m(A, F) := \{ \varphi \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n, F) \mid \text{supp } \varphi \subseteq A \} \quad \text{für } A \subseteq \mathbb{R}^n$$

und schreiben  $\mathcal{D}(A, F) = \mathcal{C}_c^\infty(A, F)$ . Für eine kompakte Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  ist  $\mathcal{C}_c^m(K, F)$  ein abgeschlossener Unterraum von  $\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n, F)$ . Wegen

$$\text{supp } \varphi \subseteq K \Leftrightarrow \forall y' \in F' : \text{supp } y' \circ \varphi \subseteq K \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n, F)$$

und (6) gilt für  $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  auch

$$\mathcal{C}_c^m(K, F) = \mathcal{C}_{c\kappa}^m(K, F) \simeq \mathcal{C}_c^m(K) \varepsilon F \quad \text{für } K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ kompakt.} \quad (10)$$

Das nun folgende *Schwach-Stark-Prinzip* beruht auf dem Graphensatz und geht auf [Grothendieck 1955], II § 3.3 zurück; für Verfeinerungen dieses Prinzips verweisen wir auf [Gramsch 1977].

### Satz 10.6

Es seien  $\mathcal{G}(M)$  ein Funktionenraum mit Gewebe und  $F$  ein lokalkonvexer Raum.

a) Für  $f \in \mathcal{G}_\sigma(M, F)$  und  $U \in \mathbb{U}(F)$  ist  $\lambda(f)(U^\circ)$  in  $\mathcal{G}(M)$  beschränkt.

b) Ist zusätzlich  $\mathcal{G}(M)$  ein Semi-Montelraum, so gilt  $\mathcal{G}_\sigma(M, F) = \mathcal{G}_\kappa(M, F)$ .

BEWEIS. a) Es genügt offenbar, die Stetigkeit von  $\lambda(f) : F'_{U^\circ} \rightarrow \mathcal{G}(M)$  zu beweisen. Für ein Netz  $(y'_\alpha)$  in  $F'_{U^\circ}$  mit  $y'_\alpha \rightarrow y'$  in  $F'_{U^\circ}$  und  $\lambda(f)y'_\alpha \rightarrow g$  in  $\mathcal{G}(M)$  hat man

$$\langle \lambda(f)y'_\alpha, \delta_t \rangle = \langle f(t), y'_\alpha \rangle \rightarrow \langle f(t), y' \rangle = \langle \lambda(f)y', \delta_t \rangle$$

für alle  $t \in M$ , also  $g = \lambda(f)y'$ . Somit ist der Graph von  $\lambda(f) : F'_{U^\circ} \rightarrow \mathcal{G}(M)$  abgeschlossen, und die Stetigkeit folgt aus Theorem 7.22.

Aussage b) folgt nun sofort aus a). ◇

**Beispiele.** Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist für  $m \geq 1$  eine in  $\mathcal{C}^m(\Omega)$  beschränkte Menge relativ kompakt in  $\mathcal{C}^{m-1}(\Omega)$ ; nach Satz 10.6 und (9) liegt daher für einen quasivollständigen Raum  $F$  jede  $F$ -wertige schwache  $\mathcal{C}^m$ -Funktion in  $\mathcal{C}^{m-1}(\Omega, F)$  (vgl. dazu auch Aufgabe 10.4). Insbesondere gilt:

### Satz 10.7

Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $F$  ein quasivollständiger lokalkonvexer Raum. Dann liegt jede schwache  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktion  $f : \Omega \rightarrow F$  in  $\mathcal{C}^\infty(\Omega, F)$ .

Aus diesem Satz folgt mittels (6) sofort auch ein entsprechendes Resultat für *harmonische Funktionen* und für *holomorphe Funktionen*, vgl. auch Satz 10.11.

## 10.2 $\varepsilon$ -Produkte linearer Operatoren

Wir führen nun  $\varepsilon$ -Produkte linearer Operatoren ein, um Operationen der Analysis von skalaren Funktionen auf Vektorfunktionen zu erweitern:

**$\varepsilon$ -Produkte von Operatoren.** Gegeben seien lokalkonvexe Räume  $E_j$  und  $F_j$  für  $j = 1, 2$  sowie Operatoren  $T \in L(E_1, E_2)$  und  $S \in L(F_1, F_2)$ .

a) Wir definieren das  $\varepsilon$ -Produkt  $T \varepsilon S \in L(E_1 \varepsilon F_1, E_2 \varepsilon F_2)$  durch

$$(T \varepsilon S)(u) := T \circ u \circ S' \quad \text{für } u \in E_1 \varepsilon F_1 = L_e(F'_{1\kappa}, E_1). \quad (11)$$

b) Für Kompositionen ergibt sich aus dem Diagramm

$$F'_{3\kappa} \xrightarrow{S'_2} F'_{2\kappa} \xrightarrow{S'_1} F'_{1\kappa} \xrightarrow{u} E_1 \xrightarrow{T_1} E_2 \xrightarrow{T_2} E_3$$

sofort die Formel

$$(T_2 \varepsilon S_2)(T_1 \varepsilon S_1) = (T_2 T_1) \varepsilon (S_2 S_1). \quad (12)$$

**Integration stetiger Vektorfunktionen.** a) Es seien  $K$  ein kompakter topologischer Raum,  $\mu$  ein reguläres positives Borel-Maß auf  $K$  und  $S_\mu : \varphi \mapsto \int_K \varphi d\mu$  das entsprechende Funktional in  $\mathcal{C}(K)'$ . Für einen quasivollständigen lokalkonvexen Raum  $F$  identifizieren wir eine stetige Funktion  $f \in \mathcal{C}(K, F)$  mit dem Operator  $\lambda(f) \in \mathcal{C}(K) \varepsilon F$  und definieren

$$\int_K f d\mu := (S_\mu \varepsilon I_F)(\lambda(f)) \in \mathbb{K} \varepsilon F = F. \quad (13)$$

Offenbar ist  $\int_K f d\mu$  der eindeutig bestimmte Vektor in  $F$  mit

$$\langle \int_K f(t) d\mu(t), y' \rangle = \int_K \langle f(t), y' \rangle d\mu(t) \quad \text{für alle } y' \in F'. \quad (14)$$

b) Für eine Halbnorm  $q \in \mathbb{H}(F)$  gilt

$$q(\int_K f d\mu) = \sup \{ |\langle \int_K f d\mu, y' \rangle| \mid y' \in U_q^\circ \} \leq \sup \{ \int_K |\langle f(t), y' \rangle| d\mu \mid y' \in U_q^\circ \}, \text{ also}$$

$$q(\int_K f(t) d\mu(t)) \leq \int_K q(f(t)) d\mu(t). \quad (15)$$

c) Für einen weiteren lokalkonvexen Raum  $E$  und  $T \in L(F, E)$  gilt

$$\langle T(\int_K f d\mu), x' \rangle = \langle \int_K f d\mu, T'x' \rangle = \int_K \langle f, T'x' \rangle d\mu = \int_K \langle Tf, x' \rangle d\mu = \langle \int_K Tf d\mu, x' \rangle$$

für alle  $x' \in E'$  und somit

$$T(\int_K f(t) d\mu(t)) = \int_K Tf(t) d\mu(t). \quad (16)$$

**Fourier-Entwicklung von  $C^\infty$ -Funktionen.** a) Nach Satz 1.7 ist die Fourier-Abbildung  $\mathcal{F} : f \mapsto (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$  ein Isomorphismus von  $\mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$  auf den Fréchetraum  $s(\mathbb{Z}^n)$  der schnell fallenden Folgen. Für einen quasivollständigen lokalkonvexen Raum  $F$  definieren wir den Raum der  $F$ -wertigen schnell fallenden Folgen als

$$s(\mathbb{Z}^n, F) := \{x = (x_k) \in F^{\mathbb{Z}^n} \mid \forall j \in \mathbb{N}_0 \forall q \in \mathbb{H}(F) : \|x\|_{j,q} := \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^j q(x_k) < \infty\}$$

(vgl. Aufgabe 1.5). Nach einer Folgerung aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (vgl. S. 148) gilt  $s(\mathbb{Z}^n, F) = s_\sigma(\mathbb{Z}^n, F)$ , und die Sätze 10.6 und 10.5 liefern

$$s(\mathbb{Z}^n, F) = s_\sigma(\mathbb{Z}^n, F) = s_\kappa(\mathbb{Z}^n, F) \simeq s(\mathbb{Z}^n) \varepsilon F. \quad (17)$$

Nach (9) ist  $\mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \varepsilon F \simeq \mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, F)$  der Raum der in jeder Variablen  $2\pi$ -periodischen  $F$ -wertigen  $C^\infty$ -Funktionen. Es ist  $\mathcal{F} \varepsilon I_F : \mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \varepsilon F \rightarrow s(\mathbb{Z}^n) \varepsilon F$  ein Isomorphismus, den wir konkret beschreiben können:

b) Für eine Funktion  $f \in \mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, F)$  definieren wir die *Fourier-Koeffizienten*

$$\hat{f}(k) := (2\pi)^{-n} \int_Q f(y) e^{-i\langle k|y \rangle} dy \in F, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad (18)$$

mit  $Q = [-\pi, \pi]^n$  mittels (13). Wegen (14) ist  $(\mathcal{F} \varepsilon I_F)(\lambda(f)) = \lambda((\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}^n})$ . Daher gilt:

### Satz 10.8

*Es sei  $F$  ein quasivollständiger lokalkonvexer Raum. Die durch  $\mathcal{F} : f \mapsto (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$  gegebene Fourier-Abbildung ist ein Isomorphismus von  $\mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, F)$  auf  $s(\mathbb{Z}^n, F)$ . Für  $f \in \mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, F)$  gilt die Fourier-Entwicklung  $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{i\langle k|x \rangle}$  in diesem Raum.*

Dies lässt sich natürlich auch ohne Verwendung von  $\varepsilon$ -Produkten wie in Satz 1.7 beweisen. Ähnlich wie in Abschnitt 2.4 ergibt sich nun:

### Satz 10.9

*Es seien  $F$  ein quasivollständiger lokalkonvexer Raum und  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann ist  $\mathcal{D}(\Omega) \otimes F$  dicht in  $\mathcal{D}(\Omega, F)$  und in  $\mathcal{E}(\Omega, F)$ .*

**BEWEIS.** Es ist  $\mathcal{D}(\Omega, F)$  dicht in  $\mathcal{E}(\Omega, F)$ . Für  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, F)$  sei  $K := \text{supp } \varphi \Subset \Omega$ . Für großes  $\ell \in \mathbb{N}$  definiert  $\varphi$  eine  $2\pi\ell$ -periodische Funktion  $\varphi_p$ . Diese approximieren wir mittels Satz 10.8 durch Funktionen  $\sum_{j=1}^r \alpha_j \otimes y_j \in \mathcal{E}_{2\pi\ell}(\mathbb{R}^n) \otimes F$  in  $\mathcal{E}_{2\pi\ell}(\mathbb{R}^n, F)$ . Nun wählen wir  $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$  mit  $\eta = 1$  auf  $K$  und approximieren  $\varphi = \eta\varphi_p$  durch  $\sum_{j=1}^r \eta\alpha_j \otimes y_j \in \mathcal{D}(\Omega) \otimes F$  in  $\mathcal{D}(\Omega, F)$ .  $\diamond$

**Differentialoperatoren und Faltungsoperatoren.** a) Ein Differentialoperator  $P(D)$  lässt sich auch auf Vektorfunktionen anwenden, und wir bezeichnen ihn dann mit  $P(D)^F : \mathcal{E}(\Omega, F) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega, F)$ . Mit der Identifikation  $\mathcal{E}(\Omega, F) \simeq \mathcal{E}(\Omega) \varepsilon F$  für einen quasivollständigen lokalkonvexen Raum  $F$  gilt dann  $P(D)^F \simeq P(D) \varepsilon I_F$  aufgrund von (11) und (8).

b) Eine Distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  definiert *Faltungsoperatoren*  $u* \in L(\mathcal{D}(K), \mathcal{E}(\mathbb{R}^n))$  für jede kompakte Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ . Mittels  $(u*) \varepsilon I_F$  definieren wir dann auch Faltungsoperatoren  $u*^F \in L(\mathcal{D}(K, F), \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, F))$  auf Vektorfunktionen.

c) Besitzt ein Operator  $P(D) : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  einen *stetigen linearen Lösungsoperator*  $R : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  (vgl. Abschnitt 9.6), so ist  $R \varepsilon I_F$  wegen (12) ein solcher zu  $P(D) \varepsilon I_F$ ; somit ist auch  $P(D)^F : \mathcal{E}(\Omega, F) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega, F)$  rechtsinvertierbar und insbesondere surjektiv.

Ein Funktional  $v \in \mathcal{D}'(\Omega, F)'$  lässt sich auf offene Teilmengen von  $\Omega$  einschränken, und wie auf S. 42 definieren wir den *Träger* von  $v$  als

$$\text{supp } v := \Omega \setminus \bigcup \{ \omega \subseteq \Omega \text{ offen} \mid v|_{\omega} = 0 \}.$$

Der Satz von Malgrange 9.16 gilt auch für Funktionen mit Werten in *Frécheträumen*:

### Theorem 10.10

Es seien  $P \in \mathcal{P}_n$  ein Polynom und  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $P$ -konvexe offene Menge. Für einen Fréchetraum  $F$  ist dann der Differentialoperator  $P(D)^F : \mathcal{E}(\Omega, F) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega, F)$  surjektiv.

BEWEIS. Wir weisen die in Theorem 9.10 formulierten Bedingungen nach.

a) Zum Beweis von (9.14) ist zu  $f \in \mathcal{E}(\Omega, F)$  und einer kompakten Menge  $K \subseteq \Omega$  eine Funktion  $g \in \mathcal{E}(\Omega, F)$  mit  $P(D)^F g = f$  nahe  $K$  zu konstruieren. Dazu seien  $3\delta = d(K, \partial\Omega) > 0$  und  $\eta \in \mathcal{D}(K_{2\delta})$  mit  $\eta = 1$  auf  $K_\delta$ ; dann gilt  $\eta f \in \mathcal{D}(K_{2\delta}, F)$ . Nach Theorem 5.9 besitzt  $P(D)$  eine *Fundamentallösung*  $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Für die Funktion  $g := E *^F (\eta f) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, F)$  gilt dann  $P(D)^F g = \eta f$  aufgrund von Formel (12), also  $P(D)^F g = f$  auf  $K_\delta$ .

b) Zum Nachweis von (9.15) genügt es, wie im Beweis von Satz 9.16

$$\forall K \Subset \Omega \exists K' \Subset \Omega \forall v \in \mathcal{E}(\Omega, F)' : \text{supp } P(D)^{F'} v \subseteq K \Rightarrow \text{supp } v \subseteq K' \quad (19)$$

zu zeigen; aufgrund der  $P(D)$ -Konvexität von  $\Omega$  ist dies für *skalare* Distributionen  $v$  erfüllt (vgl. S. 209). Für  $v \in \mathcal{E}(\Omega, F)'$  und  $y \in F$  definieren wir Distributionen  $v_y \in \mathcal{E}(\Omega)'$  durch  $v_y(\phi) := v(\phi y)$  für  $\phi \in \mathcal{E}(\Omega)$ . Nun sei  $\text{supp } P(D)^{F'} v \subseteq K$ . Im Fall  $\text{supp } \phi \cap K = \emptyset$  ist dann

$$v_y(P(D)\phi) = v(P(D)^F(\phi y)) = P(D)^{F'} v(\phi y) = 0,$$

also  $\text{supp } P(-D)v_y \subseteq K$  für alle  $y \in F$ . Dies impliziert  $\text{supp } v_y \subseteq K'$  für alle  $y \in F$ . Mit  $\omega := \Omega \setminus K'$  folgt dann  $v(\sum_{j=1}^r \phi_j y_j) = 0$  für alle  $\phi_j \in \mathcal{D}(\omega)$  und  $y_j \in F$ . Mit Satz 10.9 ergibt sich dann  $v = 0$  auf  $\mathcal{D}(\omega, F)$  und somit  $\text{supp } v \subseteq K'$ .  $\diamond$

Theorem 10.10 kann auch mittels *Tensorprodukt-Methoden*, die wir ab Abschnitt 10.4 entwickeln werden, auf den skalaren Fall zurückgeführt werden (vgl. S. 283).

Insbesondere ist also der Cauchy-Riemann-Operator  $\bar{\partial} : \mathcal{E}(\Omega, F) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega, F)$  für Frécheträume  $F$  über jeder offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  surjektiv, da  $\Omega$  nach Satz 9.21  $\bar{\partial}$ -konvex ist.

### 10.3 Holomorphe Funktionen und Cousin-Probleme

Nun gehen wir zur Untersuchung *holomorpher* Vektorfunktionen über; funktionentheoretische Methoden spielen eine wichtige Rolle in der *Spektraltheorie* in Teil III des Buches. Das folgende Resultat geht im Wesentlichen auf N. Dunford (1938) zurück:

#### Satz 10.11

Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $F$  ein quasivollständiger lokalkonvexer Raum. Für eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow F$  sind äquivalent:

- (a) Es gilt  $f \in C^\infty(\Omega, F)$  mit  $\bar{\partial}f = 0$ .
- (b)  $f$  ist in jedem Punkt aus  $\Omega$  komplex-differenzierbar.
- (c)  $f$  ist stetig, und es gibt eine die Punkte von  $F$  trennende Menge  $S \subseteq F'$ , sodass  $y' \circ f$  für alle  $y' \in S$  holomorph ist.
- (d)  $f$  ist schwach holomorph.
- (e) Für  $w \in \Omega$  und  $\rho = d(w, \partial\Omega)$  gilt eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - w)^k \quad \text{für } |z - w| < \rho \text{ mit Vektoren } a_k \in F. \quad (20)$$

BEWEIS. „(a)  $\Rightarrow$  (b)“ folgt wie im skalaren Fall, „(b)  $\Rightarrow$  (c)“ ist klar, und die Implikation „(c)  $\Rightarrow$  (d)“ ergibt sich aus (7), da  $\lambda(f) : F'_k \rightarrow \mathcal{C}(\Omega)$  nach Satz 10.1 stetig ist. „(d)  $\Rightarrow$  (e)“: Nach Satz 10.7 gilt  $f \in C^\infty(\Omega, F)$ . Für  $0 < r < \rho$  definieren wir

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(w)} \frac{f(z)}{(z-w)^{k+1}} dz \in F, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (21)$$

Dieses Integral ist von der Wahl von  $0 < r < \rho$  unabhängig, da dies für alle  $y' \in F'$  aufgrund des *Cauchyschen Integralsatzes* für skalare Funktionen auf  $\langle a_k, y' \rangle$  zutrifft. Für  $0 < r < \rho$  gelten daher *Cauchy-Abschätzungen*

$$q(a_k) \leq C(q, r) r^{-k} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0, \quad (22)$$

und somit ist die *Potenzreihe* in (20) auf  $U_\rho(w)$  in  $F$  konvergent. Wegen (14) hat man  $\langle f(z), y' \rangle = \langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - w)^k, y' \rangle$  für alle  $y' \in F$ , und somit gilt (20).

„(e)  $\Rightarrow$  (d)“ ist klar, und „(d)  $\Rightarrow$  (a)“ folgt aus Satz 10.7 und (8).  $\diamond$

Man kann auch „(e)  $\Rightarrow$  (a)“ wie im skalaren Fall zeigen. In Bedingung (c) genügt an Stelle der Stetigkeit auch die *lokale Beschränktheit* von  $f$  (vgl. [Große-Erdmann 2004]).

**Zusatz.** Es seien  $F$  ein tonnelierter Raum und  $f : \Omega \rightarrow F'$ , sodass die skalaren Funktionen  $z \rightarrow \langle x, f(z) \rangle$  für alle  $x \in F$  holomorph sind. Dann besitzt  $f$  eine Potenzreihenentwicklung (20) in  $F'_\beta$ .

Dies ergibt sich ähnlich wie im Beweisteil „(d)  $\Rightarrow$  (e)“ von Satz 10.11.

**Holomorphe Funktionen.** a) Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $F$  ein quasivollständiger lokalkonvexer Raum. Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow F$  heißt *holomorph*, wenn die äquivalenten Bedingungen aus Satz 10.11 erfüllt sind. Der Raum  $\mathcal{H}(\Omega, F)$  aller holomorphen  $F$ -wertigen Funktionen auf  $\Omega$  ist ein abgeschlossener Unterraum von  $\mathcal{E}(\Omega, F)$  und auch von  $\mathcal{C}(\Omega, F)$ , und aufgrund der Sätze 10.6 und 10.5 gilt

$$\mathcal{H}(\Omega, F) = \mathcal{H}_\sigma(\Omega, F) = \mathcal{H}_\kappa(\Omega, F) \simeq \mathcal{H}(\Omega) \varepsilon F. \quad (23)$$

b) Mit Hilfe des *Satzes von Hahn-Banach* lassen sich viele Resultate über skalare holomorphe Funktionen auf den Fall von Vektorfunktionen in  $\mathcal{H}(\Omega, F)$  übertragen:

c) Es gilt der *Cauchysche Integralsatz*: Für jede offene Menge  $D \Subset \Omega$  mit stückweise glattem Rand gilt  $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$  (vgl. etwa [Kaballo 1999], 22.9).

d) Weiter gilt die *Cauchysche Integralformel*: Für jede offene Menge  $D \Subset \Omega$  mit stückweise glattem Rand gilt (vgl. [Kaballo 1999], 22.12)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D. \quad (24)$$

e) Der *Identitätssatz* (vgl. [Kaballo 1997], 28.12) gilt in folgender Form: Es seien  $G \subseteq F$  ein abgeschlossener Unterraum und  $(z_j)$  eine Folge in einem Gebiet  $\Omega$  mit Häufungspunkt in  $\Omega$ . Ist nun  $f \in \mathcal{H}(\Omega, F)$  mit  $f(z_j) \in G$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ , so ist  $\langle f(z_j), y' \rangle = 0$  für  $j \in \mathbb{N}$  und alle  $y' \in G^\perp$ . Nach dem Identitätssatz für skalare holomorphe Funktionen folgt  $\langle f(z), y' \rangle = 0$  für alle  $z \in \Omega$  und alle  $y' \in G^\perp$ , wegen  $G = {}^\perp(G^\perp)$  also  $f(z) \in G$  für alle  $z \in \Omega$ .

f) Der *Satz von Liouville* (vgl. [Kaballo 1999], 22.18) besagt, dass eine beschränkte ganze Funktion  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}, F)$  konstant ist. Eine wichtige Anwendung in der *Spektraltheorie* wurde bereits in [GK], Satz 4.3 gegeben: Für ein Element  $x \in \mathcal{A}$  einer komplexen Banachalgebra  $\mathcal{A}$  ist die *Resolvente*

$$R_x : \rho(x) \rightarrow \mathcal{A}, \quad R_x(z) := (ze - x)^{-1},$$

*holomorph*, und es gilt  $\|R_x(z)\| \rightarrow 0$  für  $|z| \rightarrow \infty$ . Somit kann  $R_x$  keine ganze Funktion sein, und es folgt  $\rho(x) \neq \mathbb{C}$ . Daher ist das *Spektrum*  $\sigma(x) = \mathbb{C} \setminus \rho(x)$  von  $x \in \mathcal{A}$  nicht leer.

**Meromorphe Funktionen.** a) Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $F$  ein quasivollständiger lokalkonvexer Raum. Eine *meromorphe* Funktion von  $\Omega$  nach  $F$  ist eine holomorphe Funktion  $g : \Omega \setminus \Pi_g \rightarrow F$ , wobei  $\Pi_g$  in  $\Omega$  diskret ist und  $g$  höchstens *Pole* in den Punkten  $w \in \Pi_g$  hat. Dies bedeutet, dass für ein geeignetes  $p = p(w)$  die Funktion  $z \mapsto (z - w)^p g(z)$  eine holomorphe Fortsetzung in den Punkt  $w$  hat. Mit  $\mathcal{M}(\Omega, F)$  bezeichnen wir die Menge aller meromorphen Funktionen auf  $\Omega$  mit Werten in  $F$ .

b) Eine Funktion  $g \in \mathcal{M}(\Omega, F)$  hat in jedem Punkt  $w \in \Omega$  eine *Laurent-Entwicklung*

$$g(z) = \sum_{k=-p}^{\infty} a_k (z - w)^k, \quad 0 < |z - w| < \rho, \quad (25)$$

wobei die Koeffizienten  $a_k \in F$  für  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $k \geq -p$  durch (21) gegeben sind. Wegen (22) konvergiert die Reihe (25) absolut und lokal gleichmäßig auf der „gelochten Kreisscheibe“  $U'_\rho(w) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - w| < \rho\}$ . Die Summanden  $\sum_{k=-p}^{-1} a_k (z - w)^k$  mit negativen Exponenten in (25) bilden den *Hauptteil* der Laurent-Reihe, und für  $a_{-p} \neq 0$  heißt  $p$  die *Polordnung* von  $g$  in  $w$ .

Wir untersuchen nun die Gültigkeit des *Satzes von Mittag-Leffler* für  $F$ -wertige meromorphe Funktionen. Dazu wollen wir nicht wie im skalaren Fall in Abschnitt 9.3 argumentieren (vgl. dazu Aufgabe 10.11), sondern eine andere wichtige Methode vorstellen, die im skalaren Fall bereits auf P. Cousin (1895) zurückgeht.

**Konstruktion meromorpher Funktionen.** a) Gegeben seien eine diskrete Menge  $S = \{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  in  $\Omega$  sowie Hauptteile  $P_j(z) = \sum_{k=-p_j}^{-1} a_{k,j} (z - w_j)^k \in \mathcal{M}(\Omega, F)$  für  $j \in \mathbb{N}$ . Wie in Satz 9.15 ist dann eine meromorphe Funktion  $g \in \mathcal{M}(\Omega, F)$  mit  $\Pi_g = \{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  gesucht, die für alle  $j \in \mathbb{N}$  in  $w_j$  genau den Hauptteil  $P_j$  besitzt.

b) Die Mengen  $\omega_j := \Omega \setminus \bigcup_{k \neq j} \{w_k\}$  bilden eine offene Überdeckung von  $\Omega$ . Die Differenzen  $h_{jk} := P_j - P_k$  sind auf  $\omega_j \cap \omega_k = \Omega \setminus \bigcup_{\ell} \{w_\ell\}$  holomorph, und es gilt

$$h_{jk} + h_{k\ell} + h_{\ell j} = 0 \quad \text{auf } \omega_j \cap \omega_k \cap \omega_\ell. \quad (26)$$

Die Funktionen  $h_{jk} \in \mathcal{H}(\omega_j \cap \omega_k, F)$  sind *Cousin-Daten* auf  $\Omega$ :

**Cousin-Probleme.** Allgemeiner sei  $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  eine offene Überdeckung einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Holomorphe Funktionen  $h_{jk} \in \mathcal{H}(\omega_j \cap \omega_k, F)$  heißen  $F$ -wertige *Cousin-Daten* auf  $\Omega$  (bezüglich der Überdeckung  $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ), falls (26) gilt. Das durch

diese Daten gegebene *additive  $F$ -wertige Cousin-Problem* heißt *lösbar*, falls es holomorphe Funktionen  $h_j \in \mathcal{H}(\omega_j, F)$  gibt mit

$$h_{jk} = h_k - h_j \quad \text{auf } \omega_j \cap \omega_k. \quad (27)$$

Beachten Sie bitte die Analogie der Zerlegungen (27) zu den Zerlegungen (9.19) der Mittag-Leffler-Methode 9.14. Mit Hilfe von Theorem 10.10 können wir zeigen:

**Theorem 10.12**

*Für einen Fréchetraum  $F$  ist jedes  $F$ -wertige additive Cousin-Problem auf einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  lösbar.*

BEWEIS. a) Wir konstruieren zunächst eine  $\mathcal{C}^\infty$ -Lösung des Cousin-Problems. Dazu wählen wir gemäß Satz 2.9 eine der Überdeckung  $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  untergeordnete  $\mathcal{C}^\infty$ -Zerlegung der Eins  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\text{supp } \alpha_n \Subset \omega_{\varphi(n)}$ . Für  $z \in \omega_j$  setzen wir dann  $g_j(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(z) h_{\varphi(n)j}(z)$ . Da diese Summe lokal endlich ist, gilt  $g_j \in \mathcal{C}^\infty(\omega_j, F)$ , und weiter ergibt sich mit (26)

$$g_k - g_j = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (h_{\varphi(n)k} - h_{\varphi(n)j}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n h_{jk} = h_{jk} \quad \text{auf } \omega_j \cap \omega_k.$$

b) Insbesondere gilt  $\bar{\partial} g_j = \bar{\partial} g_k$  auf  $\omega_j \cap \omega_k$ , sodass durch diese  $\bar{\partial}$ -Ableitungen eine *global definierte* Funktion  $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, F)$  gegeben ist. Da  $F$  ein Fréchetraum ist, gibt es nach Theorem 10.10 eine Funktion  $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, F)$  mit  $\bar{\partial} u = f$ . Für die Funktionen  $h_j := g_j - u \in \mathcal{C}^\infty(\omega_j, F)$  gilt dann  $\bar{\partial} h_j = 0$ , also  $h_j \in \mathcal{H}(\omega_j, F)$ , und man hat

$$h_k - h_j = g_k - g_j = h_{jk} \quad \text{auf } \omega_j \cap \omega_k. \quad \diamond$$

Aus Theorem 10.12 ergibt sich nun leicht:

**Satz 10.13 (Mittag-Leffler)**

*Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $F$  ein Fréchetraum. Auf einer diskreten Menge  $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  in  $\Omega$  seien Hauptteile  $P_j \in \mathcal{M}(\Omega, F)$  gegeben. Dann gibt es eine meromorphe Funktion  $g \in \mathcal{M}(\Omega, F)$  mit  $\Pi_g = \{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ , sodass  $g - P_j$  für alle  $j \in \mathbb{N}$  in  $w_j$  holomorph ist.*

BEWEIS. Das Cousin-Problem aus obiger Vorüberlegung zur Konstruktion meromorpher Funktionen besitzt nach Theorem 10.12 eine Lösung; es gibt also holomorphe Funktionen  $h_j \in \mathcal{H}(\omega_j, F)$  mit  $P_j - P_k = h_k - h_j$  auf  $\omega_j \cap \omega_k$ . Mit der Definition  $g(z) := P_j(z) + h_j(z)$  für  $z \in \omega_j$  erhalten wir dann global eine meromorphe Funktion  $g \in \mathcal{M}(\Omega, F)$  mit den behaupteten Eigenschaften.  $\diamond$



Theorem 10.12 gilt auch über *Holomorphiegebieten* in  $\mathbb{C}^n$  und kann dann als Erweiterung des Satzes von Mittag-Leffler aufgefasst werden. Für dieses fundamentale *Theorem B* von H. Cartan (1951) sei auf [Gunning und Rossi 1965] oder [Hörmander 1973] verwiesen. Der vektorwertige Fall kann mittels *Tensorprodukt-Methoden* ähnlich wie auf S. 283 auf den skalaren Fall zurückgeführt werden (vgl. [Bungart 1964]).

**Beispiele.** a) Der Satz von Mittag-Leffler gilt *nicht* für Funktionen mit Werten in dem  $(DF)$ -Montelraum  $\varphi$  der endlichen Folgen. Mit den „Einheitsvektoren“  $e_j := (\delta_{jk})_{k \in \mathbb{N}_0}$  geben wir uns die Hauptteile  $P_j(z) = \frac{e_j}{z - w_j}$  in  $\mathcal{M}(\Omega, \varphi)$  vor. Für eine meromorphe Funktion  $g \in \mathcal{M}(\Omega, \varphi)$  wählen wir einen Kreis  $U_{2r}(a) \subseteq \Omega$ , auf dem  $g$  holomorph ist. Dann ist  $g(\overline{U}_r(a))$  in  $\varphi$  kompakt; es gibt also  $m \in \mathbb{N}_0$  mit  $g(z) \in \varphi_m = \bigoplus_{k=1}^m \mathbb{C}$  für alle  $z \in U_r(a)$  (vgl. Aufgabe 7.13). Nach dem *Identitätssatz* auf S. 242 folgt daraus  $g(z) \in \varphi_m$  für alle  $z \in \Omega \setminus \Pi_g$ , und daher kann  $g$  nicht die vorgegebenen Hauptteile besitzen.

b) Aufgrund der Beweise von Satz 10.13 und Theorem 10.12 gelten auch Theorem 10.12 und Theorem 10.10 *nicht* für Funktionen mit Werten in  $\varphi$ .

c) Die Aussagen aus a) und b) gelten an Stelle von  $\varphi$  für  $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  auch für die  $(DF)$ -Montelräume  $\mathcal{C}^m(\Omega)'_\beta$  über offenen Mengen  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Andererseits werden wir in Abschnitt 12.5 die Gültigkeit des Satzes von Mittag-Leffler für gewisse  $(DF)$ -Montelräume wie etwa  $s'_\beta$  beweisen.

Eine weitere Anwendung von Theorem 10.12 ist der folgende *Lifting-Satz* für holomorphe Funktionen:

**Satz 10.14**

Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $\sigma : E \rightarrow Q$  eine Surjektion von Frécheträumen. Zu einer Funktion  $f \in \mathcal{H}(\Omega, Q)$  gibt es ein Lifting  $f^\vee \in \mathcal{H}(\Omega, E)$  mit  $\sigma f^\vee(z) = f(z)$  für alle  $z \in \Omega$ .

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & f^\vee \nearrow & \downarrow \sigma \\ \Omega & \xrightarrow{f} & Q \end{array}$$

BEWEIS. a) Zu  $w \in \Omega$  und  $\rho = d(w, \partial\Omega)$  hat man eine Potenzreihenentwicklung (20)  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k (z - w)^k$  mit  $y_k \in Q$  auf  $U_\rho(w)$ . Für  $0 < r < \rho$  gilt dann  $r^k y_k \rightarrow 0$  in  $Q$ . Nach Satz 6.4 gibt es eine Nullfolge  $(\xi_k)$  in  $E$  mit  $\sigma \xi_k = r^k y_k$ , und wir setzen  $x_k := r^{-k} \xi_k \in E$ . Dann ist die Potenzreihe  $h_w(z) := \sum_{k=0}^{\infty} x_k (z - w)^k$  auf  $U_r(w)$  lokal gleichmäßig konvergent, und für  $h_w \in \mathcal{H}(U_r(w), E)$  gilt  $\sigma h_w = f$  auf  $U_r(w)$ .

b) Es gibt also eine abzählbare offene Überdeckung  $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  von  $\Omega$  und holomorphe Funktionen  $h_j \in \mathcal{H}(\omega_j, E)$  mit  $\sigma h_j = f$  auf  $\omega_j$  für  $j \in \mathbb{N}$ . Mit  $G := N(\sigma)$  gilt dann

$$g_{jk} := h_j - h_k \in \mathcal{H}(\omega_j \cap \omega_k, G) \quad \text{für } j, k \in \mathbb{N},$$

und es gilt Bedingung (26). Nach Theorem 10.12 gibt es Funktionen  $g_j \in \mathcal{H}(\omega_j, G)$  mit

$$g_k - g_j = g_{jk} = h_j - h_k \quad \text{auf } \omega_j \cap \omega_k.$$

Durch  $f^\vee(z) := h_j(z) + g_j(z)$  für  $z \in \omega_j$  wird dann *global* eine holomorphe Funktion  $f^\vee \in \mathcal{H}(\Omega, E)$  definiert, die offenbar  $\sigma f^\vee(z) = f(z)$  für alle  $z \in \Omega$  erfüllt.  $\diamond$

Dieser Lifting-Satz gilt auch für holomorphe Funktionen auf allen offenen Mengen  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ , obwohl additive Cousin-Probleme in diesem Fall i. A. nur über *Holomorphiegebieten* lösbar sind. Dies ergibt sich aus einem alternativen Beweis von Satz 10.14 am Ende von Abschnitt 11.4.

## 10.4 $\varepsilon$ -Tensorprodukte und Approximationseigenschaft

**Endlichdimensionale Operatoren und Tensoren.** a) Es seien  $E, F$  lokalkonvexe Räume. Für Vektoren  $x_1, \dots, x_r \in E$  und  $y_1, \dots, y_r \in F$  wird durch

$$t : y' \mapsto \sum_{j=1}^r \langle y_j, y' \rangle x_j \quad (28)$$

ein endlichdimensionaler Operator  $t \in L_e(F'_\kappa, E) = E \varepsilon F$  definiert, den wir mit

$$\sum_{j=1}^r x_j \otimes y_j \quad (29)$$

bezeichnen. Umgekehrt sei  $u \in E \varepsilon F = L_e(F'_\kappa, E)$  mit  $\dim R(u) < \infty$  gegeben. Wir wählen eine Basis  $\{x_1, \dots, x_r\}$  von  $R(u)$  und betrachten die duale Basis  $\{f_1, \dots, f_r\}$  von  $R(u)'$ , sodass also  $f_i(x_j) = \delta_{ij}$  gilt. Für  $y' \in F'$  folgt dann  $u(y') = \sum_{j=1}^r \alpha_j x_j$  mit  $\alpha_j = f_j(u(y')) = \langle y_j, y' \rangle$  mit  $y_j := f_j \circ u \in (F'_\kappa)' = F$ , und somit gilt  $u = \sum_{j=1}^r x_j \otimes y_j$ .

b) Der Raum  $E \otimes F$  aller endlichdimensionalen linearen Operatoren von  $F'_\kappa$  nach  $E$  heißt *Tensorprodukt* von  $E$  und  $F$ , mit der von  $E \varepsilon F$  induzierten lokalkonvexen Topologie  $\varepsilon$ -*Tensorprodukt* oder *injektives Tensorprodukt*  $E \otimes_\varepsilon F$  von  $E$  und  $F$ . Die Vervollständigung  $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$  heißt *vollständiges  $\varepsilon$ -Tensorprodukt* von  $E$  und  $F$  (vgl. Satz 8.16). Sind  $E$  und  $F$  vollständig, so ist  $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$  aufgrund von Satz 10.3 der Abschluss von  $E \otimes F$  im  $\varepsilon$ -Produkt  $E \varepsilon F$ .

c) Der Ausdruck in (29) definiert natürlich auch den zu (28) dualen Operator

$$t' : x' \mapsto \sum_{j=1}^r \langle x_j, x' \rangle y_j$$

in  $F \varepsilon E$ . Wie in Satz 10.3 hat man die Isomorphie  $E \otimes_\varepsilon F \cong F \otimes_\varepsilon E$ , die im Fall von Banachräumen sogar eine Isometrie ist. Nach (4) ist durch

$$(p \otimes_\varepsilon q) \left( \sum_{j=1}^r x_j \otimes y_j \right) = \sup \{ | \sum_{j=1}^r \langle x_j, x' \rangle \langle y_j, y' \rangle | \mid x' \in U_p^\circ, y' \in U_q^\circ \} \quad (30)$$

für  $p \in \mathbb{H}(E)$  und  $q \in \mathbb{H}(F)$  ein Fundamentalsystem von Halbnormen auf  $E \otimes_\varepsilon F$  gegeben.

d) Für lokalkonvexe Räume  $E_j$  und  $F_j$ , Operatoren  $T \in L(E_1, E_2)$  und  $S \in L(F_1, F_2)$  sowie  $t = \sum_j x_j \otimes y_j \in E_1 \otimes F_1$  gilt

$$((T \varepsilon S)t)y' = T(t(S'y')) = \sum_j \langle y_j, S'y' \rangle T x_j \quad \text{für } y' \in F'_2.$$

Die Einschränkung  $T \otimes S := T \varepsilon S|_{E_1 \otimes F_1}$  heißt *Tensorprodukt* der Operatoren  $T$  und  $S$ ; dieser Operator ist also gegeben durch

$$(T \otimes S) \left( \sum_j x_j \otimes y_j \right) := (T \varepsilon S)t = \sum_j T x_j \otimes S y_j. \quad (31)$$

Offenbar ist das Tensorprodukt  $T \otimes S : E_1 \otimes_\varepsilon F_1 \rightarrow E_2 \otimes_\varepsilon F_2$  stetig.

**Beispiele.** a) Es seien  $\mathcal{G}(M)$  ein Funktionenraum wie auf S. 235 und  $F$  ein vollständiger lokalkonvexer Raum. Mit der Bijektion  $\lambda : \mathcal{G}_\kappa(M, F) \rightarrow \mathcal{G}(M) \varepsilon F$  aus Satz 10.5 ist dann  $\lambda^{-1} \left( \sum_{j=1}^r g_j \otimes y_j \right)$  die Funktion  $t \mapsto \sum_{j=1}^r g_j(t) y_j$  in  $\mathcal{G}_\kappa(M, F)$ . Wir können also  $\mathcal{G}(M) \otimes F$  mit dem Raum der Funktionen in  $\mathcal{G}_\kappa(M, F)$  identifizieren, deren Bild in einem endlichdimensionalen Unterraum von  $F$  liegt.

b) Für Banachräume  $X, Y$  liefert Satz 10.4 die Isometrien  $\mathcal{F}(X, Y) \cong X' \otimes_\varepsilon Y \cong Y \otimes_\varepsilon X'$  für den Raum der endlichdimensionalen stetigen linearen Operatoren von  $X$  nach  $Y$ .

Wir untersuchen nun die Frage, wann  $E \otimes F$  in  $E \varepsilon F$  dicht ist. Diese hängt eng zusammen mit der in [Grothendieck 1955] und [Schwartz 1957b] eingeführten und untersuchten

**Approximationseigenschaft.** a) Ein lokalkonvexer Raum  $E$  hat die (*Schwartzsche*) *Approximationseigenschaft* (A.E.), falls die Identität  $I_E$  auf  $E$  gleichmäßig auf allen Mengen in  $\mathfrak{K}(E)$  durch endlichdimensionale Operatoren approximiert werden kann, falls also  $I_E$  im Abschluss von  $\mathcal{F}(E)$  in  $L_\kappa(E)$  liegt.

b) Der Raum  $E$  hat die *Grothendiecksche Approximationseigenschaft*, falls  $I_E$  im Abschluss von  $\mathcal{F}(E)$  in  $L_\gamma(E)$  liegt. Wir untersuchen hier die Schwartzsche A.E.; für quasivollständige Räume fallen beide Eigenschaften zusammen.

c) Der Raum  $E$  hat die *beschränkte Approximationseigenschaft* (b.A.E.), falls ein *gleichstetiges* Netz  $(F_\alpha)$  in  $L(E)$  mit  $F_\alpha x \rightarrow x$  für alle  $x \in E$  existiert. In diesem Fall gilt auch  $F_\alpha \rightarrow I_E$  in  $L_\gamma(E)$  nach Satz 1.4, sodass die b.A.E. die A.E. impliziert.

Beispiele für Räume mit A.E. sind

**Räume mit Schauder-Basis.** a) Eine Folge  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  in einem lokalkonvexen Raum  $E$  heißt *Schauder-Basis* von  $E$ , falls jeder Vektor  $x \in E$  eine *eindeutige* Darstellung  $x = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x_j$  mit  $\alpha_j \in \mathbb{K}$  hat und die Funktionale  $x'_j : x \mapsto \alpha_j$  stetig sind. Ein Raum mit Schauder-Basis ist separabel.

b) Eine abzählbare Orthonormalbasis eines Hilbertraumes ist offenbar eine Schauder-Basis desselben.

c) Im Fall eines Fréchetraumes  $E$  folgt die Stetigkeit der Funktionale  $x'_j : x \mapsto \alpha_j$  automatisch aus dem Satz von der offenen Abbildung, vgl. dazu [Meise und Vogt 1992], Corollar 28.11.

### Satz 10.15

*Ein tonnelierter Raum  $E$  mit Schauder-Basis besitzt die b.A.E.*

BEWEIS. Für die Projektionen  $P_n : x \mapsto \sum_{j=0}^n \langle x, x'_j \rangle x_j$  in  $\mathcal{F}(E)$  gilt  $P_n x \rightarrow x$  für alle  $x \in E$ , und nach Theorem 7.4 ist die Menge  $\{P_n\}$  gleichstetig.  $\diamond$

**Köthe-Räume.** a) Eine Matrix  $A = (a_{j,k})_{j,k \in \mathbb{N}_0}$  heißt *Köthe-Matrix*, falls stets  $0 \leq a_{j,k} \leq a_{j,k+1}$  gilt und zu jedem  $j \in \mathbb{N}_0$  ein  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $a_{j,k} > 0$  existiert. Die für  $p \geq 1$  durch

$$\begin{aligned} \lambda_p(A) &:= \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \mid \forall k \in \mathbb{N}_0 : \|x\|_k := \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_{j,k} x_j|^p\right)^{1/p} < \infty\}, \\ \lambda_{\infty}(A) &:= \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \mid \forall k \in \mathbb{N}_0 : \|x\|_k := \sup_{j=0}^{\infty} a_{j,k} |x_j| < \infty\}, \\ c_0(A) &:= \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \in \lambda_{\infty}(A) \mid \forall k \in \mathbb{N}_0 : \lim_{j \rightarrow \infty} a_{j,k} |x_j| = 0\} \end{aligned}$$

definierten Frécheträume heißen *Köthe-Räume*. In  $\lambda_p(A)$  mit  $p < \infty$  und in  $c_0(A)$  gilt  $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n$  mit den „Einheitsvektoren“  $e_n = (\delta_{jn})$ , und die linearen Funktionale  $e'_n : x \mapsto x_n$  sind stetig. Diese Räume besitzen also eine Schauder-Basis und somit die b.A.E.

b) Mit  $a_{j,k} = 1$  für alle  $j$  und  $k$  ergeben sich die Banachräume  $\ell_p$ ,  $\ell_{\infty}$  und  $c_0$ .

c) Im Fall  $a_{j,k} := 1$  für  $j \leq k$  und  $a_{j,k} := 0$  für  $j > k$  gilt  $\lambda_p(A) \simeq c_0(A) \simeq \omega$  für alle  $1 \leq p \leq \infty$ .

In [Meise und Vogt 1992], § 27 werden Köthe-Räume ausführlich untersucht. Wichtige Spezialfälle sind

**Potenzreihenräume.** a) Für  $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und eine Folge  $\alpha = (\alpha_j)$  mit  $0 \leq \alpha_j \uparrow \infty$  definieren wir die *Potenzreihenräume*

$$\Lambda_R(\alpha) := \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \mid \forall t < R : \|x\|_t := \left(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^2 e^{2t\alpha_j}\right)^{1/2} < \infty\}. \quad (32)$$

Für jede Folge  $(t_k)$  in  $(-\infty, R)$  mit  $t_k \uparrow R$  gilt dann  $\Lambda_R(\alpha) \simeq \lambda_2(A)$  mit der Köthe-Matrix  $A := (e^{t_k \alpha_j})$ .

b) Für  $\alpha_j := \log(j+1)$  ergibt sich  $\Lambda_\infty(\log(j+1)) \simeq s(\mathbb{N}_0)$ . Mit diesem Raum besitzen auch die zu ihm isomorphen Räume  $C^\infty[a, b]$ ,  $\mathcal{D}[a, b]$ ,  $s(\mathbb{Z}^n)$ ,  $\mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  Schauder-Basen und die b.A.E.

c) Die Monome  $\{z^j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$  bilden eine Schauder-Basis der Räume  $\mathcal{H}(U_R(0))$  holomorpher Funktionen, und somit besitzen diese Räume die b.A.E. Durch  $(x_j) \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} x_j z^j$  werden Isomorphismen  $\Lambda_R(j) \simeq \mathcal{H}(U_R(0))$  definiert (vgl. auch Aufgabe 1.7).

Auch viele weitere *Funktionenräume* besitzen eine Schauder-Basis; die Konstruktion einer solchen ist oft wesentlich schwieriger als der Nachweis der A.E. Wir verweisen dazu auf [Lindenstrauß und Tzafriri 1977] und Aufgabe 10.17.

### Satz 10.16

a) Ein Hilbertraum  $H$  besitzt die b.A.E.

b) Für einen kompakten Raum  $K$  besitzt der Banachraum  $\mathcal{C}(K)$  die b.A.E.

BEWEIS. a) Es sei  $\{e_j\}_{j \in J}$  eine Orthonormalbasis von  $H$ . Die endlichen Teilmengen  $\mathfrak{E}(J)$  von  $J$  bilden ein gerichtetes System. Für  $\alpha \in \mathfrak{E}(J)$  sei  $P_\alpha$  die orthogonale Projektion auf  $[e_j]_{j \in \alpha}$ . Für das Netz  $(P_\alpha)$  in  $\mathcal{F}(H)$  gilt dann  $\|P_\alpha\| \leq 1$  für alle  $\alpha \in \mathfrak{E}(J)$  und  $P_\alpha x \rightarrow x$  für alle  $x \in H$ .

b) Das System  $J$  aller *endlichen* offenen Überdeckungen  $\omega = \{\omega_j\}$  von  $K$  ist gerichtet bezüglich Verfeinerung. Für  $\omega \in J$  wählen wir Punkte  $x_j \in \omega_j$  und eine  $\omega$  untergeordnete stetige Zerlegung der Eins  $\{\alpha_j\}$  auf  $K$  (vgl. S. 35). Für die Operatoren  $F_\omega = \sum_j \delta_{x_j} \otimes \alpha_j : f \mapsto \sum_j f(x_j) \alpha_j$  in  $\mathcal{F}(\mathcal{C}(K))$  gilt

$$|F_\omega f(x)| = \left| \sum_j f(x_j) \alpha_j(x) \right| \leq \|f\| \sum_j \alpha_j(x) \leq \|f\|$$

für  $x \in K$  und  $f \in \mathcal{C}(K)$ , also  $\|F_\omega\| \leq 1$ . Zu  $\varepsilon > 0$  und  $y \in K$  gibt es eine offene Umgebung  $U(y)$  von  $y$  mit  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  für  $x \in U(y)$ . Für jede Verfeinerung  $\omega \in J$  einer endlichen Teilüberdeckung  $\omega_0 \in J$  der Überdeckung  $\{U(y) \mid y \in K\}$  von  $K$  gilt dann  $|f(x) - f(x_j)| \leq 2\varepsilon$  für  $x \in \omega_j$ , und es folgt

$$|f(x) - F_\omega f(x)| = \left| \sum_j (f(x) - f(x_j)) \alpha_j(x) \right| \leq 2\varepsilon \quad \text{für alle } x \in K. \quad \diamond$$

Wir kommen nun zu äquivalenten Formulierungen der A.E.:

**Satz 10.17**

Für einen lokalkonvexen Raum  $E$  sind äquivalent:

- (a)  $E$  hat die A.E.
- (b) Es ist  $E \otimes F$  dicht in  $E \varepsilon F$  für alle lokalkonvexen Räume  $F$ .
- (c) Es ist  $E \otimes Y$  dicht in  $E \varepsilon Y$  für alle Banachräume  $Y$ .
- (d) Es ist  $E \otimes E'$  dicht in  $E \varepsilon E'_\kappa$ .

BEWEIS. „(a)  $\Rightarrow$  (b)“: Für einen Operator  $u \in E \varepsilon F = L_e(F'_\kappa, E)$  und  $U \in \mathbb{U}(F)$  gilt  $u(U^\circ) \in \mathfrak{K}(E)$ . Für ein Netz  $(t_\alpha)$  in  $\mathcal{F}(E)$  mit  $t_\alpha \rightarrow I_E$  in  $L_\kappa(E)$  folgt daher  $E \otimes F \ni t_\alpha \circ u \rightarrow u$  in  $L_e(F'_\kappa, E) = E \varepsilon F$ .

„(b)  $\Rightarrow$  (c)“ ist klar.

„(c)  $\Rightarrow$  (d)“: Für einen Operator  $u \in E \varepsilon E'_\kappa$  gilt  $u' \in E'_\kappa \varepsilon E = L_e(E'_\kappa)$ . Für eine Halbnorm  $p \in \mathbb{H}(E'_\kappa)$  betrachten wir den lokalen Banachraum  $(\widehat{E'_\kappa})_p$  und die Abbildung  $\rho_p \circ u' \in L_e(E'_\kappa, (\widehat{E'_\kappa})_p)$  (vgl. S. 151). Zu  $V \in \mathbb{U}(E)$  und  $\varepsilon > 0$  gibt es nach Voraussetzung (c) einen Tensor  $t_1 \in E \otimes (\widehat{E'_\kappa})_p$  mit

$$\sup_{x' \in V^\circ} \|\rho_p u'(x') - t_1(x')\|_{(\widehat{E'_\kappa})_p} \leq \varepsilon.$$

Wir können  $t_1$  durch  $t_2 = \sum_{j=1}^r x_j \otimes \rho_p(x'_j) \in E \otimes (E'_\kappa)_p$  bis auf  $\varepsilon$  approximieren, und

für  $t := \sum_{j=1}^r x_j \otimes x'_j \in E \otimes E'$  gilt dann  $\sup_{x' \in V^\circ} p(u'(x') - \sum_{j=1}^r \langle x_j, x' \rangle x'_j) \leq 2\varepsilon$ . Somit ist  $E \otimes E'$  dicht in  $E \varepsilon E'_\kappa$ .

„(d)  $\Rightarrow$  (a)“: Da die Topologie von  $E = (E'_\kappa)'$  schwächer als die von  $(E'_\kappa)'_\kappa$  ist, hat man  $L(E) \subseteq L((E'_\kappa)'_\kappa, E)$ . Wegen  $\mathfrak{K}(E) = \mathfrak{E}((E'_\kappa)')$  ist  $L_\kappa(E)$  ein topologischer Unterraum von  $E \varepsilon E'_\kappa = L_e((E'_\kappa)'_\kappa, E)$ . Nach Voraussetzung ist  $I_E$  in  $E \varepsilon E'_\kappa$  durch Tensoren in  $E \otimes E' \subseteq L(E)$  approximierbar, und dies gilt dann auch in  $L_\kappa(E)$ .  $\diamond$

Beweisteil „(c)  $\Rightarrow$  (d)“ liefert auch das folgende Resultat:

**Satz 10.18**

Ein lokalkonvexer Raum  $E$  besitze ein Fundamentalsystem  $\mathbb{H}$  von Halbnormen, sodass die lokalen Banachräume  $\widehat{E}_p$  für alle  $p \in \mathbb{H}$  die A.E. haben. Dann besitzt auch  $E$  die A.E.

BEWEIS. Für  $u \in E \varepsilon F = L_e(F'_\kappa, E)$  und  $p \in \mathbb{H}(E)$  kann  $\rho_p \circ u \in L_e(F'_\kappa, \widehat{E}_p)$  durch endlichdimensionale Operatoren approximiert werden.  $\diamond$

**Beispiele.** a) Aus Satz 10.18 ergibt sich die A.E. des Fréchetraumes  $\mathcal{H}(\Omega)$  der holomorphen Funktionen auf einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  (vgl. Aufgabe 10.11).

b) Ebenso folgt die A.E. des Fréchetraumes  $\mathcal{E}(\Omega)$  der  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen auf einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diese ergibt sich auch mittels Kriterium (c) aus Satz 10.17; für einen Banachraum  $Y$  ist nämlich  $\mathcal{E}(\Omega) \otimes Y$  nach Satz 10.9 dicht in  $\mathcal{E}(\Omega, Y) \simeq \mathcal{E}(\Omega) \varepsilon Y$ .

Wir zeigen in Abschnitt 11.4, dass *Unterräume von  $\mathcal{E}(\Omega)$*  ebenfalls die A.E. haben.

Nun gehen wir auf die *Approximation kompakter Operatoren* durch endlichdimensionale Operatoren ein und verwenden dazu das folgende

**Lemma 10.19**

Es seien  $E$  ein lokalkonvexer Raum,  $C \in \mathfrak{K}(E)$  und  $f \in E^\times$  eine Linearform, die auf  $C$  stetig ist. Zu  $\eta > 0$  gibt es dann  $x' \in E'$  mit  $\sup_{x \in C} |f(x) - x'(x)| \leq \eta$ .

BEWEIS. Es gibt  $U \in \mathcal{U}(E)$  mit  $|f(x)| \leq \eta$  für alle  $x \in U \cap C$ . Nach Aufgabe 8.1 gilt dann im Dualsystem  $\langle E, E^\times \rangle$

$$f \in \eta(U \cap C)^\circ = \eta \overline{\Gamma(U^\circ \cup C^\circ)}^\sigma \subseteq \eta(\overline{U^\circ + C^\circ}^\sigma) = \eta(U^\circ + C^\circ),$$

da  $U^\circ$  in  $\sigma(E^\times, E)$  kompakt ist. Dies zeigt  $f = x' + g$  mit  $x' \in \eta U^\circ \subseteq E'$  und  $g \in \eta C^\circ$ , also  $|g(x)| \leq \eta$  für alle  $x \in C$ .  $\diamond$

**Satz 10.20**

Es seien  $X$  und  $Y$  Banachräume.

a) Genau dann hat  $X'$  die A.E., wenn  $\mathcal{F}(X, Y)$  für alle  $Y$  in  $K(X, Y)$  dicht ist.

b) Genau dann hat  $Y$  die A.E., wenn  $\mathcal{F}(X, Y)$  für alle  $X$  in  $K(X, Y)$  dicht ist.

BEWEIS. a) Nach Satz 10.4 gilt  $K(X, Y) \cong X' \varepsilon Y$ , und wegen  $\mathcal{F}(X, Y) \cong X' \otimes Y$  folgt die Behauptung aus Satz 10.17 (c).

b) „ $\Rightarrow$ “ folgt sofort wie in a). Zum Beweis von „ $\Leftarrow$ “ sei nun  $C \in \mathfrak{K}(Y)$  gegeben. Nach Satz 8.26 gibt es  $K \in \mathfrak{K}(Y)$ , sodass  $C$  im Banachraum  $Y_K$  kompakt ist. Zur Identität  $I \in K(Y_K, Y)$  und  $\eta > 0$  gibt es nach Voraussetzung  $F = \sum_{j=1}^r f_j \otimes y_j \in Y'_K \otimes Y$  mit  $\|I - F\|_{L(Y_K, Y)} \leq \eta$ , insbesondere also  $\sup_{y \in C} \|y - Fy\| \leq \eta$ . Nun fallen auf  $C$  die von  $Y_K$  und  $Y$  induzierten Topologien zusammen, sodass die  $f_j$  auf  $C$  bezüglich der Norm von  $Y$  stetig sind. Ihre Fortsetzungen zu Linearformen  $f_j \in Y^\times$  können nach Lemma 10.19 gleichmäßig auf  $C$  durch Funktionale in  $Y'$  approximiert werden, und damit folgt die Behauptung.  $\diamond$

Aussage „ $\Leftarrow$ “ in b) ist eine Verschärfung von Satz 10.17 (c): Zum Nachweis der A.E. von  $Y$  genügt es, die Dichtheit von  $Z \otimes Y$  in  $Z \varepsilon Y$  nur für *duale* Banachräume  $Z = X'$  zu testen. Es ist nicht bekannt, ob die Dichtheit von  $\mathcal{F}(X)$  in  $K(X)$  die A.E. von  $X$  impliziert.

Viele „konkrete Räume“ besitzen die A.E., viele separable „konkrete Räume“ sogar eine Schauder-Basis. Daher formulierte S. Banach 1932 die Frage, ob *alle* separablen Banachräume eine Schauder-Basis besitzen. In [Grothendieck 1955], I § 5 fragte A. Grothendieck, ob *alle* Banachräume und damit auch alle lokalkonvexen Räume die A.E. besitzen, und gab zahlreiche interessante Umformulierungen des Problems an, u. a. auch zu konkreten Aussagen über gewisse unendliche Matrizen oder stetige Integralkerne auf  $[0,1]^2$  (vgl. Aufgabe 11.13). Dieses *Approximationsproblem* und damit auch Banachs *Basisproblem* wurde von P. Enflo 1972 (vgl. [Enflo 1973]) *negativ* gelöst durch Konstruktion eines „exotischen“ Unterraums von  $c_0$  ohne A.E. Eine vereinfachte Konstruktion und weitere Informationen sind in [Lindenstrauß und Tzafriri 1977], Abschnitte 1.e und 2.d angegeben. Nach [Szankowski 1981] besitzt der konkrete Operatorenraum  $L(\ell_2)$  die A.E. *nicht*. Es ist nicht bekannt, ob der Banachraum  $\mathcal{H}^\infty(D)$  der beschränkten holomorphen Funktionen auf dem offenen Einheitskreis die A.E. besitzt.

## 10.5 $\pi$ -Tensorprodukte und Bochner-Integrale

Wir führen nun eine weitere wichtige lokalkonvexe Topologie auf einem Tensorprodukt  $E \otimes F$  lokalkonvexer Räume ein:

**Zulässige Topologien auf Tensorprodukten.** Eine lokalkonvexe Topologie  $\mathfrak{T}$  auf  $E \otimes F$  heißt *zulässig*, falls die *kanonische bilineare Abbildung*

$$\otimes : E \times F \rightarrow (E \otimes F, \mathfrak{T}), \quad \otimes(x, y) := x \otimes y,$$

stetig ist. Die  $\varepsilon$ -Topologie  $\mathfrak{T}_\varepsilon$  ist offenbar zulässig, und für  $p \in \mathbb{H}(E)$ ,  $q \in \mathbb{H}(F)$  gilt nach (30)

$$(p \otimes_\varepsilon q)(x \otimes y) = p(x)q(y) \quad \text{für } x \in E, y \in F. \quad (33)$$

**Projektive Tensorprodukte.** a) Mit den Identitäten  $i_{\mathfrak{T}} : E \otimes F \rightarrow (E \otimes F, \mathfrak{T})$  ist  $\{i_{\mathfrak{T}} \mid \mathfrak{T} \text{ zulässig}\}$  ein projektives System und definiert somit die *projektive* oder  $\pi$ -*Topologie*  $\mathfrak{T}_\pi$  auf  $E \otimes F$  (vgl. S. 149); diese ist dann die stärkste zulässige lokalkonvexe Topologie auf  $E \otimes F$ . Offenbar ist  $\mathfrak{T}_\pi$  stärker als  $\mathfrak{T}_\varepsilon$  und somit Hausdorffsch. Wir schreiben  $E \otimes_\pi F$  für  $(E \otimes F, \mathfrak{T}_\pi)$ .

b) Für eine zulässige Topologie  $\mathfrak{T}$  auf  $E \otimes F$  und  $W \in \mathbb{U}(\mathfrak{T})$  gibt es  $U \in \mathbb{U}(E)$  und  $V \in \mathbb{U}(F)$  mit

$$\otimes(U \times V) := \{x \otimes y \mid x \in U, y \in V\} \subseteq W. \quad (34)$$

Wir verwenden ab jetzt die Notation  $E_1 \otimes F_1 = [\otimes(E_1 \times F_1)]$  für *Unterräume*  $E_1$  von  $E$  und  $F_1$  von  $F$ , aber  $A \otimes B = \otimes(A \times B)$  für alle anderen Mengen  $A \subseteq E$  und  $B \subseteq F$ .



c) Die absolutkonvexen Mengen

$$\Gamma(U \otimes V), \quad U \in \mathbb{U}(E), \quad V \in \mathbb{U}(F),$$

bilden eine Nullumgebungsbasis einer lokalkonvexen Topologie auf  $E \otimes F$  (vgl. die Sätze 6.2 und 7.1), die wegen (34) mit  $\mathfrak{T}_\pi$  übereinstimmen muss.

### Satz 10.21

*Es seien  $E, F, G$  lokalkonvexe Räume. Durch  $\beta : T \mapsto T \circ \otimes$  wird ein linearer Isomorphismus von  $L(E \otimes_\pi F, G)$  auf den Raum  $\mathcal{B}(E, F; G)$  der stetigen bilinearen Abbildungen von  $E \times F$  nach  $G$  definiert. Insbesondere liefert  $\beta$  die Isomorphie  $(E \otimes_\pi F)' \simeq \mathcal{B}(E, F)$ .*

BEWEIS. a) Wegen der Stetigkeit von  $\otimes : E \times F \rightarrow E \otimes_\pi F$  ist  $\beta$  definiert und offenbar linear und injektiv.

b) Nun sei  $B \in \mathcal{B}(E, F; G)$  gegeben. Einen Tensor  $t = \sum_{j=1}^r x_j \otimes y_j \in E \otimes F$  können wir

in der Form  $t = \sum_{k=1}^n e_k \otimes f_k$  mit linear unabhängigen  $e_1, \dots, e_n \in E$  schreiben, und

dann ist  $\sum_{j=1}^r B(x_j, y_j) = \sum_{k=1}^n B(e_k, f_k)$ . Aus  $\sum_{j=1}^r x_j \otimes y_j = 0$  folgt wegen (28) dann

$f_k = 0$  für alle  $k$  und somit  $\sum_{j=1}^r B(x_j, y_j) = 0$ . Daher können wir  $T : E \otimes F \rightarrow G$

durch  $T(\sum_{j=1}^r x_j \otimes y_j) := \sum_{j=1}^r B(x_j, y_j)$  definieren. Offenbar ist  $T$  linear und  $\beta(T) = B$ .

c) Für  $W \in \mathbb{U}(G)$  gibt es  $U \in \mathbb{U}(E)$  und  $V \in \mathbb{U}(F)$  mit  $B(U \times V) \subseteq W$ , also  $T(U \otimes V) \subseteq W$  und auch  $T(\Gamma(U \otimes V)) \subseteq W$ ; somit ist  $T : E \otimes_\pi F \rightarrow G$  stetig.  $\diamond$

Für Banachräume  $E, F$  gelten die Isometrien

$$(E \otimes_\pi F)' \cong \mathcal{B}(E, F) \cong L(E, F'). \quad (35)$$

### Satz 10.22

*Es seien  $E, F$  lokalkonvexe Räume. Für  $p \in \mathbb{H}(E)$  und  $q \in \mathbb{H}(F)$  ist das Minkowski-Funktional von  $\Gamma(U_p \otimes U_q)$  gegeben durch*

$$(p \otimes_\pi q)(t) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^r p(x_j)q(y_j) \mid t = \sum_{j=1}^r x_j \otimes y_j \right\}. \quad (36)$$

Wie in (33) gilt

$$(p \otimes_\pi q)(x \otimes y) = p(x)q(y) \quad \text{für } x \in E, y \in F. \quad (37)$$

BEWEIS. a) Man rechnet leicht nach, dass in (36) eine Halbnorm  $r$  auf  $E \otimes F$  definiert wird mit  $r(x \otimes y) \leq p(x)q(y)$ . Für  $t \in \Gamma(U_p \otimes U_q)$  gilt  $t = \sum_j \lambda_j x_j \otimes y_j$  mit  $x_j \in U_p$ ,  $y_j \in U_q$  und  $\sum_j |\lambda_j| \leq 1$ , also  $r(t) \leq \sum_j p(\lambda_j x_j)q(y_j) \leq \sum_j |\lambda_j| \leq 1$ .

b) Nun sei  $r(t) < 1$ ; dann ist  $t = \sum_{j=1}^r x_j \otimes y_j$  mit  $\sum_{j=1}^r p(x_j)q(y_j) < 1$ . Mit geeigneten

$\delta_j > 0$  gilt noch  $\sum_{j=1}^r \mu_j < 1$  für  $\mu_j := (p(x_j) + \delta_j)(q(y_j) + \delta_j)$ . Mit  $u_j := \frac{x_j}{p(x_j) + \delta_j} \in U_p$

und  $v_j := \frac{y_j}{q(y_j) + \delta_j} \in U_q$  folgt dann  $t = \sum_{j=1}^r \mu_j u_j \otimes v_j \in \Gamma(U_p \otimes U_q)$ .

c) Aussage „ $\leq$ “ in (37) ist klar; wir zeigen „ $\geq$ “: Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es  $x' \in U_p^\circ$  mit  $\langle x, x' \rangle = p(x)$  und  $y' \in U_q^\circ$  mit  $\langle y, y' \rangle = q(y)$ . Wir definieren  $x' \times y' \in \mathcal{B}(E \times F)$  durch  $(x' \times y')(x, y) := \langle x, x' \rangle \cdot \langle y, y' \rangle$  und dann  $x' \otimes y' := \beta^{-1}(x' \times y') \in (E \otimes_\pi F)'$  gemäß Satz 10.21. Für  $t = \sum_j x_j \otimes y_j$  gilt dann

$$|\langle t, x' \otimes y' \rangle| = |\sum_j \langle x_j, x' \rangle \cdot \langle y_j, y' \rangle| \leq \sum_j p(x_j)q(y_j),$$

also  $x' \otimes y' \in U_r^\circ$ . Nun folgt  $p(x)q(y) = \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle = \langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle \leq r(x \otimes y)$ .  $\diamond$

Die Vervollständigung  $E \widehat{\otimes}_\pi F$  eines projektiven Tensorprodukts heißt *vollständiges  $\pi$ -Tensorprodukt* von  $E$  und  $F$ . Der folgende *Entwicklungssatz* für vollständige  $\pi$ -Tensorprodukte von Frécheträumen stammt von A. Grothendick (1955), der einfache Beweis von A. Pietsch (1963).

### Theorem 10.23

Es seien  $E, F$  metrisierbare lokalkonvexe Räume und  $x \in E \widehat{\otimes}_\pi F$ .

a) Es gilt  $x = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j x_j \otimes y_j$  mit  $\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j| < \infty$  sowie  $x_j \rightarrow 0$  in  $E$  und  $y_j \rightarrow 0$  in  $F$ .

b) Für  $p \in \mathbb{H}(E)$  und  $q \in \mathbb{H}(F)$  gilt

$$(p \widehat{\otimes}_\pi q)(x) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j| p(x_j)q(y_j) \mid x = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j x_j \otimes y_j \right\}, \quad (38)$$

wobei das Infimum über alle Entwicklungen wie in a) gebildet wird.

c) Im Fall von Frécheträumen  $E, F$  gibt es kompakte Kugeln  $A \in \mathfrak{K}(E)$  und  $B \in \mathfrak{K}(F)$  mit  $x \in E_A \widehat{\otimes}_\pi F_B$ .

BEWEIS. a) Es seien  $\{p_n\}$  und  $\{q_n\}$  wachsende Fundamentalsysteme von Halbnormen auf  $E$  und  $F$  mit o.E.  $p_1 = p$  und  $q_1 = q$ . Mit  $r_n := p_n \widehat{\otimes}_\pi q_n$  gibt es zu  $\varepsilon > 0$  Tensoren  $t_n \in E \otimes F$  mit  $r_n(x - t_n) < \frac{\varepsilon}{n^2 2^{n+1}}$  für  $n \geq 1$ . Wir setzen  $s_0 := t_1$  und  $s_n := t_{n+1} - t_n$  für  $n \geq 1$ ; dann gilt  $r_1(s_0) < r_1(x) + \frac{\varepsilon}{4}$  und

$$r_n(s_n) \leq r_{n+1}(t_{n+1} - x) + r_n(x - t_n) < \frac{\varepsilon}{n^2 2^n} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Wir schreiben  $s_0 = \sum_{k=1}^{k_1} \lambda_k^{(0)} x_k^{(0)} \otimes y_k^{(0)}$  mit  $\sum_{k=1}^{k_1} |\lambda_k^{(0)}| \leq r_1(x) + \frac{\varepsilon}{4}$ ,  $p_1(x_k^{(0)}) \leq 1$  und  $q_1(y_k^{(0)}) \leq 1$  sowie  $s_n = \sum_{k=k_n+1}^{k_{n+1}} \lambda_k^{(n)} x_k^{(n)} \otimes y_k^{(n)}$  mit  $p_n(x_k^{(n)}) \leq \frac{1}{n}$ ,  $q_n(y_k^{(n)}) \leq \frac{1}{n}$  und  $\sum_{k=k_n+1}^{k_{n+1}} |\lambda_k^{(n)}| \leq \varepsilon 2^{-n}$  für  $n \geq 1$ . Damit erhalten wir  $x = \sum_{n=0}^{\infty} s_n = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j \otimes y_j$  wie in a).

b) Insbesondere ist  $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| p_1(x_j) q_1(y_j) \leq r_1(x) + \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n} < r_1(x) + \varepsilon$ . Die umgekehrte Ungleichung „ $\leq$ “ in (38) ist klar.

c) Nach Satz 8.26 b) gibt es kompakte Kugeln  $A \in \mathfrak{K}(E)$  und  $B \in \mathfrak{K}(F)$  mit  $x_j \rightarrow 0$  in  $E_A$  und  $y_j \rightarrow 0$  in  $F_B$ . Dann konvergiert die Entwicklung  $x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j \otimes y_j$  aus a) in  $E_A \widehat{\otimes}_{\pi} F_B$ .  $\diamond$

Für  $j = 1, 2$  seien  $E_j$  und  $F_j$  lokalkonvexe Räume. Für Operatoren  $T \in L(E_1, E_2)$  und  $S \in L(F_1, F_2)$  ist das *Tensorprodukt*  $T \otimes_{\pi} S : E_1 \otimes_{\pi} F_1 \rightarrow E_2 \otimes_{\pi} F_2$  aus (31) wegen (36) stetig und besitzt daher eine Fortsetzung  $T \widehat{\otimes}_{\pi} S : E_1 \widehat{\otimes}_{\pi} F_1 \rightarrow E_2 \widehat{\otimes}_{\pi} F_2$  auf das vollständige  $\pi$ -Tensorprodukt von  $E_1$  und  $F_1$ . Aus Theorem 10.23 ergibt sich leicht der folgende *Liftingsatz*:

### Satz 10.24

*Es seien  $T \in L(E_1, E_2)$  und  $S \in L(F_1, F_2)$  Surjektionen von Frécheträumen. Dann ist auch  $T \widehat{\otimes}_{\pi} S : E_1 \widehat{\otimes}_{\pi} F_1 \rightarrow E_2 \widehat{\otimes}_{\pi} F_2$  surjektiv.*

BEWEIS. Ein Element  $z \in E_2 \widehat{\otimes}_{\pi} F_2$  besitzt nach Theorem 10.23 eine Entwicklung  $z = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j \otimes y_j$  mit  $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty$  sowie  $x_j \rightarrow 0$  in  $E_2$  und  $y_j \rightarrow 0$  in  $F_2$ . Nach Satz 6.4 gibt es Nullfolgen  $\xi_j \rightarrow 0$  in  $E_1$  und  $\eta_j \rightarrow 0$  in  $F_1$  mit  $x_j = T\xi_j$  und  $y_j = S\eta_j$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Für  $\zeta := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j \otimes \eta_j \in E_1 \widehat{\otimes}_{\pi} F_1$  gilt dann  $(T \widehat{\otimes}_{\pi} S)\zeta = z$ .  $\diamond$

Satz 10.24 gilt i. A. *nicht* für vollständige  $\varepsilon$ -Tensorprodukte; darauf gehen wir in Kapitel 12 genauer ein.

Wir führen nun  $L_1$ -Räume von Vektorfunktionen ein und repräsentieren diese als vollständige  $\pi$ -Tensorprodukte. Der Einfachheit wegen beschränken wir uns auf Funktionen mit Werten in einem Banachraum  $X$ . Der Fréchetraum-Fall kann ähnlich behandelt werden; bei überabzählbar vielen Halbnormen tritt jedoch die Schwierigkeit auf, dass man Nullmengen bzgl. verschiedener Halbnormen nicht ohne Weiteres zu einer Nullmenge vereinigen kann.

Die folgende Konstruktion des Integrals orientiert sich an der für skalare Funktionen in Anhang A.3 von [GK]:

**Bochner-Integrale.** a) Es seien  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum und  $X$  ein Banachraum. Eine skalare Funktion  $\psi \in \mathcal{L}_1(\Omega)$  heißt  $\mu$ -Majorante einer Vektorfunktion  $f : \Omega \rightarrow X$ , falls  $\|f(t)\| \leq \psi(t)$  für  $\mu$ -fast alle  $t \in \Omega$  gilt. Auf dem Raum  $\mathcal{L}(\Omega, X)$  aller Funktionen mit  $\mu$ -Majorante definieren wir eine Halbnorm durch

$$\|f\|_L := \inf \{ \|\psi\|_{L_1} \mid \psi \text{ ist } \mu\text{-Majorante von } f \}. \quad (39)$$

b) Auf dem Raum  $\mathcal{T}(\Omega, X) := \mathcal{T}(\Omega) \otimes X$  der  $X$ -wertigen Treppenfunktionen (deren Träger haben endliches Maß) definieren wir das Integral durch

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^r \phi_j(t) x_j d\mu := \left( \int_{\Omega} d\mu \otimes I_X \right) \left( \sum_{j=1}^r \phi_j \otimes x_j \right) = \sum_{j=1}^r \int_{\Omega} \phi_j(t) d\mu x_j \in X. \quad (40)$$

Für  $h \in \mathcal{T}(\Omega, X)$  hat man  $h = \sum_{k=1}^m \chi_{A_k} \otimes \xi_k$  mit f.ü. disjunkten Mengen  $A_k \in \Sigma$  und  $\mu(A_k) < \infty$ . Für eine  $\mu$ -Majorante  $\psi \in \mathcal{L}_1(\Omega)$  von  $h$  gilt dann

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Omega} h d\mu \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^m \mu(A_k) \xi_k \right\| \leq \sum_{k=1}^m \mu(A_k) \|\xi_k\| = \int_{\Omega} \|h\| d\mu \leq \int_{\Omega} \psi d\mu, \quad \text{also} \\ \left\| \int_{\Omega} h d\mu \right\| &\leq \|h\|_L \quad \text{für } h \in \mathcal{T}(\Omega, X). \end{aligned} \quad (41)$$

c) Wir definieren nun den Raum  $\mathcal{L}_1(\Omega, X)$  als Abschluss von  $\mathcal{T}(\Omega, X)$  in  $\mathcal{L}(\Omega, X)$  bezüglich der Halbnorm  $\|\cdot\|_L$  aus (39). Für  $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, X)$  gilt  $\|f\| \in \mathcal{L}_1(\Omega)$  und

$$\|f\|_L = \int_{\Omega} \|f(t)\| d\mu =: \|f\|_{L_1}. \quad (42)$$

Der Quotientenraum  $L_1(\Omega, X) = \mathcal{L}_1(\Omega, X) / \mathcal{N}$  von Äquivalenzklassen modulo Nullfunktionen heißt Raum der Bochner-integrierbaren Funktionen. Nach (41) lässt sich das Integral aus (40) zum Bochner-Integral  $\int_{\Omega} d\mu : L_1(\Omega, X) \rightarrow X$  fortsetzen.

d) Eine Vektorfunktion  $f : \Omega \rightarrow X$  heißt messbar, falls es eine Folge  $(h_k)$  in  $\mathcal{T}(\Omega, X)$  mit  $h_k(t) \rightarrow f(t)$  für fast alle  $t \in \Omega$  gibt. Dann folgt auch  $\|h_k(t)\| \rightarrow \|f(t)\|$  f.ü., und auch die skalare Funktion  $\|f\| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist messbar.

Für eine messbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow X$  gibt es einen separablen Unterraum  $X_0 \subseteq X$ , sodass  $f(t) \in X_0$  fast überall gilt. Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow X$  mit einem solchen „fast überall separablen Bild“ ist genau dann messbar, wenn sie schwach messbar ist. Für diesen Satz von Pettis verweisen wir auf [Yosida 1980], V.4, vgl. auch Aufgabe 10.24.

### Satz 10.25

- a) Es gilt  $\mathcal{L}_1(\Omega, X) = \{f : \Omega \rightarrow X \text{ messbar} \mid \int_{\Omega} \|f(t)\| d\mu < \infty\}$ .  
 b) Der Raum  $L_1(\Omega, X)$  ist ein Banachraum.

BEWEIS. a) „ $\subseteq$ “: Für  $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, X)$  gilt  $\int_{\Omega} \|f(t) - h_k(t)\| d\mu \rightarrow 0$  für eine Folge  $(h_k)$  in  $\mathcal{T}(\Omega, X)$ . Dann gibt es eine Teilfolge  $(h_{k_j})$  mit  $\|f(t) - h_{k_j}(t)\| \rightarrow 0$  fast überall (vgl. [GK], S. 312), und  $f$  ist messbar.

„ $\supseteq$ “: Es sei  $(h_k)$  eine Folge in  $\mathcal{T}(\Omega, X)$  mit  $h_k(t) \rightarrow f(t)$  f.ü. Durch „Abschneiden“ kann man  $\|h_k(t)\| \leq 2\|f(t)\|$  f.ü. erreichen, und dann folgt  $\int_{\Omega} \|f(t) - h_k(t)\| d\mu \rightarrow 0$  aus dem Satz über majorisierte Konvergenz.

b) Für  $g_k \in L_1(\Omega, X)$  gelte  $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{L_1} < \infty$ . Nach dem Satz von B. Levi folgt auch  $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k(t)\| < \infty$  für fast alle  $t \in \Omega$ . Daher wird durch  $g(t) := \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)$  f.ü. eine messbare Funktion definiert, und es gilt  $\|g - \sum_{k=1}^n g_k\|_L \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|g_k\|_{L_1} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Somit ist jede absolut konvergente Reihe in  $L_1(\Omega, X)$  konvergent, und  $L_1(\Omega, X)$  ist vollständig.  $\diamond$

Einen Zusammenhang mit  $\pi$ -Tensorprodukten liefert nun

### Satz 10.26

Für einen Maßraum  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  und einen Banachraum  $X$  gilt  $L_1(\Omega, X) \cong L_1(\Omega) \widehat{\otimes}_{\pi} X$ .

BEWEIS. Wir zeigen, dass auf  $\mathcal{T}(\Omega, X) = \mathcal{T}(\Omega) \otimes X$  die  $L_1$ -Norm mit der  $\pi$ -Norm übereinstimmt. Für  $h = \sum_{j=1}^r \phi_j \otimes x_j$  gilt

$$\|h\|_{L_1} \leq \sum_{j=1}^r \int_{\Omega} \|\phi_j(t)x_j\| d\mu \leq \sum_{j=1}^r \|\phi_j\|_{L_1} \|x_j\|,$$

also  $\|h\|_{L_1} \leq \|h\|_{\pi}$ . Umgekehrt hat man  $h = \sum_{k=1}^m \chi_{A_k} \otimes \xi_k$  mit f.ü. disjunkten Mengen  $A_k \in \Sigma$  und  $\mu(A_k) < \infty$  und erhält

$$\|h\|_{\pi} \leq \sum_{k=1}^m \|\chi_{A_k}\|_{L_1} \|\xi_k\| = \sum_{k=1}^m \mu(A_k) \|\xi_k\| = \int_{\Omega} \|h(t)\| d\mu = \|h\|_{L_1}.$$

Folglich gilt  $L_1(\Omega, X) \cong \mathcal{T}(\Omega) \widehat{\otimes}_{\pi} X \cong L_1(\Omega) \widehat{\otimes}_{\pi} X$ .  $\diamond$

**Folgerungen.** a) Eine Vektorfunktion  $f \in L_1(\Omega, X)$  besitzt eine Reihenentwicklung  $f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(t)x_j$  mit  $\sum_{j=1}^{\infty} \|\phi_j\|_{L_1} \|x_j\| < \infty$  aufgrund von Theorem 10.23.

b) Nun sei  $T : X \rightarrow Q$  eine Surjektion von Banachräumen. Zu  $f \in L_1(\Omega, Q)$  gibt es dann  $f^{\vee} \in L_1(\Omega, X)$  mit  $Tf^{\vee}(t) = f(t)$  f.ü. auf  $\Omega$ . Dieser *Lifting-Satz* für  $L_1$ -Funktionen folgt sofort aus Satz 10.24 oder auch aus dem Satz von Bartle und Graves 9.29 (vgl. auch Aufgabe 10.25).

Viele Resultate der Analysis skalarer Funktionen lassen sich leicht auf Vektorfunktionen übertragen, andere wie etwa die Dualität  $L_p(\Omega, X)' \cong L_q(\Omega, X')$  oder Abschätzungen für Fourier-Koeffizienten oder Integral-Transformationen gelten nur unter geeigneten Annahmen an den Banachraum  $X$ . Dazu sei auf [Defant und Floret 1993] sowie [Pietsch 2007] und die dort zitierte Literatur verwiesen.

Neben der  $\varepsilon$ -Norm und der  $\pi$ -Norm wurden in [Grothendieck 1956] weitere wichtige Normen auf Tensorprodukten von Banachräumen eingeführt und untersucht. Das Hauptresultat dieses *Résumés* wurde 1968 von J. Lindenstrauß und A. Pelczyński ohne Verwendung von Tensorprodukten zur *Grothendieckschen Ungleichung* umformuliert und hat seitdem die Entwicklung der Banachraum-Theorie stark beeinflusst. Wegen  $X' \varepsilon Y \cong K(X, Y)$  gemäß Satz 10.4 hängen Tensornormen eng mit *Operatoridealen* zusammen, deren Theorie seit 1968 systematisch von A. Pietsch entwickelt wurde (vgl. [Pietsch 1980]). Wir geben im nächsten Kapitel eine kurze Einführung zu diesem Thema. [Defant und Floret 1993] enthält eine Darstellung der Theorie, die Tensornormen und Operatorideale verbindet.

## 10.6 Aufgaben

### Aufgabe 10.1

Zeigen Sie: Ein  $\varepsilon$ -Produkt  $E \varepsilon F \simeq F \varepsilon E$  lokalkonvexer Räume kann als Raum  $\mathcal{B}(E'_\kappa \times F'_\kappa)$  von *Bilinearformen* interpretiert werden; diese Interpretation ist *symmetrisch* in  $E$  und  $F$ . Einem Tensor  $t = \sum_j x_j \otimes y_j$  entspricht dabei die Bilinearform

$$B : (x', y') \mapsto \sum_j \langle x_j, x' \rangle \langle y_j, y' \rangle.$$

### Aufgabe 10.2

Es seien  $X, Y$  Banachräume. Zeigen Sie  $X \varepsilon Y = \{T \in K(Y', X) \mid T \in L(Y'_\sigma, X^\sigma)\}$ .

### Aufgabe 10.3

Es seien  $M$  eine Menge und  $F$  ein lokalkonvexer Raum. Zeigen Sie  $\ell_{\infty \sigma}(M, F) = \ell_\infty(M, F)$ . Welche Funktionen  $f : M \rightarrow F$  liegen in  $\ell_{\infty \kappa}(M, F)$ ?

### Aufgabe 10.4

Für  $0 < \alpha \leq 1$ , einen kompakten metrischen Raum  $K$  und einen lokalkonvexen Raum  $F$  definieren wir Räume Hölder-stetiger Funktionen durch

$$\begin{aligned} \Lambda^\alpha(K, F) &:= \{f : K \rightarrow F \mid \forall q \in \mathbb{H}(F) : \sup_{s \neq t} \frac{q(f(s) - f(t))}{d(s, t)^\alpha} < \infty\}, \\ \lambda^\alpha(K, F) &:= \{f \in \Lambda^\alpha(K, F) \mid \lim_{d(s, t) \rightarrow 0} \frac{f(s) - f(t)}{d(s, t)^\alpha} = 0\}. \end{aligned}$$

- Zeigen Sie  $\Lambda^\alpha(K, F) = \Lambda^\alpha_\sigma(K, F)$  und  $\lambda^\alpha(K, F) = \lambda^\alpha_\kappa(K, F) \simeq \lambda^\alpha(K) \varepsilon F$ .
- Welche Funktionen liegen in  $\Lambda^\alpha_\kappa(K, F)$  und  $\lambda^\alpha_\sigma(K, F)$ ?

**Aufgabe 10.5**

Es seien  $\omega$  der Fréchetraum aller Folgen und  $F$  ein vollständiger lokalkonvexer Raum. Zeigen Sie  $F^{\mathbb{N}_0} \simeq \omega \varepsilon F \simeq \omega \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ .

**Aufgabe 10.6**

Definieren Sie den Raum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, F)$  der  $F$ -wertigen schnell fallenden Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$  und zeigen Sie  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, F) = \mathcal{S}_\sigma(\mathbb{R}^n, F) = \mathcal{S}_\kappa(\mathbb{R}^n, F) \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \varepsilon F$ . Schließen Sie daraus  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, F) \simeq s(F)$ .

**Aufgabe 10.7**

a) Es seien  $\Omega, \Omega'$  lokalkompakte Räume. Zeigen Sie

$$\mathcal{C}(\Omega \times \Omega') \simeq \mathcal{C}(\Omega, \mathcal{C}(\Omega')) \simeq \mathcal{C}(\Omega) \varepsilon \mathcal{C}(\Omega') \simeq \mathcal{C}(\Omega) \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{C}(\Omega').$$

b) Zeigen Sie analoge Aussagen für  $\mathcal{E}(\Omega \times \Omega')$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$  und  $s(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^m)$ . Gilt für  $m \in \mathbb{N}$  eine solche Aussage auch für  $\mathcal{C}^m$ -Funktionen?

**Aufgabe 10.8**

Es sei  $\sigma : E \rightarrow Q$  eine Surjektion von Frécheträumen. Zeigen Sie die Surjektivität der induzierten Abbildungen  $\sigma \circ : s(\mathbb{N}_0, E) \rightarrow s(\mathbb{N}_0, Q)$  und  $\sigma \circ : \mathcal{E}(\Omega, E) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega, Q)$  für offene Mengen  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Aufgabe 10.9**

Beweisen Sie den Zusatz zu Satz 10.11 und die Aussagen über holomorphe Funktionen auf S. 242.

**Aufgabe 10.10**

Es seien  $\sigma : E \rightarrow Q$  eine Surjektion von Frécheträumen,  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $g \in \mathcal{M}(\Omega, Q)$  eine meromorphe Funktion. Konstruieren Sie  $g^\vee \in \mathcal{M}(\Omega, E)$  mit  $\sigma g^\vee = g$ .

HINWEIS. Verwenden Sie den Weierstraßschen Produktsatz (vgl. [Rudin 1974], 15.11).

**Aufgabe 10.11**

a) Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen. Konstruieren Sie auf  $\mathcal{H}(\Omega)$  ein Fundamentalsystem von Halbnormen, die durch Halbskalarprodukte definiert werden. Schließen Sie, dass der Fréchetraum  $\mathcal{H}(\Omega)$  die A.E. besitzt.

b) Beweisen Sie den Satz von Mittag-Leffler 10.13 für Funktionen mit Werten in Frécheträumen mit der Mittag-Leffler-Methode 9.14.

**Aufgabe 10.12**

Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $m \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass der Fréchetraum  $\mathcal{C}^m(\Omega)$  die A.E. besitzt.

**Aufgabe 10.13**

Für eine kompakte Menge  $K \subseteq \mathbb{C}$  und einen quasivollständigen lokalkonvexen Raum  $F$  wird der Raum  $\mathcal{H}(K, F)$  der *Keime*  $F$ -wertiger holomorpher Funktionen auf  $K$  wie auf S. 154 erklärt. Weiter seien  $\mathcal{R}(K, F)$  der Abschluss von  $\mathcal{H}(K, F)$  in  $\mathcal{C}(K, F)$  und  $\mathcal{A}(K, F) = \{f \in \mathcal{C}(K, F) \mid f|_{\text{int}(K)} \text{ holomorph}\}$ . Zeigen Sie:

- Es gilt  $\mathcal{A}(K, F) \simeq \mathcal{A}(K) \varepsilon F$  und  $\mathcal{R}(K, F) \simeq \mathcal{R}(K) \widehat{\otimes}_{\varepsilon} F$ .
- Für den Einheitskreis  $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$  gilt  $\mathcal{A}(\overline{D}, F) = \mathcal{R}(\overline{D}, F)$ .
- Gilt  $\mathcal{A}(K, Y) = \mathcal{R}(K, Y)$  für alle Banachräume  $Y$ , so besitzt der Banachraum  $\mathcal{A}(K) = \mathcal{R}(K)$  die A.E.

Nach einem auch für Vektorfunktionen gültigen *Satz von Mergelyan* (1951) ist die Voraussetzung in c) erfüllt, wenn  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$  zusammenhängend ist (vgl. [Rudin 1974], Theorem 20.5).

**Aufgabe 10.14**

- Zeigen Sie, dass die *Disc Algebra*  $\mathcal{A}(\overline{D})$  die b.A.E. besitzt.
- Zeigen Sie, dass  $L_p(\mu)$ -Räume für alle  $1 \leq p \leq \infty$  die b.A.E. besitzen.

**Aufgabe 10.15**

Bestimmen Sie die Dualräume der Köthe-Räume  $c_0(A)$  und  $\lambda_p(A)$  für  $1 \leq p < \infty$ , speziell die der Potenzreihenräume  $\Lambda_R(\alpha)$ .

**Aufgabe 10.16**

Es seien  $X$  ein Banachraum und  $(x_n)$  eine Folge in  $X \setminus \{0\}$  mit  $\overline{[x_n]} = X$ . Zeigen Sie, dass  $(x_n)$  genau dann eine Schauder-Basis von  $X$  ist, wenn gilt:

$$\exists C \geq 0 \forall m < n \in \mathbb{N} \forall \{\alpha_j\} \subseteq \mathbb{K} : \left\| \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j \right\| \leq C \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right\|.$$

HINWEIS. Für „ $\Rightarrow$ “ zeigen Sie, dass durch  $\|x\|^* := \sup_n \left\| \sum_{j=0}^n \alpha_j x_j \right\|$  eine äquivalente Norm auf  $X$  definiert wird.

**Aufgabe 10.17**

- Das *Haar-System* wird definiert durch  $\chi_1(t) = 1$  und

$$\chi_{2^k + \ell}(t) := \begin{cases} 1 & , \quad (2\ell - 2)2^{-k-1} \leq t \leq (2\ell - 1)2^{-k-1} \\ -1 & , \quad (2\ell - 1)2^{-k-1} < t \leq 2\ell \cdot 2^{-k-1} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\ell = 1, 2, \dots, 2^k$ . Zeigen Sie, dass  $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für  $1 \leq p < \infty$  eine Schauder-Basis von  $L_p[0, 1]$  ist.

- Durch Integration des Haar-Systems erhält man das *Schauder-System*

$$\varphi_1(t) := 1, \quad \varphi_n(t) := \int_0^t \chi_{n-1}(s) ds \quad \text{für } n > 1.$$



Zeigen Sie, dass  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Schauder-Basis von  $\mathcal{C}[0,1]$  ist.

### Aufgabe 10.18

Es sei  $E$  ein lokalkonvexer Raum mit A.E. Zeigen Sie, dass jeder stetig projizierte Unterraum von  $E$  ebenfalls die A.E. hat.

### Aufgabe 10.19

Für welche lokalkonvexen Räume  $E$  gilt topologisch  $(E'_\kappa)'_\kappa = E$ ? Zeigen Sie, dass in diesem Fall  $E$  genau dann die A.E. hat, wenn dies auf  $E'_\kappa$  zutrifft. Schließen Sie, dass ein *Montelraum*  $E$  genau dann die A.E. hat, wenn dies auf den Dualraum  $E'_\beta$  zutrifft.

### Aufgabe 10.20

Es seien  $E = \text{proj}_i E_i$  und  $F = \text{proj}_j F_j$  reduzierte projektive Limiten lokalkonvexer Räume. Zeigen Sie

$$E \varepsilon F \simeq \text{proj}_{(i,j)} E_i \varepsilon F_j, \quad E \widehat{\otimes}_\varepsilon F \simeq \text{proj}_{(i,j)} E_i \widehat{\otimes}_\varepsilon F_j \quad \text{und} \quad E \widehat{\otimes}_\pi F \simeq \text{proj}_{(i,j)} E_i \widehat{\otimes}_\pi F_j.$$

### Aufgabe 10.21

Beweisen Sie Satz 8.16 mittels Lemma 10.19.

### Aufgabe 10.22

a) Für  $1 < p < \infty$  sei  $X := \ell_p$ . Finden Sie eine Reihe in  $X$  mit  $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x_j | x' \rangle| < \infty$  für alle  $x' \in X'$  und  $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| = \infty$ .

b) Es seien  $I$  eine Indexmenge und  $F$  ein vollständiger lokalkonvexer Raum. Identifizieren Sie  $\ell_1(I) \widehat{\otimes}_\varepsilon F$  mit dem Raum der  $F$ -wertigen *summierbaren* Folgen und  $\ell_1(I) \widehat{\otimes}_\pi F$  mit dem Raum der  $F$ -wertigen *absolutsummierbaren* Folgen.

### Aufgabe 10.23

Für Banachräume  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  und  $1 \leq p < \infty$  definiert man die  $\ell_p$ -direkte Summe durch

$$\left( \bigoplus_{n=1}^{\infty} Y_n \right)_{\ell_p} := \{y = (y_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} Y_n \mid \|y\|^p := \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^p < \infty\},$$

entsprechend auch die  $c_0$ -direkte Summe. Zeigen Sie  $\left( \bigoplus_{n=1}^{\infty} Y_n \right)'_{c_0} \cong \left( \bigoplus_{n=1}^{\infty} Y'_n \right)_{\ell_1}$  sowie

$$\left( \bigoplus_{n=1}^{\infty} Y_n \right)'_{\ell_p} \cong \left( \bigoplus_{n=1}^{\infty} Y'_n \right)_{\ell_q} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty \quad \text{und} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

### Aufgabe 10.24

Die „Einheitsvektoren“  $\{e_t := (\delta_{ts})_{s \in [0,1]}\}_{t \in [0,1]}$  bilden eine Orthonormalbasis von  $\ell_2[0,1]$ . Zeigen Sie, dass die durch  $f : t \mapsto e_t$  definierte Funktion  $f : [0,1] \rightarrow \ell_2[0,1]$  eine schwache Nullfunktion, aber nicht messbar ist.

**Aufgabe 10.25**

Für einen Maßraum  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $1 \leq p < \infty$  und einen Banachraum  $X$  sei

$$\mathcal{L}_p(\Omega, X) := \{f : \Omega \rightarrow X \text{ messbar} \mid \int_{\Omega} \|f(t)\|^p d\mu < \infty\}.$$

- a) Zeigen Sie, dass  $L_p(\Omega, X) = \mathcal{L}_p(\Omega, X)/\mathcal{N}$  ein Banachraum ist.  
 b) Nun seien  $T : X \rightarrow Q$  eine Surjektion von Banachräumen und  $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, Q)$ .  
 Konstruieren Sie  $f^\vee \in \mathcal{L}_p(\Omega, X)$  mit  $Tf^\vee(t) = f(t)$  f.ü. auf  $\Omega$ .

**Aufgabe 10.26**

- a) Es seien  $H, G$  Hilberträume. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle \sum_j x_j \otimes y_j \mid \sum_k \xi_k \otimes \eta_k \rangle := \sum_{j,k} \langle x_j \mid \xi_k \rangle \langle y_j \mid \eta_k \rangle$$

ein Skalarprodukt auf  $H \otimes G$  definiert wird. Die Vervollständigung von  $H \otimes G$  mit der induzierten Norm  $\|\cdot\|_2$  bezeichnen wir mit  $H \widehat{\otimes}_2 G$ .

- b) Es seien  $\{e_i\}$  und  $\{f_j\}$  Orthonormalbasen von  $H$  und  $G$ . Zeigen Sie, dass  $\{e_i \otimes f_j\}$  eine Orthonormalbasis von  $H \widehat{\otimes}_2 G$  ist.

- c) Zeigen Sie  $L_2(\Omega, H) \cong L_2(\Omega) \widehat{\otimes}_2 H$  und  $L_2(\Omega \times \Omega') \cong L_2(\Omega) \widehat{\otimes}_2 L_2(\Omega')$  für messbare Mengen  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^m$ .

- d) Zeigen Sie die *Parsevalsche Gleichung*  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\widehat{f}(k)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(t)\|^2 dt$  für einen Hilbertraum  $H$  und  $f \in L_2([-\pi, \pi], H)$ .

**Aufgabe 10.27**

Das folgende Beispiel stammt von S. Bochner (1933): Für  $\phi \in X := L_{p,2\pi}(\mathbb{R})$  sei eine Vektorfunktion durch  $f : t \mapsto \phi(t+s)$  definiert. Zeigen Sie  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, X)$  und  $\widehat{f}(k) = \widehat{\phi}(k) e^{iks}$  für die Fourier-Koeffizienten. Wann gilt  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\widehat{f}(k)\|^2 < \infty$ ?

## 11 Operatorideale und nukleare Räume

*Fragen: 1. Zeigen Sie einen Lifting-Satz für harmonische Funktionen.  
2. Für welche linearen Operatoren lässt sich eine Spur definieren?*

In diesem Kapitel stellen wir *nukleare* lokalkonvexe Räume vor. Dieses wichtige Konzept wurde 1955 von A. Grothendieck eingeführt; wesentliche Beispiele sind Räume von  $C^\infty$ -Funktionen und ihre Dualräume. Ein Raum  $E$  ist genau dann nuklear, wenn ein Fundamentalsystem  $\mathbb{H}$  von *Hilbert-Halbnormen* auf  $E$  existiert, sodass es zu  $p \in \mathbb{H}$  ein  $q \in \mathbb{H}$  gibt, sodass die kanonische Abbildung  $\hat{\rho}_q^p : \hat{E}_q \rightarrow \hat{E}_p$  aus (7.5) ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Äquivalente Formulierungen fordern die Zugehörigkeit der Abbildungen  $\hat{\rho}_q^p$  zwischen lokalen *Banachräumen* zu geeigneten allgemeineren *Operatoridealen*. Das Kapitel beginnt daher mit einer Einführung in diesen Themenkreis.

In Abschnitt 11.1 führen wir die *Approximationszahlen* stetiger linearer Operatoren zwischen Banachräumen ein. Für  $0 < p < \infty$  untersuchen wir die *Ideale*  $S_p$  der Operatoren mit  $p$ -*summierbaren Approximationszahlen*, die auf Hilberträumen die *Schatten-Klassen* liefern. Mittels Ergebnissen aus Kapitel 4 zeigen wir Aussagen über die Zugehörigkeit von *Sobolev-Einbettungen* und von *Integraloperatoren* zu Schatten-Klassen.

Im nächsten Abschnitt untersuchen wir das Ideal der *nuklearen Operatoren*, insbesondere Beziehungen zu  $S_p$ -Idealen. In Abschnitt 11.3 beweisen wir, dass ein Banachraum  $X$  genau dann die A.E. besitzt, wenn sich auf dem Raum  $N(X)$  der nuklearen Operatoren eine *Spur* definieren lässt. Für Integraloperatoren  $S_\kappa \in L(L_2(\Omega))$  erhalten wir unter geeigneten Annahmen die *Spurformel*  $\text{tr } S_\kappa = \int_\Omega \kappa(t, t) dt$ .

Das Studium *nuklearer lokalkonvexer Räume* beginnt in Abschnitt 11.4. Nuklearität vererbt sich auf Unterräume, Quotientenräume sowie unter projektiven und abzählbaren induktiven Konstruktionen. Wir charakterisieren die Nuklearität von Köthe-Räumen und folgern die Nuklearität verschiedener Räume von  $C^\infty$ -Funktionen. Es folgt ein wichtiger Zusammenhang der Nuklearität mit *topologischen Tensorprodukten*: Für einen nuklearen Raum  $E$  ist  $E \otimes_\varepsilon F \simeq E \otimes_\pi F$  und  $E \hat{\otimes}_\varepsilon F = E \hat{\otimes}_\pi F$  für alle lokalkonvexen Räume  $F$ . Als Anwendung erhalten wir allgemeine *Lifting-Sätze* für nukleare Fréchet-Funktionenräume.

In Abschnitt 11.5 charakterisieren wir die nuklearen Räume als *Unterräume von  $s^I$*  für geeignete Indexmengen  $I$  (Satz von Komura-Komura). Daraus ergibt sich, dass starke Dualräume nuklearer Frécheträume ebenfalls nuklear sind; dies gilt auch für den Raum  $\mathcal{D}'_\beta(\Omega)$  der *Distributionen* auf einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .

## 11.1 Approximationszahlen und Integraloperatoren

Wir erinnern zunächst an einige Resultate über kompakte Operatoren  $S \in K(H, G)$  zwischen Hilberträumen, die auf dem *Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren* beruhen (vgl. [GK], Kapitel 12) :

**Singuläre Zahlen und Schmidt-Darstellungen.** a) Ein Operator  $S \in K(H, G)$  besitzt eine *Polarzerlegung*  $S = U|S|$  mit  $|S| = (S^*S)^{1/2}$ . Die *Eigenwerte*

$$\|S\| = s_0(S) \geq s_1(S) \geq \dots \geq s_n(S) \geq s_{n+1}(S) \geq \dots \geq 0$$

von  $|S|$  heißen *singuläre Zahlen* von  $S$ . Es gilt eine *Schmidt-Darstellung*

$$Sx = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \langle x | e_j \rangle f_j, \quad x \in H, \quad (1)$$

mit Orthonormalsystemen  $\{e_j\}$  in  $H$  und  $\{f_j\}$  in  $G$ . Stets gilt  $s_j(S^*) = s_j(S)$ , und für einen *normalen* Operator  $S \in K(H)$  ist  $s_j(S) = |\lambda_j(S)|$  der Betrag des  $j$ -ten Eigenwerts.

b) Aufgrund des MiniMax-Prinzips von R. Courant, E.S. Fischer und H. Weyl (vgl. [GK], Satz 12.6) hat man wegen  $\langle S^*Sx | x \rangle^{1/2} = \|Sx\|$

$$s_j(S) = c_j(S) := \min_{\dim V=j} \|S|_V\|, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad (2)$$

wobei das Minimum über alle abgeschlossenen Unterräume  $V$  von  $H$  der Kodimension  $j$  gebildet wird.

c) Weiter gilt nach D.E. Allakhverdiev (1957) (vgl. [GK], Satz 12.12)

$$s_j(S) = \alpha_j(S) := \inf \{\|S - F\| \mid F \in L(H, G), \text{rk } F \leq j\}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (3)$$

Die in (3) erklärten *Approximationszahlen* sind auch für alle stetigen linearen Operatoren  $T \in L(X, Y)$  zwischen Banachräumen definiert. Die Folge  $(\alpha_j(T))$  in  $[0, \infty)$  ist monoton fallend, und man hat  $\alpha_0(T) = \|T\|$ . Aus  $\alpha_j(T) \rightarrow 0$  folgt  $T \in K(X, Y)$ ; nach Satz 10.20 ist die Umkehrung richtig, wenn  $X'$  oder  $Y$  die *Approximationseigenschaft* hat. Wesentliche Eigenschaften der Approximationszahlen enthält:

### Satz 11.1

Es seien  $X, Y, Z$  Banachräume,  $A, B \in L(X, Y)$  und  $T \in L(Z, X)$ . Dann gilt:

$$\alpha_{n+m}(A+B) \leq \alpha_n(A) + \alpha_m(B), \quad n, m \in \mathbb{N}_0, \quad (4)$$

$$\alpha_{n+m}(AT) \leq \alpha_n(A) \cdot \alpha_m(T), \quad n, m \in \mathbb{N}_0, \quad (5)$$

$$\alpha_n(A) = 0 \Leftrightarrow \text{rk } A \leq n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (6)$$

$$\alpha_{n-1}(I_{\ell_2^n}) = 1, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (7)$$

BEWEIS. Zu  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $F_1, F_2 \in L(X, Y)$  mit  $\operatorname{rk} F_1 \leq n$ ,  $\operatorname{rk} F_2 \leq m$  und  $\|A - F_1\| \leq \alpha_n(A) + \varepsilon$ ,  $\|B - F_2\| \leq \alpha_m(B) + \varepsilon$ . Dann folgt  $\operatorname{rk}(F_1 + F_2) \leq n + m$  und  $\|(A + B) - (F_1 + F_2)\| \leq \alpha_n(A) + \alpha_m(B) + 2\varepsilon$ , also (4).

Nun wählen wir  $F_3 \in L(Z, X)$  mit  $\operatorname{rk} F_3 \leq m$  und  $\|T - F_3\| \leq \alpha_m(T) + \varepsilon$ . Es folgt

$$\|AT - F_1(T - F_3) - AF_3\| = \|(A - F_1)(T - F_3)\| \leq (\alpha_n(A) + \varepsilon)(\alpha_m(T) + \varepsilon),$$

wegen  $\operatorname{rk}(F_1(T - F_3) - AF_3) \leq n + m$  also (5).

Für (6) ist nur „ $\Rightarrow$ “ zu zeigen. Ist  $\operatorname{rk} A > n$ , so gibt es linear unabhängige Vektoren  $y_0 = Ax_0, \dots, y_n = Ax_n$  in  $R(A)$ . Mit  $V := [x_0, \dots, x_n]$  ist dann  $A : V \rightarrow A(V)$  bijektiv; es gibt also  $c > 0$  mit  $\|Ax\| \geq c\|x\|$  für  $x \in V$ . Ist nun  $\operatorname{rk} F \leq n$ , so gibt es  $\xi \in V$  mit  $\|\xi\| = 1$  und  $F\xi = 0$ . Es folgt

$$\|A - F\| \geq \|(A - F)\xi\| = \|A\xi\| \geq c\|\xi\| = c,$$

also der Widerspruch  $\alpha_n(A) \geq c > 0$ .

Das letzte Argument zeigt auch „ $\geq$ “ in (7); die Abschätzung „ $\leq$ “ dort ist klar.  $\diamond$

Aussage (7) gilt auch für die Identität auf jedem Banachraum der Dimension  $\geq n$ . Aus (4) folgt sofort

$$|\alpha_n(A) - \alpha_n(B)| \leq \|A - B\|, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (8)$$

und aus (5) ergibt sich

$$\alpha_n(\lambda A) = |\lambda| \alpha_n(A), \quad \lambda \in \mathbb{K}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (9)$$

**s-Zahlen.** Auch die *Gelfand-Zahlen*  $c_j(T)$  aus (2) sind für alle stetigen linearen Operatoren  $T \in L(X, Y)$  zwischen Banachräumen definiert und erfüllen ebenfalls die Aussagen von Satz 11.1 (vgl. [GK], Satz 12.11). Es gibt weitere Möglichkeiten, jedem Operator  $T \in L(X, Y)$  eine monoton fallende Folge  $(s_j(T))$  in  $[0, \infty)$  mit (4)–(7) zuzuordnen; diese heißt dann eine Folge (*multiplikativer*) *s-Zahlen*. Eine umfassende Theorie solcher s-Zahlen stammt von A. Pietsch, vgl. [Pietsch 1980], Kapitel 11, oder [Pietsch 1987], Kapitel 2.

Als Verallgemeinerung der *Schatten-Klassen* über Hilberträumen (vgl. [GK], Abschnitt 12.5) betrachten wir nun

**$S_p$ -Ideale.** Für Banachräume  $X, Y$  und  $0 < p < \infty$  definieren wir

$$S_p(X, Y) := \{T \in L(X, Y) \mid \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(T)^p < \infty\} \quad \text{und} \\ \sigma_p(T) := \left( \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(T)^p \right)^{1/p} \quad \text{für } T \in S_p(X, Y).$$

Offenbar gilt  $S_p(X, Y) \subseteq K(X, Y)$  und  $\|T\| \leq \sigma_p(T)$  für  $T \in S_p(X, Y)$ . An Stelle der Approximationszahlen kann man auch andere  $s$ -Zahlen verwenden; der folgende Satz gilt auch in diesen Fällen:

**Satz 11.2**

Es seien  $W, X, Y, Z$  Banachräume,  $A, B \in L(X, Y)$ ,  $T \in L(W, X)$  und  $S \in L(Y, Z)$ . Weiter seien  $p, q, r > 0$  mit  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ . Dann gilt:

a) Es ist  $(S_p(X, Y), \sigma_p)$  ein Quasi-Banachraum, und man hat

$$\sigma_p(A + B) \leq 2^{1/p} (\sigma_p(A) + \sigma_p(B)) \quad \text{für } p \geq 1, \quad (10)$$

$$\sigma_p(A + B)^p \leq 2 (\sigma_p(A)^p + \sigma_p(B)^p) \quad \text{für } 0 < p \leq 1. \quad (11)$$

b) Für  $A \in S_p(X, Y)$  gilt  $SAT \in S_p(W, Z)$  und

$$\sigma_p(SAT) \leq \|S\| \sigma_p(A) \|T\|. \quad (12)$$

c) Für  $A \in S_p(X, Y)$  und  $T \in S_q(W, X)$  gilt  $AT \in S_r(X, Z)$  und

$$\sigma_r(AT) \leq 2^{1/r} \sigma_p(A) \sigma_q(T). \quad (13)$$

BEWEIS. a) Für  $p \geq 1$  gilt wegen (5)

$$\begin{aligned} \sigma_p(A + B) &= \left( \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(A + B)^p \right)^{1/p} \leq \left( 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k}(A + B)^p \right)^{1/p} \\ &\leq 2^{1/p} \left( \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k(A) + \alpha_k(B))^p \right)^{1/p} \leq 2^{1/p} (\sigma_p(A) + \sigma_p(B)) \end{aligned}$$

aufgrund der Minkowskischen Ungleichung. Für  $0 < p < 1$  erhält man entsprechend (11) mittels der elementaren Ungleichung

$$|c + d|^p \leq |c|^p + |d|^p \quad \text{für } c, d \in \mathbb{C}.$$

Die Eigenschaften  $\sigma_p(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$  und  $\sigma_p(\lambda A) = |\lambda| \sigma_p(A)$  sind klar. Für eine Cauchy-Folge  $(A_n)$  in  $S_p(X, Y)$  existiert wegen  $\|T\| \leq \sigma_p(T)$  ein Limes  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$

in  $L(X, Y)$ . Aus der Cauchy-Bedingung bezüglich  $\sigma_p$  folgt  $\sum_{j=0}^m \alpha_j(A - A_n)^p \leq \varepsilon^p$  für  $n \geq n_0$  und alle  $m \in \mathbb{N}_0$ , also  $\sigma_p(A - A_n) \rightarrow 0$ .

b) Nach (5) hat man  $\alpha_j(SAT) \leq \|S\| \alpha_j(A) \|T\|$ .

c) Wieder wegen (5) hat man

$$\begin{aligned} \sigma_r(AT)^r &= \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(AT)^r \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k}(AT)^r \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(A)^r \alpha_k(T)^r \\ &\leq 2 \left( \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(A)^p \right)^{r/p} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(B)^q \right)^{r/q} = 2 \sigma_p(A)^r \sigma_q(T)^r \end{aligned}$$

aufgrund der Hölderschen Ungleichung. ◇

Der Quasi-Banachraum  $S_p(H, G)$  ist nach Satz 6.7  $r$ -normierbar für  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + 1$  im Fall  $p \geq 1$  und für  $r = \frac{p}{2}$  im Fall  $p \leq 1$ .

**Duale Operatoren.** a) Für Operatoren  $T \in L(X, Y)$  gilt offenbar  $\alpha_j(T') \leq \alpha_j(T)$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$ . Nach C. Hutton (1974) gilt Gleichheit für *kompakte* Operatoren  $T \in K(X, Y)$ , nicht aber für alle Operatoren  $T \in L(X, Y)$  (vgl. Aufgabe 11.2 c)). Nach D.E. Edmunds und H.-O. Tylli (1986) gilt jedoch stets  $\alpha_j(T) \leq 5 \alpha_j(T')$ . Wir verweisen dazu auf [Carl und Stephani 1990], Abschnitt 2.5.

b) Für  $T \in S_p(X, Y)$  gilt also  $T' \in S_p(Y', X')$  und  $\sigma_p(T') \leq \sigma_p(T)$ . Ist umgekehrt  $T' \in S_p(Y', X')$ , so ist  $T'$  kompakt und nach einem *Satz von Schauder* auch  $T$  kompakt (vgl. [GK], Satz 11.3). Nach dem Resultat von C. Hutton folgt somit auch  $T \in S_p(X, Y)$  und  $\sigma_p(T') = \sigma_p(T)$ .

Schließlich erinnern wir an eine wichtige Charakterisierung der  $S_2$ -Operatoren über Hilberträumen  $H, G$  (vgl. [GK], Abschnitt 12.3):

**Hilbert-Schmidt-Operatoren.** a) Ein linearer Operator  $S \in L(H, G)$  heißt *Hilbert-Schmidt-Operator*, Notation:  $T \in HS(H, G)$ , falls  $\sum_{i \in I} \|Se_i\|^2 < \infty$  für eine *Orthonormalbasis*  $\{e_i\}_{i \in I}$  von  $H$  gilt. Für eine Orthonormalbasis  $\{f_j\}_{j \in J}$  von  $G$  hat man aufgrund der *Parsevalschen Gleichung*

$$\sum_{i \in I} \|Se_i\|^2 = \sum_{i,j} |\langle Se_i | f_j \rangle|^2 = \sum_{i,j} |\langle e_i | S^* f_j \rangle|^2 = \sum_{j \in J} \|S^* f_j\|^2.$$

Daher gilt  $S \in HS(H, G) \Leftrightarrow S^* \in HS(G, H)$ , und die Hilbert-Schmidt-Eigenschaft sowie die *Hilbert-Schmidt-Norm*

$$\|S\|_2 := \left( \sum_{i \in I} \|Se_i\|^2 \right)^{1/2}$$

sind unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis von  $H$ . Dies gilt auch für das *Skalarprodukt*

$$\langle S | T \rangle_2 := \sum_{i \in I} \langle Se_i | Te_i \rangle,$$

das die Hilbert-Schmidt-Norm auf  $HS(H, G)$  induziert.

b) Für einen Operator  $S \in K(H, G)$  mit Schmidt-Darstellung (1) ist  $Se_j = s_j f_j$ . Wegen  $HS(H, G) \subseteq K(H, G)$  (vgl. [GK], Satz 12.8) folgt somit  $HS(H, G) = S_2(H, G)$  und  $\|S\|_2 = \sigma_2(S)$  für alle  $S \in S_2(H, G)$ .

c) Insbesondere ist  $\sigma_2$  eine *Norm* auf  $S_2(H, G)$ , und dieser Raum ist ein *Hilbertraum*. Allgemeiner ist für  $p \geq 1$  über Hilberträumen  $\sigma_p$  eine *Norm* (vgl. Satz 11.7 und Satz 14.31),  $S_p(H, G)$  also ein *Banachraum*.

Wesentliche Beispiele von Hilbert-Schmidt-Operatoren liefert (vgl. [GK], Satz 12.7):

**Satz 11.3**

Es seien  $\Omega$  eine messbare Menge in  $\mathbb{R}^n$  und  $\kappa \in L_2(\Omega^2)$  ein quadratintegrierbarer Kern. Der Integraloperator

$$(Sf)(t) := (S_\kappa f)(t) := \int_\Omega \kappa(t, s) f(s) ds, \quad t \in \Omega, \quad f \in L_2(\Omega), \quad (14)$$

ist ein Hilbert-Schmidt-Operator auf  $L_2(\Omega)$  mit  $\|S\|_2 = \|\kappa\|_{L_2(\Omega^2)}$ .

BEWEIS. Für eine Orthonormalbasis  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  von  $L_2(\Omega)$  gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \|Se_i\|^2 &= \sum_{i=1}^m \int_\Omega |\langle \kappa_t, \bar{e}_i \rangle|^2 dt = \int_\Omega \sum_{i=1}^m |\langle \kappa_t, \bar{e}_i \rangle|^2 dt \\ &\leq \int_\Omega \|\kappa_t\|_{L_2(\Omega)}^2 dt = \|\kappa\|_{L_2(\Omega^2)}^2 \end{aligned}$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$  aufgrund der Besselschen Ungleichung. Folglich ist  $S$  ein Hilbert-Schmidt-Operator, und  $m \rightarrow \infty$  liefert  $\|S\|_2 = \|\kappa\|_{L_2(\Omega^2)}$  aufgrund des Satzes von Beppo Levi und der Parsevalschen Gleichung.  $\diamond$

Auch für stetige Kerne über kompakten Mengen ist die Aussage  $S_\kappa \in S_2$  optimal im Rahmen der Schatten-Klassen:

**Faltungsooperatoren.** Für eine periodische Funktion  $a \in L_{1,2\pi}(\mathbb{R})$  wird durch

$$S_{*a}f(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(t-s) f(s) ds \quad (15)$$

ein linearer *Faltungsoperator* auf  $L_2[-\pi, \pi]$  definiert. Dieser ist *normal*, und seine *Eigenwerte* sind durch die *Fourier-Koeffizienten*  $\{\hat{a}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  gegeben (vgl. [GK], Abschnitt 12.1). Man erhält also die singulären Zahlen von  $S_{*a}$  durch Anordnung der  $\{|\hat{a}(k)|\}_{k \in \mathbb{Z}}$  zu einer monoton fallenden Folge über  $\mathbb{N}_0$ . Für  $a \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$  gilt  $S_{*a} \in S_2$  nach Satz 11.3, es gibt aber *stetige* Funktionen  $a \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$  mit  $S_{*a} \notin S_p$  für alle  $p < 2$  (vgl. [Zygmund 2002], V.4.9).

Nun sei  $K = \bar{\Omega}$  für eine beschränkte offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Aus *Glattheitsbedingungen* an  $\Omega$  und an den Kern  $\kappa$  lässt sich dann  $S_\kappa \in S_p$  für geeignete  $0 < p < 2$  folgern; wegen  $s_j(S_\kappa^*) = s_j(S_\kappa)$  genügt es, Glattheit von  $\kappa$  nur bezüglich *einer* Variablen zu fordern. Wir benötigen das folgende Resultat über *Sobolev-Einbettungen*:

**Satz 11.4**

Es seien  $0 < s \leq m \in \mathbb{N}$  und  $\Omega$  eine beschränkte offene Menge in  $\mathbb{R}^n$  mit  $C^m$ -Rand. Für die Einbettung  $i: W_2^s(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$  gilt dann  $i \in S_p$  für  $p > \frac{n}{s}$ .

BEWEIS. Nach Satz 4.17 existiert ein *Fortsetzungsoperator*  $E: W_2^s(\Omega) \rightarrow W_2^s(\mathbb{R}^n)$ . Nun seien  $\bar{\Omega} \subseteq (-T, T)^n$  und  $\chi \in \mathcal{D}((-T, T)^n)$  mit  $\chi = 1$  nahe  $\bar{\Omega}$ . Durch Abschneiden mit  $\chi$  erhalten wir einen Fortsetzungsoperator  $E_T: W_2^s(\Omega) \rightarrow W_{2,T}^s(\mathbb{R}^n)$  in den Raum der  $T$ -periodischen  $W_2^s$ -Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$ , und mit der Restriktion  $\rho: L_{2,T}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\Omega)$  ergibt sich die Faktorisierung

$$i: W_2^s(\Omega) \xrightarrow{E_T} W_{2,T}^s(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{i_T} L_{2,T}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\rho} L_2(\Omega).$$



Mittels Entwicklung in Fourier-Reihen zeigt man  $i_T \in S_p$  für  $p > \frac{n}{s}$  wie in [GK], S. 244 im Fall einer Veränderlichen (vgl. auch Aufgabe 4.16).  $\diamond$

Im Fall  $m = 1$  gelten Satz 4.17 und somit auch Satz 11.4 für Mengen  $\Omega$  mit Lipschitz-Rand, vgl. S. 95; Entsprechendes gilt auch für das folgende Resultat über Integraloperatoren. Dessen Beweis erfolgt ähnlich wie der von Theorem 12.14 in [GK], sodass wir uns auf eine Skizze beschränken können:

### Theorem 11.5

Es seien  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$  und  $\Omega$  eine beschränkte offene Menge in  $\mathbb{R}^n$  mit  $\mathcal{C}^{m+1}$ -Rand. Für einen stetigen Kern  $\kappa \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{C}}^{m,\gamma}(\Omega))$  gilt  $S_\kappa \in S_p(L_2(\Omega))$  für  $p > \frac{2n}{2(m+\gamma)+n}$ .

BEWEIS. a) Für  $0 \leq s < m + \gamma$  können wir  $S_\kappa : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$  als Produkt

$$L_2(\Omega) \xrightarrow{\tilde{S}_\kappa} \overline{\mathcal{C}}^{m,\gamma}(\Omega) \xrightarrow{j} W_2^s(\Omega) \xrightarrow{i} L_2(\Omega) \quad (16)$$

stetiger linearer Operatoren schreiben.

b) Nun ist  $j\tilde{S}_\kappa : L_2(\Omega) \rightarrow W_2^s(\Omega)$  ein *Hilbert-Schmidt-Operator*; dies lässt sich ähnlich wie Satz 11.3 zeigen, vgl. auch [GK], Theorem 12.14.

c) Mit (16), Satz 11.4 und Satz 11.2 c) folgt nun  $S_\kappa \in S_p(L_2(\Omega))$  für  $\frac{1}{p} < \frac{1}{2} + \frac{s}{n}$ , also für  $p > \frac{2n}{2s+n}$ . Da  $s < m + \gamma$  beliebig gewählt werden kann, folgt die Behauptung.  $\diamond$

Insbesondere gilt  $S_\kappa \in S_1(L_2(\Omega))$  für  $m + \gamma > \frac{n}{2}$ . Die Faltungsoperatoren aus (15) zeigen, dass die Bedingung an  $p$  in Theorem 11.5 optimal ist. Für wesentlich weiter gehende Resultate zur Zugehörigkeit von Einbettungs- und Integraloperatoren zu Operatoridealen sei auf [König 1986], [Pietsch 1980] oder [Pietsch 2007] und die dort zitierte Literatur verwiesen.

## 11.2 Nukleare Operatoren

**Tensoren und nukleare Operatoren.** a) Für Banachräume  $X, Y$  ist

$$\psi : X' \otimes Y \rightarrow K(X, Y), \quad \psi\left(\sum_{k=0}^r x'_k \otimes y_k\right)(x) := \sum_{k=0}^r \langle x, x'_k \rangle y_k \quad \text{für } x \in X, \quad (17)$$

eine Isometrie von  $X' \otimes_\varepsilon Y$  in  $X' \varepsilon Y \cong K(X, Y)$ . Somit ist  $\psi : X' \otimes_\pi Y \rightarrow K(X, Y)$  eine stetige lineare Abbildung mit der Fortsetzung  $\hat{\psi} : X' \hat{\otimes}_\pi Y \rightarrow K(X, Y)$  auf das vollständige  $\pi$ -Tensorprodukt. Nach Theorem 10.23 besitzt ein Element  $u \in X' \hat{\otimes}_\pi Y$  eine Entwicklung  $u = \sum_{k=0}^\infty x'_k \otimes y_k$  mit  $\sum_{k=0}^\infty \|x'_k\| \|y_k\| < \infty$ , und aus (17) folgt

$$(\hat{\psi}u)(x) = \sum_{k=0}^\infty \langle x, x'_k \rangle y_k \quad \text{für } u = \sum_{k=0}^\infty x'_k \otimes y_k \quad \text{und } x \in X. \quad (18)$$

b) Das Bild  $R(\widehat{\psi}) \subseteq K(X, Y)$  von  $\widehat{\psi}$  heißt Raum  $N(X, Y)$  der *nuklearen Operatoren* von  $X$  nach  $Y$ ; die durch  $\widehat{\psi}$  darauf definierte Quotientennorm heißt *nukleare Norm*  $\nu$  auf  $N(X, Y)$ . Dann gilt  $\|T\| \leq \nu(T)$  für  $T \in N(X, Y)$ , und man hat

$$\nu(T) := \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \|x'_k\| \|y_k\| \mid T = \widehat{\psi} \left( \sum_{k=0}^{\infty} x'_k \otimes y_k \right) \right\}, \quad T \in N(X, Y). \quad (19)$$

c) Wir zeigen in Theorem 11.11, dass  $\widehat{\psi}$  i. A. *nicht injektiv* ist. Trotzdem ist es üblich, für die Darstellung eines nuklearen Operators wie in (19) einfach „ $T = \sum_{k=0}^{\infty} x'_k \otimes y_k$ “ zu schreiben.

d) Es ist  $(N(X, Y), \nu)$  ein Banachraum, in dem der Raum  $\mathcal{F}(X, Y) = \psi(X' \otimes Y)$  dicht liegt.

e) Für Banachräume  $W, X, Y, Z$  und Operatoren  $A \in L(W, X)$ ,  $T \in N(X, Y)$  und  $B \in L(Y, Z)$  gilt  $BTA \in N(W, Z)$  sowie

$$\nu(BTA) \leq \|B\| \nu(T) \|A\|. \quad (20)$$

Ist in der Tat  $T = \sum_{k=0}^{\infty} x'_k \otimes y_k$  mit  $\sum_{k=0}^{\infty} \|x'_k\| \|y_k\| \leq \nu(T) + \varepsilon$ , so folgt sofort

$$BTA = \sum_{k=0}^{\infty} A'x'_k \otimes By_k \text{ und}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A'x'_k\| \|By_k\| \leq \|A\| \|B\| \sum_{k=0}^{\infty} \|x'_k\| \|y_k\| \leq \|A\| \|B\| (\nu(T) + \varepsilon).$$

Somit ist  $(N(X, Y), \nu)$  ein *Banach-Operatorideal*.

f) Ein Operator  $T \in L(E, F)$  zwischen (folgenvollständigen) lokalkonvexen Räumen heißt *nuklear*, falls er eine Entwicklung  $T = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x'_k \otimes y_k$  mit einer Folge  $(\lambda_k) \in \ell_1$ , einer gleichstetigen Folge  $(x'_k)$  in  $E'$  und einer beschränkten Folge  $(y_k)$  in  $F$  besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn eine Faktorisierung

$$T : E \xrightarrow{\rho_p} \widehat{E}_p \xrightarrow{T_1} F_B \xrightarrow{i_B} F \quad (21)$$

existiert, wobei  $p \in \mathbb{H}(E)$ ,  $B \in \widehat{\mathbb{B}}(F)$  und  $T_1 \in N(\widehat{E}_p, F_B)$  ist.

Für eine Folge  $\lambda = (\lambda_k)$  bezeichnen wir mit  $D_\lambda : (x_k) \mapsto (\lambda_k x_k)$  einen *Diagonaloperator* zwischen geeigneten Folgenräumen.

### Satz 11.6

Es seien  $X, Y$  Banachräume. Ein Operator  $T \in L(X, Y)$  ist genau dann nuklear, wenn eine Folge  $\lambda \in \ell_1$  und eine Faktorisierung

$$T : X \xrightarrow{A} \ell_\infty \xrightarrow{D_\lambda} \ell_1 \xrightarrow{B} Y \quad (22)$$

existiert. In diesem Fall gilt  $\nu(T) = \inf \{ \|B\| \|\lambda\|_1 \|A\| \mid T = BD_\lambda A \}$ .

BEWEIS. a) Es sei  $T \in N(X, Y)$  mit  $T = \sum_{k=0}^{\infty} x'_k \otimes y_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} \|x'_k\| \|y_k\| \leq \nu(T) + \varepsilon$ .

Wir setzen  $\lambda_k = \|x'_k\| \|y_k\|$  und  $u'_k = \frac{x'_k}{\|x'_k\|} \in X'$  sowie  $v_k = \frac{y_k}{\|y_k\|} \in Y$  für  $\lambda_k \neq 0$ .

Nun definieren wir  $Ax := (\langle x, u'_k \rangle) \in \ell_{\infty}$  für  $x \in X$  und  $B(\eta_k) := \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k v_k \in Y$  für  $(\eta_k) \in \ell_1$ . Dann gilt  $T = BD_{\lambda}A$  und  $\|B\| \|\lambda\|_1 \|A\| \leq \nu(T) + \varepsilon$  wegen  $\|A\| \leq 1$  und  $\|B\| \leq 1$ .

b) Umgekehrt gilt  $D_{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k \otimes e_k$  mit den Einheitsvektoren von  $\ell_1 \subseteq \ell'_{\infty}$ . Folglich

ist  $D_{\lambda}$  nuklear mit  $\nu(D_{\lambda}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|$ , und die Behauptung folgt aus (20).  $\diamond$

**Zusatz.** In Satz 11.6 kann man  $\lambda_k \geq 0$  annehmen. Mit  $\mu_k := \sqrt{\lambda_k}$  und  $\mu = (\mu_k)$  hat man dann aufgrund der Schwarzschen Ungleichung die Faktorisierung

$$T : X \xrightarrow{A} \ell_{\infty} \xrightarrow{D_{\mu}} \ell_2 \xrightarrow{D_{\mu}} \ell_1 \xrightarrow{B} Y \quad (23)$$

von  $T \in N(X, Y)$  über den Hilbertraum  $\ell_2$ .

Wir kommen nun zu Beziehungen zwischen den Idealen  $N$  und  $S_1$ .

### Satz 11.7

Für Hilberträume  $H, G$  gilt  $S_1(H, G) = N(H, G)$  und  $\sigma_1 = \nu$ . Insbesondere ist  $(S_1(H, G), \sigma_1)$  ein Banachraum.

BEWEIS. a) Für  $T \in S_1(H, G)$  ist eine Schmidt-Darstellung (1) auch eine nukleare Darstellung wie in (19); folglich ist  $T \in N(H, G)$  und  $\nu(T) \leq \sum_{j=0}^{\infty} s_j(T) = \sigma_1(T)$ .

b) Es sei  $T \in N(H, G)$  mit  $T = \sum_{k=0}^{\infty} x'_k \otimes y_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} \|x'_k\| \|y_k\| \leq \nu(T) + \varepsilon$ . Nach dem Rieszschen Darstellungssatz 1.11 hat man  $x'_k(x) = \langle x | x_k \rangle$  mit Vektoren  $x_k \in H$  und  $\|x_k\| = \|x'_k\|$ . Als kompakter Operator hat  $T$  auch eine Schmidt-Darstellung (1). Dann folgt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n s_j &= \sum_{j=0}^n \langle T e_j | f_j \rangle \leq \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{\infty} |\langle e_j | x_k \rangle \langle y_k | f_j \rangle| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n |\langle e_j | x_k \rangle|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=0}^n |\langle y_k | f_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| \|y_k\| \leq \nu(T) + \varepsilon \end{aligned}$$

aufgrund der Schwarzschen und der Besselschen Ungleichung.  $\diamond$

### Satz 11.8

Für Banachräume  $X, Y$  gilt  $S_1(X, Y) \subseteq N(X, Y)$ .

BEWEIS. a) Es sei  $F \in \mathcal{F}(X, Y)$  mit  $\text{rk } F = n \in \mathbb{N}$ . Nach einem *Lemma von Auerbach* (vgl. [GK], Aufgabe 3.20) gibt es eine Basis  $\{y_1, \dots, y_n\}$  von  $R(F)$  mit *dualer Basis*  $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$  von  $R(F)'$ , sodass  $\|y_j\| = \|\eta_j\| = 1$  für  $j = 1, \dots, n$  gilt. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es Fortsetzungen  $y'_j \in Y'$  der  $\eta_j$  mit  $\|y'_j\| = 1$ . Dann ist  $Fx = \sum_{j=1}^n \langle Fx, y'_j \rangle y_j$ , und mit  $\lambda_j := \|F'y'_j\|$  und  $x'_j := \lambda_j^{-1} F'y'_j \in X'$  folgt

$$F = \sum_{j=1}^n \lambda_j x'_j \otimes y_j \quad \text{mit} \quad |\lambda_j| \leq \|F\|, \quad \|x'_j\| \leq 1 \quad \text{und} \quad \|y_j\| \leq 1. \quad (24)$$

b) Für  $T \in S_1(X, Y)$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  wählen wir  $F_n \in \mathcal{F}(X, Y)$  mit  $\text{rk } F_n \leq 2^n$  und  $\|T - F_n\| \leq 2\alpha_{2^n}(T)$ . Für  $S_n := F_{n+1} - F_n$  gilt dann offenbar  $\text{rk } S_n \leq 2^{n+2}$  und  $\|S_n\| \leq 4\alpha_{2^n}(T)$ , und es ist  $T = F_0 + \sum_{n=0}^{\infty} S_n$ .

c) Nun schreiben wir  $S_n = \sum_{j=1}^{2^{n+2}} \lambda_{jn} x'_{jn} \otimes y_{jn}$  wie in (24). Wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{n+2}} |\lambda_{jn}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+2} \|S_n\| \leq 2^5 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} \alpha_{2^n}(T) \leq 2^5 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(T) < \infty$$

und  $\|x'_{jn}\|, \|y_{jn}\| \leq 1$  ergibt sich dann  $T = F_0 + \sum_{n=0}^{\infty} S_n \in N(X, Y)$ .  $\diamond$

Die Umkehrung von Satz 11.8 gilt i. A. nicht; es ist sogar  $N(\ell_\infty, \ell_1)$  in keinem Raum  $S_p(\ell_\infty, \ell_1)$  enthalten (vgl. [Pietsch 1980], 18.6.4). Aus den Sätzen 11.6 und 11.7 ergibt sich aber leicht:

### Satz 11.9

*Ein Produkt von drei nuklearen Operatoren liegt in  $S_1$ .*

BEWEIS. Für  $j = 1, 2, 3$  seien  $T_j \in N(X_j, X_{j+1})$  und  $T = T_3 T_2 T_1 \in N(X_1, X_4)$ . Aus (23) ergibt sich das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & & \xrightarrow{T_1} & X_2 & & \xrightarrow{T_2} & X_3 & & \xrightarrow{T_3} & X_4 \\ & \searrow A_1 & & \nearrow B_2 & & \searrow A_2 & & \nearrow B_3 & & \searrow A_3 & & \nearrow B_4 \\ & & \ell_2 & & \xrightarrow{C_2} & \ell_2 & & \xrightarrow{C_3} & \ell_2 & & \end{array} .$$

Da  $N$  und  $S_1$  Ideale sind, folgt  $C_3 C_2 = A_3 T_2 B_2 \in N(\ell_2, \ell_2) = S_1(\ell_2, \ell_2)$  und dann  $T = B_4 C_3 C_2 A_1 \in S_1(X_1, X_4)$ .  $\diamond$

## 11.3 Spuren

Eine wichtige Invariante linearer Operatoren auf endlichdimensionalen Räumen ist die *Spur*. In diesem Abschnitt diskutieren wir das Problem, diese zu einer Spur auf dem Ideal der nuklearen Operatoren zu erweitern.

**Spuren von Tensoren.** Für einen Banachraum  $X$  wird nach Satz 10.21 durch  $\beta : v \mapsto v \circ \otimes$  eine Isometrie  $(X' \otimes_\pi X)' \cong \mathcal{B}(X', X)$  definiert. Die Bilinearform  $(x', x) \mapsto \langle x, x' \rangle$  induziert somit eine Linearform  $\tau \in (X' \widehat{\otimes}_\pi X)'$  mit  $\|\tau\| \leq 1$ , die *Spurabbildung*. Offenbar gilt  $\tau(x' \otimes x) = \langle x, x' \rangle$ , und es folgt

$$\tau(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x_k, x'_k \rangle \quad \text{für } u = \sum_{k=0}^{\infty} x'_k \otimes x_k \in X' \widehat{\otimes}_\pi X. \quad (25)$$

**Spuren endlichdimensionaler Operatoren.** a) Die in (17) definierte Abbildung  $\psi : X' \otimes_\pi X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  ist *bijektiv*; daher können wir die *Spur*

$$\text{tr} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{durch} \quad \text{tr}(\psi u) := \tau(u) \quad \text{für } u \in X' \otimes_\pi X \quad (26)$$

definieren. Für  $T \in L(X, Y)$  und  $S = \sum_k y'_k \otimes x_k \in \mathcal{F}(Y, X)$  gilt dann

$$\begin{aligned} ST &= \sum_k T' y'_k \otimes x_k \quad \text{und} \quad TS = \sum_k y'_k \otimes T x_k, \quad \text{also} \\ \text{tr}(ST) &= \text{tr}(TS) \quad \text{für } T \in L(X, Y) \quad \text{und} \quad S \in \mathcal{F}(Y, X). \end{aligned} \quad (27)$$

Insbesondere ist

$$\text{tr}(S) = \text{tr}(T^{-1}ST) \quad \text{für } T \in GL(X) \quad \text{und} \quad S \in \mathcal{F}(X). \quad (28)$$

b) Für einen *endlichdimensionalen Projektor*  $P \in \mathcal{F}(X)$  sei  $\{x_1, \dots, x_m\}$  eine Basis von  $R(P)$  und  $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$  die *duale* Basis von  $R(P)'$ . Mit  $x'_k := P' \phi_k \in X'$  gilt dann  $P = \sum_{k=1}^m x'_k \otimes x_k$ , und es folgt  $\text{tr } P = \sum_{k=1}^m \langle x_k, x'_k \rangle = m$ , also

$$\text{tr } P = \dim R(P) = \text{rk } P \quad \text{für } P = P^2 \in \mathcal{F}(X). \quad (29)$$

**Spuren nuklearer Operatoren.** a) Die *Spur nuklearer Operatoren* auf  $X$  können wir genau dann wie in (26) definieren, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall u \in X' \widehat{\otimes}_\pi X : \widehat{\psi}(u) = 0 \Rightarrow \tau(u) = 0. \quad (30)$$

b) In diesem Fall ist  $\text{tr} : N(X) \rightarrow \mathbb{K}$  eine Linearform mit  $\|\text{tr}\| = 1$ ; es gelten  $\text{tr}(x' \otimes x) = \langle x, x' \rangle$  für  $x \in X$  und  $x' \in X'$ , die Formeln (27) und (28) sowie

$$|\text{tr}(ST)| \leq \|T\| \nu(S) \quad \text{für alle } T \in L(X, Y) \quad \text{und} \quad S \in N(Y, X).$$

Wir wollen nun zeigen, dass für einen Banachraum  $X$  Bedingung (30) genau dann erfüllt ist, wenn  $X$  die *A.E.* hat. Letzteres ist nach dem Satz von Hahn-Banach genau dann der Fall, wenn für jedes Funktional  $\lambda \in L_\kappa(X)'$  aus  $\lambda(F) = 0$  für alle  $F \in \mathcal{F}(X)$  auch  $\lambda(I_X) = 0$  folgt. Wir benötigen also Informationen über den Dualraum des lokalkonvexen Raumes  $L_\kappa(X)$  :

**Funktionale auf  $L(X, Y)$ .** Für Banachräume  $X, Y$  definieren wir eine bilineare Abbildung

$$B : Y' \times X \rightarrow L(X, Y)' \quad \text{durch} \quad B(y', x)(S) := \langle Sx, y' \rangle \quad \text{für } S \in L(X, Y).$$

Linearisierung gemäß Satz 10.21 liefert einen linearen Operator  $b : Y' \widehat{\otimes}_\pi X \rightarrow L(X, Y)'$  mit  $\|b\| \leq 1$ . Offenbar gilt

$$b(u)(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle Sx_k, y'_k \rangle \quad \text{für } u = \sum_{k=0}^{\infty} y'_k \otimes x_k \in Y' \widehat{\otimes}_\pi X \quad \text{und } S \in L(X, Y). \quad (31)$$

### Satz 11.10

Für Banachräume  $X, Y$  ist  $L_\kappa(X, Y)'$  das Bild des linearen Operators  $b$  aus (31).

BEWEIS. a) Für  $u \in Y' \widehat{\otimes}_\pi X$  wie in (31) gilt  $\sum_{k=0}^{\infty} \|y'_k\| \|x_k\| < \infty$ , wobei wir  $x_k \neq 0$  annehmen können. Es sei  $\alpha_k \uparrow \infty$  eine Folge, sodass auch  $C := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|y'_k\| \|x_k\| < \infty$  gilt. Dann ist  $(\xi_k := \frac{x_k}{\alpha_k \|x_k\|})$  eine Nullfolge und  $K := \overline{\Gamma\{\xi_k\}} \subseteq X$  kompakt. Aus

$$|b(u)(S)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|x_k\| \|y'_k\| \|S\xi_k\| \leq C p_K(S) \quad \text{für } S \in L(X, Y)$$

folgt nun die Stetigkeit von  $b(u) : L_\kappa(X, Y) \rightarrow \mathbb{K}$ .

b) Für  $\lambda \in L_\kappa(X, Y)'$  gibt es eine kompakte Kugel  $K \in \mathfrak{K}(X)$  mit  $|\lambda(S)| \leq C p_K(S)$  für  $S \in L(X, Y)$ . Nach Satz 8.26 gibt es eine Nullfolge  $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  in  $c_0(X)$  mit  $K \subseteq \overline{\Gamma\{x_k\}}$ , und daher gilt auch

$$|\lambda(S)| \leq C \sup_k \|Sx_k\| \quad \text{für } S \in L(X, Y). \quad (32)$$

Wir definieren einen Operator  $\Psi \in L(L(X, Y), c_0(Y))$  durch  $\Psi : S \mapsto (Sx_k)$ . Nach (32) gilt  $|\lambda(S)| \leq C \|\Psi(S)\|$ ; es gibt also eine stetige Linearform  $\mu$  auf  $R(\Psi)$  mit  $\mu(\Psi(S)) = \lambda(S)$  für  $S \in L(X, Y)$ . Nach dem Satz von Hahn-Banach hat  $\mu$  eine Fortsetzung zu  $\tilde{\mu} \in c_0(Y)'$ . Nach Aufgabe 10.23 ist  $c_0(Y)' \cong \ell_1(Y')$ ; es gibt also eine Folge  $y = (y'_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  in  $\ell_1(Y')$  mit  $\tilde{\mu}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle y_k, y'_k \rangle$  für  $y = (y_k)$  in  $c_0(Y)$ . Daher ist  $\lambda(S) = \tilde{\mu}(\Psi(S)) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle Sx_k, y'_k \rangle = b(u)(S)$  mit  $u := \sum_{k=0}^{\infty} y'_k \otimes x_k \in Y' \widehat{\otimes}_\pi X$ .  $\diamond$

Nun können wir das folgende Resultat aus [Grothendieck 1955], I §5 beweisen:

### Theorem 11.11

Ein Banachraum  $X$  besitzt genau dann die A.E., wenn Bedingung (30) gilt, die Spur  $\text{tr} : N(X) \rightarrow \mathbb{K}$  nuklearer Operatoren auf  $X$  also wohldefiniert ist.

BEWEIS. „ $\Leftarrow$ “: Es sei  $\lambda \in L_\kappa(X)'$  mit  $\lambda(F) = 0$  für  $F \in \mathcal{F}(X)$  gegeben; zu zeigen ist  $\lambda(I_X) = 0$ . Nach Satz 11.10 gibt es  $u = \sum_{k=0}^{\infty} x'_k \otimes x_k \in X' \widehat{\otimes}_\pi X$  mit  $\lambda = b(u)$ . Für die Abbildung  $\widehat{\psi} : X' \widehat{\otimes}_\pi X \rightarrow N(X)$  aus (18) sowie  $x \in X$  und  $x' \in X'$  gilt

$$\langle \widehat{\psi}(u)x, x' \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \langle x, x'_k \rangle x_k, x' \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \langle x_k, x' \rangle x, x'_k \rangle = \lambda(x' \otimes x) = 0, \quad (33)$$

und daher ist  $\widehat{\psi}(u) = 0$ . Aus (30) folgt dann

$$\lambda(I_X) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x_k, x'_k \rangle = \tau(u) = 0. \quad (34)$$

„ $\Rightarrow$ “: Nun sei  $u = \sum_{k=0}^{\infty} x'_k \otimes x_k \in X' \widehat{\otimes}_\pi X$  mit  $\widehat{\psi}(u) = 0$ . Für  $\lambda := b(u)$  folgt dann  $\lambda(x' \otimes x) = 0$  für  $x \in X$  und  $x' \in X'$  wie in (33), also  $\lambda(F) = 0$  für  $F \in \mathcal{F}(X)$  und dann  $\lambda(I_X) = 0$ , da  $X$  die A.E. hat. Nach (34) impliziert dies dann  $\tau(u) = 0$ .  $\diamond$

Nach [Grothendieck 1955], I §5 ist sogar die Abbildung  $\widehat{\psi} : X' \widehat{\otimes}_\pi Y \rightarrow N(X, Y)$  *injektiv*, wenn  $X'$  oder  $Y$  die A.E. hat. Ein Banachraum  $Y$  hat genau dann die A.E., wenn die kanonische Abbildung  $\widehat{i} : X \widehat{\otimes}_\pi Y \rightarrow X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$  für alle Banachräume  $X$  oder für alle *dualen* Banachräume  $X$  *injektiv* ist, vgl. dazu [Köthe 1979], § 43.2, oder [Defant und Floret 1993], 5.6.

Nach Theorem 11.11 kann also die Spur *nicht* auf dem Ideal  $N$  der nuklearen Operatoren über allen Banachräumen definiert werden. Für *kleinere Ideale* ist dies jedoch möglich, nach [Grothendieck 1955], II § 1.4 für das Ideal  $N_{2/3}$  der  $2/3$ -nuklearen Operatoren (vgl. Aufgabe 11.10 für diesen Begriff), nach H. König (1980) für das Ideal  $S_1$  (vgl. [König 1986], 4.a).

Aus Theorem 11.11 folgt leicht:

### Satz 11.12

*Es sei  $X$  ein Banachraum. Besitzt  $X'$  die A.E., so gilt dies auch für  $X$ .*

BEWEIS. Es sei  $u = \sum_{k=0}^{\infty} x'_k \otimes x_k \in X' \widehat{\otimes}_\pi X$  mit  $\widehat{\psi}(u) = 0$ . Nach (33) ist dann  $\sum_{k=0}^{\infty} \langle x_k, x' \rangle x'_k = 0$  für alle  $x' \in X'$ , also  $\widehat{\psi}(v) = 0$  für  $v = \sum_{k=0}^{\infty} \iota_X x_k \otimes x'_k \in X'' \widehat{\otimes}_\pi X'$ . Da  $X'$  die A.E. hat, folgt daraus

$$\tau(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x_k, x'_k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x'_k, \iota_X x_k \rangle = \tau(v) = 0. \quad \diamond$$

Aus der von P. Enflo 1972 gezeigten Existenz eines Banachraumes ohne A.E. lässt sich schließen, dass die Umkehrung von Satz 11.12 falsch ist, vgl. dazu [Lindenstrauß und Tzafriri 1977], Theorem 1.e.7.

**Spuren linearer Operatoren auf Hilberträumen.** a) Nach Theorem 11.11 ist insbesondere für einen Hilbertraum  $H$  die Spur auf dem Ideal  $N(H) = S_1(H)$  definiert; aus diesem Grund wird dieses auch als *Spurklasse* bezeichnet.

b) Nun sei  $S \in S_1(H)$  mit nuklearer Darstellung  $S = \sum_{k=0}^{\infty} x'_k \otimes y_k$  und  $\{e_i\}_{i \in I}$  eine Orthonormalbasis von  $H$ . Man sieht  $\sum_{i \in I} |\langle Se_i | e_i \rangle| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| \|y_k\|$  wie im Beweis von Satz 11.7, und es gilt

$$\sum_{i \in I} \langle Se_i | e_i \rangle = \sum_{i \in I} \sum_{k=0}^{\infty} \langle e_i | x_k \rangle \langle y_k | e_i \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i \in I} \langle e_i | x_k \rangle \langle y_k | e_i \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle y_k | x_k \rangle$$

aufgrund der Parsevalschen Gleichung. Dies zeigt

$$\operatorname{tr} S = \sum_{i \in I} \langle Se_i | e_i \rangle. \quad (35)$$

c) Für Hilbert-Schmidt-Operatoren  $A, B \in S_2(H, G)$  ist  $B^* A \in S_1(H)$ , und es gilt

$$\langle A | B \rangle_2 := \sum_{i \in I} \langle Ae_i | Be_i \rangle = \sum_{i \in I} \langle B^* Ae_i | e_i \rangle = \operatorname{tr}(B^* A). \quad (36)$$

d) Für einen *normalen* Operator  $S \in S_1(H)$  gibt es aufgrund des *Spektralsatzes* eine Orthonormalbasis  $\{e_i\}_{i \in I}$  von  $H$  mit  $Se_i = \lambda_i e_i$ ; mit den *Eigenwerten*  $\lambda_i = \lambda_i(S)$  folgt also aus (35):

$$\operatorname{tr} S = \sum_{i \in I} \lambda_i(S). \quad (37)$$

e) Im Fall  $\dim H < \infty$  gibt es für beliebige  $S \in L(H)$  eine Orthonormalbasis von  $H$ , in der  $S$  durch eine *Dreiecksmatrix* repräsentiert wird (vgl. dazu Lemma 14.26 auf S. 378). Die Eigenwerte auf der Diagonalen werden so oft gezählt, wie ihre *algebraische Vielfachheit* (vgl. S. 378) angibt, und Formel (37) gilt auch in diesem Fall.

f) Formel (37) gilt sogar für *alle* Operatoren  $S \in S_1(H)$  auf beliebigen Hilberträumen mit der Interpretation aus e). Für diesen *Satz von Lidskii* sei auf [Gohberg et al. 1990], Kapitel VII verwiesen (vgl. auch S. 382).

**Spuren von Integraloperatoren.** a) Es sei  $\kappa = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \otimes b_j \in \mathcal{C}(K) \widetilde{\otimes}_{\pi} \mathcal{C}(K)$  ein

stetiger Kern auf einer kompakten Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ , wobei  $\sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\|_{\sup} \|b_j\|_{\sup} < \infty$

gelte. Der Integraloperator  $S_{\kappa} : f \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \langle f | \overline{b_j} \rangle a_j$  aus (14) ist dann nuklear auf

$L_2(K)$ , und (25) liefert  $\operatorname{tr} S_{\kappa} = \sum_{j=0}^{\infty} \langle a_j | \overline{b_j} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \int_K a_j(t) \overline{b_j(t)} dt$ , also die *Spurformel*

$$\operatorname{tr} S_{\kappa} = \int_K \kappa(t, t) dt. \quad (38)$$



b) Nun seien  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $0 \leq \gamma \leq 1$  mit  $m + \gamma > \frac{n}{2}$  sowie  $K = \overline{\Omega}$  für eine beschränkte offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $\mathcal{C}^{m+1}$ -Rand. Für einen Kern  $\kappa \in \mathcal{C}(K, \overline{\mathcal{C}}^{m,\gamma}(\Omega))$  gilt nach Theorem 11.5  $S_\kappa \in S_1(L_2(K))$ . Wegen Satz 10.16 b) oder [GK], Theorem 2.7 gibt es eine Folge  $(\kappa_n)$  in  $\mathcal{C}(K) \otimes \overline{\mathcal{C}}^{m,\gamma}(\Omega)$  mit  $\kappa_n \rightarrow \kappa$  in  $\mathcal{C}(K, \overline{\mathcal{C}}^{m,\gamma}(\Omega))$ . Nach a) gilt obige Spurformel (38) für die Kerne  $\kappa_n$ . Der Beweis von Theorem 11.5 zeigt  $j\tilde{S}_{\kappa_n} \rightarrow j\tilde{S}_\kappa$  in  $S_2(L_2(K), W_2^s(\Omega))$  für  $\frac{n}{2} < s < m + \gamma$ . Mit Satz 11.2 c) folgt dann  $S_{\kappa_n} \rightarrow S_\kappa$  in  $S_1(L_2(K))$  und somit  $\text{tr } S_{\kappa_n} \rightarrow \text{tr } S_\kappa$ . Folglich gilt die Spurformel (38) auch für den Kern  $\kappa$ .

## 11.4 Nukleare Räume

Nukleare Operatoren bilden  $\varepsilon$ -Tensorprodukte stetig in  $\pi$ -Tensorprodukte ab:

### Satz 11.13

Es seien  $X, Y, Z$  Banachräume und  $T \in N(X, Y)$ . Dann ist  $T \otimes I_Z : X \otimes_\varepsilon Z \rightarrow Y \otimes_\pi Z$  stetig mit  $\|T \otimes I_Z\| \leq \nu(T)$ .

BEWEIS. Es sei  $T = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x'_k \otimes y_k$  mit  $\|x'_k\| \leq 1$ ,  $\|y_k\| \leq 1$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \leq \nu(T) + \delta$  für ein  $\delta > 0$ . Für  $u = \sum_{j=1}^r x_j \otimes z_j \in X \otimes Z$  gibt es  $b \in (Y \otimes_\pi Z)'$  mit  $\|b\| = 1$  und

$$\begin{aligned} \|(T \otimes I_Z)u\|_\pi &= \langle (T \otimes I_Z)u, b \rangle = \langle \sum_{j=1}^r T x_j \otimes z_j, b \rangle \\ &= \langle \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \langle x_j, x'_k \rangle y_k \otimes z_j, b \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \langle y_k \otimes \sum_{j=1}^r \langle x_j, x'_k \rangle z_j, b \rangle \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \|y_k\| \left\| \sum_{j=1}^r \langle x_j, x'_k \rangle z_j \right\| = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \|u'(x'_k)\| \\ &\leq (\nu(T) + \delta) \sup_{\|x'\| \leq 1} \|u'(x')\| = (\nu(T) + \delta) \|u\|_\varepsilon. \quad \diamond \end{aligned}$$

Das folgende wichtige Konzept eines *nuklearen lokalkonvexen Raumes* von A. Grothendieck (1955) wird durch Satz 11.13 nahegelegt. Es verwendet die auf S. 151 eingeführten *lokalen Banachräume* eines lokalkonvexen Raumes:

**Definition.** Ein lokalkonvexer Raum  $E$  heißt nuklear, falls es zu jeder Halbnorm  $p \in \mathfrak{H}(E)$  eine Halbnorm  $p \leq q \in \mathfrak{H}(E)$  gibt, sodass die verbindende kanonische Abbildung  $\widehat{p}_q^p : \widehat{E}_q \rightarrow \widehat{E}_p$  aus (7.5) nuklear ist.

**Beispiele.** a) Für den Raum  $\mathbb{K}^J$ ,  $J$  Indexmenge, ist jeder lokale Banachraum endlichdimensional;  $\mathbb{K}^J$  ist also nuklear. Dies gilt insbesondere für den Fréchetraum  $\omega$  aller Folgen.

b) Für einen beliebigen lokalkonvexen Raum  $E$  ist jeder lokale Banachraum des Raumes  $E^\sigma = (E, \sigma(E, E'))$  endlichdimensional;  $E^\sigma$  ist also ebenfalls *nuklear*. Im Fall  $E \neq E^\sigma$  ist  $E^\sigma$  nicht quasitonnelliert (vgl. S. 176). Interessantere Beispiele folgen in Satz 11.16 und auf den Seiten 282 und 285.

Aus Satz 11.13 ergibt sich sofort:

### Theorem 11.14

*Es sei  $E$  ein nuklearer lokalkonvexer Raum. Dann gilt  $E \otimes_\varepsilon F \simeq E \otimes_\pi F$  und daher  $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F = E \widehat{\otimes}_\pi F$  für alle lokalkonvexen Räume  $F$ .*

BEWEIS. Für  $p \in \mathfrak{H}(E)$  wählen wir  $p \leq q \in \mathfrak{H}(E)$ , sodass  $\widehat{\rho}_q^p : \widehat{E}_q \rightarrow \widehat{E}_p$  nuklear ist. Für eine Halbnorm  $r \in \mathfrak{H}(F)$  gilt nach Satz 11.13 dann  $(p \otimes_\pi r)(t) \leq C(q \otimes_\varepsilon r)(t)$  für alle  $t \in E \otimes F$ .  $\diamond$

Es gilt auch die Umkehrung dieses fundamentalen Resultats; in der Tat folgt aus der Annahme  $\ell_1 \otimes_\varepsilon E \simeq \ell_1 \otimes_\pi E$  bereits die Nuklearität von  $E$  (vgl. [Jarchow 1981], 21.2). Andererseits konstruierte G. Pisier 1983 einen unendlichdimensionalen Banachraum  $X$  mit  $X \otimes_\varepsilon X \simeq X \otimes_\pi X$  (vgl. [Pisier 1986]) und löste damit ein von Grothendieck formuliertes lange Zeit offenes Problem. Aufgrund des nächsten Satzes sind unendlichdimensionale Banachräume nicht nuklear:

### Satz 11.15

- a) *In einem nuklearen Raum  $E$  ist jede beschränkte Menge präkompakt.*  
b) *Ein nuklearer Fréchetraum ist ein Fréchet-Montelraum.*

BEWEIS. a) Für  $p \in \mathfrak{H}(E)$  wählen wir  $p \leq q \in \mathfrak{H}(E)$ , sodass  $\widehat{\rho}_q^p : \widehat{E}_q \rightarrow \widehat{E}_p$  nuklear und somit kompakt ist. Für eine beschränkte Menge  $B \subseteq E$  ist  $\rho_q(B)$  in  $\widehat{E}_q$  beschränkt und somit  $\rho_p(B) = \widehat{\rho}_q^p \rho_q(B)$  in  $\widehat{E}_p$  relativ kompakt. Da  $\Phi : x \mapsto (\rho_p(x))_{p \in \mathbb{H}(E)}$  ein Isomorphismus von  $E$  in  $\prod_{p \in \mathbb{H}(E)} \widehat{E}_p$  ist (vgl. S. 151), ist  $B$  nach dem Satz von Tychonoff präkompakt.

Aussage b) folgt sofort aus a).  $\diamond$

Erste *interessante Beispiele* nuklearer Räume liefert der folgende Satz über Köthe-Räume (vgl. S. 248). Wir verwenden die Konvention „ $\frac{0}{0} := 0$ “.

### Satz 11.16

*Für eine Köthe-Matrix  $A$  ist der Köthe-Raum  $\lambda_1(A)$  genau dann nuklear, wenn das Grothendieck-Pietsch-Kriterium*

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \exists k \leq n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{j,k}}{a_{j,n}} < \infty \quad (39)$$

*gilt. In diesem Fall ist  $\lambda_1(A) = \lambda_p(A) = c_0(A)$  für alle  $1 \leq p \leq \infty$ .*

BEWEIS. Stets gilt  $\lambda_1(A) \hookrightarrow \lambda_p(A) \hookrightarrow c_0(A) \hookrightarrow \lambda_\infty(A)$  für  $1 < p < \infty$ , und aus (39) folgt sofort  $\lambda_1(A) = \lambda_\infty(A)$ .

„ $\Leftarrow$ “: Für  $k \in \mathbb{N}_0$  sei  $I_k := \{j \in \mathbb{N}_0 \mid a_{j,k} > 0\}$ . Der durch  $\|\cdot\|_k$  auf  $\lambda_1(A)$  definierte lokale Banachraum ist gegeben durch

$$\ell_1(I_k, a_k) = \{\xi = (\xi_j) \in \mathbb{K}^{I_k} \mid \|\xi\|_k = \sum_{j \in I_k} a_{j,k} |\xi_j| < \infty\}.$$

Für  $n \geq k$  ist  $I_k \subseteq I_n$ , und die kanonische Abbildung  $\hat{\rho}_{kn} : \ell_1(I_n, a_n) \rightarrow \ell_1(I_k, a_k)$  ist gegeben durch  $\hat{\rho}_{kn}(\xi_j)_{j \in I_n} = (\xi_j)_{j \in I_k}$ . Mit den Einheitsvektoren  $e_j$  und den Funktionalen  $\eta_j : \xi \mapsto a_{j,n} \xi_j$  in  $\ell_1(I_n, a_n)'$  gilt

$$\hat{\rho}_{kn}(\xi) = \sum_{j \in I_k} \frac{a_{j,k}}{a_{j,n}} a_{j,n} \xi_j \frac{e_j}{a_{j,k}} = \sum_{j \in I_k} \frac{a_{j,k}}{a_{j,n}} \langle \xi, \eta_j \rangle \frac{e_j}{a_{j,k}}.$$

Gilt nun (39), so ist  $\hat{\rho}_{kn}$  nuklear wegen  $\|\eta_j\|_{\ell_1(I_n, a_n)'} \leq 1$  und  $\|e_j\|_{\ell_1(I_k, a_k)} \leq a_{j,k}$ .

„ $\Rightarrow$ “: Für  $k \in \mathbb{N}_0$  wählen wir  $k \leq n \in \mathbb{N}_0$ , sodass  $\hat{\rho}_{kn} : \ell_1(I_n, a_n) \rightarrow \ell_1(I_k, a_k)$  nuklear ist. Es gibt dann Folgen  $(\eta_\ell)$  in  $\ell_1(I_n, a_n)' \cong \ell_\infty(I_n, \frac{1}{a_n})$  und  $(\zeta_\ell)$  in  $\ell_1(I_k, a_k)$  mit

$$\hat{\rho}_{kn}(\xi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \langle \xi, \eta_\ell \rangle \zeta_\ell \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} \|\eta_\ell\| \|\zeta_\ell\| < \infty.$$

Anwendung auf  $e_j$  liefert  $1 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \eta_{j,\ell} \zeta_{j,\ell}$ , also  $\frac{a_{j,k}}{a_{j,n}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\eta_{j,\ell}}{a_{j,n}} a_{j,k} \zeta_{j,\ell}$  und somit

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I_k} \frac{a_{j,k}}{a_{j,n}} &\leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j \in I_k} \frac{|\eta_{j,\ell}|}{a_{j,n}} a_{j,k} |\zeta_{j,\ell}| \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \sup_{j \in I_k} \frac{|\eta_{j,\ell}|}{a_{j,n}} \right) \left( \sum_{j \in I_k} a_{j,k} |\zeta_{j,\ell}| \right) \\ &\leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \|\eta_\ell\| \|\zeta_\ell\| < \infty, \quad \text{also (39).} \quad \diamond \end{aligned}$$

Auch die Nuklearität von  $c_0(A)$  oder von  $\lambda_p(A)$  für ein  $p \in [1, \infty]$  impliziert Bedingung (39), vgl. [Meise und Vogt 1992], Satz 28.16.

**Nukleare Potenzreihenräume.** a) Es seien  $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und  $\alpha = (\alpha_j)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $0 \leq \alpha_j \uparrow \infty$ . Der *Potenzreihenraum*  $\Lambda_R(\alpha)$  aus (10.32) ist isomorph zu  $\lambda_2(A)$  mit der Köthe-Matrix  $A := (e^{t_k \alpha_j})$  für jede Folge  $(t_k)$  in  $(-\infty, R)$  mit  $t_k \uparrow R$ . Für  $k < n$  gilt somit  $\frac{a_{j,k}}{a_{j,n}} = e^{(t_k - t_n) \alpha_j}$ , und daher ist  $\Lambda_R(\alpha)$  nuklear, falls gilt

$$\sup_{j \in \mathbb{N}_0} \frac{\log(j+1)}{\alpha_j} < \infty \quad \text{für } R = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log(j+1)}{\alpha_j} = 0 \quad \text{für } R < \infty. \quad (40)$$

b) Insbesondere sind die Räume  $s(\mathbb{N}_0) = \Lambda_\infty(\log(j+1))$  und  $\Lambda_R(j)$  nuklear. Daraus folgt sofort auch die Nuklearität der zu  $s$  isomorphen Frécheträume  $\mathcal{C}^\infty[a, b]$ ,  $\mathcal{D}[a, b]$ ,  $\mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  sowie die der Frécheträume  $\mathcal{H}(D_R) \simeq \Lambda_R(j)$  der holomorphen Funktionen auf einem Kreis  $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$  für  $0 < R \leq \infty$ .

Weitere wichtige Beispiele folgen auf S. 282. Zunächst formulieren wir einige zur Nuklearität äquivalente Bedingungen. Unter einer *Hilbert-Halbnorm* verstehen wir eine Halbnorm, die durch ein Halbskalarprodukt definiert werden kann; mit  $\mathfrak{S}(E)$  bezeichnen wir die Menge aller stetigen Hilbert-Halbnormen auf  $E$ .

**Satz 11.17**

Für einen lokalkonvexen Raum  $E$  sind äquivalent:

- (a)  $E$  ist nuklear.
- (b) Es ist  $\mathfrak{S}(E)$  ein Fundamentalsystem von Halbnormen auf  $E$ , und zu  $p \in \mathfrak{S}(E)$  gibt es  $p \leq q \in \mathfrak{S}(E)$ , sodass die verbindende Abbildung  $\hat{\rho}_q^p : \hat{E}_q \rightarrow \hat{E}_p$  ein Hilbert-Schmidt-Operator ist.
- (c) Es ist  $\mathfrak{S}(E)$  ein Fundamentalsystem von Halbnormen auf  $E$ , und zu  $p \in \mathfrak{S}(E)$  gibt es  $p \leq q \in \mathfrak{S}(E)$ , sodass die Einbettung  $i_p^q : E'_p \rightarrow E'_q$  ein Hilbert-Schmidt-Operator ist.
- (d) Es ist  $\mathfrak{S}(E)$  ein Fundamentalsystem von Halbnormen auf  $E$ , und zu  $p \in \mathfrak{S}(E)$  und  $r > 0$  gibt es  $p \leq q \in \mathfrak{S}(E)$  mit  $\hat{\rho}_q^p \in S_r(\hat{E}_q, \hat{E}_p)$ .
- (e) Es gibt  $r > 0$ , sodass es zu  $p \in \mathfrak{H}(E)$  ein  $p \leq q \in \mathfrak{H}(E)$  mit  $\hat{\rho}_q^p \in S_r(\hat{E}_q, \hat{E}_p)$  gibt.

BEWEIS. „(a)  $\Rightarrow$  (b)“: Zu einer Halbnorm  $p = p_1 \in \mathfrak{H}(E)$  wählen wir nacheinander  $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4 \in \mathfrak{H}(E)$ , sodass die verbindenden Abbildungen  $\rho_{k+1}^k : \hat{E}_{p_{k+1}} \rightarrow \hat{E}_{p_k}$  für  $k = 1, 2, 3$  nuklear sind. Nach (23) können diese über  $\ell_2$  faktorisiert werden, und wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \hat{E}_{p_4} & \xrightarrow{\rho_4^3} & \hat{E}_{p_3} & \xrightarrow{\rho_3^2} & \hat{E}_{p_2} & \xrightarrow{\rho_2^1} & \hat{E}_p \\
 \searrow A_4 & & \nearrow B_3 & \searrow A_3 & \nearrow B_2 & \searrow A_2 & \nearrow B_1 \\
 & \ell_2 & \xrightarrow{C_3} & \ell_2 & \xrightarrow{C_2} & \ell_2 & \\
 & \cup & & \cup & & \cup & \\
 H_4 & \xrightarrow{\varphi_4^3} & H_3 & \xrightarrow{\varphi_3^2} & H_2 & & 
 \end{array}$$

Für  $k = 2, 3, 4$  definieren wir nun Hilbert-Halbnormen auf  $E$  durch

$$h_k^p(x) := \|A_k \rho_k x\|_{\ell_2} \quad \text{für } x \in E.$$

Wegen  $p(x) \leq \|B_1\| h_2^p(x)$  und  $h_2^p(x) \leq \|A_2\| p_2(x)$  für  $x \in E$  ist  $\mathfrak{S}(E)$  ein Fundamentalsystem von Halbnormen auf  $E$ .

Wegen  $N(h_k^p) = N(A_k \rho_k)$  induziert die Abbildung  $A_k \rho_k : E \rightarrow \ell_2$  eine Isometrie  $\psi_k : \hat{E}_{h_k^p} \rightarrow H_k := \overline{R(A_k)}$ , und für  $k = 3, 4$  sind die verbindenden kanonischen Abbildungen gegeben durch  $\psi_k^{k-1} = (\psi_{k-1})^{-1} \varphi_k^{k-1} \psi_k : \hat{E}_{h_k^p} \rightarrow \hat{E}_{h_{k-1}^p}$  mit

$\varphi_k^{k-1} := A_{k-1}B_{k-1}|_{H_k} : H_k \rightarrow H_{k-1}$ . Mit  $\rho_3^2$  ist auch  $C_2C_3 = A_2\rho_3^2B_3 : \ell_2 \rightarrow \ell_2$  nuklear und somit ein Hilbert-Schmidt-Operator. Dies gilt dann auch für die Einschränkung  $\varphi_4^2 : H_4 \rightarrow H_2$ , und somit ist auch  $\psi_4^2 : \widehat{E}_{h_4^p} \rightarrow \widehat{E}_{h_2^p}$  ein Hilbert-Schmidt-Operator.

„(b)  $\Leftrightarrow$  (c)“ folgt sofort aus  $(\widehat{E}_p)' \cong E_p'$  (vgl. Aufgabe 7.3) und  $i_p^q = (\widehat{\rho}_q^p)'$ .

„(b)  $\Rightarrow$  (d)“: Es gibt  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{2}{n} \leq r$ , und nach Satz 11.2 c) liegt ein  $n$ -faches Produkt von Hilbert-Schmidt-Operatoren in  $S_r$ .

„(d)  $\Rightarrow$  (e)“ ist klar.

„(e)  $\Rightarrow$  (a)“: Es gibt  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{r}{n} \leq 1$ . Nach Satz 11.2 c) liegt ein  $n$ -faches Produkt von  $S_r$ -Operatoren in  $S_1$  und ist somit nuklear nach Satz 11.8.  $\diamond$

Aus Satz 10.18 ergibt sich nun sofort:

### Satz 11.18

*Ein nuklearer lokalkonvexer Raum besitzt die A.E.*

Wir zeigen nun *Permanenzeigenschaften* der Nuklearität:

### Satz 11.19

*Nuklearität vererbt sich auf*

- a) *Unterräume und Quotientenräume,*
- b) *topologische Produkte,*
- c) *abzählbare direkte Summen.*

BEWEIS. a) Offenbar vererbt sich Nuklearität auf dichte Unterräume. Nun seien  $E$  ein nuklearer Raum,  $G \subseteq E$  ein abgeschlossener Unterraum,  $Q = E/G$  und  $\sigma : E \rightarrow Q$  die Quotientenabbildung. Für  $p \in \mathfrak{S}(E)$  sind auch die Einschränkung auf  $G$  und die Quotienten-Halbnorm  $\tilde{p}$  auf  $Q$  Hilbert-Halbnormen (vgl. (7.12)), und daher sind  $\mathfrak{S}(G)$  und  $\mathfrak{S}(Q)$  Fundamentalsysteme von Halbnormen auf  $G$  und  $Q$ . Zu  $p \in \mathfrak{S}(E)$  wählen wir  $p \leq q \in \mathfrak{S}(E)$  mit  $\widehat{\rho}_q^p \in S_2(\widehat{E}_q, \widehat{E}_p)$  gemäß Satz 11.17 und erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{G}_p & \xrightarrow{\iota_p} & \widehat{E}_p & \xrightarrow{\sigma_p} & \widehat{Q}_{\tilde{p}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \theta_q^p & & \uparrow \rho_q^p & & \uparrow \tau_q^p & & \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{G}_q & \xrightarrow{\iota_q} & \widehat{E}_q & \xrightarrow{\sigma_q} & \widehat{Q}_{\tilde{q}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Da  $\widehat{E}_p$  und  $\widehat{E}_q$  Hilberträume sind, gibt es zu  $\iota_p \in L(\widehat{G}_p, \widehat{E}_p)$  eine Linksinverse  $L_p \in L(\widehat{E}_p, \widehat{G}_p)$  und zu  $\sigma_q \in L(\widehat{E}_q, \widehat{Q}_{\tilde{q}})$  eine Rechtsinverse  $R_q \in L(\widehat{Q}_{\tilde{q}}, \widehat{E}_q)$ . Daher sind auch  $\theta_q^p = L_p \rho_q^p \iota_q$  und  $\tau_q^p = \sigma_p \rho_q^p R_q$  Hilbert-Schmidt-Operatoren.

b) Nun sei  $E = \prod_{j \in J} E_j$  kartesisches Produkt der nuklearen Räume  $E_j$ . Eine Halbnorm auf  $E$  hat die Form  $p(x) = \sum_{j \in A} p_j(x_j)$  für  $x = (x_j) \in E$ , eine *endliche* Indexmenge  $A \subseteq J$  und Halbnormen  $p_j \in \mathfrak{H}(E_j)$ . Somit können wir  $\widehat{E}_p$  mit dem endlichen Produkt  $\prod_{j \in A} (\widehat{E_j})_{p_j}$  identifizieren. Wir wählen dann Halbnormen  $p_j \leq q_j \in \mathfrak{H}(E_j)$  mit  $\widehat{\rho}_{q_j}^{p_j} \in N((\widehat{E_j})_{q_j}, (\widehat{E_j})_{p_j})$  und setzen  $q(x) = \sum_{j \in A} q_j(x_j)$  für  $x = (x_j) \in E$ . Offenbar ist dann auch  $\widehat{\rho}_q^p : \widehat{E}_q \rightarrow \widehat{E}_p$  nuklear.

c) Nun sei  $E = \bigoplus_{j=1}^{\infty} E_j$  direkte Summe der nuklearen Räume  $E_j$ . Eine Halbnorm auf  $E$  hat die Form  $p(x) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(x_j)$  für  $x = (x_j) \in E$  und Halbnormen  $p_j \in \mathfrak{H}(E_j)$ . Da  $E_j$  nuklear ist, gibt es Halbnormen  $p_j \leq q_j \in \mathfrak{H}(E_j)$  mit  $\widehat{\rho}_{q_j}^{p_j} \in N((\widehat{E_j})_{q_j}, (\widehat{E_j})_{p_j})$  und  $\nu(\widehat{\rho}_{q_j}^{p_j}) < 2^{-j}$ . Es gibt nukleare Darstellungen

$$\widehat{\rho}_{q_j}^{p_j} \widehat{x}_j = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,j} \langle \widehat{x}_j, x'_{k,j} \rangle \widehat{y}_{k,j}$$

mit  $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{k,j}| \leq 2^{-j}$ ,  $\|x'_{k,j}\| \leq 1$  in  $(\widehat{E_j})'_{q_j} \cong E'_{j,q_j}$  und  $\|\widehat{y}_{k,j}\| \leq 1$  in  $(\widehat{E_j})_{p_j}$ . Wir identifizieren  $\widehat{y}_{k,j}$  mit dem Element  $0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus \widehat{y}_{k,j} \oplus 0 \dots$  in  $\widehat{E}_p$  mit Norm  $\leq 1$ . Analog dazu identifizieren wir  $x'_{k,j}$  mit dem Element  $(0, \dots, 0, x'_{j,k}, 0, \dots)$  in  $E'$ ; für die Halbnorm  $q : x \mapsto \max_j q_j(x_j)$  in  $\mathfrak{H}(E)$  gilt dann  $x'_{k,j} \in E'_q$  und  $\|x'_{k,j}\|_{E'_q} \leq 1$ . Für ein Element  $\widehat{x} = (\widehat{x}_j) \in \widehat{E}_q$  gilt dann

$$\widehat{\rho}_q^p \widehat{x} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,j} \langle \widehat{x}, x'_{k,j} \rangle \widehat{y}_{k,j},$$

und wegen  $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{k,j}| \leq 1$  ist  $\widehat{\rho}_q^p : \widehat{E}_q \rightarrow \widehat{E}_p$  nuklear.  $\diamond$

Aufgrund der Sätze 7.9 und 7.10 ist also Nuklearität stabil unter *projektiven* und *abzählbaren induktiven Konstruktionen*. Dies gilt *nicht* für *überabzählbare* induktive Konstruktionen (vgl. Aufgabe 11.20).

**Beispiele.** a) Es sei  $K \subseteq [-T, T]^n \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt. Dann ist  $\mathcal{D}(K)$  isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von  $\mathcal{E}_{2T}(\mathbb{R}^n) \simeq s(N_0)$  (vgl. Satz 1.8) und somit nuklear nach Satz 11.19 a).

b) Nun sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen mit relativ kompakter Ausschöpfung  $\{\Omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  wie in (1.2) und  $\{\eta_j\} \in \mathcal{D}(\Omega_j)$  mit  $\eta_j = 1$  auf  $\Omega_{j-1}$ . Mittels  $\Phi : f \mapsto (\eta_j f)$  ist dann  $\mathcal{E}(\Omega)$  zu einem abgeschlossenen Unterraum von  $\prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{D}(\overline{\Omega_j})$  isomorph, also ein nuklearer Raum.

Auch der Raum  $\mathcal{D}(\Omega) = \text{ind}_j \mathcal{D}(\overline{\Omega_j})$  der *Testfunktionen* ist nuklear.

c) *Unterräume* von  $\mathcal{E}(\Omega)$  sind ebenfalls nuklear; dies gilt insbesondere für Räume  $N_{\Omega}(P(D)) = \{f \in \mathcal{E}(\Omega) \mid P(D)f = 0\}$  von Nulllösungen partieller Differentialoperatoren und speziell für Räume *harmonischer* Funktionen.

d) Nach c) ist der Raum  $\mathcal{H}(\Omega)$  der *holomorphen* Funktionen auf einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  nuklear. Dies gilt dann auch für den Raum  $\mathcal{H}(K) = \text{ind}_k \mathcal{H}(U_k)$  der *Keime* holomorpher Funktionen auf einer kompakten Menge  $K \subseteq \mathbb{C}^n$  (vgl. S. 159). Schließlich ist auch der Raum  $\mathcal{A}(\Omega) = \text{proj}_j \mathcal{H}(K_j)$  der *reell-analytischen* Funktionen auf einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  nuklear (vgl. S. 166).

Die Tragweite der bisherigen Resultate verdeutlichen die folgenden

**Anwendungen.** a) Es sei  $\mathcal{G}(M)$  ein nuklearer Fréchetraum skalarer Funktionen wie auf S. 235; für einen Fréchetraum  $F$  gilt dann

$$\mathcal{G}(M, F) := \mathcal{G}_\sigma(M, F) = \mathcal{G}_\kappa(M, F) \simeq \mathcal{G}(M) \varepsilon F = \mathcal{G}(M) \widehat{\otimes}_\varepsilon F = \mathcal{G}(M) \widehat{\otimes}_\pi F$$

aufgrund der Sätze 10.6, 10.5, 11.18 und 11.14. Nach Theorem 10.23 besitzt eine Vektorfunktion  $f \in \mathcal{G}(M, F)$  eine *Reihenentwicklung*

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j \otimes y_j \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty \quad \text{und} \quad f_j \rightarrow 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{G}(M), \quad y_j \rightarrow 0 \quad \text{in} \quad F.$$

b) Wie in Satz 10.24 ergibt sich aus a) der folgende *Lifting-Satz*:

Es sei  $\sigma : E \rightarrow Q$  eine Surjektion von Frécheträumen. Zu einer Funktion  $f \in \mathcal{G}(M, Q)$  gibt es ein Lifting  $f^\vee \in \mathcal{G}(M, E)$  mit  $\sigma f^\vee(t) = f(t)$  für alle  $t \in \Omega$ .

Liftings existieren also insbesondere für schnell fallende Funktionen, schnell fallende Folgen,  $C^\infty$ -Funktionen (vgl. Aufgabe 10.8), harmonische Funktionen oder holomorphe Funktionen. Insbesondere haben wir nun einen neuen Beweis von Satz 10.14, der auch für holomorphe Funktionen auf beliebigen offenen Mengen  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  gilt.

c) Weiter lässt sich mittels a) Theorem 10.10 von Malgrange über die Surjektivität von Differentialoperatoren auf Vektorfunktionen sofort auf den in Theorem 9.16 behandelten skalaren Fall zurückführen.

d) Ein Entwicklungssatz und ein Lifting-Satz gelten auch für vollständige  $\pi$ -Tensorprodukte vollständiger  $(DF)$ -Räume, wenn ein Faktor nuklear ist (vgl. [Grothendieck 1955], II § 3). Dies ist nicht der Fall für „gemischte“ Tensorprodukte von Fréchet- und  $(DF)$ -Räumen:

Wir haben auf S. 245 bemerkt, dass über einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  der Cauchy-Riemann-Operator  $\bar{\partial} : \mathcal{E}(\Omega) \widehat{\otimes}_\pi \varphi \rightarrow \mathcal{E}(\Omega) \widehat{\otimes}_\pi \varphi$  *nicht* surjektiv ist. Ein anderes Beispiel enthält Aufgabe 11.21; wir kommen in Kapitel 12 auf dieses Problem zurück.

## 11.5 Schnell fallende Folgen

Nuklearität hängt eng mit *schnell fallenden Folgen* zusammen. Räume  $s(\mathbb{Z}^n, F)$  schnell fallender Folgen mit Werten in einem (quasivollständigen) lokalkonvexen Raum haben wir bereits in (10.17) untersucht.

Auf einem *Dualraum*  $E'$  eines lokalkonvexen Raumes betrachten wir nun die *Bornologie*  $\mathfrak{E}(E')$  der gleichstetigen Mengen und nennen eine Folge  $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *schnell fallend* in  $E'$ , Notation:  $(x'_k) \in s(E')$ , wenn die Mengen  $\{n^k x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  gleichstetig sind.

Es gilt dann das folgende Resultat von T. Komura und Y. Komura (1966):

### Theorem 11.20

Für einen lokalkonvexen Raum  $E$  sind äquivalent:

- (a)  $E$  ist nuklear.
- (b) Zu  $U \in \mathbb{U}(E)$  gibt es eine Folge  $(x'_n) \in s(E')$  mit  $U^\circ \subseteq \overline{\Gamma\{x'_n\}}^{\sigma(E', E)}$ .
- (c)  $E$  ist isomorph zu einem Unterraum von  $s^I$  für eine Indexmenge  $I$ .

BEWEIS. „(a)  $\Rightarrow$  (b)“: ① Es sei  $U \in \mathbb{U}(E)$  gegeben. Nach Satz 11.17 können wir  $U = U_p$  mit einer Hilbert-Halbnorm  $p$  auf  $E$  annehmen. Zu  $k \in \mathbb{N}$  erhalten wir durch Iteration von Satz 11.17 (c) gemäß Satz 11.2 c) eine Hilbert-Halbnorm  $p_k$  auf  $E$ , sodass die Einbettung  $u_k := i_p^{p_k} : E_p \rightarrow E'_{p_k}$  in  $S_{1/k}$  liegt. Es gibt eine Schmidt-Darstellung

$$u_k x' = \sum_{j=0}^{\infty} s_{j,k} \langle x' | e'_{j,k} \rangle f'_{j,k}, \quad x' \in E'_p, \quad (41)$$

mit Orthonormalsystemen  $\{e'_{j,k}\}$  in  $E'_p$  und  $\{f'_{j,k}\}$  in  $E'_{p_k}$ , sodass  $\sum_{j=0}^{\infty} s_{j,k}^{1/k} < \infty$  ist.

Wegen  $s_{j,k} \downarrow 0$  gelten Abschätzungen  $s_{j,k} \leq C_k (j+1)^{-k}$ , und wegen der Injektivität von  $u_k$  ist  $\{e'_{j,k}\}_{j \in \mathbb{N}_0}$  eine Orthonormalbasis von  $E'_p$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

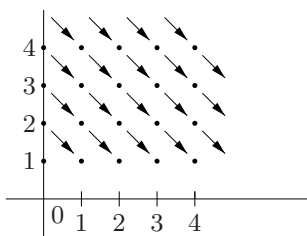


Abb. 11.1: Eine diagonale Abzählung

② Nun sei  $(e'_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine „diagonale Abzählung“ der Menge  $\{e'_{j,k}\}_{j \geq 0, k \geq 1}$  (vgl. Abb. 11.1). Wir lassen Vektoren  $e'_i \in [e'_1, \dots, e'_{i-1}]$  weg und erhalten durch Orthonormalisierung eine Orthonormalbasis  $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  von  $E'_p$  mit  $\langle x'_n | e'_i \rangle = 0$  für  $n > i$ . Nun gilt  $e'_i = e'_{j,k}$  genau für  $i = \sum_{\ell=1}^{k+j} \ell + k = \frac{(k+j)(k+j+1)}{2} + k$ , und dies ist  $\leq 3m^2 + k \leq 4m^2$



für  $m := \max\{j, k\}$ . Daher hat man  $\langle x'_n | e'_{j,k} \rangle = 0$  für  $n > 4m^2$ . Für  $n > 4k^2$  ergibt sich

$$x'_n = \sum_{j=0}^{\infty} \langle x'_n | e'_{j,k} \rangle e'_{j,k} = \sum_{4j^2 \geq n} \langle x'_n | e'_{j,k} \rangle e'_{j,k} \quad \text{in } E'_p.$$

Aus der Schmidt-Darstellung (41) und der Besselschen Ungleichung folgt

$$\|x'_n\|_k^2 := \|u_k x'_n\|_k^2 = \sum_{4j^2 \geq n} s_{j,k}^2 |\langle x'_n | e'_{j,k} \rangle|^2 \leq s_{j,k}^2 \quad \text{mit } j = [\frac{\sqrt{n}}{2}] + 1$$

für die Norm  $\|\cdot\|_k$  in  $E'_k$ . Somit gilt  $\|x'_n\|_k \leq s_{j,k} \leq C_k (j+1)^{-k} \leq C'_k n^{-k/2}$  für  $n > 4k^2$ , und die Folge  $(x'_n)$  ist schnell fallend in  $E'$ .

③ Für  $x' \in U^\circ$  ergibt sich wegen  $|\langle x' | x'_n \rangle| \leq 1$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  nun

$$x' = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x' | x'_n \rangle x'_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \langle x' | x'_n \rangle (n^2 x'_n) \in \frac{\pi^2}{6} \overline{\Gamma\{n^2 x'_n\}}^{E'}.$$

Da auch die Folge  $(\frac{\pi^2}{6} n^2 x'_n)$  schnell fallend ist, ist damit „(a)  $\Rightarrow$  (b)“ gezeigt.

„(b)  $\Rightarrow$  (c)“: Wir verwenden sup-Normen  $\|\cdot\|_k$  auf  $s = s(\mathbb{N})$ . Nach (b) ist die lokalkonvexe Topologie von  $E$  durch die Halbnormen

$$q_{\xi',k}(x) = \sup_n n^k |\langle x | x'_n \rangle|, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \xi' = (x'_n) \in s(E'),$$

gegeben; mit einer Indexmenge  $I \subseteq E'$  sei  $\mathbb{H} = \{q_{\xi',k} \mid \xi' \in I, k \in \mathbb{N}_0\}$  ein Fundamentalsystem solcher Halbnormen. Für die durch  $T_{\xi'} : x \mapsto (\langle x | x'_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  definierten Abbildungen  $T_{\xi'} : E \rightarrow s(\mathbb{N})$  gilt  $q_{\xi',k}(x) = \|T_{\xi'} x\|_k$ ; daher wird durch  $T : x \mapsto (T_{\xi'} x)_{\xi' \in I}$  ein Isomorphismus von  $E$  auf einen Unterraum von  $s^I$  definiert.

„(c)  $\Rightarrow$  (a)“ folgt sofort aus der Nuklearität von  $s$  und Satz 11.19.  $\diamond$

Der Beweis zeigt, dass im Fall eines Fréchetraumes  $E$  die Indexmenge  $I$  in (c) abzählbar gewählt werden kann. Eine Anwendung von Theorem 11.20 ist:

### Satz 11.21

Für einen nuklearen Fréchetraum  $E$  ist auch der Dualraum  $E'_\beta$  nuklear.

BEWEIS. a) Zunächst sei  $E = s = s(\mathbb{N})$ . Eine in  $(s'_\beta)' = s$  gleichstetige Menge ist eine beschränkte Menge  $B \subseteq s$ . Für  $b_n = \sup\{|x_n| \mid x = (x_n) \in B\}$  gilt offenbar  $(b_n) \in s(\mathbb{N})$ , und mit den „Einheitsvektoren“  $e_n \in s$  ist die Folge  $(n^2 b_n e_n)$  schnell fallend in  $s$ . Nun ist  $B \subseteq \{x \in s \mid |x_n| \leq b_n \text{ für } n \in \mathbb{N}\} \subseteq \frac{\pi^2}{6} \overline{\Gamma\{n^2 b_n e_n\}}$ , und nach Theorem 11.20 ist  $s'_\beta$  nuklear.

b) Wir beachten  $E'_\beta = E'_\kappa$ . Nach Theorem 11.20 gibt es eine topologische Injektion  $\iota : E \hookrightarrow s^\mathbb{N}$ , und nach Satz 8.28 ist  $\iota' : (s^\mathbb{N})'_\kappa \rightarrow E'_\kappa$  eine Quotientenabbildung. Nun gilt  $(s^\mathbb{N})'_\kappa \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} s'_\kappa$  nach Aufgabe 8.7. Dieser Raum ist nach a) und Satz 11.19 nuklear, und nach dem gleichen Satz gilt dies dann auch für  $E'_\kappa$ .  $\diamond$

Es gilt auch die Umkehrung von Satz 11.21, vgl. [Jarchow 1981], 21.5. Für einen Banachraum  $X$  ist  $X^\sigma$  nuklear,  $(X^\sigma)'_\beta = X'_\beta$  jedoch nicht.

Die Dualräume der in Abschnitt 11.4 betrachteten nuklearen Fréchet-Funktionenräume sind also nuklear. Dies gilt dann auch für den Raum  $\mathcal{D}'_\beta(\Omega) = \text{proj}_j \mathcal{D}'_\beta(K_j)$  der Distributionen auf einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  (vgl. Aufgabe 7.11).

## 11.6 Aufgaben

### Aufgabe 11.1

Es seien  $X, Y$  Banachräume und  $0 < p < \infty$ . Zeigen Sie, dass  $\mathcal{F}(X, Y)$  im Quasi-Banachraum  $(S_p(X, Y), \sigma_p)$  dicht ist.

### Aufgabe 11.2

Es seien  $X, Y, Z$  Banachräume und  $T \in L(X, Y)$ .

- Beweisen Sie  $c_j(T) \rightarrow 0 \Leftrightarrow T \in K(X, Y)$ .
- Es sei  $\iota : Y \rightarrow Z$  eine Isometrie. Zeigen Sie  $c_j(\iota T) = c_j(T)$  für  $j \in \mathbb{N}_0$ .
- Zeigen Sie  $\alpha_j(i : \ell_1 \rightarrow c_0) = 1$  für  $j \geq 0$  und  $\alpha_j(i : \ell_1 \rightarrow \ell_\infty) = \frac{1}{2}$  für  $j \geq 1$ .

### Aufgabe 11.3

Es seien  $X, Y$  Banachräume und  $T \in L(X, Y)$ .

- Zeigen Sie  $c_j(T) \leq \alpha_j(T)$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$ .
- Beweisen Sie  $\alpha_j(T) \leq c_j(T)$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$ , wenn  $X$  ein Hilbertraum oder  $Y$  ein  $\mathcal{P}_1$ -Raum ist.
- Konstruieren Sie eine Isometrie  $\iota : Y \rightarrow Z$  in einen  $\mathcal{P}_1$ -Raum  $Z$  und zeigen Sie  $c_j(T) = \alpha_j(\iota T)$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$ .
- Folgern Sie, dass  $\mathcal{P}_1$ -Räume und injektive Banachräume die A.E. besitzen.

### Aufgabe 11.4

Beweisen Sie Satz 11.3 mit Hilfe von Satz 1.5.

### Aufgabe 11.5

- Es seien  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt und  $j : \mathcal{C}(K) \rightarrow L_2(K)$  die Inklusionsabbildung. Weiter seien  $H$  ein Hilbertraum und  $T \in L(H, \mathcal{C}(K))$ . Zeigen Sie  $jT \in S_2(H, L_2(K))$  und  $\|jT\|_2 \leq \|T\|$ .
- Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen. Zeigen Sie, dass  $\mathcal{A}^2(\Omega) := L_2(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega)$  ein Hilbertraum ist.
- Nun sei auch  $\omega \subseteq \mathbb{C}$  offen mit  $\omega \Subset \Omega$ . Zeigen Sie  $\rho \in S_2(\mathcal{A}^2(\Omega), \mathcal{A}^2(\omega))$  für die Restriktionsabbildung  $\rho : f \mapsto f|_\omega$ .
- Schließen Sie  $\rho \in S_p(\mathcal{A}^2(\Omega), \mathcal{A}^2(\omega))$  für alle  $p > 0$ .

**Aufgabe 11.6**

- a) Zeigen Sie  $\nu(i : \ell_1^n \rightarrow \ell_\infty^n) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- b) Es sei  $\lambda \in c_0$  eine Nullfolge. Zeigen Sie  $D_\lambda \in N(\ell_1, \ell_\infty)$  und  $\nu(D_\lambda) = \|\lambda\|_{\sup}$  für den Diagonaloperator  $D_\lambda$ .

**Aufgabe 11.7**

Zeigen Sie, dass ein Operator  $T \in L(\ell_1)$  genau dann nuklear mit  $\nu(T) = \nu$  ist, wenn es eine Matrix  $A = (a_{jk})$  gibt mit

$$T(x_j) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} x_k \right)_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \sup_{k=0}^{\infty} |a_{jk}| = \nu < \infty.$$

**Aufgabe 11.8**

Zeigen Sie, dass ein Produkt nuklearer Operatoren in  $S_2$  liegt.

**Aufgabe 11.9**

Gegeben seien Banachräume  $X, Y$ , ein abgeschlossener Unterraum  $G \subseteq X$  und ein nuklearer Operator  $T \in N(G, Y)$ . Konstruieren Sie eine Fortsetzung  $\tilde{T} \in N(X, Y)$  mit  $\nu(\tilde{T}) = \nu(T)$ .

**Aufgabe 11.10**

Ein nuklearer Operator  $T = \sum_{k=0}^{\infty} x'_k \otimes y_k$  heißt  $p$ -nuklear für  $0 < p < 1$ , falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x'_k\|^p \|y_k\|^p < \infty \text{ gilt.}$$

- a) Definieren Sie analog zu (19) eine  $p$ -Norm  $\nu_p$  auf dem Raum  $N_p(X, Y)$  der  $p$ -nuklearen Operatoren und zeigen Sie, dass  $(N_p(X, Y), \nu_p)$  ein  $p$ -Banachraum ist, in dem der Raum  $\mathcal{F}(X, Y)$  dicht liegt.
- b) Formulieren und beweisen Sie Analoga zu (20) und den Sätzen 11.6, 11.7 und 11.8.
- c) Zeigen Sie  $N_p(X, Y) \subseteq S_r(X, Y)$  für  $r > \frac{p}{1-p}$ .

**Aufgabe 11.11**

Es seien  $H$  ein Hilbertraum,  $S \in S_1(H)$  und  $P \in L(H)$  eine orthogonale Projektion. Zeigen Sie

$$\operatorname{tr} S = \operatorname{tr} PSP + \operatorname{tr}(I - P)S(I - P).$$

**Aufgabe 11.12**

Es seien  $X, Y$  Banachräume. Gilt für  $F \in \mathcal{F}(X, Y)$  stets

$$|\operatorname{tr} F| \leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^r \|x'_j\| \|y_j\| \mid F = \sum_{j=1}^r x'_j \otimes y_j \right\} = \nu(F) ?$$

**Aufgabe 11.13**

- a) Nach P. Enflo (1972) existiert ein Banachraum  $X$  ohne A.E. Verwenden Sie dies und Theorem 11.11 zur Konstruktion einer Matrix  $A \in \ell_1 \widehat{\otimes}_\pi c_0 \subseteq L(c_0)$  mit  $A^2 = 0$  und  $\operatorname{tr} A \neq 0$ .
- b) Konstruieren Sie mittels a) einen Kern  $\kappa \in \mathcal{C}([0,1]^2)$  mit  $\int_0^1 \kappa(t, s) \kappa(s, u) ds = 0$  für alle  $t, u \in [0,1]$  und  $\int_0^1 \kappa(t, t) dt \neq 0$ .
- c) Konstruieren Sie mittels a) einen Unterraum von  $c_0$  ohne A.E.

**Aufgabe 11.14**

Es seien  $H, G$  Hilberträume. Zeigen Sie, dass die Bilinearform  $(S, T) \mapsto \operatorname{tr}(ST)$  Isometrien  $K(H, G)' \cong S_1(G, H)$  und  $S_1(G, H)' \cong L(H, G)$  induziert.

**Aufgabe 11.15**

- a) Gegeben seien Banachräume  $X_j$  und  $Y_j$  sowie nukleare Operatoren  $T \in N(X_1, X_2)$  und  $S \in L(Y_1, Y_2)$ . Zeigen Sie, dass  $T \widehat{\otimes}_\pi S : X_1 \widehat{\otimes}_\pi Y_1 \rightarrow X_2 \widehat{\otimes}_\pi Y_2$  nuklear ist.
- b) Es seien  $E, F$  nukleare Räume. Zeigen Sie, dass auch  $E \widehat{\otimes}_\pi F$  und  $E \varepsilon F$  nuklear sind.

**Aufgabe 11.16**

- a) Es seien  $E$  ein nuklearer Raum und  $p \in \mathfrak{H}(E)$ . Zeigen Sie, dass der Banachraum  $\widehat{E}_p$  separabel ist.
- b) Zeigen Sie, dass ein nuklearer Fréchetraum separabel ist.

**Aufgabe 11.17**

- a) Es seien  $H, G$  Hilberträume und  $S \in S_2(H, G)$  ein Hilbert-Schmidt-Operator mit  $\dim R(S) = \infty$ . Konstruieren Sie Faktorisierungen  $S : H \xrightarrow{A_p} \ell_p \xrightarrow{B_p} G$  für  $1 \leq p < \infty$  sowie  $S : H \xrightarrow{A_0} c_0 \xrightarrow{B_0} G$ , sodass  $R(A_p)$  und  $R(A_0)$  in  $\ell_p$  und  $c_0$  dicht sind.
- b) Es sei  $E$  ein nuklearer lokalkonvexer Raum. Zeigen Sie, dass für  $1 \leq p < \infty$  auf  $E$  Fundamentalsysteme  $\mathbb{H}_p$  und  $\mathbb{H}_0$  von Halbnormen existieren, deren lokale Banachräume zu  $\ell_p$  und  $c_0$  isomorph sind.

**Aufgabe 11.18**

Ein lokalkonvexer Raum  $E$  heißt *Schwartzraum*, falls es zu  $p \in \mathfrak{H}(E)$  ein  $p \leq q \in \mathfrak{H}(E)$  gibt, sodass  $\widehat{\rho}_q^p : \widehat{E}_q \rightarrow \widehat{E}_p$  kompakt ist.

- a) Zeigen Sie:  $E$  nuklear  $\Rightarrow E$  Schwartzraum  $\Rightarrow E$  Montelraum. Gelten die Umkehrungen dieser Implikationen?
- b) Charakterisieren Sie die Schwartz-Eigenschaft von Köthe-Räumen.
- c) Beweisen Sie einige Resultate dieses Kapitels über nukleare Räume entsprechend auch für Schwartzräume.
- d) Zeigen Sie, dass  $E'_\kappa$  genau dann ein Schwartzraum ist, wenn jede kompakte Menge  $C \subseteq E$  sehr kompakt ist (vgl. S. 186).

e) Zeigen Sie (mittels Aufgabe 8.5), dass für einen *vollständigen* Schwartzraum  $E$  der Dualraum  $E'_\beta$  ultrabornologisch ist. Gilt dies für alle Schwartzräume  $E$ ?

### Aufgabe 11.19

Durch  $S(X, Y) := \bigcap_{p>0} S_p(X, Y)$  wird das *Ideal der Operatoren mit schnell fallenden Approximationszahlen* definiert. Ein lokalkonvexer Raum  $E$  heißt *s-nuklear*, falls es zu  $p \in \mathfrak{H}(E)$  ein  $p \leq q \in \mathfrak{H}(E)$  gibt, sodass  $\hat{\rho}_q^p \in S(\hat{E}_q, \hat{E}_p)$  gilt.

a) Es sei  $\alpha = (\alpha_j)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $0 \leq \alpha_j \uparrow \infty$  und  $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log(j+1)}{\alpha_j} = 0$ . Zeigen Sie, dass der *Potenzreihenraum*  $\Lambda_R(\alpha)$  s-nuklear ist.

b) Beweisen Sie einige Resultate dieses Kapitels über nukleare Räume entsprechend auch für s-nukleare Räume.

c) Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen. Zeigen Sie, dass der Raum  $\mathcal{H}(\Omega)$  der holomorphen Funktionen s-nuklear ist (vgl. auch Aufgabe 11.5). Gilt  $\mathcal{H}(\Omega) \simeq s$ ?

### Aufgabe 11.20

a) Es seien  $E$  ein nuklearer Raum und  $U \in \mathbb{U}(E)$ . Zeigen Sie, dass  $U^\circ$  in  $E'_\beta$  metrisierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass der Raum  $\varphi(\mathbb{R}) := \bigoplus_{j \in \mathbb{R}} \mathbb{K}$  nicht nuklear ist.

### Aufgabe 11.21

Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $\iota : \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  die Inklusionsabbildung. Zeigen Sie, dass  $\iota' : \mathcal{E}'_\beta(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}'_\beta(\Omega)$  eine Quotientenabbildung nuklearer  $(DF)$ -Räume ist. Ist auch  $I \hat{\otimes}_\pi \iota' : \mathcal{H}(\Omega) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E}'_\beta(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{H}'_\beta(\Omega)$  surjektiv?

## 12 Exakte Sequenzen und Tensorprodukte

*Fragen: 1. Gilt ein Lifting-Satz für holomorphe Funktionen mit stetigen Randwerten?  
2. Zeigen Sie den Satz von Mittag-Leffler für Funktionen mit Werten in  $S'(\mathbb{R}^n)$ !*

Es seien  $F$  ein vollständiger lokalkonvexer Raum und

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\sigma} Q \longrightarrow 0 \quad (S)$$

eine kurze exakte Sequenz von Frécheträumen. Für den Banachraum  $F = C(K)$ ,  $K$  kompakter Raum, und für einen *nuklearen Fréchetraum*  $F$  ist auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow F \widehat{\otimes}_\varepsilon G \xrightarrow{I \widehat{\otimes}_\varepsilon \iota} F \widehat{\otimes}_\varepsilon E \xrightarrow{I \widehat{\otimes}_\varepsilon \sigma} F \widehat{\otimes}_\varepsilon Q \longrightarrow 0 \quad (F \widehat{\otimes}_\varepsilon S)$$

exakt; dies sind im Wesentlichen die Aussagen der *Lifting-Sätze* 9.28 und 10.24 (in Verbindung mit Theorem 11.14). In diesem Kapitel untersuchen wir die Frage nach der (topologischen) Exaktheit von  $(F \widehat{\otimes}_\varepsilon S)$  systematisch.

Im ersten Abschnitt charakterisieren wir die Banachräume  $F$ , für die  $(F \widehat{\otimes}_\varepsilon S)$  für alle kurzen exakten Sequenzen  $(S)$  von Banachräumen exakt ist, als  $\mathcal{L}_\infty$ -Räume. Dies bedeutet im Wesentlichen, dass die endlichdimensionalen Teilräume von  $F$  „gleichmäßig isomorph“ zu  $\ell_\infty$ -Räumen der gleichen Dimension sind; wichtige Beispiele sind Räume  $C(K)$  stetiger Funktionen und Räume  $L_\infty(\mu)$  wesentlich beschränkter Funktionen. Als Anwendung ergeben sich *Fortsetzungs-* und *Lifting-Sätze* für *komakte Operatoren*.

Im zweiten Abschnitt zeigen wir, dass  $(F \widehat{\otimes}_\varepsilon S)$  genau dann für alle Banachräume  $F$  exakt ist, wenn die *duale Sequenz*  $(S')$  *zerfällt*. Solche Sequenzen  $(S)$  heißen  $\otimes$ -Sequenzen; wir diskutieren weitere äquivalente Formulierungen dieser Eigenschaft sowie einige Beispiele. In Abschnitt 12.3 zeigen wir, dass die *Cauchysche Integralformel* in gewissem Sinne optimal ist und schließen, dass

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(\overline{D}) \xrightarrow{\iota} \mathcal{C}(\partial D) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}(\partial D)/\mathcal{A}(\overline{D}) \longrightarrow 0$$

keine  $\otimes$ -Sequenz ist. Hierbei ist  $\mathcal{A}(\overline{D})$  die *Disc Algebra* und  $\iota : \mathcal{A}(\overline{D}) \rightarrow \mathcal{C}(\partial D)$  die Einschränkung der Funktionen auf den Rand des Einheitskreises. Insbesondere ist  $\mathcal{A}(\overline{D})$  kein  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum.

Die für den Fall von Banachräumen erzielten Ergebnisse lassen sich mit der *Mittag-Leffler-Methode* auf den Fall von Frécheträumen  $F, G, E$  und  $Q$  übertragen: Wir zeigen in Theorem 12.9, dass  $(F \widehat{\otimes}_\varepsilon S)$  exakt ist, falls die lokalen Banachräume von  $F$  oder von  $G$  als  $\mathcal{L}_\infty$ -Räume, die von  $E$  als Hilberträume oder die von  $Q$  als  $\mathcal{L}_1$ -Räume gewählt werden können. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn *einer* der Räume  $F, G, E$  oder  $Q$  *nuklear* ist.

Im zweiten Teil des Kapitels untersuchen wir die Frage, wann für einen vollständigen nuklearen  $(DF)$ -Raum  $F$  und eine kurze exakte Sequenz  $(S)$  nuklearer Frécheträume auch  $(F \widehat{\otimes} S)$  exakt ist. Diese Frage hängt eng mit einer *Strukturtheorie nuklearer Frécheträume* zusammen, die ab etwa 1975 von D. Vogt entwickelt wurde. Wichtig sind *Interpolations-* bzw. *Zerlegungsbedingungen*  $(DN)$  und  $(\Omega)$  an Frécheträume, die wir in Abschnitt 12.4 einführen. In Abschnitt 12.6 zeigen wir dann, dass unter den nuklearen Frécheträumen  $(DN)$  die *Unterräume* und  $(\Omega)$  die *Quotientenräume* des Raumes  $s$  der schnell fallenden Folgen charakterisiert; die Gültigkeit von  $(DN)$  und  $(\Omega)$  charakterisiert die *komplementierten Unterräume* von  $s$ .

Die Beweise dieser Charakterisierungen beruhen auf einem grundlegenden *Splitting-Satz*, den wir in Abschnitt 12.5 beweisen: Eine kurze exakte Sequenz  $(S)$  nuklearer Frécheträume zerfällt, falls  $G$  die Eigenschaft  $(\Omega)$  und  $Q$  die Eigenschaft  $(DN)$  besitzt. Eine Konsequenz des Splitting-Satzes ist der folgende Lifting-Satz: Hat  $G$  die Eigenschaft  $(\Omega)$  und  $F$  die Eigenschaft  $(DN)$ , so ist die Sequenz  $(F'_\beta \widehat{\otimes} S)$  exakt. Diese Resultate haben vielfältige Anwendungen in der Analysis; wir zeigen hier nur die Gültigkeit des Satzes von Mittag-Leffler für Funktionen mit Werten im Dualraum eines nuklearen Fréchetraums mit Eigenschaft  $(DN)$ .

## 12.1 $\mathcal{L}_\infty$ -Räume und Lifting-Sätze

Es seien  $(S)$  eine kurze exakte Sequenz von Frécheträumen und  $F$  ein weiterer Fréchetraum. Die Exaktheit der Sequenz  $(F \widehat{\otimes}_\varepsilon S)$  ist im Wesentlichen nur an der dritten Stelle problematisch, die von  $(F \widehat{\otimes}_\pi S)$  nur an der ersten Stelle:

### Satz 12.1

Es seien  $F$  ein Fréchetraum und  $(S)$  eine kurze exakte Sequenz von Frécheträumen.

a) Ist  $I \otimes_\varepsilon \sigma : F \otimes_\varepsilon E \rightarrow F \otimes_\varepsilon Q$  offen, so sind die Sequenzen  $(F \otimes_\varepsilon S)$  und  $(F \widehat{\otimes}_\varepsilon S)$  topologisch exakt.

b) Ist  $I \otimes_\pi \iota : F \otimes_\pi G \rightarrow F \otimes_\pi E$  offen, so sind die Sequenzen  $(F \otimes_\pi S)$  und  $(F \widehat{\otimes}_\pi S)$  topologisch exakt.

BEWEIS. Wegen  $F \otimes E = \mathcal{F}(F', E)$  (vgl. S. 246) ist die Sequenz  $(F \otimes S)$  algebraisch exakt. Aufgrund der Definitionen der  $\varepsilon$ - und  $\pi$ -Topologie sind  $I \otimes_\varepsilon \iota : F \otimes_\varepsilon G \rightarrow F \otimes_\varepsilon E$  und  $I \otimes_\pi \sigma : F \otimes_\pi E \rightarrow F \otimes_\pi Q$  offen. Die Voraussetzungen a) und b) implizieren also die topologische Exaktheit der Sequenzen  $(F \otimes_\varepsilon S)$  und  $(F \otimes_\pi S)$  und nach Satz 9.8 auch die der vervollständigten Sequenzen.  $\diamond$

Im Rahmen von Banachräumen hängt die Frage nach der Exaktheit einer „tensorierten Sequenz“ eng mit der *Struktur der endlichdimensionalen Teilräume* dieser Banachräume zusammen. Das folgende Konzept aus [Lindenstrauß und Pelczyński 1968]

wurde in [Lindenstrauß und Rosenthal 1969] weiter untersucht; wir verweisen auch auf [Lindenstrauß und Tzafriri 1973], II. 5, und [Defant und Floret 1993], § 23.

**$\mathcal{L}_p$ -Räume.** a) Die *Banach-Mazur-Distanz* isomorpher Banachräume  $X, Y$  ist gegeben durch (vgl. [GK], (3.5))

$$d(X, Y) = \inf \{ \|T\| \|T^{-1}\| \mid T : X \rightarrow Y \text{ Isomorphismus} \} \quad (\geq 1).$$

b) Es seien  $1 \leq p \leq \infty$  und  $\lambda \geq 1$ . Ein Banachraum  $X$  heißt  $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ -Raum, falls zu jedem Raum  $U \subseteq X$  mit  $\dim U < \infty$  ein Raum  $U \subseteq V \subseteq X$  mit  $\dim V = r < \infty$  existiert, sodass  $d(V, \ell_p^r) \leq \lambda$  gilt. Ein Banachraum heißt  $\mathcal{L}_p$ -Raum, falls er ein  $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ -Raum für ein geeignetes  $\lambda \geq 1$  ist.

c) Ein Banachraum  $X$  ist genau dann ein  $\mathcal{L}_2$ -Raum, wenn er zu einem Hilbertraum isomorph ist, vgl. [Lindenstrauß und Tzafriri 1973], II.2.8.

d) Ein  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum besitzt die b.A.E., vgl. Aufgabe 12.1.

### Satz 12.2

a) Für einen kompakten Raum  $K$  ist  $\mathcal{C}(K)$  ein  $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ -Raum für alle  $\lambda > 1$ .

b) Für  $1 \leq p \leq \infty$  und ein positives Maß  $\mu$  ist  $L_p(\mu)$  ein  $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ -Raum für alle  $\lambda > 1$ .

BEWEIS. a) Für einen Unterraum  $U \subseteq \mathcal{C}(K)$  mit  $\dim U = n < \infty$  wählen wir eine Basis  $\{f_1, \dots, f_n\}$  mit  $\|f_k\| = 1$  für  $k = 1, \dots, n$ . Wegen  $U \simeq \ell_\infty^n$  gibt es  $M > 0$  mit

$$M^{-1} \max_{k=1}^n |c_k| \leq \left\| \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\| \leq M \max_{k=1}^n |c_k| \quad \text{für alle } (c_k) \in \mathbb{K}^n. \quad (1)$$

Zu  $\lambda > 1$  wählen wir  $0 < \delta < 1$  mit  $\frac{1+\delta}{1-\delta} < \lambda$  und setzen  $\varepsilon := \frac{\delta}{2nM}$ . Wie im Beweis von Satz 10.16 b) wählen wir eine offene Überdeckung  $\{\omega_j\}_{j=1}^r$  von  $K$ , Punkte  $x_j \in \omega_j$  und eine  $\{\omega_j\}$  untergeordnete stetige Zerlegung der Eins  $\{\alpha_j\}_{j=1}^r$  auf  $K$ , definieren Funktionen  $g_k : x \mapsto \sum_{j=1}^r f_k(x_j) \alpha_j$  in  $\mathcal{C}(K)$  und erhalten  $\|f_k - g_k\| \leq \varepsilon$  für alle  $k = 1, \dots, n$ . Aus (1) folgt sofort

$$(2M)^{-1} \max_{k=1}^n |c_k| \leq \left\| \sum_{k=1}^n c_k g_k \right\| \leq 2M \max_{k=1}^n |c_k| \quad \text{für alle } (c_k) \in \mathbb{K}^n. \quad (2)$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es Funktionale  $\mu_k \in \mathcal{C}(K)'$  mit  $\langle g_i, \mu_k \rangle = \delta_{ik}$  und  $\|\mu_k\| \leq 2M$  für  $k, i = 1, \dots, n$ . Wegen  $\left\| \sum_{j=1}^r c_j \alpha_j \right\| = \max_{j=1}^r |c_j|$  ist der Raum  $W := [\alpha_j]_{j=1}^r$  isometrisch zu  $\ell_\infty^r$ . Wir definieren einen linearen Operator

$$T : W \rightarrow \mathcal{C}(K) \quad \text{durch} \quad Th := h + \sum_{k=1}^n \langle h, \mu_k \rangle (f_k - g_k).$$



Dann gilt  $Tg_i = f_i$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $(1-\delta)\|h\| \leq \|Th\| \leq (1+\delta)\|h\|$  für  $h \in W$ . Für den Raum  $V := T(W) \subseteq \mathcal{C}(K)$  gilt daher  $U \subseteq V$  und  $d(V, \ell_\infty^r) \leq \frac{1+\delta}{1-\delta} < \lambda$ .

b) Im Fall  $1 \leq p < \infty$  kann der Beweis ähnlich wie der von a) geführt werden; an Stelle der Konstruktion aus Satz 10.16 b) verwenden wir *Approximationen durch Treppenfunktionen* (vgl. S. 256). Im Fall  $p = \infty$  gilt  $L_\infty(\mu) \cong \mathcal{C}(\mathfrak{M})$  für einen kompakten Raum  $\mathfrak{M}$  aufgrund des *Satzes von Gelfand-Naimark* 15.3.  $\diamond$

Für die folgenden Untersuchungen sind vor allem der Fall  $p = \infty$  und der dazu duale Fall  $p = 1$  interessant. Ähnlich wie in Satz 12.2 a) ergibt sich auch die  $\mathcal{L}_\infty$ -Eigenschaft der Banachräume  $c_0$  aller Nullfolgen und  $\mathcal{C}_0(\Omega)$  aller in  $\infty$  verschwindenden stetigen Funktionen auf einem lokalkompakten Raum  $\Omega$ . Nach R. Bonic, J. Frampton und A. Tromba (1969/72) gelten für eine unendliche kompakte Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $0 < \alpha < 1$  Isomorphismen  $\Lambda^\alpha(K) \simeq \ell_\infty$  und  $\lambda^\alpha(K) \simeq c_0$  für Räume Hölder-stetiger Funktionen (vgl. Aufgabe 10.4), und dies gilt auch entsprechend für Räume von  $\mathcal{C}^m$ -Funktionen mit Hölder-Bedingungen. Dagegen wurde in [Kaballo 1979] mittels des folgenden Theorem 12.6 gezeigt, dass für  $n \geq 2$  die Räume  $\mathcal{C}^1(S^n)$  und  $\Lambda^1(S^n)$  auf der  $n$ -dimensionalen Sphäre  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  keine  $\mathcal{L}_\infty$ -Räume sind.

### Satz 12.3

Es sei  $(S)$  eine kurze exakte Sequenz von Banachräumen. Für einen  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum  $F$  ist dann auch die Sequenz  $(F \widehat{\otimes}_\varepsilon S)$  exakt.

BEWEIS. Da  $\sigma$  offen ist, gibt es  $M > 0$ , sodass es zu jedem  $y \in Q$  ein  $x \in E$  mit  $\sigma x = y$  und  $\|x\| \leq M\|y\|$  gibt. Wegen Satz 12.1 genügt es, eine Konstante  $C > 0$  zu finden, sodass jeder Tensor  $t \in F \otimes Q$  ein Lifting  $s \in F \otimes E$  mit  $\|s\| \leq C\|t\|$  hat. Es sei  $F$  ein  $\mathcal{L}_{\infty, \lambda}$ -Raum für  $\lambda \geq 1$ . Für  $t \in F \otimes Q \subseteq L_e(Q'_\kappa, F)$  gilt  $\dim R(t) < \infty$ ; es gibt also einen Unterraum  $V \subseteq F$  mit  $R(t) \subseteq V$  und einen Isomorphismus  $T : V \rightarrow \ell_\infty^r$  mit  $\|T\|\|T^{-1}\| \leq 2\lambda$ . Mit den Funktionalen  $\delta_j : \xi \rightarrow \xi_j$  auf  $\ell_\infty^r$  definieren wir  $y_j := \delta_j T t \in (Q'_\kappa)' = Q$  für  $j = 1, \dots, r$ . Wir wählen  $x_j \in E$  mit  $\sigma x_j = y_j$  und  $\|x_j\| \leq M\|y_j\|$  und definieren  $u \in L_e(E'_\kappa, \ell_\infty^r)$  durch  $u(x') := (\langle x_j, x' \rangle)_{j=1}^r$ . Für  $s := T^{-1}u \in L_e(E'_\kappa, F)$  gilt dann  $s \in F \otimes E$ ,  $(I \otimes \sigma)s = t$  und

$$\|s\| \leq \|T^{-1}\| \|u\| \leq \|T^{-1}\| \max_j \|x_j\| \leq M \|T^{-1}\| \|T\| \|t\| \leq 2\lambda M \|t\|. \quad \diamond$$

**Erweiterungen.** a) Satz 12.3 gilt auch für kurze exakte Sequenzen von Frécheträumen; dies ist ein Spezialfall von Theorem 12.9 unten oder ein solcher der folgenden Überlegungen:

b) Es sei  $\sigma \in L(E, Q)$  eine Surjektion lokalkonvexer Räume und  $F$  ein  $\mathcal{L}_\infty$ -Banachraum mit Einheitskugel  $U$ . Für  $t \in F \varepsilon Q = L_e(F'_\kappa, Q)$  ist  $t(U^\circ)$  kompakt in  $Q$ . Wir nehmen nun an, dass jede kompakte Menge in  $Q$  *sehr kompakt* ist, d. h. dass  $Q'_\kappa$  ein *Schwartzraum* ist (vgl. Aufgabe 11.18). Es gibt also eine kompakte Kugel  $K \in \mathfrak{K}(Q)$ , sodass  $t(U^\circ)$  sogar im Banachraum  $Q_K$  kompakt ist. Nun induzie-

ren  $Q$  und  $Q_K$  auf  $t(U^\circ)$  die gleiche Topologie. Daher ist die Einschränkung von  $t : F'_\kappa \rightarrow Q_K$  auf alle gleichstetigen Mengen in  $F'$  stetig, und mittels Aufgabe 8.5 folgt  $t \in F \varepsilon Q_K$ .

Nun nehmen wir an, dass  $E$  ein folgenvollständiger Raum mit striktem Gewebe (vgl. Aufgabe 7.16) ist. Nach einem Resultat von M. De Wilde [De Wilde 1978], III.5 existiert dann eine kompakte Kugel  $C \in \mathfrak{K}(E)$  mit  $\sigma(C) = K$ , und offenbar ist  $\sigma : E_C \rightarrow Q_K$  eine Quotientenabbildung von Banachräumen. Nach Satz 12.3 existiert dann ein Lifting  $s \in F \varepsilon E_C \subseteq F \varepsilon E$  von  $t$ .

c) Die Voraussetzungen in b) sind erfüllt für Surjektionen von Frécheträumen oder von vollständigen  $(DF)$ -Schwartzräumen.

Es gilt auch die Umkehrung von Satz 12.3; einen Beweis können wir hier nur skizzieren. Wir benötigen das folgende Resultat aus [Lindenstrauß und Rosenthal 1969] (vgl. auch [Defant und Floret 1993], § 23):

#### Satz 12.4

a) Für  $1 \leq p \leq \infty$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ist ein Banachraum  $F$  genau dann ein  $\mathcal{L}_p$ -Raum, wenn der Dualraum  $F'$  ein  $\mathcal{L}_q$ -Raum ist.

b) Ein komplementierter Unterraum eines  $\mathcal{L}_\infty$ -Raumes bzw. eines  $\mathcal{L}_1$ -Raumes ist ebenfalls ein  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum bzw. ein  $\mathcal{L}_1$ -Raum.

c) Ein injektiver Banachraum  $F$  ist ein  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum.

Aussage c) folgt leicht aus b):  $F$  ist zu einem Unterraum eines Raumes  $\ell_\infty(I)$  isometrisch (vgl. [GK], S. 179), der wegen der Injektivität von  $F$  in  $\ell_\infty(I)$  komplementiert sein muss.

Das folgende Resultat geht auf C.P. Stegall und J.R. Retherford (1972) sowie K. Floret (1973) zurück:

#### Satz 12.5

Ein Banachraum  $F$  ist genau dann ein  $\mathcal{L}_1$ -Raum, wenn für alle kurzen exakten Sequenzen  $(S)$  von Banachräumen auch  $(F \otimes_\pi S)$  topologisch exakt ist. In diesem Fall ist  $F'$  ein injektiver Banachraum.

BEWEIS. „ $\Leftarrow$ “: Zu  $T \in L(G, F')$  definieren wir eine Bilinearform  $B \in \mathcal{B}(F \times G)$  durch  $B(y, z) := \langle y, Tz \rangle$  für  $y \in Y$  und  $z \in G$ . Nach Satz 10.21 gilt  $B \in (F \otimes_\pi G)'$ . Da  $F \otimes_\pi G$  zu einem Unterraum von  $F \otimes_\pi E$  isomorph ist, liefert der Satz von Hahn-Banach eine Fortsetzung  $\tilde{B} \in (F \otimes_\pi E)' \cong \mathcal{B}(F \times E)$ . Durch  $\langle y, \tilde{T}x \rangle := \tilde{B}(y, x)$  für  $x \in E$  und  $y \in F$  erhalten wir dann eine Fortsetzung  $\tilde{T} \in L(E, F')$  von  $T$ . Somit ist  $F'$  ein injektiver Banachraum und dann  $F$  ein  $\mathcal{L}_1$ -Raum nach Satz 12.4.

„ $\Rightarrow$ “ ergibt sich ähnlich wie Satz 12.3 mittels Satz 10.26 für  $\ell_1^r$ -Räume. ◇

**Zusatz.** a) Ist sogar für jede *Isometrie*  $\iota : G \rightarrow E$  von Banachräumen stets auch  $I \otimes_\pi \iota : F \otimes_\pi G \rightarrow F \otimes_\pi E$  eine Isometrie, so ist  $F'$  sogar ein  $\mathcal{P}_1$ -Raum.

b) Für ein positives Maß  $\mu$  erfüllt der Raum  $F = L_1(\mu)$  aufgrund von Satz 10.26 die Voraussetzung von a), da  $L_1(\mu, \iota G) \rightarrow L_1(\mu, E)$  offenbar eine Isometrie ist. Nach Satz 12.5 ist daher  $L_\infty(\mu) \cong L_1(\mu)'$  ein  $\mathcal{P}_1$ -Raum. Wir haben somit einen alternativen Beweis von Satz 9.35 gefunden.

**Dualität von Tensorprodukten und integrale Operatoren.** a) Für die Umkehrung von Satz 12.3 benötigen wir nun eine Aussage zur *Dualität* von  $\varepsilon$ - und  $\pi$ -Tensorprodukten. Für Banachräume  $E, F$  gilt  $(F \otimes_\pi E)' \cong L(F, E')$  nach (10.35). Operatoren  $T \in L(F, E')$ , die sogar bezüglich der  $\varepsilon$ -Norm auf  $F \otimes E$  stetig sind, heißen *integral*, Notation:  $T \in \mathcal{I}(F, E')$ . Die integralen Operatoren bilden ein *Operatorideal* (vgl. [Grothendieck 1955], I § 4.3, [Defant und Floret 1993], 10.1 und § 33, oder [Diestel und Uhl 1977], VIII.2).

b) Hat nun  $E'$  die A. E., so hat man  $F' \widehat{\otimes}_\pi E' \cong N(F, E')$  (vgl. S. 275). Weiter gilt  $N(F, E') \cong \mathcal{I}(F, E')$ , falls  $E'$  *reflexiv* oder *separabel* ist (vgl. [Grothendieck 1955], I § 4.2), allgemein genau dann, wenn  $E'$  die *Radon-Nikodym-Eigenschaft* besitzt (vgl. [Defant und Floret 1993], § 33, oder [Diestel und Uhl 1977], VIII.2). Unter diesen Annahmen gilt also

$$(F \widehat{\otimes}_\varepsilon E)' \cong F' \widehat{\otimes}_\pi E'. \quad (3)$$

c) Wir benötigen (3) hier nur für den Spezialfall  $\dim E < \infty$  (vgl. dazu [Köthe 1979], § 45.1 (9), oder [Defant und Floret 1993], 6.4).

Nun können wir die Umkehrung von Satz 12.3 zeigen (vgl. [Kaballo 1977]); etwas allgemeiner gilt das folgende Resultat:

### Theorem 12.6

*Es sei  $F$  ein Banachraum, sodass für alle Isometrien  $\iota : G \rightarrow E$  von Banachräumen zu jedem  $t \in F \widehat{\otimes}_\varepsilon G'$  ein  $s \in F \varepsilon E'$  mit  $(I \varepsilon \iota')s = t$  existiert. Dann ist  $F$  ein  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum.*

BEWEIS. a) Wir zeigen die Existenz einer Konstanten  $C > 0$ , sodass für jede Isometrie  $\iota : G \rightarrow E$  endlichdimensionaler Banachräume jeder Tensor  $t \in F \otimes_\varepsilon G'$  ein Lifting  $s \in F \varepsilon E'$  mit  $\|s\| \leq C \|t\|$  hat. Andernfalls gibt es solche Isometrien  $\iota_n : G_n \rightarrow E_n$  und  $t_n \in F \otimes_\varepsilon G'_n$  mit  $\|t_n\| = 1$ , sodass jedes Lifting  $s_n \in F \varepsilon E'_n$  Norm  $\geq n^3$  hat. Wir definieren eine Isometrie  $\iota : G := (\bigoplus_{n=1}^\infty G_n)_{c_0} \rightarrow E := (\bigoplus_{n=1}^\infty E_n)_{c_0}$  durch  $\iota : (g_n) \rightarrow (\iota_n g_n)$ ; dann ist  $\iota' : E' \cong (\bigoplus_{n=1}^\infty E'_n)_{\ell_1} \rightarrow (\bigoplus_{n=1}^\infty G'_n)_{\ell_1} \cong G'$  gegeben durch  $\iota' : (x'_n) \rightarrow (\iota'_n x'_n)$  (vgl. Aufgabe 10.23). Das Element  $t := \bigoplus_{n=1}^\infty n^{-2} t_n \in F \widehat{\otimes}_\varepsilon G'$  besitzt ein Lifting  $s \in F \varepsilon E' = L_e(F'_\kappa, E')$ . Mit der kanonischen Projektion  $P_n : E' \rightarrow E'_n$  ist dann  $s_n := n^2 P_n s$  ein Lifting von  $t_n$  mit  $\|s_n\| \leq n^2 \|s\|$ , und wir haben einen

Widerspruch.

b) Nun sei wieder  $\iota : G \rightarrow E$  eine Isometrie von Banachräumen. Zu  $\tau \in F' \otimes G$  gibt es einen Unterraum  $U \subseteq G$  mit  $\dim U < \infty$  und  $\tau \in F' \otimes U$ ; offenbar gilt  $\|\tau\|_{F' \otimes_\pi G} \leq \|\tau\|_{F' \otimes_\pi U}$ . Weiter gibt es einen Unterraum  $V \subseteq E$  mit  $\dim V < \infty$ , sodass  $\tau \in F' \otimes V$  und  $\|\tau\|_{F' \otimes_\pi V} \leq 2\|\tau\|_{F' \otimes_\pi E}$  gilt. Nach Vergrößerung von  $V$  können wir  $U \subseteq V$  annehmen. Nach (3) gibt es  $t \in F \otimes U'$  mit  $\|t\|_{F \otimes_\varepsilon U'} = 1$  und  $\|\tau\|_{F' \otimes_\pi U} = |\langle t, \tau \rangle|$ . Nach a) gibt es  $s \in F \otimes V'$  mit  $(I \otimes \iota')s = t$  und  $\|s\|_{F \otimes_\varepsilon V'} \leq C$ . Daher folgt

$$\begin{aligned} \|\tau\|_{F' \otimes_\pi G} &\leq \|\tau\|_{F' \otimes_\pi U} = |\langle (I \otimes \iota')s, \tau \rangle| = |\langle s, (I \otimes \iota)\tau \rangle| \\ &\leq C \|\tau\|_{F' \otimes_\pi V} \leq 2C \|\tau\|_{F' \otimes_\pi E}. \end{aligned}$$

Somit ist  $I \otimes_\pi \iota : F' \otimes_\pi G \rightarrow F' \otimes_\pi E$  eine topologische Inklusion, und nach Satz 12.5 ist  $F'$  ein  $\mathcal{L}_1$ -Raum. Aufgrund von Satz 12.4 ist dann  $F$  ein  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum.  $\diamond$

Aus den Sätzen 12.3, 12.6 und 10.4 ergeben sich nun die folgenden Aussagen von J. Lindenstrauß (1964) sowie J. Lindenstrauß und H.P. Rosenthal (1969) über *Fortsetzungen* und *Liftings kompakter Operatoren*:

### Satz 12.7

a) Ein Banachraum  $F$  ist genau dann ein  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum, wenn für jeden abgeschlossenen Unterraum  $G$  eines Banachraumes  $E$  jeder kompakte Operator  $T \in K(G, F)$  eine Fortsetzung  $\tilde{T} \in K(E, F)$  besitzt.

b) Ein Banachraum  $F$  ist genau dann ein  $\mathcal{L}_1$ -Raum, wenn für jede Surjektion  $\sigma \in L(E, Q)$  von Banachräumen jeder kompakte Operator  $T \in K(F, Q)$  ein Lifting  $T^\vee \in K(F, E)$  besitzt.

BEWEIS. a) Die Restriktion  $K(E, F) \cong F \varepsilon E' \rightarrow F \varepsilon G' \cong K(G, F)$  ist genau dann stets surjektiv, wenn  $F$  ein  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum ist.

b) Die Abbildung  $\sigma \circ : K(F, E) \cong F' \varepsilon E \rightarrow F' \varepsilon G \cong K(F, G)$  ist genau dann stets surjektiv, wenn  $F'$  ein  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum ist.  $\diamond$

## 12.2 $\otimes$ -Sequenzen

In diesem Abschnitt charakterisieren wir diejenigen kurzen exakten Sequenzen  $(S)$  von Banachräumen, für die für jeden Banachraum  $F$  auch die Sequenz  $(F \hat{\otimes}_\varepsilon S)$  exakt ist. Wie in [Kaballo und Vogt 1980] nennen wir eine solche Sequenz eine  $\otimes$ -Sequenz.

Beispiele von  $\otimes$ -Sequenzen sind natürlich *zerfallende* Sequenzen. Allgemeiner ist aber nach [Grothendieck 1956]  $(S)$  bereits (und genau) dann eine  $\otimes$ -Sequenz, wenn die *duale Sequenz*  $(S')$  *zerfällt*. Interessante Beispiele solcher Sequenzen erhalten wir mittels einer Abschwächung des Begriffs der Linksinvertierbarkeit. Dieses Konzept aus

[Kaballo 1977] wurde durch Ergebnisse von P. Kuchment (1975) zum Lifting holomorpher Funktionen mit stetigen Randwerten (vgl. Abschnitt 12.3) motiviert:

**Approximativ linksinvertierbare Inklusionen.** Es seien  $E, G$  Banachräume. Ein Operator  $\iota \in L(G, E)$  heißt *approximativ linksinvertierbar (a.l.)*, falls es  $\Lambda > 0$  und ein Netz  $\{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$  in  $L(E, G)$  gibt mit  $\|L_\alpha\| \leq \Lambda$  für alle  $\alpha \in A$  und  $L_\alpha(\iota x) \rightarrow x$  für alle  $x \in G$ . Ein a.l. Operator ist offenbar *injektiv* und *offen*, also eine topologische Inklusion.

**Beispiele.** a) Ein  $\mathcal{L}_{\infty, \lambda}$ -Raum  $G$  sei Unterraum eines Banachraumes  $E$ . Dann ist die Inklusion  $\iota : G \rightarrow E$  a.l. In der Tat gibt es zu jedem endlichdimensionalen Raum  $U \subseteq G$  einen Raum  $U \subseteq V \subseteq G$  mit  $\dim V = r < \infty$ , sodass  $d(V, \ell_\infty) \leq \lambda$  gilt. Dann existiert eine Projektion  $P_V : E \rightarrow V$  mit  $\|P_V\| \leq 2\lambda$ , und für das Netz  $\{P_V\}$  in  $L(E, G)$  gilt  $P_V x \rightarrow x$  für alle  $x \in G$ .

b) Es seien  $X, Y$  Banachräume, und  $Y$  besitze die b.A.E. Dann ist die Inklusion  $\iota : K(X, Y) \rightarrow L(X, Y)$  a.l. In der Tat gibt es ein Netz  $\{F_\alpha\}$  in  $\mathcal{F}(Y)$  mit  $\|F_\alpha\| \leq \Lambda$  für ein  $\Lambda > 0$  und  $F_\alpha \rightarrow I$  in  $L_\gamma(Y)$  (vgl. S. 247). Mit  $L_\alpha(T) := F_\alpha T$  für  $T \in L(X, Y)$  folgt dann sofort die Behauptung.

c) Für einen Banachraum  $Y$  mit b.A.E. ist die kanonische Inklusion  $\iota_Y : Y \rightarrow Y''$  a.l. Mit dem Netz  $\{F_\alpha\}$  in  $L(Y)$  aus b) setzen wir dazu einfach  $L_\alpha := \iota_Y^{-1} F_\alpha'' : Y'' \rightarrow Y$ .

Diese Beispiele zeigen, dass a.l. Operatoren i. A. nicht linksinvertierbar sind; dies gilt auch für Beispiel b) etwa im Fall von Hilberträumen  $X, Y$ . Dieses Beispiel ist interessant im Hinblick auf *Fredholm-Operatorfunktionen* (vgl. Abschnitt 14.1).

Wir zeigen nun u. a., dass kurze exakte Sequenzen mit a.l. Inklusionen  $\otimes$ -Sequenzen sind. Die Äquivalenz der folgenden Aussagen (b) und (c) geht auf [Grothendieck 1956], S. 27 und 76 zurück. Für weitere Äquivalenzen, auch im Rahmen lokalkonvexer Räume, sei auf [Kaballo und Vogt 1980] verwiesen.

### Theorem 12.8

Es sei  $(S)$  eine kurze exakte Sequenz von Banachräumen. Für die Aussagen

- (a) Die Inklusion  $\iota : G \rightarrow E$  ist a.l.
- (b) Die Sequenz  $(S)$  ist eine  $\otimes$ -Sequenz.
- (c) Die duale Sequenz  $(S')$  zerfällt:

$$0 \longleftarrow G' \xleftarrow{\iota'} E' \xleftarrow{\sigma'} Q' \longleftarrow 0. \quad (S')$$

- (d) Die duale Sequenz  $(S')$  ist eine  $\otimes$ -Sequenz.
- (e) Die Abbildung  $I \widehat{\otimes}_\varepsilon \iota' : G \widehat{\otimes}_\varepsilon E' \rightarrow G \widehat{\otimes}_\varepsilon G'$  ist surjektiv.

gelten die Implikationen  $(a) \Rightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) \Rightarrow (e)$ ; hat  $G$  die b.A.E., so gilt auch  $(e) \Rightarrow (a)$ .

Wir beweisen „(a)  $\Rightarrow$  (b)“, „(a)  $\Rightarrow$  (c)  $\Rightarrow$  (d)  $\Rightarrow$  (e)  $\Rightarrow$  (a)“, Letzteres unter der Annahme der b.A.E. für  $G$ , und skizzieren Beweise der übrigen Behauptungen.

BEWEIS. „(a)  $\Rightarrow$  (b)“: Es gibt  $\Lambda > 0$  und ein Netz  $\{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$  in  $L(E, G)$  mit  $\|L_\alpha\| \leq \Lambda$  für alle  $\alpha \in A$  und  $L_\alpha(\iota x) \rightarrow x$  für alle  $x \in G$ . Es sei  $t = \sum_{j=1}^r f_j \otimes y_j \in F \otimes Q$  mit linear unabhängigen  $y_1, \dots, y_r \in Q$  gegeben. Wir wählen  $x_j \in E$  mit  $\sigma x_j = y_j$  und setzen  $u := \sum_{j=1}^r f_j \otimes x_j \in F \otimes E$ . Nun gilt

$$\begin{aligned} \|t\|_\varepsilon &= \sup_{\|f'\| \leq 1} \left\| \sum_{j=1}^r \langle f_j, f' \rangle y_j \right\|_Q = \sup_{\|f'\| \leq 1} \inf_{z \in G} \left\| \sum_{j=1}^r \langle f_j, f' \rangle x_j - z \right\|_E \\ &\geq \frac{1}{2} \sup_{\|f'\| \leq 1} \inf_{z \in G_0} \left\| \sum_{j=1}^r \langle f_j, f' \rangle x_j - z \right\|_E \end{aligned}$$

für einen endlichdimensionalen Raum  $G_0 \subseteq G$ . Zu  $\eta := \|t\| (2\|t\| + \|u\|)^{-1} > 0$  gibt es  $\alpha \in A$  mit  $\|L_\alpha z - z\| \leq \eta \|z\|$  für alle  $z \in G_0$ .

Wir modifizieren nun das Lifting  $u$  von  $t$  zu  $s := \sum_{j=1}^r f_j \otimes (x_j - L_\alpha x_j) \in F \otimes E$ ; wegen  $\sigma L_\alpha x_j = 0$  gilt in der Tat  $(I \otimes \sigma)s = t$ . Zu zeigen bleibt  $\|s\|_\varepsilon \leq C \|t\|_\varepsilon$  für eine geeignete Konstante  $C > 0$ . Für ein festes Funktional  $f' \in F'$  mit  $\|f'\| \leq 1$  wählen wir  $z \in G_0$  mit  $\left\| \sum_{j=1}^r \langle f_j, f' \rangle x_j - z \right\| \leq 2\|t\|$  und erhalten

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^r \langle f_j, f' \rangle (x_j - L_\alpha x_j) \right\| &\leq \left\| \sum_{j=1}^r \langle f_j, f' \rangle x_j - z \right\| + \|z - L_\alpha z\| + \|L_\alpha(z - \sum_{j=1}^r \langle f_j, f' \rangle x_j)\| \\ &\leq 2\|t\| + \eta \|z\| + 2\|L_\alpha\| \|t\|. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\|z\| \leq \|z - \sum_{j=1}^r \langle f_j, f' \rangle x_j\| + \left\| \sum_{j=1}^r \langle f_j, f' \rangle x_j \right\| \leq 2\|t\| + \|u\| = \eta^{-1} \|t\|,$$

und insgesamt ergibt sich  $\|s\|_\varepsilon \leq (3 + 2\Lambda) \|t\|_\varepsilon$  durch Bildung des Supremums über alle  $f' \in F'$  mit  $\|f'\| \leq 1$ .

„(a)  $\Rightarrow$  (c)“: Nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki 8.6 hat das Netz  $\{L'_\alpha\}$  in  $L(G', E')$  ein gegen ein  $R \in L(G', E')$  punktweise schwach\*-konvergentes Teilnetz  $\{L'_\gamma\}$ . Für  $z \in G$  und  $z' \in G'$  gilt dann

$$\langle z, \iota' R z' \rangle = \langle \iota z, R z' \rangle = \lim_\gamma \langle \iota z, L'_\gamma z' \rangle = \lim_\gamma \langle L_\gamma \iota z, z' \rangle = \langle z, z' \rangle,$$

und daher ist  $\iota' R z' = z'$ .

„(c)  $\Rightarrow$  (d)  $\Rightarrow$  (e)“ ist klar.

„(e)  $\Rightarrow$  (a)“: Da  $G$  die b.A.E. hat, gibt es ein Netz  $\{F_\alpha\}$  in  $G \otimes G' = \mathcal{F}(G)$  mit  $\|F_\alpha\| \leq \Lambda$  für ein  $\Lambda > 0$  und  $F_\alpha x \rightarrow x$  für alle  $x \in G$ . Nach (e) gibt es  $C > 0$  und Liftings  $L_\alpha \in G \widehat{\otimes}_\varepsilon E' \subseteq K(E, G) \subseteq L(E, G)$  von  $F_\alpha$  mit  $\|L_\alpha\| \leq C \|F_\alpha\| \leq C \Lambda$  für alle  $\alpha$  und  $L_\alpha x = F_\alpha x \rightarrow x$  für  $x \in G$ .

„(b)  $\Rightarrow$  (c)“ kann ähnlich wie Theorem 12.6 gezeigt werden: Zunächst existiert ein  $C > 0$ , sodass für jeden *endlichdimensionalen* Raum  $F$  jeder Tensor  $t \in F \otimes_\varepsilon Q$  ein Lifting  $s \in F \otimes_\varepsilon E$  mit  $\|s\| \leq C \|t\|$  hat. Mit (3) ergibt sich daraus, dass für jeden Banachraum  $F$  die Abbildung  $I \otimes_\pi \sigma' : F \otimes_\pi Q' \rightarrow F \otimes_\pi E'$  *offen* und somit die Restriktion  $\rho : L(E', F') \rightarrow L(Q', F')$  *surjektiv* ist; für  $F = Q$  erhält man dann durch Fortsetzung der Identität auf  $Q'$  eine Projektion von  $E'$  auf  $Q'$ .

„(c)  $\Rightarrow$  (b)“: Es sei  $F$  ein Banachraum. Aufgrund von Theorem 9.6 genügt es zum Nachweis der Surjektivität von  $I \widehat{\otimes}_\varepsilon \sigma : F \widehat{\otimes}_\varepsilon E \rightarrow F \widehat{\otimes}_\varepsilon Q$  zu zeigen, dass der *transponierte Operator*  $(I \widehat{\otimes}_\varepsilon \sigma)' : (F \widehat{\otimes}_\varepsilon Q)' \rightarrow (F \widehat{\otimes}_\varepsilon E)'$  *offen* ist. Gemäß den Ausführungen auf S. 295 entspricht dieser der Abbildung  $\sigma' \circ : \mathcal{I}(F, Q') \rightarrow \mathcal{I}(F, E')$  zwischen Räumen integraler Operatoren. Für eine stetige Projektion  $P : E' \rightarrow Q'$  wird dann durch  $P \circ : \mathcal{I}(F, E') \rightarrow \mathcal{I}(F, Q')$  eine stetige lineare Linksinverse zu  $\sigma' \circ$  definiert, und daher ist diese Abbildung *offen*.

„(d)  $\Rightarrow$  (c)“: Aufgrund der schon gezeigten Implikation „(b)  $\Rightarrow$  (c)“ zerfallen die Sequenzen  $(S'')$  und  $(S''')$ ; es gibt also eine stetige Projektion  $P : E''' \rightarrow Q'''$ . Mit der Restriktion  $R : Q''' \rightarrow Q'$  ist dann die Einschränkung von  $RP$  auf  $E'$  eine stetige Projektion von  $E'$  auf  $Q'$ .  $\diamond$

**Folgerungen.** a) Aus Theorem 12.8 und Satz 12.4 ergibt sich: Ist  $(S)$  für einen  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum  $E$  eine  $\otimes$ -Sequenz, so ist  $G'$  zu einem komplementierten Unterraum des  $\mathcal{L}_1$ -Raumes  $E'$  isomorph. Somit ist auch  $G'$  ein  $\mathcal{L}_1$ -Raum und  $G$  ein  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum.

b) Es sei  $G$  ein Banachraum mit b.A.E., der kein  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum ist. Für eine Inklusion  $\iota : G \rightarrow E$  in einen  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum  $E$  ist dann die Abbildung  $(I \widehat{\otimes}_\varepsilon \iota)' : G \widehat{\otimes}_\varepsilon E' \rightarrow G \widehat{\otimes}_\varepsilon G'$  *nicht* surjektiv. Ein konkretes Beispiel für diese Situation folgt im nächsten Abschnitt.

Analog zu a.l. Inklusionen können wir auch den folgenden Begriff einführen:

**Approximativ rechtsinvertierbare Surjektionen.** a) Wir nennen eine Surjektion  $\sigma \in L(E, Q)$  von Banachräumen *approximativ rechtsinvertierbar (a.r.)*, falls es  $\Lambda > 0$  und ein Netz  $\{R_\alpha\}_{\alpha \in A}$  in  $L(Q, E)$  gibt mit  $\|R_\alpha\| \leq \Lambda$  für alle  $\alpha \in A$  und  $\sigma R_\alpha y \rightarrow y$  für alle  $y \in Q$ .

b) Für einen  $\mathcal{L}_1$ -Raum  $Q$  ist jede Surjektion  $\sigma \in L(E, Q)$  a.r.

c) Wie in Theorem 12.8 sieht man, dass für eine a.r. Surjektion  $\sigma \in L(E, Q)$  jede kurze exakte Sequenz  $(S)$  eine  $\otimes$ -Sequenz ist. Hat umgekehrt  $Q$  die b.A.E. und ist  $(I \widehat{\otimes}_\varepsilon \sigma) : Q' \widehat{\otimes}_\varepsilon E \rightarrow Q' \widehat{\otimes}_\varepsilon Q$  surjektiv, so ist  $\sigma \in L(E, Q)$  a.r.

d) Auch obige Folgerungen gelten entsprechend.

Mit Hilfe der *Mittag-Leffler-Methode* lassen sich nun Resultate vom Banachraum-Fall auf den Fréchetraum-Fall übertragen:

### Theorem 12.9

Es seien  $(S)$  eine kurze exakte Sequenz von Frécheträumen und  $F$  ein weiterer Fréchetraum. Kann man abzählbare wachsende Fundamentalsysteme von Halbnormen so wählen, dass deren lokale Banachräume von  $F$   $\mathcal{L}_\infty$ -Räume, von  $G$   $\mathcal{L}_\infty$ -Räume, von  $E$  Hilberträume oder von  $Q$   $\mathcal{L}_1$ -Räume sind, so ist auch die Sequenz  $(F \hat{\otimes}_\varepsilon S)$  exakt.

BEWEIS. Für ein solches Fundamentalsystem von Halbnormen ist  $E = \text{proj}\{E_n, \rho_m^n\}_\mathbb{N}$  ein reduzierter projektiver Limes lokaler Banachräume. Mit den Einschränkungen dieser Halbnormen auf  $G$  und den entsprechenden Quotienten-Halbnormen auf  $Q$  sind auch  $G = \text{proj}\{G_n, \theta_m^n\}_\mathbb{N}$  und  $Q = \text{proj}\{Q_n, \tau_m^n\}_\mathbb{N}$  reduzierte projektive Limiten, und wir erhalten die kommutativen Diagramme mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G_n & \xrightarrow{\iota_n} & E_n & \xrightarrow{\sigma_n} & Q_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \theta_{n+1}^n & & \uparrow \rho_{n+1}^n & & \uparrow \tau_{n+1}^n & & \\ 0 & \longrightarrow & G_{n+1} & \xrightarrow{\iota_{n+1}} & E_{n+1} & \xrightarrow{\sigma_{n+1}} & Q_{n+1} & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad .$$

Entsprechend ist auch  $F = \text{proj}\{F_n, \phi_m^n\}_\mathbb{N}$  ein reduzierter projektiver Limes lokaler Banachräume, und wir erhalten die kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & F_n \hat{\otimes}_\varepsilon G_n & \xrightarrow{I \hat{\otimes}_\varepsilon \iota_n} & F_n \hat{\otimes}_\varepsilon E_n & \xrightarrow{I \hat{\otimes}_\varepsilon \sigma_n} & F_n \hat{\otimes}_\varepsilon Q_n & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow \phi_{n+1}^n \hat{\otimes}_\varepsilon \theta_{n+1}^n & & \uparrow \phi_{n+1}^n \hat{\otimes}_\varepsilon \rho_{n+1}^n & & \uparrow \phi_{n+1}^n \hat{\otimes}_\varepsilon \tau_{n+1}^n & & \\ 0 & \rightarrow & F_{n+1} \hat{\otimes}_\varepsilon G_{n+1} & \xrightarrow{I \hat{\otimes}_\varepsilon \iota_{n+1}} & F_{n+1} \hat{\otimes}_\varepsilon E_{n+1} & \xrightarrow{I \hat{\otimes}_\varepsilon \sigma_{n+1}} & F_{n+1} \hat{\otimes}_\varepsilon Q_{n+1} & \rightarrow & 0 \end{array} \quad .$$

Aufgrund der Voraussetzungen können wir annehmen, dass alle  $F_n$   $\mathcal{L}_\infty$ -Räume, alle  $G_n$   $\mathcal{L}_\infty$ -Räume, alle  $E_n$  Hilberträume oder alle  $Q_n$   $\mathcal{L}_1$ -Räume sind; im Fall der Bedingung an  $G$  oder  $Q$  verwenden wir dazu Aufgabe 7.10. Aufgrund unserer Ergebnisse für den Banachraum-Fall hat also obiges Diagramm ebenfalls exakte Zeilen. Da die linearen Abbildungen  $\phi_{n+1}^n \hat{\otimes}_\varepsilon \theta_{n+1}^n$  offenbar dichtes Bild haben, impliziert dann Theorem 9.14 die Exaktheit der Sequenz der projektiven Limiten. Nun ist  $F \hat{\otimes}_\varepsilon G = \text{proj}\{F_n \hat{\otimes}_\varepsilon G_n, \phi_m^n \hat{\otimes}_\varepsilon \theta_m^n\}_\mathbb{N}$ , und Entsprechendes gilt für die Räume  $F \hat{\otimes}_\varepsilon E$  und  $F \hat{\otimes}_\varepsilon Q$  (vgl. Aufgabe 10.20). Daraus folgt die Behauptung.  $\diamond$

**Beispiele.** a) Theorem 12.9 gilt insbesondere dann, wenn *einer* der Räume  $F, G, E$  oder  $Q$  *nuklear* ist (vgl. Aufgabe 11.17).

b) Beispiele möglicher Räume  $F$  oder  $G$  sind Räume  $\mathcal{C}(\Omega)$  stetiger Funktionen oder



Räume  $\lambda^{m,\alpha}(\Omega)$  von  $\mathcal{C}^m$ -Funktionen mit Hölder-Bedingungen ( $0 < \alpha < 1$ ) auf offenen Mengen  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .

c) Die Bedingung an  $E$  wird von lokalen Sobolev-Räumen  $W_2^{s,\text{loc}}(\Omega)$ , diejenige an  $Q$  von Räumen  $W_1^{k,\text{loc}}(\Omega)$  erfüllt.

## 12.3 Holomorphe Funktionen mit Randbedingungen

Für eine offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  (oder  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ) und einen quasivollständigen Raum  $F$  sei  $\mathcal{H}^\infty(\Omega, F)$  der Raum der *beschränkten holomorphen*  $F$ -wertigen Funktionen. Für eine Surjektion  $\sigma : E \rightarrow Q$  von Banachräumen besitzt eine Funktion  $f \in \mathcal{H}^\infty(\Omega, Q)$  nach Satz 10.14 ein *holomorphes Lifting* nach  $E$ , und natürlich gibt es auch ein *beschränktes Lifting*. Die Frage, ob es sogar ein Lifting  $f^\vee \in \mathcal{H}^\infty(\Omega, E)$  gibt, werden wir nun *negativ* beantworten.

**Lifting von Dirac-Funktionalen und Integralformeln.** a) Integralformeln der komplexen Analysis lassen sich nach A.M. Gleason (1962) ähnlich wie Formel (8.22) auf S. 192 konstruieren: Für eine beschränkte offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  betrachten wir die Banachalgebra

$$\mathcal{A}(\overline{\Omega}) := \{\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \mid \varphi|_\Omega \in \mathcal{H}(\Omega)\}$$

(vgl. Aufgabe 10.13). Die Restriktion  $\iota : \mathcal{A}(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}(\partial\Omega)$  von Funktionen auf den Rand von  $\Omega$  ist eine Isometrie aufgrund des Maximum-Prinzips. Durch

$$\delta : \Omega \rightarrow \mathcal{A}(\overline{\Omega})', \quad \langle \varphi, \delta_z \rangle := \varphi(z) \quad \text{für } z \in \Omega \text{ und } \varphi \in \mathcal{A}(\overline{\Omega}), \quad (4)$$

wird aufgrund des Zusatzes zu Satz 10.11 eine holomorphe Funktion  $\delta : \Omega \rightarrow \mathcal{A}(\overline{\Omega})'$  definiert, die offenbar  $\|\delta_z\| = 1$  für alle  $z \in \Omega$  erfüllt.

b) Nach dem *Rieszschen Darstellungssatz* (vgl. [Rudin 1974], Theorem 6.19) kann  $\mathcal{C}(\partial\Omega)'$  mit dem Raum aller komplexen regulären Borel-Maße auf  $\partial\Omega$  identifiziert werden. Ein *holomorphes Lifting*  $\mu : \Omega \rightarrow \mathcal{C}(\partial\Omega)'$  von  $\delta$  liefert somit eine *Integralformel*

$$\varphi(z) = \int_{\partial\Omega} \varphi(\zeta) d\mu_z(\zeta) \quad \text{für } z \in \Omega \text{ und } \varphi \in \mathcal{A}(\overline{\Omega}). \quad (5)$$

c) Im Fall des Einheitskreises  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  ist ein holomorphes Lifting von  $\delta : D \rightarrow \mathcal{A}(\overline{D})'$  aufgrund der Cauchyschen Integralformel gegeben durch

$$m : D \rightarrow \mathcal{C}(\partial D)', \quad m_z = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{für } z \in D. \quad (6)$$

Für  $z = re^{it} \in D$  und  $\zeta = e^{i\varphi}$  berechnen wir

$$\|m_z\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{|e^{i\varphi} - re^{it}|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ds}{|e^{is} - r|}.$$

Wegen

$$|e^{is} - r|^2 = 1 - 2r \cos s + r^2 = (1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{s}{2} \leq (1-r)^2 + rs^2$$

ergibt sich für  $\frac{1}{2} \leq r < 1$  mit der Substitution  $s = (1-r)u$

$$\|m_z\| \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{ds}{\sqrt{(1-r)^2 + rs^2}} \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{1-r}} \frac{du}{\sqrt{1+ru^2}} \geq \frac{1}{4\pi} \int_1^{\frac{1}{1-r}} \frac{du}{u}, \quad \text{also}$$

$$\|m_z\| \geq \frac{1}{4\pi} \log \frac{1}{1-|z|} \quad \text{für } \frac{1}{2} \leq |z| < 1. \quad (7)$$

Ein beschränktes holomorphes Lifting von  $\delta : D \rightarrow \mathcal{A}(\overline{D})'$  wäre also in gewissem Sinne eine Verbesserung der Cauchyschen Integralformel! Es gilt jedoch das folgende Resultat aus [Kaballo 1980]:

### Theorem 12.10

Es gibt kein holomorphes Lifting  $\mu \in \mathcal{H}(D, \mathcal{C}(\partial D)')$  von  $\delta \in \mathcal{H}^\infty(D, \mathcal{A}(\overline{D})')$  mit

$$\|\mu_z\| = o(\log \frac{1}{1-|z|}) \quad \text{für } |z| \rightarrow 1. \quad (8)$$

BEWEIS. a) Für  $\alpha \in \partial D$  und  $f \in \mathcal{C}(\partial D)$  betrachten wir die durch  $f_\alpha : \zeta \mapsto f(\alpha\zeta)$  gegebene *rotierte* Funktion in  $\mathcal{C}(\partial D)$ . Für das Lifting  $m \in \mathcal{H}(D, \mathcal{C}(\partial D)')$  von  $\delta$  aus (6) gilt  $m_{\alpha^{-1}z}(f_\alpha) = m_z(f)$  für alle  $\alpha \in \partial D$ , d. h.  $m$  ist *rotationsinvariant*.

b) Nun sei  $\mu \in \mathcal{H}(D, \mathcal{C}(\partial D)')$  ein Lifting von  $\delta$  mit (8). Wir rotieren  $\mu$  zu holomorphen Funktionen  $\mu_z^\alpha : f \mapsto \mu_{\alpha^{-1}z}(f_\alpha)$  und mitteln die rotierten Funktionen zu

$$\lambda_z : f \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \mu_z^\alpha(f) d\alpha, \quad z \in D, \quad f \in \mathcal{C}(\partial D).$$

Dann ist  $\lambda \in \mathcal{H}(D, \mathcal{C}(\partial D)')$  ein *rotationsinvariantes* Lifting von  $\delta$  mit (8).

c) Offenbar gilt  $\lambda_z(\zeta^n) = z^n = m(\zeta^n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Für  $\lambda_z = \sum_{k=0}^\infty \gamma_k z^k$  und  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $n < 0$  liefert die Rotationsinvarianz für alle  $\alpha \in \partial D$

$$\sum_{k=0}^\infty \langle \zeta^n, \gamma_k \rangle \alpha^k z^k = \lambda_{\alpha z}(\zeta^n) = \lambda_z((\alpha\zeta)^n) = \sum_{k=0}^\infty \langle (\alpha\zeta)^n, \gamma_k \rangle z^k = \sum_{k=0}^\infty \langle \zeta^n, \gamma_k \rangle \alpha^n z^k,$$

also  $\langle \zeta^n, \gamma_k \rangle \alpha^k = \langle \zeta^n, \gamma_k \rangle \alpha^n$  für alle  $\alpha \in \partial D$ . Es folgt  $\langle \zeta^n, \gamma_k \rangle = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  und somit  $\lambda_z(\zeta^n) = 0$ .

d) Wie in c) folgt auch  $m_z(\zeta^n) = 0$  für  $n < 0$ . Nach dem *Satz von Fejér* (vgl. [GK], Theorem 5.2) ist der Raum  $[\zeta^n]_{n \in \mathbb{Z}}$  in  $\mathcal{C}(\partial D)$  dicht, und somit gilt  $\lambda = m$ . Mit (7) und (8) erhalten wir nun einen Widerspruch.  $\diamond$

Für Funktionen  $f \in \mathcal{H}^\infty(\Omega, Q)$  kann also höchstens die Existenz holomorpher Liftings  $f^\vee \in \mathcal{H}(\Omega, E)$  mit  $f(z) = O(\log d_{\partial\Omega}(z)^{-1})$  erwartet werden. Liftings mit dieser oder etwas schwächeren Eigenschaften wurden in [Kaballo 1980] konstruiert. Hier gehen wir noch auf Konsequenzen aus Theorem 12.10 in anderer Richtung ein:

**Folgerungen.** a) Aufgrund von Theorem 12.10 kann offenbar die Quotientenabbildung  $\iota' : \mathcal{C}(\partial D)' \rightarrow \mathcal{A}(\overline{D})'$  nicht rechtsinvertierbar sein. Nach Theorem 12.8 ist daher die Isometrie  $\iota : \mathcal{A}(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}(\partial\Omega)$  nicht a.l., und nach Beispiel a) auf S. 297 ist die *Disc Algebra*  $\mathcal{A}(\overline{D})$  kein  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum. Da diese die b.A.E. besitzt (vgl. Aufgabe 10.14), ist nach Folgerung b) zu Theorem 12.8 insbesondere die Abbildung  $I\widehat{\otimes}_\varepsilon \iota' : \mathcal{A}(\overline{D})\widehat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{C}(\partial D)' \rightarrow \mathcal{A}(\overline{D})\widehat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{A}(\overline{D})'$  nicht surjektiv.

b) Nach a) ist insbesondere die Disc Algebra  $\mathcal{A}(\overline{D})$  in  $\mathcal{C}(\partial\Omega)$  nicht komplementiert. Ein Beweis dieser Aussage in [Rudin 1973], S. 127–130 inspirierte auch den angegebenen Beweis des stärkeren Theorems 12.10. A. Pelczyński zeigte bereits 1974 mit einer anderen Methode, dass  $\mathcal{A}(\overline{D})$  für kein  $p \in [1, \infty]$  ein  $\mathcal{L}_p$ -Raum ist und auch *keine lokal unbedingte Struktur* besitzt.

c) Theorem 12.10 impliziert auch, dass der Banachraum  $\mathcal{H}^\infty(D)$  der beschränkten holomorphen Funktionen auf  $D$  kein  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum ist. In der Tat existieren nach einem *Satz von Fatou* (1906, vgl. [Rudin 1974], Theorem 11.21) für  $f \in \mathcal{H}^\infty(D)$  die *radialen Limiten*

$$(jf)(\zeta) := \lim_{r \rightarrow 1^-} f(r\zeta)$$

für fast alle  $\zeta \in \partial D$ , und dies liefert eine Isometrie  $j : \mathcal{H}^\infty(D) \rightarrow L_\infty(\partial D)$ . Das folgende kommutative Diagramm von Isometrien liefert ein duales Diagramm von Quotientenabbildungen:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}(\partial D) & \xrightarrow{i} & L_\infty(\partial D) & & L_\infty(\partial D)' & \xrightarrow{i'} & \mathcal{C}(\partial D)' \\ \uparrow \iota & & \uparrow j & : & \nearrow \Psi & & \downarrow j' & & \downarrow \iota' \\ \mathcal{A}(\overline{D}) & \longrightarrow & \mathcal{H}^\infty(D) & & D & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{H}^\infty(D)' & \longrightarrow & \mathcal{A}(\overline{D})' \end{array} .$$

Wie in (4) definieren die Dirac-Funktionale eine Abbildung  $\Delta \in \mathcal{H}^\infty(D, \mathcal{H}^\infty(D)')$ . Ist nun  $\mathcal{H}^\infty(D)$  ein  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum, so hat  $\Delta$  ein Lifting  $\Psi \in \mathcal{H}^\infty(D, L_\infty(\partial D)')$ . Dann ist aber  $\mu := i'\Psi \in \mathcal{H}^\infty(D, \mathcal{C}(\partial D)')$  ein Lifting von  $\delta \in \mathcal{H}^\infty(D, \mathcal{A}(\overline{D})')$  im Widerspruch zu Theorem 12.10.

**Gewichtete Räume holomorpher Funktionen.** a) Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  eine beschränkte offene Menge und  $v : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  eine stetige Funktion mit  $v(z) \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow \partial\Omega$ . Wir definieren Banachräume holomorpher Funktionen durch

$$\begin{aligned} \mathcal{H}v(\Omega) &:= \{f \in \mathcal{H}(\Omega) \mid \|f\|_v := \sup_{z \in \Omega} |f(z)|v(z) < \infty\} \quad \text{und} \\ \mathcal{H}v_0(\Omega) &:= \{f \in \mathcal{H}v(\Omega) \mid \lim_{z \rightarrow \partial\Omega} |f(z)|v(z) = 0\}. \end{aligned}$$

b) Entsprechend lassen sich auch Räume vektorwertiger Funktionen definieren; es gilt  $\mathcal{H}v_0(\Omega, F) \simeq \mathcal{H}v_0(\Omega) \varepsilon F$  für quasivollständige Räume  $F$  (vgl. Aufgabe 12.10). Ist

nun  $\mathcal{H}v_0(\Omega)$  ein  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum, so lassen sich für eine Surjektion  $\sigma : E \rightarrow Q$  von Frécheträumen Funktionen in  $\mathcal{H}v_0(\Omega, Q)$  aufgrund von Satz 12.3 nach  $\mathcal{H}v_0(\Omega, E)$  liften.

c) Wir betrachten nun den Einheitskreis  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  und *radiale*, nur von  $r = |z|$  abhängige Gewichtsfunktionen  $v$  mit  $v(r) \downarrow 0$  für  $r \rightarrow 1^-$ . Stets ist  $\mathcal{H}v_0(D)'' \simeq \mathcal{H}v(D)$ . Nach A.L. Shields und D.L. Williams (1971) gilt  $\mathcal{H}v(\Omega) \simeq \ell_\infty$  und  $\mathcal{H}v_0(\Omega) \simeq c_0$  für *normale* Gewichtsfunktionen, z. B. für  $v(r) = (1-r)^\alpha$  und  $0 < \alpha < \infty$ . Wegen b) und Theorem 12.10 können jedoch  $\mathcal{H}v(\Omega)$  und  $\mathcal{H}v_0(\Omega)$  für  $v(r) = \log(\frac{1}{1-r})^\gamma$  und  $0 < \gamma < 1$  *keine*  $\mathcal{L}_\infty$ -Räume sein.

d) Eine genaue Charakterisierung derjenigen radialen Gewichtsfunktionen  $v$ , für die  $\mathcal{H}v(D) \simeq \ell_\infty$  und  $\mathcal{H}v_0(D) \simeq c_0$  gilt, stammt von W. Lusky; dies ist der Fall für *normal* fallende  $v$  wie  $v(r) = (1-r)^\alpha$  für  $0 < \alpha < \infty$  und auch für *schnell* fallende  $v$  wie  $v(r) = \exp(-(1-r)^{-1})$ . In allen anderen Fällen gilt  $\mathcal{H}v(D) \simeq \mathcal{H}^\infty(D)$ ; dies ist der Fall für *langsam* fallende  $v$  wie  $v(r) = \log(\frac{1}{1-r})^\gamma$  für  $0 < \gamma < \infty$ . Für diese und verwandte Resultate sei auf [Lusky 2006] verwiesen.

## 12.4 Die Eigenschaften $(DN)$ und $(\Omega)$

Im zweiten Teil dieses Kapitels geben wir eine Einführung in eine *Strukturtheorie nuklearer Frécheträume*, die ab etwa 1975 von D. Vogt entwickelt wurde, und folgen dabei im Wesentlichen [Vogt 1977b], [Meise und Vogt 1992] und [Poppenberg 1994]. Zunächst führen wir die für den fundamentalen Splitting-Satz 12.16 wesentlichen Begriffe ein.

**Notationen.** a) Wie in [Meise und Vogt 1992] bezeichnen wir in Abweichung von der bisherigen Notation mit

$$\| \cdot \|_0 \leq \| \cdot \|_1 \leq \dots \leq \| \cdot \|_k \leq \| \cdot \|_{k+1} \leq \dots$$

ein Fundamentalsystem stetiger Halbnormen auf einem Fréchetraum  $E$ . Die entsprechenden Einheitskugeln bezeichnen wir mit  $U_k$ , die lokalen Banachräume mit  $\hat{E}_k$ .

b) Für eine Halbnorm  $\| \cdot \|$  auf  $E$  bezeichnen wir mit

$$\| f \|_* := \sup \{ \| f(x) \| \mid \| x \| \leq 1 \} \in [0, \infty]$$

die zu  $\| \cdot \|$  *duale Norm* eines Funktionals  $f \in E^\times$ . Genau dann ist  $\| f \|_* < \infty$ , wenn  $f \in E'_k := E'_{U_k} \cong (\hat{E}_k)'$  gilt.

**Die Eigenschaft  $(DN)$ .** a) Ein Fréchetraum  $E$  mit einem wachsenden Fundamentalsystem  $(\| \cdot \|_k)$  stetiger Halbnormen besitzt die Eigenschaft  $(DN)$ , falls gilt:

$$\exists d \in \mathbb{N}_0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \exists n \in \mathbb{N}_0, C \geq 0 \forall x \in E : \| x \|_k^2 \leq C \| x \|_d \| x \|_n. \quad (9)$$

In diesem Fall schreiben wir auch kurz „ $E \in (DN)$ “.

b) Aus (9) folgt sofort, dass  $\| \cdot \|_d$  eine Norm auf  $E$  ist; diese wird *dominierende Norm* genannt. Räume ohne stetige Norm, wie etwa der Raum  $\omega$  aller Folgen, besitzen also die Eigenschaft  $(DN)$  nicht.

c) Mit  $E$  besitzt auch jeder zu  $E$  isomorphe Fréchetraum die Eigenschaft  $(DN)$ , und diese hängt nicht von der Wahl eines Fundamentalsystems ab. Weiter vererbt sich  $(DN)$  offenbar auf *Unterräume*.

Für *Köthe-Räume* (vgl. S. 248) gilt:

**Satz 12.11**

a) Für eine Köthe-Matrix  $A = (a_{j,k})_{j,k \in \mathbb{N}_0}$  gilt genau dann  $\lambda_2(A) \in (DN)$ , wenn

$$\exists d \in \mathbb{N}_0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \exists n \in \mathbb{N}_0, C \geq 0 : a_{j,k}^2 \leq C a_{j,d} a_{j,n}. \quad (10)$$

b) Ein Potenzreihenraum  $\Lambda_\infty(\alpha)$  unendlichen Typs besitzt die Eigenschaft  $(DN)$ , nicht aber ein Potenzreihenraum  $\Lambda_0(\alpha)$  endlichen Typs.

BEWEIS. a) Die Normen auf  $\lambda_2(A)$  sind gegeben durch

$$\|x\|_k^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^2 a_{j,k}^2 \quad \text{für } x = (x_j) \in \lambda_2(A).$$

Aus (10) folgt daher mit der Schwarzschen Ungleichung

$$\|x\|_k^2 \leq C \sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^2 a_{j,d} a_{j,n} \leq C \|x\|_d \|x\|_n$$

für  $x \in \lambda_2(A)$ , also (9). Mittels Einsetzen der „Einheitsvektoren“  $x := e_j$  folgt umgekehrt auch (10) aus (9).

b) Im Fall  $R = \infty$  wählen wir  $a_{j,k} = e^{k\alpha_j}$  und erhalten sofort  $a_{j,k}^2 = a_{j,0} a_{j,2k}$ , also (10) mit  $d = 0$  und  $n = 2k$ .

Nun sei  $R = 0$ . Gilt (10), so gibt es  $d < 0$ , sodass zu  $\frac{d}{2} < t < 0$  ein  $s < 0$  und ein  $C \geq 0$  existieren mit

$$\exp(2t\alpha_j) \leq C \exp(d\alpha_j) \exp(s\alpha_j) \leq C \exp(d\alpha_j),$$

also  $2t \leq \alpha_j^{-1} \log C + d$ . Mit  $j \rightarrow \infty$  folgt dann der Widerspruch  $2t \leq d$ .  $\diamond$

**Beispiele und Bemerkungen.** a) Der Raum  $s = \Lambda_\infty(\log(j+1))$  der schnell fallenden Folgen und die zu diesem isomorphen Räume  $\mathcal{C}^\infty[a, b]$ ,  $\mathcal{D}[a, b]$ ,  $s(\mathbb{Z}^n)$ ,  $\mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  besitzen die Eigenschaft  $(DN)$ . Für eine kompakte Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  ist der Raum  $\mathcal{D}(K)$  ein Unterraum von  $\mathcal{E}_{2L}(\mathbb{R}^n)$  für ein geeignetes  $L > 0$ , hat also ebenfalls  $(DN)$ . Es gilt (für  $\text{int}(K) \neq \emptyset$ ) sogar  $\mathcal{D}(K) \simeq s$  (vgl. [Meise und Vogt 1992], Satz 31.12).

b) Der Raum  $\mathcal{H}(\mathbb{C}) = \Lambda_\infty(j)$  der ganzen Funktionen hat  $(DN)$ , nicht aber der Raum  $\mathcal{H}(D) = \Lambda_0(j)$  der holomorphen Funktionen auf dem Einheitskreis.

c) Ein Potenzreihenraum endlichen Typs kann nicht zu einem Unterraum eines Potenzreihenraums unendlichen Typs isomorph sein. Für einen Raum  $F \in (DN)$  muss sogar jede stetige lineare Abbildung  $T : \Lambda_0(\alpha) \rightarrow F$  eine Nullumgebung von  $\Lambda_0(\alpha)$  in eine beschränkte Teilmenge von  $F$  abbilden, vgl. [Meise und Vogt 1992], Satz 29.21.

Wir benötigen äquivalente Formulierungen der Eigenschaft  $(DN)$ . Die *Interpolationsbedingung* (12) für Halbnormen lässt sich auch als *Zerlegungsbedingung* (13) für die dualen Einheitskugeln formulieren:

**Lemma 12.12**

Für einen Fréchetraum  $E$  ist die Eigenschaft  $(DN)$  zu jeder der folgenden Eigenschaften äquivalent:

$$\exists d \in \mathbb{N}_0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}_0, C \geq 0 : \| \cdot \|_k^{1+\varepsilon} \leq C \| \cdot \|_d \| \cdot \|_n^\varepsilon. \quad (11)$$

$$\exists d \in \mathbb{N}_0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}_0, C \geq 0 \forall r > 0 : \| \cdot \|_k \leq r \| \cdot \|_d + \frac{C}{r^\varepsilon} \| \cdot \|_n. \quad (12)$$

$$\exists d \in \mathbb{N}_0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}_0, C \geq 0 \forall r > 0 : U_k^\circ \subseteq r U_d^\circ + \frac{C}{r^\varepsilon} U_n^\circ. \quad (13)$$

BEWEIS. a) Offenbar ist (9) der Spezialfall  $\varepsilon = 1$  von (11). Nun gelte (9) mit  $d \in \mathbb{N}_0$ . Es sei  $k > d$  gegeben. Wir setzen  $n_0 := d$ ,  $n_1 := k$  und finden rekursiv  $n_{j+1} > n_j$  und  $C_j > 0$  mit

$$\| x \|_{n_j}^2 \leq C_j \| x \|_d \| x \|_{n_{j+1}} \quad \text{für alle } x \in E.$$

Damit folgt für  $x \neq 0$  und alle  $m \in \mathbb{N}$ :

$$\left( \frac{\| x \|_k}{\| x \|_d} \right)^m \leq \prod_{j=1}^m \frac{\| x \|_{n_j}}{\| x \|_d} \leq \prod_{j=1}^m C_j \frac{\| x \|_{n_{j+1}}}{\| x \|_{n_j}} \leq \left( \prod_{j=1}^m C_j \right) \frac{\| x \|_{n_{m+1}}}{\| x \|_d}.$$

Mit  $D_m := \left( \prod_{j=1}^m C_j \right)^{1/m}$  ergibt sich daraus

$$\| x \|_k \leq D_m \| x \|_d^{1-1/m} \| x \|_{n_{m+1}}^{1/m} \quad \text{für alle } x \in E.$$

Für  $\varepsilon > 0$  wählen wir nun  $m \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{m} < \tau := \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ . Wegen  $\left( \frac{\| x \|_d}{\| x \|_{n_{m+1}}} \right)^{\tau - \frac{1}{m}} \leq 1$  folgt

$$\| x \|_k \leq D_m \| x \|_d^{1-\tau} \| x \|_{n_{m+1}}^\tau \quad \text{für alle } x \in E,$$

und daraus ergibt sich (11).

b) Die Äquivalenz von (11) und (12) ergibt sich durch Berechnung des Minimums bzgl.  $r > 0$  der rechten Seite von (12).

c) Nun gelte (13). Zu  $x \in E$  wählen wir  $x' \in U_k^\circ$  mit  $\|x\|_k = |\langle x, x' \rangle|$ . Wegen (13) ist  $x' = ry' + \frac{C}{r^\varepsilon} z'$  mit  $y' \in U_d^\circ$  und  $z' \in U_n^\circ$ , und daraus folgt (12).

Umgekehrt ergibt sich aus (12) mit dem Bipolarensatz

$$\begin{aligned} 2U_k &\supseteq \left(\frac{1}{r}U_d\right) \cap \left(\frac{r^\varepsilon}{C}U_n\right) = {}^\circ(rU_d^\circ) \cap {}^\circ\left(\frac{C}{r^\varepsilon}U_n^\circ\right) \supseteq {}^\circ(rU_d^\circ \cup \frac{C}{r^\varepsilon}U_n^\circ), \quad \text{also} \\ \frac{1}{2}U_k^\circ &\subseteq rU_d^\circ + \frac{C}{r^\varepsilon}U_n^\circ \end{aligned}$$

und somit (13), da die letzte Summe schwach\*-kompakt ist.  $\diamond$

**Die Eigenschaft  $(\Omega)$ .** a) Ein Fréchetraum  $E$  mit einem wachsenden Fundamentalsystem  $(\| \cdot \|_k)$  stetiger Halbnormen besitzt die Eigenschaft  $(\Omega)$ , falls für die *dualen Normen*

$$\forall p \in \mathbb{N}_0 \exists q \in \mathbb{N}_0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \exists 0 < \lambda < 1, C \geq 0 : \| \cdot \|_q^* \leq C \| \cdot \|_k^{*\lambda} \| \cdot \|_p^{*1-\lambda} \quad (14)$$

gilt. In diesem Fall schreiben wir auch kurz „ $E \in (\Omega)$ “.

b) Mit  $E$  besitzt auch jeder zu  $E$  isomorphe Fréchetraum die Eigenschaft  $(\Omega)$ , und diese hängt nicht von der Wahl eines Fundamentalsystems ab.

c) Mit  $E$  besitzt auch jeder Quotientenraum  $Q$  von  $E$  die Eigenschaft  $(\Omega)$ . Dazu sei  $\sigma : E \rightarrow Q$  die Quotientenabbildung und  $\| \cdot \|_k$  die Quotienten-Halbnorm von  $\| \cdot \|_k$  (vgl. (7.12)). Für  $y' \in Q'$  gilt dann

$$\|y'\|_k^* = \sup \{ |\langle y, y' \rangle| \mid y \in \sigma U_k \} = \sup \{ |\langle \sigma x, y' \rangle| \mid x \in U_k \} = \|\sigma' y'\|_k^*,$$

und daher vererbt sich (14) von  $E$  auf  $Q$ .

Für *Köthe-Räume* gilt:

### Satz 12.13

a) Für eine Köthe-Matrix  $A = (a_{j,k})_{j,k \in \mathbb{N}_0}$  gilt genau dann  $\lambda_1(A) \in (\Omega)$ , wenn

$$\forall p \in \mathbb{N}_0 \exists q \in \mathbb{N}_0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \exists 0 < \lambda < 1, C \geq 0 \forall j \in \mathbb{N}_0 : C a_{j,q} \geq a_{j,k}^\lambda a_{j,p}^{1-\lambda}. \quad (15)$$

b) Für jeden nuklearen Potenzreihenraum gilt  $\Lambda_R(\alpha) \in (\Omega)$ ,  $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

BEWEIS. a) Der Dualraum  $\lambda'_1(A)$  und die dualen Normen sind gegeben durch

$$\lambda'_1(A) = \{y = (y_j) \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : \|y\|_k^* = \sup_{j=0}^\infty |y_j| a_{j,k}^{-1} < \infty\}$$

(vgl. Aufgabe 10.15). Daher folgt (14) aus (15), und mittels Einsetzen der „Einheitsvektoren“  $y := e_j$  folgt umgekehrt auch (15) aus (14).

b) Wir wählen eine Folge  $t_k \uparrow R$  mit  $t_{k-1} + t_{k+1} \leq 2t_k$ ; im Fall  $R = \infty$  sei einfach  $t_k = k$ , und im Fall  $R = 0$  sei  $t_k = -\frac{1}{k}$ . Für  $a_{j,k} := e^{t_k \alpha_j}$  gilt dann

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall j \in \mathbb{N}_0 : a_{j,k}^2 \geq a_{j,k+1} a_{j,k-1}. \quad (16)$$

Für  $p \in \mathbb{N}_0$  wählen wir  $q := p + 1$ ; für  $k > q$  gilt dann

$$a_{j,k} = a_{j,p} \prod_{i=p}^{k-1} \frac{a_{j,i+1}}{a_{j,i}} \leq a_{j,p} \left( \frac{a_{j,q}}{a_{j,p}} \right)^{k-p},$$

und daraus ergibt sich (15) mit  $\lambda := \frac{1}{k-p}$ .  $\diamond$

**Beispiele.** a) Der Raum  $s = \Lambda_\infty(\log(j+1))$  der schnell fallenden Folgen und jeder zu einem Quotientenraum von  $s$  isomorphe Fréchetraum besitzen die Eigenschaft  $(\Omega)$ . Dies gilt insbesondere für den Raum  $\omega$  aller Folgen, da dieser nach dem Satz von Borel 9.12 ein Quotient von  $\mathcal{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}) \simeq s$  ist.

b) Der Raum  $\mathcal{H}(U_R) = \Lambda_R(j)$  der holomorphen Funktionen auf einem Kreis in  $\mathbb{C}$  besitzt die Eigenschaft  $(\Omega)$ . Allgemeiner gilt  $\mathcal{H}(D) \in (\Omega)$  für jede offene Menge  $D \subseteq \mathbb{C}$  (vgl. [Petzsche 1980]).

c) Für  $a_{j,k} := e^{j^k}$  ist der Raum  $\lambda_1(A)$  wegen  $\sum_{j=0}^{\infty} e^{j^k} e^{-j^{k+1}} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2} j^{k+1}) < \infty$  nuklear (vgl. Satz 11.16). Insbesondere ist  $\lambda_1(A) = \lambda_2(A)$ , und wegen

$$a_{j,k}^2 = e^{2j^k} \leq e e^{j^{2k}} = a_{j,0} a_{j,2k}$$

gilt (10); somit ist  $\lambda_1(A) \in (DN)$ . Es ist jedoch  $\lambda_1(A) \notin (\Omega)$ ; andernfalls müsste es nach (15) zu  $p = 1$  ein  $q \in \mathbb{N}_0$  und zu  $k := q + 1$  ein  $0 < \lambda < 1$  geben mit

$$e^{\lambda j^{q+1}} = a_{j,q+1}^\lambda \leq a_{j,q+1}^\lambda a_{j,1}^{1-\lambda} \leq C a_{j,q} = C e^{j^q}$$

für alle  $j \in \mathbb{N}_0$ , was offenbar nicht richtig ist. Der Köthe-Raum  $\lambda_1(A)$  ist also *nicht isomorph* zu einem Quotienten eines Potenzreihenraumes.

Ähnlich wie in Lemma 12.12 hat man die folgenden äquivalenten Formulierungen der Eigenschaft  $(\Omega)$ . Die *Interpolationsbedingung* (18) für duale Normen lässt sich auch als *Zerlegungsbedingung* (19) für die entsprechenden Einheitskugeln formulieren:

### Lemma 12.14

Für einen Fréchetraum  $E$  ist die Eigenschaft  $(\Omega)$  zu jeder der folgenden Eigenschaften äquivalent:

$$\forall p \in \mathbb{N}_0 \exists q \in \mathbb{N}_0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \exists n > 0, C \geq 0 : \| \cdot \|_q^{*1+n} \leq C \| \cdot \|_k^{*n} \| \cdot \|_p^*. \quad (17)$$

$$\forall p \in \mathbb{N}_0 \exists q \in \mathbb{N}_0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \exists n > 0, C \geq 0 \forall r > 0 : \| \cdot \|_q^* \leq C r^n \| \cdot \|_k^* + \frac{1}{r} \| \cdot \|_p^*. \quad (18)$$

$$\forall p \in \mathbb{N}_0 \exists q \in \mathbb{N}_0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \exists n > 0, C \geq 0 \forall r > 0 : U_q \subseteq C r^n U_k + \frac{1}{r} U_p. \quad (19)$$

BEWEIS. a) Die Äquivalenz von (14) und (17) ergibt sich sofort mit  $n = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ , die von (17) und (18) durch Berechnung des Minimums bzgl.  $r > 0$  der rechten Seite von (18).



b) Nun gelte (18). Dann folgt

$$U_q^\circ \supseteq (2Cr^n U_k)^\circ \cap (\tfrac{2}{r} U_p)^\circ \supseteq (2Cr^n U_k \cup \tfrac{2}{r} U_p)^\circ,$$

und der Bipolarensatz liefert

$$U_q \subseteq {}^\circ((2Cr^n U_k \cup \tfrac{2}{r} U_p)^\circ) \subseteq \overline{(2Cr^n U_k + \tfrac{2}{r} U_p)} \subseteq 3Cr^n U_k + \tfrac{2}{r} U_p.$$

Umgekehrt gelte nun (19). Für  $x' \in E'$  und  $x \in U_q$  wählen wir  $y \in U_k$  und  $z \in U_p$  mit  $x = Cr^n y + \frac{1}{r} z$  und erhalten  $|\langle x, x' \rangle| \leq Cr^n |\langle y, x' \rangle| + \frac{1}{r} |\langle z, x' \rangle|$  und somit

$$\|x'\|_q^* = \sup \{ |\langle x, x' \rangle| \mid x \in U_q \} \leq Cr^n \|x'\|_k^* + \frac{1}{r} \|x'\|_p^*. \quad \diamond$$

Schließlich benötigen wir noch:

**Lemma 12.15**

Es sei  $E$  ein nuklearer Fréchetraum  $E$  mit Eigenschaft  $(\Omega)$ . Für die Einheitskugeln  $\widehat{U}_k$  der lokalen Banachräume  $\widehat{E}_k$  und die kanonischen Abbildungen  $\widehat{\rho}_n^k : \widehat{E}_n \rightarrow \widehat{E}_k$  für  $n \geq k$  gilt dann

$$\forall p \in \mathbb{N}_0 \exists q \geq p \forall k \geq p \exists n > 0, C \geq 0 \forall r > 0 : \widehat{\rho}_q^p \widehat{U}_q \subseteq Cr^n \widehat{\rho}_k^p \widehat{U}_k + \tfrac{1}{r} \widehat{U}_p. \quad (20)$$

BEWEIS. Zu  $p \in \mathbb{N}_0$  wählen wir  $q \geq p$  gemäß (19), zu  $k \geq p$  dann  $k < \ell \in \mathbb{N}_0$ , sodass  $\widehat{\rho}_\ell^k : \widehat{E}_\ell \rightarrow \widehat{E}_k$  kompakt ist. Zu  $\ell$  wählen wir schließlich  $n > 0$  und  $c \geq 0$  gemäß (19). Zu  $x \in \widehat{U}_q$  gibt es eine Folge  $(x_j)$  in  $U_q$  mit  $\rho_q x_j \rightarrow x$  in  $\widehat{E}_q$ . Nach (19) gibt es zu  $r > 0$  Zerlegungen  $x_j = y_j + z_j$  mit  $y_j \in cr^n U_\ell$  und  $z_j \in \frac{1}{r} U_p$ . Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir  $\widehat{\rho}_\ell^k y_j \rightarrow y \in c \|\widehat{\rho}_\ell^k\| r^n \widehat{U}_k$  annehmen. Dann folgt auch  $\rho_p z_j \rightarrow z \in \frac{1}{r} \widehat{U}_p$ , und es ist  $\widehat{\rho}_q^p x = \widehat{\rho}_k^p y + z$ . Somit gilt (20) mit  $C = c \|\widehat{\rho}_\ell^k\|$ .  $\diamond$

An Stelle der Nuklearität genügt in Lemma 12.15 auch die Schwartz-Eigenschaft von  $E$  (vgl. Aufgabe 11.18).

## 12.5 Ein Splitting-Satz

In diesem Abschnitt beweisen wir das folgende fundamentale Resultat aus [Vogt 1977a] und [Vogt und Wagner 1980]:

**Theorem 12.16**

Eine kurze exakte Sequenz nuklearer Frécheträume

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\sigma} Q \longrightarrow 0 \quad (S)$$

zerfällt, falls  $G$  die Eigenschaft  $(\Omega)$  und  $Q$  die Eigenschaft  $(DN)$  hat.

Der Beweis ist im Wesentlichen eine Verfeinerung der Mittag-Leffler-Methode 9.14.

**Beweis-Anfang.** a) Wir können annehmen, dass  $G$  ein abgeschlossener Unterraum von  $E$  und  $\sigma : E \rightarrow Q$  eine Quotientenabbildung ist. Auf dem nuklearen Raum  $E$  existiert nach Satz 11.17 ein wachsendes Fundamentalsystem  $\{\|\cdot\|_k^E\}$  von Hilbert-Halbnormen, und dieses induziert Fundamentalsysteme  $\{\|\cdot\|_k^G\}$  und  $\{\|\cdot\|_k^Q\}$  von Hilbert-Halbnormen auf  $G$  und  $Q$ . Wie im Beweis von Satz 11.19 erhalten wir die folgenden kommutativen Diagramme von Hilberträumen und stetigen linearen Abbildungen mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \widehat{G}_{k-1} & \xrightarrow{\iota_{k-1}} & \widehat{E}_{k-1} & \xrightarrow{\sigma_{k-1}} & \widehat{Q}_{k-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \widehat{\theta}_k^{k-1} & & \uparrow \widehat{\rho}_k^{k-1} & & \uparrow \widehat{\tau}_k^{k-1} & & \\
 0 & \longrightarrow & \widehat{G}_k & \xrightarrow{\iota_k} & \widehat{E}_k & \xrightarrow{\sigma_k} & \widehat{Q}_k & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \widehat{\theta}_{k+1}^k & & \uparrow \widehat{\rho}_{k+1}^k & & \uparrow \widehat{\tau}_{k+1}^k & & \\
 0 & \longrightarrow & \widehat{G}_{k+1} & \xrightarrow{\iota_{k+1}} & \widehat{E}_{k+1} & \xrightarrow{\sigma_{k+1}} & \widehat{Q}_{k+1} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Durch Übergang zu einer Teilfolge der Halbnormen können wir erreichen, dass die  $(DN)$ -Bedingung (13) in  $Q$  für  $d = 0$  gilt und dass die kanonischen Abbildungen  $\widehat{\theta}_{k-1}^k : \widehat{G}_k \rightarrow \widehat{G}_{k-1}$  nuklear sind und Bedingung (20) so erfüllen:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \exists n_k > 0, C_k \geq 0 \forall r > 0 : \widehat{\theta}_k^{k-1} \widehat{U}_k^G \subseteq C_k r^{n_k} \widehat{\theta}_{k+1}^{k-1} \widehat{U}_{k+1}^G + \frac{1}{r} \widehat{U}_{k-1}^G. \quad (21)$$

b) Da die  $\widehat{E}_k$  Hilberträume sind, gibt es  $r_k \in L(\widehat{Q}_k, \widehat{E}_k)$  mit  $\sigma_k r_k = I_{\widehat{Q}_k}$ . Für die Abbildungen  $s_k := r_k \tau_k \in L(Q, \widehat{E}_k)$  gilt

$$\sigma_{k-1}(\widehat{\rho}_k^{k-1} s_k - s_{k-1}) = \widehat{\tau}_k^{k-1} \sigma_k s_k - \sigma_{k-1} r_{k-1} \tau_{k-1} = \widehat{\tau}_k^{k-1} \tau_k - \tau_{k-1} = 0;$$

es gibt also  $d_{k-1} \in L(Q, \widehat{G}_{k-1})$  mit

$$\widehat{\rho}_k^{k-1} s_k - s_{k-1} = \iota_{k-1} d_{k-1} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Die Abbildungen  $\delta_k := \widehat{\theta}_{k+1}^k d_{k+1} \in L(Q, \widehat{G}_k)$  sind dann *nuklear*.

c) Wir konstruieren nun *Zerlegungen*

$$\widehat{\theta}_k^{k-1} \delta_k = v_{k-1} - \widehat{\theta}_k^{k-1} v_k \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \quad (22)$$

mit Abbildungen  $v_k \in L(Q, \widehat{G}_k)$ .

Damit definieren wir  $R_k := \widehat{\rho}_{k+2}^k s_{k+2} + \iota_k v_k \in L(Q, \widehat{E}_k)$  und berechnen

$$\begin{aligned}
 \widehat{\rho}_k^{k-1} R_k &= \widehat{\rho}_{k+2}^{k-1} s_{k+2} + \iota_{k-1} \widehat{\theta}_k^{k-1} v_k = \widehat{\rho}_{k+2}^{k-1} s_{k+2} + \iota_{k-1} (v_{k-1} - \widehat{\theta}_k^{k-1} \delta_k) \\
 &= \widehat{\rho}_{k+1}^{k-1} (s_{k+1} + \iota_{k+1} d_{k+1}) + \iota_{k-1} v_{k-1} - \widehat{\rho}_{k+1}^{k-1} \iota_{k+1} d_{k+1} \\
 &= \widehat{\rho}_{k+1}^{k-1} s_{k+1} + \iota_{k-1} v_{k-1} = R_{k-1}
 \end{aligned}$$

für  $k \geq 1$ . Wegen  $E = \text{proj}_k \hat{E}_k$  (vgl. (7.9)) definiert dann die Folge  $(R_k)$  einen Operator  $R \in L(Q, E)$ , für den  $\rho_k R = R_k$  für  $k \geq 0$  gilt. Wegen

$$\begin{aligned} \tau_k \sigma R &= \sigma_k \rho_k R = \sigma_k R_k = \sigma_k \hat{\rho}_{k+2}^k s_{k+2} = \sigma_k \hat{\rho}_{k+2}^k r_{k+2} \tau_{k+2} \\ &= \hat{\tau}_{k+2}^k \sigma_{k+2} r_{k+2} \tau_{k+2} = \hat{\tau}_{k+2}^k \tau_{k+2} = \tau_k \end{aligned}$$

für  $k \geq 0$  gilt dann  $\sigma R = I_Q$ , und der Beweis von Theorem 12.16 ist erbracht.

Der Beweis verläuft also formal sehr ähnlich zu dem von Theorem 9.14; sein Kern ist die *Existenz der Zerlegungen* (22). Da die Räume  $L(Q, \hat{G}_k)$  keine Frécheträume sind, ist die Konstruktion „konvergenzerzeugender Summanden“ schwieriger als in der Situation von Theorem 9.14, gelingt aber unter Verwendung nuklearer Reihenentwicklungen und der Bedingungen  $(DN)$  und  $(\Omega)$ . Das wesentliche Approximationsargument enthält:

**Lemma 12.17**

Für  $k \in \mathbb{N}$  gibt es zu einer nuklearen Abbildung  $\delta \in N(Q, \hat{G}_k)$  und  $\varepsilon > 0$  eine nukleare Abbildung  $u \in N(Q, \hat{G}_{k+1})$  mit  $\hat{\theta}_k^{k-1} \delta - \hat{\theta}_{k+1}^{k-1} u \in N(Q, \hat{G}_{k-1})$  und

$$\|(\hat{\theta}_k^{k-1} \delta - \hat{\theta}_{k+1}^{k-1} u)y\|_{\hat{G}_{k-1}} \leq \varepsilon \|y\|_0^Q \quad \text{für alle } y \in Q. \quad (23)$$

BEWEIS. a) Wir setzen  $\hat{U}_k := \hat{U}_k^G$  und  $V_k := U_k^Q$ . Da  $\delta$  nuklear ist, gilt

$$\delta y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle y, y'_n \rangle x_n, \quad y \in Q, \quad (24)$$

mit  $(\lambda_n) \in \ell_1$ ,  $x_n \in \hat{U}_k \subseteq \hat{G}_k$  und  $y'_n \in V_\ell^\circ$  für ein geeignetes  $\ell \in \mathbb{N}_0$ . Für  $m \geq 1$  setzen wir  $r = 3^m$  und finden mittels der  $(\Omega)$ -Bedingung (21)

$$x_{n,m} \in C_k 3^{mn_k} \hat{U}_{k+1} \quad \text{mit} \quad \|\hat{\theta}_k^{k-1} x_n - \hat{\theta}_{k+1}^{k-1} x_{n,m}\|_{\hat{G}_{k-1}} \leq 3^{-m}. \quad (25)$$

Aufgrund der  $(DN)$ -Bedingung (13) mit  $d = 0$  gibt es zu  $\ell$  ein  $\ell' \in \mathbb{N}$  mit

$$V_\ell^\circ \subseteq r V_0^\circ + c r^{-2n_k} V_{\ell'}^\circ \quad \text{für ein } c > 0 \text{ und alle } r > 0 \text{ in } Q'.$$

Für  $m \in \mathbb{N}$  und  $r = 2^m$  finden wir also

$$y'_{n,m} \in c 2^{-2mn_k} V_{\ell'}^\circ \quad \text{mit} \quad y'_n - y'_{n,m} \in 2^m V_0^\circ. \quad (26)$$

b) Nun setzen wir

$$x_{n,0} := 0 \quad \text{und} \quad z_{n,m} := x_{n,m} - x_{n,m-1} \in 2C_k 3^{mn_k} \hat{U}_{k+1} \quad (27)$$

und erhalten

$$\|\hat{\theta}_{k+1}^{k-1} z_{n,m}\|_{\hat{G}_{k-1}} \leq \|\hat{\theta}_{k+1}^{k-1} x_{n,m} - \hat{\theta}_k^{k-1} x_n\|_{\hat{G}_{k-1}} + \|\hat{\theta}_k^{k-1} x_n - \hat{\theta}_{k+1}^{k-1} x_{n,m-1}\|_{\hat{G}_{k-1}}, \text{ also}$$

$$\|\hat{\theta}_{k+1}^{k-1} z_{n,m}\|_{\hat{G}_{k-1}} \leq 3^{-m} + 3^{-m-1} = 4 \cdot 3^{-m} \quad (28)$$

aus (25). Wegen  $x_{n,j} = \sum_{m=1}^j z_{n,m}$  gilt also

$$\sum_{m=1}^{\infty} \hat{\theta}_{k+1}^{k-1} z_{n,m} = \hat{\theta}_k^{k-1} x_n \quad \text{in } \hat{G}_{k-1}. \quad (29)$$

c) Nun definieren wir  $w : Q \rightarrow \hat{G}_{k+1}$  durch

$$wy := \sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_n \langle y, y'_{n,m} \rangle z_{n,m}, \quad y \in Q.$$

Nach (26) und (27) hat man  $4^{mn_k} y'_{n,m} \in cV_{\ell'}^{\circ}$  und  $3^{-mn_k} z_{n,m} \in 2C_k \hat{U}_{k+1}$ ; wegen  $\sum_{n,m=1}^{\infty} (\frac{3}{4})^{mn_k} |\lambda_n| < \infty$  ist dann  $w \in N(Q, \hat{G}_{k+1})$  nuklear. Weiter gilt wegen (29)

$$\hat{\theta}_{k+1}^{k-1} w - \hat{\theta}_k^{k-1} \delta = \sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_n \langle y, y'_{n,m} - y'_n \rangle \hat{\theta}_{k+1}^{k-1} z_{n,m}. \quad (30)$$

Nach (26) und (28) hat man  $2^{-m}(y'_{n,m} - y'_n) \in V_0^{\circ}$  und  $3^m \hat{\theta}_{k+1}^{k-1} z_{n,m} \in 4\hat{U}_{k-1}$ ; wegen  $\sum_{n,m=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^m |\lambda_n| < \infty$  ist daher auch  $\hat{\theta}_{k+1}^{k-1} w - \hat{\theta}_k^{k-1} \delta \in N(Q, \hat{G}_{k-1})$  nuklear. Nun wählen wir  $j \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{n,m=j+1}^{\infty} (\frac{2}{3})^m |\lambda_n| \leq \frac{\varepsilon}{4}$  und definieren  $u \in N(Q, \hat{G}_{k-1})$  durch

$$uy := wy - \sum_{n,m=1}^j \lambda_n \langle y, y'_{n,m} - y'_n \rangle \hat{\theta}_{k+1}^{k-1} z_{n,m}, \quad y \in Q.$$

Aus (30) und  $|\langle y, y'_{n,m} - y'_n \rangle| \leq 2^m \|y\|_0^Q$  folgt dann die Behauptung (23).  $\diamond$

**Beweis-Ende.** a) Zum Nachweis der Zerlegungen (22) konstruieren wir nun rekursiv nukleare Abbildungen  $u_n : Q \rightarrow \hat{G}_n$ : Es sei  $u_1 := 0$ . Ist  $u_n \in N(Q, \hat{G}_n)$  bereits konstruiert, so finden wir mittels Lemma 12.17 zu  $u_n - \delta_n \in N(Q, \hat{G}_n)$  eine nukleare Abbildung  $u_{n+1} \in N(Q, \hat{G}_{n+1})$  mit

$$\|(\hat{\theta}_n^{n-1}(u_n - \delta_n) - \hat{\theta}_{n+1}^{n-1} u_{n+1})y\|_{\hat{G}_{n-1}} \leq 2^{-n} \|y\|_0^Q \quad \text{für alle } y \in Q. \quad (31)$$

b) Nun setzen wir  $h_n := \delta_n - u_n + \hat{\theta}_{n+1}^n u_{n+1} \in N(Q, \hat{G}_n)$  und definieren die in (22) gesuchten Abbildungen durch  $v_k := \hat{\theta}_{k+1}^k u_{k+1} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \hat{\theta}_n^k h_n$ . Nach (31) ist

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \|\hat{\theta}_n^k h_n y\|_{\hat{G}_k} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \|\hat{\theta}_n^k h_n y\|_{\hat{G}_{n-1}} \leq \|y\|_0 \quad \text{für } y \in Q,$$

und daher gilt in der Tat  $v_k \in L(Q, \widehat{G}_k)$ . Weiter ist nach Konstruktion

$$\begin{aligned}
 \widehat{\theta}_k^{k-1}(v_k + \delta_k) &= \widehat{\theta}_k^{k-1}(\delta_k + \widehat{\theta}_{k+1}^k u_{k+1} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \widehat{\theta}_n^k h_n) \\
 &= \widehat{\theta}_k^{k-1}(\delta_k + \widehat{\theta}_{k+1}^k u_{k+1} + \sum_{n=k}^{\infty} \widehat{\theta}_n^k h_n - (\delta_k - u_k + \widehat{\theta}_{k+1}^k u_{k+1})) \\
 &= \widehat{\theta}_k^{k-1}(u_k + \sum_{n=k}^{\infty} \widehat{\theta}_n^k h_n) = v_{k-1} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Damit sind (22) und Theorem 12.16 vollständig bewiesen.  $\diamond$

**Erweiterungen.** a) Für den soeben ausgeführten Beweis ist die Nuklearität von  $G$  wesentlich; die Nuklearität von  $E$  wird jedoch nur für die Konstruktion der „lokalen Rechtsinversen“  $r_k \in L(\widehat{Q}_k, \widehat{E}_k)$  verwendet. Es genügt daher, die *Nuklearität nur von  $G$*  und die *Separabilität von  $E$*  vorauszusetzen. Dann kann man die Halbnormen so wählen, dass stets  $\widehat{G}_k \simeq c_0$  gilt (vgl. die Aufgaben 11.17 und 7.10) und die Existenz einer stetigen Projektion von  $\widehat{E}_k$  auf  $\widehat{G}_k$  verwenden (Satz von Sobczyk, vgl. S. 224 und [Meise und Vogt 1992], 10.10).

b) In [Meise und Vogt 1992], § 30 wird der *Splitting-Satz für Frécheträume mit Hilbert-Halbnormen* ohne Annahme der Nuklearität bewiesen. Der im Vergleich zu dem hier vorgestellten wesentlich kompliziertere Beweis verwendet die *Spektraltheorie unbeschränkter selbstadjungierter Operatoren* (vgl. Kapitel 16).

c) Eine allgemeinere Version des Splitting-Satzes im Rahmen von Frécheträumen findet man in [Vogt 1987].

d) In den letzten Jahren wurde auch eine Splitting-Theorie für kurze exakte Sequenzen von *(PLS)-Räumen* entwickelt; dazu verweisen wir auf [Bonet und Dománski 2006], [Bonet und Dománski 2008] und die dort zitierte Literatur. *(PLS)-Räume* sind abzählbare projektive Limiten von Dualräumen von Fréchet-Schwartz-Räumen (vgl. Aufgabe 11.18); wesentliche Beispiele sind *nukleare Räume  $\mathcal{D}'_\beta(\Omega)$  von Distributionen* (oder *Ultradistributionen*, vgl. S. 41) sowie *Räume  $\mathcal{A}(\Omega)$  reell-analytischer Funktionen* auf offenen Mengen  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  (vgl. S. 166). Somit liefert die Splitting-Theorie Resultate über Parameterabhängigkeit bei surjektiven (Differential-)Operatoren zwischen Räumen dieses Typs.

Eine wesentliche Anwendung von Theorem 12.16 ist der folgende *Lifting-Satz* für stetige lineare Operatoren und für Tensorprodukte:

### Theorem 12.18

*Es seien  $F \in (DN)$  ein nuklearer Fréchetraum und  $(S)$  eine kurze exakte Sequenz nuklearer Frécheträume mit  $G \in (\Omega)$ .*

*a) Zu  $T \in L(F, Q)$  gibt es  $T^\vee \in L(F, E)$  mit  $\sigma T^\vee = T$  :*

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\iota} & E & \xrightarrow{\sigma} & Q \longrightarrow 0 \\
 & & & & T^\vee & \nwarrow & \uparrow T \\
 & & & & & & F
 \end{array} .$$

b) Die Abbildung  $I \hat{\otimes} \sigma : F'_\beta \hat{\otimes} E \rightarrow F'_\beta \hat{\otimes} Q$  ist surjektiv.

BEWEIS. a) Wir betrachten den abgeschlossenen Unterraum

$$H := \{(x, y) \in E \times F \mid \sigma(x) = T(y)\}$$

von  $E \times F$ . Mit  $jz := (\iota z, 0)$  für  $z \in G$  und  $\alpha(x, y) := y$  für  $(x, y) \in H$  erhalten wir eine Sequenz nuklearer Frécheträume

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{j} H \xrightarrow{\alpha} F \longrightarrow 0.$$

Offenbar ist  $j : G \rightarrow H$  eine topologische Inklusion,  $\alpha : H \rightarrow F$  ist surjektiv, und man hat  $\alpha j = 0$ . Für  $(x, y) \in N(\alpha)$  gilt  $y = 0$ , also auch  $\sigma x = T y = 0$ , und daher existiert  $z \in G$  mit  $\iota z = x$ , also  $jz = (x, 0)$ .

Die Sequenz ist also exakt und splittet daher aufgrund von Theorem 12.16. Es gibt also  $R \in L(F, H)$  mit  $\alpha R = I_F$ . Mit der Projektion  $\rho_1 : H \rightarrow E$  auf die erste Koordinate setzen wir dann  $T^\vee := \rho_1 R \in L(F, E)$  und erhalten  $\sigma T^\vee = \sigma \rho_1 R = T \alpha R = T$ .

b) Es ist  $F'_\beta \hat{\otimes} Q \simeq F'_\beta \varepsilon Q = L_e((F'_\beta)'_\kappa, Q) \simeq L(F, Q)$  und  $F'_\beta \hat{\otimes} E \simeq L(F, E)$  aufgrund der Sätze 11.14, 10.17 und 11.18. Aussage b) folgt somit sofort aus a).  $\diamond$

**Beispiele und Folgerungen.** a) Nach den Beispielen auf S. 305 gilt Theorem 12.18 für die nuklearen Frécheträume  $F = s$ ,  $C^\infty[a, b]$ ,  $\mathcal{D}[a, b]$ ,  $\mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{D}(K)$  und  $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ .

b) Nach Satz 9.22 ist der Cauchy-Riemann-Operator  $\bar{\partial} : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  über jeder offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  surjektiv. Da der Kern  $N(\bar{\partial}) = \mathcal{H}(\Omega)$  nach [Petzsche 1980] die Eigenschaft  $(\Omega)$  hat, ist für einen nuklearen Fréchetraum  $F$  mit Eigenschaft  $(DN)$  auch der Operator  $\bar{\partial}^{F'} : \mathcal{E}(\Omega, F'_\beta) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega, F'_\beta)$  surjektiv; dies gilt also insbesondere für die Räume  $F$  aus a).

c) Nach Theorem 10.12 sind für Räume  $F'_\beta$  wie in b) *Cousin-Probleme* über offenen Mengen in  $\mathbb{C}$  stets lösbar, und nach Satz 10.13 gilt für  $F'_\beta$ -wertige Funktionen auch der *Satz von Mittag-Leffler*.

d) Aussage b) gilt für jeden surjektiven Differentialoperator  $P(D) : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ , für den der Kern  $N(P(D))$  die Eigenschaft  $(\Omega)$  hat. Nach [Vogt 1983] ist dies für *elliptische* Operatoren über *beliebigen* offenen Mengen stets der Fall. Für *hypoelliptische* Operatoren besitzt  $N(P(D))$  die Eigenschaft  $(\Omega)$  nach [Petzsche 1980] über *konvexen* offenen Mengen. Nach [Bonet und Dománski 2006] ist dies für allgemeine offene Mengen  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  genau dann der Fall, wenn auch der *augmentierte* Operator

$P(D) : \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R})$  surjektiv ist. Dies wiederum ist nach [Kalmes 2012b] nicht immer der Fall, nach [Kalmes 2012a] jedoch richtig im Fall  $n = 2$  und in weiteren Spezialfällen.

## 12.6 Unterräume und Quotientenräume von $s$

In diesem letzten Abschnitt des Kapitels charakterisieren wir die Unterräume bzw. Quotientenräume von  $s$  durch die Eigenschaften  $(DN)$  und  $(\Omega)$ ; diese Resultate stammen aus [Vogt 1977a] und [Vogt und Wagner 1980].

### Lemma 12.19

*Es gibt eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow s \xrightarrow{\iota} s \xrightarrow{\sigma} s^{\mathbb{N}_0} \longrightarrow 0. \quad (32)$$

BEWEIS. Nach Satz 9.12 liefert die *Borel-Abbildung*  $\beta : f \mapsto (f^{(j)}(0))_{j \in \mathbb{N}_0}$  eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N(\beta) \xrightarrow{j} \mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\beta} \omega \longrightarrow 0.$$

Nach Satz 1.7 gilt  $\mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}) \simeq s$ . Weiter ist der Kern von  $\beta$  gegeben durch

$$N(\beta) = \{f \in \mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}) \mid \forall j \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z} : f^{(j)}(2k\pi) = 0\} \simeq \mathcal{D}[0, 2\pi] \simeq s$$

aufgrund von Aufgabe 3.10. Die Borel-Abbildung liefert also eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow s \longrightarrow s \longrightarrow \omega \longrightarrow 0$$

nuklearer Frécheträume, und nach Theorem 12.9 ist dann auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow s \hat{\otimes} s \longrightarrow s \hat{\otimes} s \longrightarrow s \hat{\otimes} \omega \longrightarrow 0$$

exakt. Wegen  $s \hat{\otimes} s \simeq s$  und  $s \hat{\otimes} \omega \simeq s^{\mathbb{N}_0}$  (vgl. die Aufgaben 10.7 und 10.5) folgt daraus die Behauptung.  $\diamond$

### Lemma 12.20

*Für einen nuklearen Fréchetraum  $E$  gibt es eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow s \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\sigma} E \longrightarrow 0 \quad (33)$$

*mit einem Unterraum  $G$  von  $s$ .*

BEWEIS. Nach dem Satz von Komura-Komura 11.20 können wir  $E$  als Unterraum von  $s^{\mathbb{N}_0}$  auffassen. In der exakten Sequenz (32) definieren wir  $G := \sigma^{-1}(E) \subseteq s$  und erhalten sofort (33).  $\diamond$

Nun können wir zeigen:

**Satz 12.21**

Ein Fréchetraum  $E$  ist genau dann zu einem Unterraum von  $s$  isomorph, wenn  $E$  nuklear ist und die Eigenschaft  $(DN)$  besitzt.

BEWEIS. „ $\Leftarrow$ “: Nach Lemma 12.20 gibt es eine exakte Sequenz (33), die aufgrund von Theorem 12.16 splittet. Daher ist  $E$  isomorph zu einem Unterraum von  $G$  und somit zu einem solchen von  $s$ . Die Umkehrung „ $\Rightarrow$ “ ist klar.  $\diamond$

Als Nächstes charakterisieren wir die *komplementierten* Unterräume von  $s$ . Dazu benötigen wir noch:

**Lemma 12.22**

Gegeben seien zwei kurze exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G_1 & \xrightarrow{\iota_1} & E_1 & & \sigma_1 \\ & & & & \uparrow u & \searrow & \\ & & & & & & Q \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & G_2 & \xrightarrow{\iota_2} & E_2 & \nearrow_{\sigma_2} & \end{array}$$

nuklearer Frécheträume. Besitzt  $E_2$  die Eigenschaft  $(DN)$  und  $G_1$  die Eigenschaft  $(\Omega)$ , so gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow G_2 \xrightarrow{\iota} G_1 \times E_2 \xrightarrow{\sigma} E_1 \longrightarrow 0.$$

BEWEIS. Nach Theorem 12.18 a) hat  $\sigma_2 \in L(E_2, Q)$  ein Lifting  $u \in L(E_2, E_1)$ , für das also  $\sigma_1 u = \sigma_2$  gilt. Für  $z_2 \in G_2$  ist  $u \iota_2 z_2 \in N(\sigma_1) = R(\iota_1)$ , und daher können wir

$$\iota : G_2 \rightarrow G_1 \times E_2 \quad \text{durch} \quad \iota z_2 := (\iota_1^{-1} u \iota_2 z_2, \iota_2 z_2)$$

definieren. Weiter erklären wir

$$\sigma : G_1 \times E_2 \rightarrow E_1 \quad \text{durch} \quad \sigma(z_1, x_2) := \iota_1 z_1 - u x_2.$$

Offenbar ist  $\iota$  injektiv, und es gilt  $\sigma \iota = 0$ . Aus  $0 = \sigma(z_1, x_2) = \iota_1 z_1 - u x_2$  folgt  $0 = \sigma_1 \iota_1 z_1 = \sigma_1 u x_2 = \sigma_2 x_2$ . Daher gibt es  $z_2 \in G_2$  mit  $\iota_2 z_2 = x_2$ , und daraus folgt auch  $\iota_1 z_1 = u x_2 = u \iota_2 z_2$ , also  $(z_1, x_2) = \iota z_2$ .

Schließlich ist  $\sigma$  surjektiv: Zu  $x_1 \in E_1$  gibt es  $x_2 \in E_2$  mit  $\sigma_2 x_2 = -\sigma_1 x_1$ . Für  $y := x_1 + u x_2 \in E_1$  ist dann  $\sigma_1 y = 0$ ; es gibt daher  $z_1 \in G_1$  mit  $y = \iota_1 z_1$ , also  $x_1 = y - u x_2 = \iota(z_1, x_2)$ .  $\diamond$

**Satz 12.23**

Ein Fréchetraum  $E$  ist genau dann zu einem komplementierten Unterraum von  $s$  isomorph, wenn  $E$  nuklear ist und die Eigenschaften  $(DN)$  und  $(\Omega)$  besitzt.



BEWEIS. „ $\Leftarrow$ “: Es gibt eine exakte Sequenz  $0 \rightarrow E \rightarrow s \rightarrow Q \rightarrow 0$  nach Satz 12.21, da  $E$  die Eigenschaften  $(DN)$  hat. Da  $Q$  nuklear ist, existiert nach Lemma 12.20 auch eine exakte Sequenz  $0 \rightarrow s \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 0$  mit einem Unterraum  $G$  von  $s$ . Daher existiert eine exakte Sequenz  $0 \rightarrow E \rightarrow s \times s \rightarrow G \rightarrow 0$  nach Lemma 12.22. Diese splittet aufgrund von Theorem 12.16, und somit ist  $E$  zu einem komplementierten Unterraum von  $s \times s \simeq s$  isomorph (vgl. Aufgabe 1.4).

Die Umkehrung „ $\Rightarrow$ “ ist klar.  $\diamond$

Schließlich gilt analog zu Satz 12.21:

### Satz 12.24

*Ein Fréchetraum  $E$  ist genau dann zu einem Quotientenraum von  $s$  isomorph, wenn  $E$  nuklear ist und die Eigenschaft  $(\Omega)$  besitzt.*

BEWEIS. „ $\Leftarrow$ “: Nach dem Satz von Komura-Komura 11.20 gibt es eine kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow E \rightarrow s^{\mathbb{N}_0} \rightarrow Q \rightarrow 0$ , und nach Lemma 12.20 gibt es eine exakte Sequenz  $0 \rightarrow s \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 0$  mit einem Unterraum  $G$  von  $s$ . Nun liefert Lemma 12.22 eine exakte Sequenz  $0 \rightarrow s \rightarrow E \times G \rightarrow s^{\mathbb{N}_0} \rightarrow 0$ . Wir wenden dieses Lemma noch einmal an auf diese Sequenz zusammen mit der Sequenz (33) und erhalten eine exakte Sequenz  $0 \rightarrow s \rightarrow s \rightarrow E \times G \rightarrow 0$ . Somit ist  $E \times G$  zu einem Quotientenraum von  $s$  isomorph, und dies gilt dann auch für  $E$ . Die Umkehrung „ $\Rightarrow$ “ ist klar.  $\diamond$

Insbesondere sind also alle Potenzreihenräume zu Quotientenräumen von  $s$  isomorph, solche vom unendlichen Typ sogar zu komplementierten Unterräumen von  $s$ .

## 12.7 Aufgaben

### Aufgabe 12.1

Zeigen Sie, dass ein  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum die b.A.E. besitzt.

### Aufgabe 12.2

a) Es seien  $F$  ein lokalkonvexer Raum und  $(S)$  eine kurze topologisch exakte Sequenz lokalkonvexer Räume. Zeigen Sie, dass die Sequenz  $(F \varepsilon S)$  an der ersten und an der zweiten Stelle topologisch exakt ist.

b) Folgern Sie für vollständige Räume auch die Exaktheit von  $(F \widehat{\otimes}_\varepsilon S)$  an der ersten und an der zweiten Stelle, falls  $F$  die A.E. besitzt.

c) Nun sei  $E$  ein vollständiger Raum mit A.E. Zeigen Sie, dass die Sequenz  $(F \widehat{\otimes}_\varepsilon S)$  genau dann für jeden Banachraum  $F$  an der zweiten Stelle topologisch exakt ist, wenn auch  $G$  die A.E. besitzt.

**Aufgabe 12.3**

Für eine kurze exakte Sequenz  $(S)$  von Banachräumen ist auch die  $\kappa$ -duale Sequenz  $(S'_\kappa)$  exakt nach Satz 8.28. Zeigen Sie, dass für einen Banachraum  $F$  die Abbildung  $I_\varepsilon \iota' : F \varepsilon E'_\kappa \rightarrow F \varepsilon G'_\kappa$  genau dann surjektiv ist, wenn  $F$  ein injektiver Banachraum ist.

**Aufgabe 12.4**

Es sei  $P(D) : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  ein surjektiver Differentialoperator über einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  (vgl. S. 214). Zeigen Sie, dass für jeden Banachraum  $F$  auch der Operator  $P(D)^F : \mathcal{D}'(\Omega) \varepsilon F \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \varepsilon F$  surjektiv ist.

**Aufgabe 12.5**

Es sei  $F$  ein  $\mathcal{L}_1$ -Raum. Beweisen Sie „ $\Rightarrow$ “ in Lemma 12.5 und schließen Sie, dass  $F'$  ein injektiver Banachraum ist. Folgern Sie, dass ein *dualer*  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum stets *injektiv* ist.

**Aufgabe 12.6**

Es seien  $X, Y$  Banachräume, und  $X'$  besitze die b.A.E. Zeigen Sie, dass die Inklusion  $\iota : K(X, Y) \rightarrow L(X, Y)$  a.l. ist.

**Aufgabe 12.7**

Es sei  $Y = X'$  ein *dualer* Banachraum. Zeigen Sie:

- Für eine a.l. Inklusion  $\iota : G \rightarrow E$  von Banachräumen hat die Restriktionsabbildung  $\rho : L(E, Y) \rightarrow L(G, Y)$  eine stetige lineare Rechtsinverse.
- Für eine a.r. Surjektion  $\sigma : E \rightarrow Q$  von Banachräumen ist  $L(Q, Y)$  in  $L(E, Y)$  komplementiert.

**Aufgabe 12.8**

Verifizieren Sie die Aussagen b)–d) über approximativ rechtsinvertierbare Surjektionen auf S. 299.

**Aufgabe 12.9**

Es seien  $(S)$  eine  $\otimes$ -Sequenz von Banachräumen, sodass  $Q$  die A.E. besitzt, und  $F$  ein vollständiger lokalkonvexer Raum, in dem jede kompakte Menge sehr kompakt ist. Zeigen Sie, dass  $I \widehat{\otimes}_\varepsilon \sigma : F \widehat{\otimes}_\varepsilon E \rightarrow F \widehat{\otimes}_\varepsilon Q$  surjektiv ist.

**Aufgabe 12.10**

Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  eine beschränkte offene Menge und  $v : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  eine Gewichtsfunktion wie auf S. 303. Zeigen Sie  $\mathcal{H}v_0(\Omega, F) \simeq \mathcal{H}v_0(\Omega) \varepsilon F$ .

**Aufgabe 12.11**

a) Für Banachräume  $F_1, F_2$  sei  $u \in L(F_1, F_2)$  über einen  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum  $F$  faktorisierbar. Weiter sei  $\sigma : E \rightarrow Q$  eine Surjektion von Banachräumen. Zeigen Sie: Zu  $t \in F_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon Q$  gibt es  $s \in F_2 \widehat{\otimes}_\varepsilon E$  mit  $(I \widehat{\otimes}_\varepsilon \sigma)s = (u \widehat{\otimes}_\varepsilon I)t$ .

b) Für  $\gamma > 0$  seien durch  $v(r) = (\log \frac{1}{1-r})^\gamma$  Gewichtsfunktionen auf dem Einheitskreis definiert. Zeigen Sie, dass die Inklusion  $\mathcal{H}v_\alpha(D) \rightarrow \mathcal{H}v_\beta(D)$  für  $0 < \alpha < \beta < 1$  nicht über einen  $\mathcal{L}_\infty$ -Raum faktorisierbar ist.

### Aufgabe 12.12

a) Ein Fréchetraum  $E$  besitze ein Fundamentalsystem stetiger Halbnormen mit

$$\|x\|_k^2 \leq C_k \|x\|_{k-1} \|x\|_{k+1} \quad \text{für } x \in E \text{ und geeignete } C_k \geq 0. \quad (34)$$

Zeigen Sie  $E \in (DN)$ .

b) Verifizieren Sie (34) für den Fréchetraum  $\mathcal{C}^\infty[a, b]$  mit den Halbnormen

$$\|f\|_k := \sup_{0 \leq j \leq k} \|f^{(j)}\|_{\sup}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

HINWEIS. Taylor-Formel!

c) Verifizieren Sie (34) auch für den Fréchetraum  $\overline{\mathcal{C}}^\infty(\Omega)$  für beschränkte offene Mengen  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  mit z. B.  $\mathcal{C}^\infty$ -Rand.

### Aufgabe 12.13

Zeigen Sie  $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \simeq \Lambda_\infty(j^{1/n})$  für den Raum der ganzen Funktionen auf  $\mathbb{C}^n$ . Schließen Sie, dass Raum  $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$  zu einem komplementierten Unterraum von  $s(\mathbb{N}_0^n)$  isomorph ist. Gilt sogar  $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \simeq s(\mathbb{N}_0^n)$ ?

### Aufgabe 12.14

a) Es sei  $E$  ein nuklearer Fréchetraum. Konstruieren Sie eine wachsende Funktion  $\phi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ , sodass  $E$  die folgende Eigenschaft  $(\Omega_\phi)$  hat:

$$\forall p \in \mathbb{N}_0 \exists q \in \mathbb{N}_0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \exists C \geq 0 \forall r > 0 : U_q \subseteq C\phi(r)U_k + \frac{1}{r}U_p.$$

b) Zeigen Sie, dass Eigenschaft  $(\Omega_\phi)$  sich auf Quotienten vererbt.

c) Konstruieren Sie zu gegebenem  $\phi$  einen nuklearen Köthe-Raum, der die Eigenschaft  $(\Omega_\phi)$  nicht besitzt.

### Aufgabe 12.15

Es seien  $F \in (\Omega)$  ein nuklearer Fréchetraum und  $(S)$  eine kurze exakte Sequenz vollständiger nuklearer  $(DF)$ -Räume mit  $G'_\beta \in (DN)$ . Zeigen Sie die Surjektivität der Abbildung  $I \hat{\otimes} \sigma : F \hat{\otimes} E \rightarrow F \hat{\otimes} Q$ .

### Aufgabe 12.16

Es seien  $F \in (\Omega)$  ein nuklearer Fréchetraum und  $(S)$  eine kurze exakte Sequenz nuklearer Frécheträume mit  $Q \in (DN)$ . Konstruieren Sie zu  $u \in L(G, F)$  eine Fortsetzung  $v \in L(E, F)$ , für die also  $v\iota = u$  gilt.

**Aufgabe 12.17**

- a) Zeigen Sie Theorem 12.18 auch für den Raum  $F = \mathcal{D}(\Omega)$  der Testfunktionen auf einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- b) Folgern Sie die Lösbarkeit von Cousin-Problemen und die Gültigkeit des Satzes von Mittag-Leffler für Funktionen mit Werten in  $\mathcal{D}'_\beta(\Omega)$ .

**Aufgabe 12.18**

Es sei  $F$  ein vollständiger lokalkonvexer Raum und  $(y_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge in  $F$ . Unter welchen Annahmen an  $F$  existiert eine Funktion  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}, F)$  mit  $f^{(j)}(0) = y_j$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$ ?

**Aufgabe 12.19**

Zeigen Sie, dass die Bedingungen  $(DN)$  bzw.  $(\Omega)$  an  $Q$  bzw.  $G$  im Splitting-Satz 12.16 in gewissem Sinne notwendig sind.

Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie

Distributionen - lokalkonvexe Methoden -

Spektraltheorie

Kaballo, W.

2014, XI, 493 S. 30 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-37793-8