
Einleitung

Die Wahrscheinlichkeitstheorie hat nach L. Breiman [1] eine rechte und eine linke Hand. Die linke Hand denkt stochastisch, führt Probleme z. B. auf Glücksspiele, Münzwürfe, Bewegungen eines physikalischen Teilchens zurück. Die rechte Hand leistet die exakte Grundlagenarbeit, die auf den Methoden der Maßtheorie basiert. R. Durrett [3] meint, aus sprachlichen Gründen (left = sinister, right = dextrous) links und rechts vertauschen zu müssen. Auch wenn es im Deutschen ähnlich ist, hat m. E. Breiman recht, da die konkrete Behandlung stochastischer Probleme mit exakten Methoden durchgeführt wird.

Die beiden Seiten der Wahrscheinlichkeitstheorie spiegeln sich auch in der Lehre wider. Es hat sich bewährt, einen Kursus über Stochastik mit einer elementaren Grundvorlesung zu beginnen. In ihr soll die intuitive Vorstellung an einfachen Modellen entwickelt werden. Dabei werden Begriffe und Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie an Hand von Beispielen mit möglichst geringem technischem Aufwand eingeführt. Mathematisch exakt können auf diesem Niveau jedoch nur diskrete Modelle und mit dem Riemann-Integral Modelle mit stetigen Dichten wie beispielsweise die Normalverteilung behandelt werden. Eine Vorlesung dieser Art ist auch für Studierende geeignet, die sich anschließend nicht weiter mit der Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigen wollen, z. B. Lehramtsstudierende, die Wahrscheinlichkeitstheorie in erster Linie für die Schule lernen wollen, und Studierende mit Nebenfach Mathematik. Ihnen sei z. B. das bewährte Lehrbuch von U. Krenzel [10] empfohlen.

Daran schließen sich Vorlesungen über die mathematisch exakte Wahrscheinlichkeitstheorie an, von der dieses Buch handelt. Ihre theoretische Grundlage ist die Maßtheorie. Zu ihr gehört auch die Integrationstheorie, die in der Wahrscheinlichkeitstheorie den Erwartungswert betrifft. Es gibt unterschiedliche Auffassungen, inwieweit die Maßtheorie in einer solchen Vorlesung behandelt werden soll. Man kann sich mit ihr in einer separaten Vorlesung beschäftigen und sie dann in einer anschließenden Vorlesung über Wahrscheinlichkeitstheorie voraussetzen. Dies hat zwar den Vorteil, dass man die Maßtheorie ausführlicher behandeln und sich dann auf die eigentliche Wahrscheinlichkeitstheorie konzentrieren kann. Andererseits benötigt man ein zusätzliches Semester, das die elementare von der maßtheoretischen Wahrscheinlichkeitstheorie trennt. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die für die Wahrscheinlichkeitstheorie notwendige Maßtheorie bereitzustellen, ohne in Details zu gehen, vor allem unter Auslassung technisch schwieriger Beweise. Wir

vertreten demgegenüber den Standpunkt, dass in eine Vorlesung über Wahrscheinlichkeitstheorie die Maßtheorie, zumindest soweit sie benötigt wird, exakt integriert werden sollte, da für ein tieferes Verständnis und Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie genauere Kenntnisse der Maßtheorie notwendig sind. Vor allem die fortgeschrittene Theorie kommt ohne höhere Maßtheorie nicht aus. Daher ist es nicht sinnvoll, die Grundlagen der Maßtheorie ohne Beweise nur zu erwähnen. Dennoch ist dies in erster Linie ein Buch über Wahrscheinlichkeitstheorie, und wir werden die Maßtheorie daher hauptsächlich als Hilfsmittel für sie entwickeln. Das hat zusätzlich den Vorteil, dass ansonsten abstrakte Begriffe und Methoden stochastisch motiviert werden und dadurch einen anschaulichen Hintergrund bekommen. Da die Maßtheorie aber auch in anderen Bereichen der Mathematik eine wichtige Rolle spielt, werden wir sie auch für solche Anwendungen allgemein genug behandeln.

Wir gehen davon aus, dass der Leser eine intuitive Vorstellung von den Grundbegriffen und elementaren Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie, z. B. aus der erwähnten Grundvorlesung, hat. Genau genommen setzen wir jedoch keine konkreten Kenntnisse voraus, da wir diese von Beginn an entwickeln werden. Lediglich in Kap. 1, das motivierenden Charakter hat und dessen Resultate anschließend nicht mehr benötigt werden, benutzen wir elementare Kenntnisse. Ähnlich verhält es sich mit den bekanntesten Verteilungen, die wir jeweils kurz ohne nähere Begründung angeben, teilweise auch in den Übungen herleiten. Für das Verständnis des Buchs ist es zwar nicht unbedingt erforderlich, aber der Leser sollte dennoch einigermaßen mit der stochastischen Denkweise, eben der linken Hand, vertraut sein. Es ist nicht sinnvoll, Wahrscheinlichkeitstheorie abstrakt zu betreiben, ohne eine anschauliche Vorstellung von ihr zu haben. Um im Bilde zu bleiben: man kann eben nur mit beiden Händen etwas richtig anpacken. Nach den maßtheoretischen Grundlagen beschäftigen wir uns vom zweiten Teil an in erster Linie mit stochastischen Themen. Wir beginnen mit dem Begriff der Unabhängigkeit und Grenzwertsätzen für Summen unabhängiger Zufallsvariablen, dem starken Gesetz der großen Zahlen und dem zentralen Grenzwertsatz. Im Zusammenhang mit dem zentralen Grenzwertsatz werden wir schwache Konvergenz und charakteristische Funktionen behandeln. Sie sind auch in anderen Situationen in der Wahrscheinlichkeitstheorie wichtig.

Der dritte Teil behandelt die Theorie der stochastischen Prozesse. Bei ihnen handelt es sich um Modelle für zeitabhängige Entwicklungen mit zufälligen Werten. Aus dem zeitlichen Verlauf ergeben sich typische Modellansätze und Fragestellungen, die das Verhalten der Pfade betreffen. Als einführende Beispiele beschäftigen wir uns zunächst mit Markov-Ketten, da sie sich mit elementaren Methoden behandeln lassen und die daher häufig auch bereits in der Grundvorlesung behandelt werden (s. U. Krengel [10], Kapitel III). Ein Leser mit entsprechenden Kenntnissen kann Kap. 10 zur Wiederholung überfliegen oder ganz auslassen.

So weit notwendig werden wir uns dann mit der allgemeinen Theorie stochastischer Prozesse, vor allem ihrer Konstruktion, beschäftigen. Im Vordergrund stehen jedoch einzelne Klassen stochastischer Prozesse, Martingale und Markov-Prozesse. Sie sind charakterisiert durch spezielle Annahmen über ihre zeitliche Entwicklung. Für sie gibt es jeweils

eine umfangreiche Theorie mit entsprechenden Eigenschaften und interessanten Beispielen mit wichtigen Anwendungen. Wir werden vor allem die Martingalthetheorie ausführlich behandeln.

Für die Modellierung von stochastischen Prozessen und deren Untersuchung benötigen wir eine genügend allgemeine Struktur von Abhängigkeit, die auch für andere Situationen von Bedeutung ist. Sie wird durch die bedingte Wahrscheinlichkeit und Erwartung bzgl. einer σ -Algebra dargestellt. Das sind keine deterministischen Größen wie die bedingten Wahrscheinlichkeiten bzgl. eines Ereignisses und der Erwartungswert, sondern Zufallsvariable, die gewisse Kenntnisse über den Ausgang eines Zufallsexperiments berücksichtigen, z. B. im Fall eines stochastischen Prozesses die Werte des Prozesses bis zu einer festen Zeit.

Auch in diesem Teil müssen wir uns mit Maßtheorie beschäftigen, diesmal mit fortgeschrittenen Themen, die noch spezieller für die Wahrscheinlichkeitstheorie von Bedeutung sind. Wir behandeln Maße auf Funktionenräumen und die Beziehung von Maßen zueinander. Gerade das letzte Thema hat auch einen interessanten Bezug zur Analysis, und zwar zur Beziehung zwischen Differentiation und Integration, die den Hauptsatz der Analysis verallgemeinert.

Im vierten Teil behandeln wir die elementare Theorie des stochastischen Integrals, das die Grundlage der stochastischen Analysis ist. Wir behandeln das stochastische Integral nicht nur bzgl. der Brownschen Bewegung, sondern bzgl. allgemeiner Semimartingale als Integratoren. Die Einführung in diese an sich sehr komplizierte Theorie wird dadurch möglich, dass wir von dem üblichen Vorgehen abweichen, indem wir Semimartingale als stochastische Prozesse mit einer Stetigkeitseigenschaft, die sie zu geeigneten Integratoren machen, und das stochastische Integral dementsprechend definieren. Dieses Konzept hat den Vorteil, dass man ohne zu große technische Vorbereitungen das stochastische Integral bis zu einem gewissen Stadium einfacher und natürlicher definieren und seine grundlegenden Eigenschaften mit wichtigen Anwendungen, z. B. in der stochastischen Theorie der Finanzmärkte bis zur Black-Scholes-Formel der Optionsbewertung, leichter beweisen kann. Diese Methode ist besonders geeignet, wenn man sich wie wir im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie nur mit den Grundlagen der stochastischen Analysis beschäftigt. Erst die fortgeschrittene Theorie benötigt eine Fortsetzung des stochastischen Integrals, die dann wesentlich schwieriger wird. Auf sie können wir im Rahmen dieses Buchs nicht weiter eingehen.

Dieser Teil ist auch für ein Seminar über eine elementare Einführung in die stochastische Analysis geeignet.

Neben dem mathematischen Vorgehen sollte eine Grundvorlesung mit Verfahren und Kriterien vertraut machen, für Phänomene und Probleme der Realität ein stochastisches Modell aufzustellen, dieses entsprechend zu behandeln und die Ergebnisse zu interpretieren. In der maßtheoretisch orientierten Vorlesung sollten entsprechende prinzipielle Überlegungen zu stochastischen Modellen diskutiert werden, wie wir es bei passenden Gelegenheiten tun werden (s. z. B. zur heuristischen Begründung mathematischer Modelle und deren exakte Behandlung in Kap. 11).

Am Ende der Kapitel werden Übungsaufgaben gestellt. Zu einigen von ihnen sind die Lösungen am Ende angegeben. Das gilt vor allem für Beweise, die auf die Übungen verlegt sind. Diese Übungen sind mit einem Stern (*) gekennzeichnet.

Die Nummern der Literaturhinweise sind in eckigen Klammern [...] notiert.

Das Lehrbuch entstand aus Vorlesungen an der Universität Heidelberg.

Bedanken möchte ich mich bei Kollege Wolf Beiglböck für seine Durchsicht des Manuskripts und wertvolle Hinweise und bei Alexander Mürmann aus Wien, der mich bei den wirtschaftswissenschaftlichen Aspekten der Theorie der Finanzmärkte beraten hat.

Ich danke auch den Mitarbeitern des Springer-Verlags für die gute und freundliche Zusammenarbeit.

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

Mürmann, M.

2014, XII, 428 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-38159-1