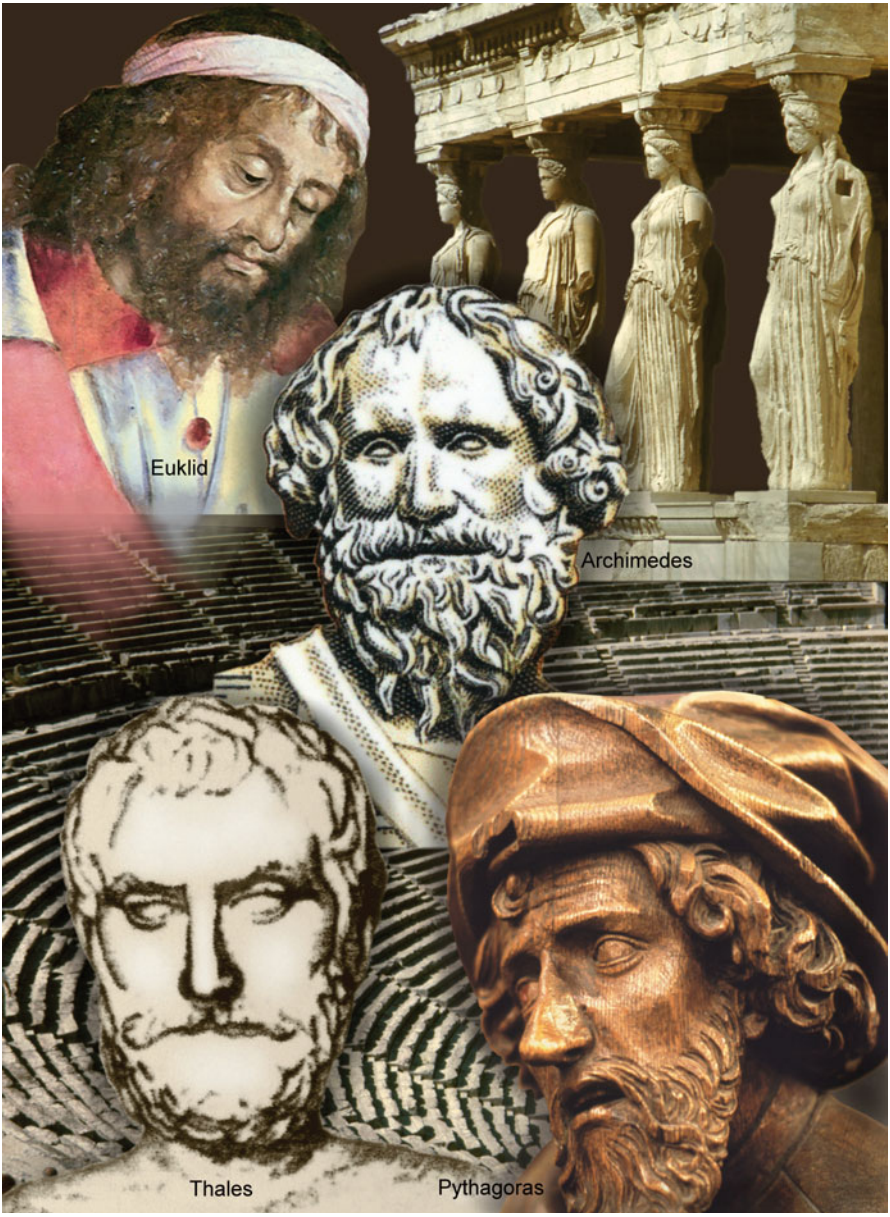
2 Die geometrische Algebra der Griechen



Heinz-Wilhelm Alten et al., *4000 Jahre Algebra,* Vom Zählstein zum Computer,
DOI 10.1007/978-3-642-38239-0_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014

	Allgemeine Geschichte	Kultur- und Wissenschaftsgeschichte
3./2. Jtd.	Herrschaft von Mykene über Peloponnes und Kreta	Minoische und mykenische Kultur
um 1000 v. Chr.	Dorische Wanderung	Geometrische Kunst
∼900	Griechen besiedeln die Inseln der Ägäis und die Westküste Kleinasiens	Griechen übernehmen das phönizische Alphabet
8.–6. Jh.	Gründung griechischer Kolonien in Sizilien, Unteritalien, Libyen und am Schwarzen Meer	Archaische Kunst, monumentale Plastik und Architektur, Vasenmalerei, Epen des Homer, Lehrgedichte des Hesiod
ca. 600–ca. 450	Ionische Periode	Naturphilosophie: Thales, Anaximandros, Hekataios, Anaximenes, Pythagoras, Hippasos
490	Schlacht bei Marathon	Heraklit
490–448	Perserkriege	Parmenides, Zenon, Empedokles, Anaxagoras
ca. 450–ca. 300	Athenische Periode	Sophisten
462–429	Höchste Blüte Athens unter Perikles	Sokrates, Platon, Tragödien des Aischylos, Sophokles, Euripides, Archytas von Tarent
431–404	Peloponnesischer Krieg zwischen Athen und Sparta	Entstehung der dorischen, phrygischen und lydischen Tonarten in der Musik
387	Gründung der Akademie durch Platon	Bau der Akropolis von Athen, klassische Skulpturen von Polyklet (um 480–Ende 5. Jh. v. Chr.) und Phidias
ab 338	Griechenland unter makedonischer Herrschaft	335 Gründung des Lykeions durch Aristoteles
334–323	Kriegszüge Alexanders d. Gr. nach Persien, Ägypten, Indien	Hippokrates von Kos: Begründer der wissenschaftlichen Medizin, Euklid: Elemente der Mathematik, Eudoxos: Theorie der Proportionen
311	Teilung des Alexander-Reiches	
ca. 300 v. Chr. – ca. 150 n. Chr.	Hellenistische (alexandrinische) Periode	Philosophie der Stoa, der Epikureer, der Skeptiker:
	Durch Verschmelzung griechischer und orientalischer Kulturen bildet sich die sog. hellenistische Kultur. Lehrgedichte und Epigramme als Formen der Dichtkunst. Barocke Spätzeit griechischer Kunst. Mathematische und naturwissenschaftliche Erkenntnisse von Euklid, Aristarch, Archimedes, Eratothenes, Apollonios	
ca. 150 n. Chr. – ca. 500	Spätantike	Ptolemaios, Diophant, Proklos

Abb. 2.0.1
Griechisch-hellenistische Antike:
Geburtsorte und Wirkungsstätten
ausgewählter Mathematiker (rot)

2.0 Einführung

Schon im dritten Jahrtausend v. Chr. hatten die Bewohner Kretas die nach dem sagenhaften König Minos benannte minoische Kultur entwickelt und ihren Einfluss über die ägäische Inselwelt durch Handelsbeziehungen auch nach Ägypten ausgedehnt, während auf dem Festland des heutigen Griechenland die sog. helladische Kultur bestand.

Um die Wende vom dritten zum zweiten Jahrtausend stießen aus den Weiten des Nordens indogermanische Stämme, die Achäer, in den Süden des Balkans und nach Griechenland vor. In mehreren Wellen wanderten Ionier und Aioler ein, unterwarfen die dort ansässige Urbevölkerung und vermischten sich mit ihr. Während die Ionier vornehmlich Attika, Euböa und benachbarte Inseln besiedelten, drangen die Achäer und Aioler in den Peloponnes vor und entwickelten dort die mykenische Kultur, die ihren Höhepunkt vom 16. – 14. Jh. erreichte und mit dem Vordringen der Achäer nach Kreta zur kretisch-mykenischen Kultur verschmolz.

Diese von Homer als Heldenzeitalter besungene Epoche fand mit Besitznahme des Peloponnes im Zuge der dorischen Wanderung in den letzten Jahrhunder-

Abb. 2.0.2 Das Löwentor von Mykene. Es bildete das Haupttor zur antiken Burganlage. Die Errichtung wird auf etwa 1250 v. Chr. datiert. Allein der monolithische Türsturz, auf dem das Dreieck mit dem Löwenrelief steht, soll mehr als 10 Tonnen wiegen. Die Säule ist das Symbol des Königshauses von Mykene
[Foto Alten]

ten des zweiten Jahrtausends ihr Ende. Das mykenische Reich zerbrach. Auch das in der frühen Eisenzeit zu großer Macht aufgestiegene Reich der Hethiter in Kleinasien zerfiel um 1200 v. Chr. – Anlass und Möglichkeit für griechische Stämme, sich in der ägäischen Inselwelt und an den Küsten Kleinasiens auszubreiten.

Im 13. Jh. v. Chr. hatte die Eisenzeit die Bronzezeit abgelöst und umfassende Veränderungen im Kriegswesen gebracht. Die Waffen und andere Produktionsmittel konnten wesentlich verbessert werden, ebenso Werkzeuge, von denen z. B. die gängigsten wie Hammer, Säge und Zange bereits in der heute noch üblichen Standardform geschaffen wurden.

Von der Metallverarbeitung profitierten Schiffbau, Bergbau, Töpferei und Weberei. Der neue Rohstoff, die damit entwickelte Technik und die Beschäftigung von Sklaven versetzten die Menschen in die Lage, über den Eigenbedarf hinaus zu produzieren und förderten den Handel. Das führte nicht zuletzt zu gesellschaftlichem Reichtum und zu stärkerer Beteiligung breiter Schichten an den Angelegenheiten wirtschaftlicher oder öffentlicher Interessen.

Abb. 2.0.3 Flügel des Palastes von Knossos auf Kreta. Er ist Zeugnis der hoch entwickelten minoischen Kultur auf Kreta (ca. 3000–1100 v. Chr.). Auf den etwa 21 000 qm des Palastes befanden sich mehr als 800 Räume. Die minoische Kultur gilt als wichtiger Vorläufer der griechischen Antike
[Foto Gottwald]

Die Einwanderungszeit der Dorer fand um die Jahrtausendwende ihren Abschluss. Neue Völker, insbesondere Hebräer, Assyrer und Phönizier traten im Vorderen Orient in den Vordergrund. Um 900 v. Chr. beginnt die Entwicklung einer gemeinsamen eigenständigen Kultur der griechischen Stämme, die sich seit dem 8. Jh. Hellenen und ihr Land Hellas nennen. Sichtbares Zeichen dieser Gemeinsamkeit sind die 776 v. Chr. in Olympia erstmals ausgetragenen Wettkämpfe der Hellenen.

Im 8.–6. Jh. v. Chr. setzte sich die Bevölkerung in den Handelsstädten aus freien Bürgern mit Bürgerrechten sowie aus Fremden und Sklaven (ohne Stimmrecht) zusammen. Ausbeutung der untersten Gesellschaftsschicht bestimmte den Tagesablauf (antike Sklavereigesellschaft), Händler und Kaufleute erlebten Hochkonjunkturen der damaligen Zeit.

Die Freien konnten, da sie sich nicht an der Produktion zu beteiligen brauchten, ihre Zeit für die Weiterentwicklung von Wissenschaften und Kunst einsetzen, wodurch die Kultur einen erheblichen Aufschwung erfuhr und die Entstehung der Philosophie und Mathematik begünstigt wurde. Die Anstrengungen in der Politik führten zur Entstehung der Stadtstaaten, der *Poleis*, deren Struktur sich erheblich von den früheren zentralistischen Regierungsformen unterschied.

Nach 800 v. Chr. begann eine neue Ausbreitung der hellenischen Zivilisation und Kultur. Zahlreiche Siedlungen (Kolonien) entstanden in Unteritalien, auf Sizilien, an den Küsten des Hellesponts, des Bosporus und des Schwarzen Meeres. Die ionischen Städte an den Küsten Kleinasiens erlebten einen ungeheuren Aufschwung und eine Hochblüte der Kultur.

Vom 7. Jh. v. Chr. an haben die Ionier die kulturelle und wirtschaftliche Führung übernommen. Durch den lebhaften Warenhandel und die erweiterten Möglichkeiten in der Seefahrt knüpften sie Verbindungen zu den Küsten des gesamten Mittelmeerraumes und nach Mesopotamien, Skythien und zu noch weiter entfernten Ländern. Bis zum 6. Jh. v. Chr. blieb Milet in Ionien die wichtigste griechische Stadt.

2.1 Beginn des abstrakten Denkens

Mit dieser Entwicklung war die Zeit für theoretische Fragen reif, um den Ursprung und das Wesen der Dinge zu erfahren: man konnte philosophieren. In dieser Zeit entstand auch die Mathematik als wissenschaftliche Disziplin. Zuvor standen ihre Anwendbarkeit und die Nutzbarkeit im Vordergrund. Es waren überwiegend praktische Probleme, sowohl in technischen als auch in Verwaltungsfragen, die zu lösen waren. Man fragte z. B.: „*Wie* baue ich eine Pyramide?“ „*Wie* beschaffe ich mir die Steuern?“ In der nachfolgenden Zeit stellten vor allem die Philosophen und Mathematiker (oft in einer Person) die Frage nach dem *Warum*, d. h. sie wollten nicht nur wissen, wie etwas abläuft, sondern auch warum. Damit rückte die Suche nach den Ursachen einer Erscheinung in den Mittelpunkt. Sie suchten nach Erklärungen für die Entstehung des Universums, nach Deutungen und Lösungen von physikalischen und mathematischen Problemen, z. B. fragte Thales (624–548 v. Chr.): „Warum halbiert der Durchmesser die Kreisfläche?“ Die Philosophen und Mathematiker halfen, eine überschaubare Ordnung in diese neue Denkweise zu bringen und logische Schlussfolgerungen zu ermöglichen.

Die nachfolgende Darstellung folgt den allgemein akzeptierten, traditionellen Auffassungen zur griechischen Mathematik. Es muss aber hervorgehoben werden, dass die entsprechende Quellenlage äußerst dünn ist. Verschiedene Fachvertreter haben mit Recht darauf verwiesen, dass es fast keine Dokumente über die Praxis der antiken Mathematiker, deren Studenten, deren Ziele und Vorstellungen gibt und die Mathematiker kaum als eine wohl bestimmte soziale Gruppe beschrieben werden können. Dies geht in einigen Fällen soweit, dass aus unterschiedlichen Gründen ein Großteil der bisherigen Auffassungen zur griechischen Mathematik als falsch bezeichnet wird. In jüngster Zeit hat R. Netz den Versuch unternommen, einige Elemente einer solchen „sozialen“ Charakterisierung der griechischen Mathematiker anzugeben, ohne den spekulativen Charakter eines solchen Ansatzes zu verkennen [Netz 1999].

Die griechische Mathematik wird in vier Perioden eingeteilt: die ionische, die athenische und die hellenistische Periode sowie die Spätantike.

2.1.1 Ionische Periode (ca. 600–450 v. Chr.)

Der erste ionische Naturphilosoph, Mathematiker und Astronom ist Thales von Milet. Er lebte in dieser lebendigen Handelsstadt an der kleinasiatischen Küste, die seinerzeit als das größte ionische Kulturzentrum galt. Thales gehörte zu den auserwählten Staatsmännern, Gesetzgebern und Moralisten, die als die „Sieben Weisen“ bezeichnet wurden. Er verstand die Welt als durch die Natur gegeben, schrieb die Ereignisse derselben aber nicht mehr der Willkür der griechischen Götter zu. Vielmehr suchte er nach einer Erklärung für den Anfang und hielt das Wasser für den Urstoff, den Grund alles Seienden. Zu den mathematischen Leistungen des Thales berichtet Hieronymos, dass dieser die Pyramidenhöhe mit Hilfe ihres Schattens berechnete. Dazu nahm er genau zu dem Zeitpunkt Maß, in dem der menschliche Körper und sein Schatten die gleiche Länge hatten. Wichtige Sätze über die Winkel ebener Figuren werden ihm zugeschrieben. So lernt jeder Schüler noch heute den „Satz des Thales“:

> Der einem Halbkreis einbeschriebene Winkel ist ein rechter Winkel.

Zum Dank für diese Erkenntnis soll Thales den Göttern einen Ochsen geopfert haben. Jedoch existieren keine schriftlichen Dokumente des Thales.

Neben die naturphilosophische Denkweise trat in der folgenden Periode die religiös-philosophisch ausgerichtete Gedankenwelt der Pythagoreer. Der

Abb. 2.1.1 Markttor von Milet. Der prunkvolle Fassadenbau stammt aus dem frühen 3. Jh. n. Chr. (Pergamon-Museum Berlin)
[Foto Gottwald]

Gründer der nach ihm benannten Lehre ist Pythagoras (ca. 580– ca. 500 v. Chr.). Er wuchs in Samos auf, einer Insel im Meer vor Milet. Er könnte bei Thales und dessen Schüler Anaximander (um 610–546 v. Chr.) gelernt haben. Aus der Literatur ist bekannt, dass Pythagoras zahlreiche Reisen in fast alle Länder des Ostens unternommen hat, so auch nach Ägypten, wo er von dem persischen Eroberer Kambyses gefangen genommen und nach Babylon gebracht worden sein soll. Dort – so ist zu lesen – verbrachte er sieben Jahre, in denen er von den Priestern in die Mystik und von den Magiern in die Zahlenlehre, Musik und andere Wissenschaften eingeweiht wurde. Der Neuplatoniker Iamblichos (ca. 250– ca. 330 n. Chr.) berichtet, dass er dort auch die „Goldene Proportion“ gelernt habe, die besagt:

$$m : h = a : n,$$

wobei h und a das harmonische und das arithmetische Mittel zwischen m und n sind, d. h.:

$$h = \frac{2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}, \; a = \frac{m+n}{2}.$$

Vermutlich kam Pythagoras auch mit Zarathustra (Gründer der altiranischen Religion „Parsismus“) und seiner Lehre in Berührung, die von einem Dualismus zwischen dem bösen Geist Ahriman und dem guten Gott Ahura Masda ausgeht und die Menschen zu ethischen Entscheidungen herausfordert.

Später gründete Pythagoras in Italien eine religiös-philosophisch und politisch ausgerichtete Sekte, die nach ihrem Gründer benannt wurde. Sie wandte sich gegen die Auflockerung der Sitten in großen Teilen des Adels und praktizierte selbst ein strenges Leben voll Selbstbeherrschung und kollektiver Disziplin. Ihre Mitglieder widmeten sich dem Studium der Wissenschaften und der Philosophie. Die Antwort auf die Frage nach der Erhebung der Seele und der Vereinigung mit Gott fanden sie in der Mathematik, die zu einem Teil ihrer Religion wurde. Für die Pythagoreer lag das Wesen der Welt, im Gegensatz zu früheren Auffassungen von Wasser oder Luft als Urstoff, in der göttlichen Harmonie der Zahlen. Deren Verinnerlichung machte sie, ihrem Glauben folgend, unsterblich. Musik, Harmonie und Zahlen gehörten ihrer Lehre untrennbar an. Diese Auffassung findet sich noch im europäischen Mittelalter, wo Harmonielehre (Musik), Geometrie, Arithmetik und Astronomie die vier nichttrivialen Wissenschaften des Quadriviums bilden.

Aus dem Interesse an den Eigenschaften von Zahlen, auch auf dem Hintergrund althergebrachter Zahlenmystik, entwickelte sich die Mathematik der Pythagoreer als exakte Wissenschaft, in der mathematische Sätze auf der Grundlage von Postulaten bewiesen sowie Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten von Zahlen abstrakt formuliert wurden. Bei ihrem Zahlenstudium stießen die Pythagoreer aber an ihre Grenzen, vermutlich als Hippasos (um 500 v. Chr.) die inkommensurablen Strecken entdeckte. Das sind Strecken, deren Längenverhältnis nicht durch das Verhältnis zweier natürlicher Zahlen (also durch einen Bruch) angebbar ist, z. B. $\sqrt{2}$. Da durch diese Entdeckung irrationaler Größen ihre auf natürlichen Zahlen basierende Theorie ins Wanken geriet, sollen die Pythagoreer Hippasos aus ihrem Bund ausgeschlossen haben.

2.1.2 Athenische Periode (450–300 v. Chr.)

Nach den erfolgreichen Perserkriegen im 5. Jh., während derer der attische Seebund zum Kampf gegen die Perser gegründet wurde, war Athen zur bedeutendsten Seemacht geworden. In dieser Zeit erfolgte auch die politische Einigung und Festigung der Griechen.

So brach unter der Herrschaft von Perikles das „Goldene Zeitalter“ der Kunst und Wissenschaft an. Athen wurde zum Zentrum der mathematischen Aktivitäten und galt als politisch und kulturell führender Stadtstaat. Zenon von Elea (um 490–430 v. Chr.) erörterte logische Probleme, die zum einen die Teilbarkeit und Nichtteilbarkeit der Dinge enthalten, zum anderen den Begriff der Bewegung thematisieren (Paradoxie des Achilles und der Schildkröte). Als Philosophen traten im Athen des 5. Jhs. v. Chr. vor allem die Sophisten (Weisheitslehrer) auf. Sie diskutierten auch die sogenannten klassischen Probleme der Mathematik: die Verdopplung des Würfels, die Dreiteilung des Winkels und die Quadratur des Kreises. Dabei wollten sie sich nicht, wie vor ihnen die Ägypter und Babylonier, mit Näherungslösungen zufrieden geben, sondern verlangten nach einer genauen Lösung. Die Versuche,

Abb. 2.1.2 Der Parthenon, aus penetelischem Marmor geschaffen, Tempel für die Stadtgöttin Pallas Athene, errichtet zur Blütezeit Athens unter Perikles (447-438 v. Chr.). Er krönt den Tempelbezirk der Akropolis in Athen und gilt als Meisterwerk griechischer Architektur
[Foto Alten]

dies mit Zirkel und Lineal als alleinigen Hilfsmitteln zu leisten, schlugen fehl. Das führte dazu, neue Methoden zur Lösung solcher Problem zu suchen, vgl. [Scriba/Schreiber 2010, S. 40ff.]. So fand Hippias von Elis um 420 v. Chr. zur Dreiteilung des Winkels die später Quadratrix genannte Kurve (vgl. Abschnitt 2.5). Die Sophisten widmeten sich jedoch in erster Linie der Redekunst, der Rhetorik. Mit ihrem gesamten Wissensschatz gingen sie unter das Volk, auf die Marktplätze und in die Häuser der Reichen und verkauften dort ihre Kenntnisse wie eine Ware. Dadurch wuchs die Bedeutung der Sophisten unter der Bevölkerung, wurde sie doch durch deren Unterweisungen in die Lage versetzt, beispielsweise in Volksversammlungen logisch zu argumentieren oder allgemein Streitgespräche führen zu können.

Bei den Philosophen Platon (427–347 v. Chr.) und Aristoteles (384–322 v. Chr.) stieß diese Art der Wissensvermittlung jedoch auf herbe Kritik. Sie widersetzten sich dem aufklärerischen Geist, von dem die städtische Bevölkerung profitierte. Für die Herausbildung der logischen Wissenschaften jedoch haben die Sophisten und Sokrates (469–399 v. Chr.) große Vorarbeit geleistet. Ihre Verdienste liegen in der Vermittlung der Kunst, logisch zu diskutieren, sowie in ersten Ansätzen über die Lehre vom Begriff, von der Definition und der Induktion.

Abb. 2.1.3 Berühmte Zeugen klassisch-griechischer Architektur auf der Akropolis von Athen: die Propyläen (437–432 v. Chr.)
[Foto Alten]

Zur Zeit Platons, eines Schülers von Sokrates, war die kulturelle Blüte Athens bereits im Niedergang begriffen. Der Peloponnesische Krieg und zahlreiche weitere Kriege hatten die Demokratie in eine Krise versetzt, die Platon durch seine Lehren über Philosophie und Tugend zu meistern versuchte. Um 377 v. Chr. gründete er seine Akademie, die bis 529 n. Chr. Bestand hatte und dann von Kaiser Justinian geschlossen wurde. Sie diente der Lehre und der philosophischen und wissenschaftlichen Forschung.

Für Platons Weltverständnis ist das Wesen des Seienden entscheidend. Die wirkliche Welt besteht für ihn aus Ideen, die vernünftig und wirklich sind. Als höchste Idee gilt ihm die des Guten und Schönen. Die mit den Sinnen wahrnehmbaren Dinge bezeichnet er als unvollständige Abbilder der Ideen. Die Mathematik dient Platon als Mittel zur Erkenntnis der idealen Welt. So ist für ihn eine gezeichnete Gerade nur ein Zerrbild der idealen Geraden; durch ihre Betrachtung jedoch kann die Erinnerung an das Idealbild geschaffen werden. Wie sehr Platon sich zur Mathematik hingezogen fühlte, verrät der ihm zugeschriebene Ausspruch: „Kein der Mathematik Unkundiger trete unter mein Dach“. Zwar hinterließ er selbst keine eigenen mathematischen Werke, jedoch bemühten sich die „Akademiker“ darum, die Lehre der Elemente zu einem wohlgeordneten System der Geometrie zu entwickeln und übten nicht zuletzt dadurch nachhaltigen Einfluss auf das mathematische Geschehen aus. In der Platonischen Schule haben große Mathematiker gewirkt: Archytas von

Abb. 2.1.4 Skulptur aus dem Gymnasium der Giganten in Athen (links); Statue des Aristoteles in Stageira/Griechenland (rechts)
[links: Foto Alten, rechts: Foto Joh. Mars]

Tarent (428?–365? v. Chr.), Theaetet (gest. 369 v. Chr.) – ihm wird die Theorie der Irrationalen zugeschrieben (im zehnten Buch der Elemente Euklids) – und Eudoxos (ca. 408–355 v. Chr.), der die Theorie der Proportionen (fünftes Buch der Elemente) und die der fünf regulären Körper, der Platonischen Körper, aufgestellt hat.

Der griechische Philosoph und Gelehrte Aristoteles gilt als bedeutendster Denker der Antike. Er war ein Schüler Platons und in der Zeit von 367–347 v. Chr. an dessen Akademie tätig, dann Lehrer des jungen Alexander, der als „der Große“ in die Geschichte einging. 335 v. Chr. gründete er in Athen die Philosophenschule „Lykeion“. Für mathematische Grundfragen interessierte sich Aristoteles deshalb, weil er durch sie Zugang zu allgemeinen Gesichtspunkten (logische Schriften) und kennzeichnende Illustrationsbeispiele (philosophische Schriften) hatte. Er gilt als Schöpfer der Wissenschaft der Logik, auf die sich mathematische Schlüsse stützen und die insbesondere die schon von den Eleaten benutzte Anwendung indirekter Beweise ermöglicht. Sie ist uns aus seinem Werk „Organon" bekannt und war bis in das 19. Jh. die wesentliche Grundlage der Mathematik. Hierin liegen die Wurzeln zum logischen Formalismus und die Einführung des noch heute üblichen Aussagekalküls. Er besagt u. a. dass jeder Aussage und jeder zulässigen Verknüpfung solcher Aussagen genau einer von zwei Wahrheitswerten zugeordnet wird: falsch oder wahr, es gibt keine dritte Möglichkeit (tertium non datur). Aristoteles wird der Irrationalitätsbeweis für $\sqrt{2}$ aufgrund des Widerspruchs von gerade und ungerade zugeschrieben.

Als letzter Repräsentant dieser Periode lebte Euklid (360?–290? v. Chr.) Über sein Leben sind kaum gesicherte Daten übermittelt. Er soll jedoch jünger gewesen sein als Eudoxos und älter als Archimedes (ca. 287–212 v. Chr.). Um 300 v. Chr. soll er in Alexandria gelebt und Geometrie gelehrt haben. Euklid gilt als der Begründer der dortigen mathematischen Schule. Das einflussreichste Mathematikbuch aller Zeiten, das die Kriterien der griechischen Mathematik dieser Epoche widerspiegelt, sind die „Elemente" des Euklid. Das Werk ist der älteste größere mathematische Text, der aus der griechischen Antike überliefert wurde. Es zeichnet sich besonders durch das deduktive Vorgehen und die Beweise aus, die auf Definitionen, Axiomen und Postulaten beruhen und mit der Methodologie des Aristoteles geführt werden. Die Bausteine der in 13 Bücher gegliederten „Elemente" sind die „Propositionen", bestehend aus Lehrsätzen mit Beweis und Aufgaben mit anschließender Lösung, vgl. [Scriba/Schreiber 2010, S. 49ff.].

2.1.3 Hellenistische Periode (ca. 300 v. Chr.–ca. 150 n. Chr.)

In der zweiten Hälfte des 4. Jhs. v. Chr. wurde Makedonien unter König Philipp II. zum mächtigsten Staat in Griechenland. Die griechischen Städte verloren ihre Selbständigkeit und mussten sich wieder einem König unterordnen. Mit der Absicherung von Philipps Macht beginnt das Zeitalter des Hellenismus, das aufgrund der Ausbreitung griechischer Lebensweisen und Kultur nach Osten eine Verschmelzung von abend- und morgenländischer Kultur hervorbringt.

Nach der Ermordung Philipps übernahm Alexander III. – den die Geschichte den Großen nennt – die Macht und sicherte sie dadurch ab, dass er mögliche Konkurrenten beseitigen ließ. Unter seiner Herrschaft entstand ein gewaltiges Reich. Die von ihm gegründete Stadt Alexandria in Ägypten entwickelte sich zum kulturellen Mittelpunkt der antiken Welt. Als neu entstandene Stadt ohne Traditionen war sie offen für neue Einflüsse. Griechische, ägyptische und jüdische Bevölkerungsschichten tolerierten einander. Der Handel erfuhr einen neuen Aufschwung, Entdeckungsreisen schufen Verbindungen zu entferntesten Kulturen.

Abb. 2.1.5 Statue des Königs Ptolemaios II. vor der neuen Bibliothek von Alexandria. Die alte Bibliothek wurde im 3. Jh. v. Chr. vom Ptolemaios I. gegründet. Mehrfach durch Brände beschädigt bzw. zerstört, blieb von dem antiken Bauwerk selbst nichts übrig
[Foto Gottwald]

Das Museion, das über eine reichhaltige Bibliothek von ca. 700 000 Schriftrollen verfügte, unterhielt eine Gemeinschaft von Gelehrten, die vom König ein Gehalt erhielten und sich ganz ihren Studien hätten widmen können. Trotzdem gingen viele einem Beruf nach, z. B. als Architekt, Arzt oder Feldmesser.

Dieser Studienort, das Museion, wurde zum Anziehungspunkt für Gelehrte aus der damals bekannten Welt. Dort wurden die Disziplinen Literatur, Mathematik, Astronomie und Medizin als Wissenschaft per se studiert, wobei die Mathematik einen besonderen Stellenwert einnahm. Sie entwickelte sich unabhängig von Philosophie und Religion.

Ermöglicht durch die neu geschaffenen Verbindungen zu anderen Kulturen erhielt die angewandte Mathematik durch die von den Alexandrinern als Wissenschaften akzeptierten Gebiete wie Optik, Mechanik, Landvermessung, Astronomie und Logistik neue Impulse. In dieser aufgeschlossenen Atmosphäre konnten sich über den langen Zeitraum von 600 Jahren hinweg Mathematiker in verschiedenen Disziplinen entfalten. Einige der bedeutendsten werden hier kurz vorgestellt (vgl. [Wußing 1997, S. 71, 73, 74], [Wußing 2008/2013, S. 194-209] und [Scriba/Schreiber 2010, S. 67–73]).

Abb. 2.1.6 Innenansicht der neuen Bibliothek von Alexandria, eröffnet am 16. Oktober 2002
[Foto Gottwald]

Archimedes von Syrakus wurde in Syrakus geboren und war wahrscheinlich der Sohn des Astronomen Phidias. In Alexandria lernte er bei den Nachfolgern Euklids das mathematische und physikalische Wissen und hatte erheblichen Einfluss auf die Mathematik seiner Zeit. Er galt als großer Mathematiker und Physiker, auch als Erfinder. So konstruierte er verschiedene Maschinen, z. B. Wasserpumpen und Kriegsmaschinen. Dem König Hieron II. und dessen Nachfolgern diente er mit seinen Kenntnissen als technischer Berater.

Von Archimedes ist eine nette Anekdote bekannt, die besagt, wie er zur Entdeckung des Auftriebsgesetzes kam. Demnach sollte er für besagten König Hieron feststellen, ob eine gefertigte Krone aus reinem Gold, wie gewünscht, bestand. Es sollten keine anderen Metalle beigemischt sein. Durch Zufall entdeckte Archimedes die Lösung dieses Problems, als er in der Badewanne lag. So bemerkte er, dass jeder Körper im Wasser um so viel leichter wird, wie das Gewicht der verdrängten Wassermenge beträgt. Demnach muss die Gewichtsabnahme der Krone im Wasser der eines gleich schweren Goldklumpens entsprechen. Nur dann ist beider Rauminhalt gleich und die Krone demnach aus reinem Gold. Über diese Erkenntnis war Archimedes derartig erfreut, dass er aus der Wanne sprang und, ohne sich anzukleiden, durch die Straßen lief. Dabei rief er begeistert: „Heureka!“ (Ich habe es gefunden!).

Die Parabelquadratur (Berechnung des Flächeninhalts eines Parabelsegments) führte er mechanisch und geometrisch durch, vgl. den Videofilm „Vom

Abb. 2.1.7 Dieser Holzschnitt, später nachkoloriert, stammt ursprünglich aus der frühen Neuzeit. Diese kolorierte Darstellung trägt die Unterschrift: „ARCHIMEDES erster erfinder scharpffsinniger vergleichung/Wag und Gewicht/durch außfluß des Wassers“
[picture alliance/united archives/wha]

Zählstein zum Computer – Altertum“ [Wesemüller-Kock/Gottwald 1998]. Einige weitere Werke von Archimedes werden später vorgestellt.

Eratosthenes von Kyrene (ca. 276–194 v. Chr.), ein Zeitgenosse des Archimedes, galt als Universalgelehrter und arbeitete in Alexandria auf den Gebieten der Philologie, Grammatik, Mathematik, Literatur, Astronomie und Geometrie. Seit 235 v. Chr. war er der Vorsteher des dortigen Museions. Von Eratosthenes kennen wir u. a. das „Sieb des Eratosthenes“, ein Verfahren zur Aussonderung von Primzahlen, und eine Methode zur Bestimmung des Erdumfanges.

Apollonios von Perge (ca. 260–190 v. Chr.), ein jüngerer Zeitgenosse von Archimedes, wurde in dem Städtchen Perge im Süden Kleinasiens geboren und stand ebenfalls mit dem Museion und Alexandria in Verbindung. Als sein Hauptwerk ist die neuartige, systematische Darlegung der Kegelschnitte, die Conica, bekannt, seit deren Bekanntwerden der Gebrauch der Begriffe „Ellipse, Parabel, Hyperbel“ üblich geworden ist. Deren Entstehung erklärt er als erster ganz klar dadurch, dass man einen Kegel mit einer Ebene schneidet. Die Bezeichnung für den jeweiligen Kegelschnitt kann dabei aus dem bei deren Herleitung verwendeten Typ der Flächenanlegung abgeleitet werden.

2.1.4 Spätantike (ca. 150– ca. 500 n. Chr.)

Diophant (ca. 250– ca. 330 n. Chr.) löste durch sein erstes Werk, die „Arithmetika“, die Arithmetik und die Algebra vollständig von der Geometrie ab. Die Lebensdaten des Diophant sind nicht genau festzulegen. Anhand der Widmung seiner Arithmetika an den „sehr verehrten Dionysios“, vermutlich den von 247–264 wirkenden alexandrinischen Bischof Dionysios den Großen, ist anzunehmen, dass er um 250 n. Chr. gelebt hat. Aufgrund dieser Verbindung könnte er Christ gewesen sein und in Alexandria gelebt haben. Er kannte die babylonische Mathematik und benutzte diese Kenntnis beim Aufbau seiner „Arithmetika“. Sie besteht aus 13 Büchern, von denen 10 erhalten geblieben sind. Die Arithmetika gilt als Hauptwerk der Antike zur Algebra.

Über das Privatleben Diophants erfährt man etwas aus seiner Grabinschrift, die als algebraisches Rätselgedicht geschrieben wurde. Demnach war er verheiratet und hatte einen Sohn. Die Inschrift lautet [Scriba/Schreiber 2010, S. 465]:

> *Hier dies Grabmal deckt Diophant. Schauet das Wunder!*
> *Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.*
> *Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;*
> *Noch ein Zwölftel dazu, sproßt' auf der Wange der Bart;*
> *Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis der Ehe,*
> *Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.*
> *Wehe das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre*
> *Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.*
> *Darauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer*
> *Von sich scheuchend, auch er kam an das irdische Ziel.*

Diophant war der letzte große griechische Mathematiker der Antike. Pappos von Alexandria (um 300 n. Chr.) stellte die Werke der klassischen Autoren zusammen, um sie möglichst vollständig gegen das aufstrebende Christentum zu verteidigen. Die antike Kultur sollte erhalten bleiben. Vom Leiter der Akademie in Alexandria, Proklos Diadochos (410–485), stammt ein umfangreicher Kommentar zu Euklids Elementen. Die Akademie in Athen wurde als eine der letzten mathematischen Schulen auf Befehl des christlichen Kaisers Justinian 529 n. Chr. geschlossen. Er wollte die „heidnische und verderbte Lehre“ nicht weiter dulden.

Der im 2. Jh. in Alexandria tätige Gelehrte Klaudios Ptolemaios (um 100– vor 180) fasste im „Almagest“ die Erkenntnisse seiner Vorgänger bei astronomischen Beobachtungen und die Berechnungen mit Hilfe der Sehnentrigonometrie zusammen vgl. [Scriba/Schreiber 2010, S. 78ff.]. Dieses Werk und sein astrologischer „Tetrabiblos“ fanden großes Interesse bei indischen und arabischen Übersetzern und wirkten auch bei den Gelehrten im mittelalterlichen Europa stark nach. Mit seiner Kegelprojektion leistete Ptolemaios einen frühen Beitrag zur Kartographie.

Abb. 2.1.8 Ptolemaios bei der Beobachtung der Gestirne nach der Abbildung von Gregor Reisch in der Margarita Philosophica 1503 (Ausgabe: Straßburg 1504). Seine Werke zur Astronomie (Almagest) und Geographie gelten bis in die Neuzeit als wissenschaftliche Standardwerke in Europa.

Für die geographische Ortsbestimmung wurden in der Spätantike bereits ausgeklügelte Instrumente entwickelt. Ein interessantes Beispiel ist die zwischen 250 und 350 n. Chr. entstandene Sonnenuhr von Philippi (vgl. Abb. 2.1.9), mit ähnlichen Merkmalen wie das von Hipparch (um 190–um 120 v. Chr.) vorgeschlagene Astrolabium. Sie diente der Bestimmung des Azimuts und der Höhe von Sternen. Insbesondere konnte man mit ihr die geographische Breite des Standortes bestimmen, indem die Höhe der Sonne während ihrer Kulmination zur Tag- und Nachtgleiche gemessen wurde.

Abb. 2.1.9 Sonnenuhr von Philippi. Anhand der Inschriften wird die Sonnenuhr auf die Zeit zwischen 250 und 350 n. Chr. datiert. Sie besteht aus drei Kupferringen und weist Parallelen zu dem bereits in Hipparchos benannten Astrolabium auf [Zeichnung nach Vorlage in „Antike griechische Technologie“, Thessaloniki 2000]

2.2 Das besondere Merkmal der griechischen Algebra

Die Leitlinie für die Geschichte der Algebra in Griechenland von Pythagoras bis Diophant ist die Gleichungstheorie: Lineare Gleichungen und quadratische Gleichungen (Abschnitt 2.3), sodann kubische Gleichungen und biquadratische Gleichungen (Abschnitt 2.4), deren Lösung durch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal allein nicht gelang. Die drei berühmten klassischen Probleme dieser Art, nämlich die Winkeldreiteilung, die Würfelverdopplung und die Quadratur des Kreises wurden zwar erst im 19. Jh. mit den modernen Methoden der Algebra und Analysis gelöst, indem nachgewiesen wurde, dass ihre Lösung äquivalent zur Lösung kubischer bzw. transzendenter Gleichungen ist, deren Lösung nicht als Strecken mit Zirkel und Lineal allein (in endlich vielen Schritten!) konstruiert werden können. Jedoch ersannen bereits die Griechen geometrische Verfahren unter Verwendung anderer Hilfsmittel, welche den Nachweis der Existenz der Lösungen brachten bzw. die Lösungen oder Näherungswerte dafür in Gestalt von Strecken lieferten. Die Griechen entwickelten somit implizit im Altertum geometrische Verfahren zur Behandlung gewisser kubischer (auch biquadratischer) Gleichungen, deren zahlen- bzw. formelmäßige Auflösung erst in der Renaissance gelang (vgl. Kap. 4: N. Tartaglia (1500?–1557), G. Cardano (1501–1576), L. Ferrari (1522–1565)). Deshalb werden die sog. klassischen Probleme wie auch die Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks des Archimedes hier ausführlicher behandelt (vgl. dazu auch Abschnitt 2.2.2 in [Scriba/Schreiber 2010, S. 40–48]).

Die griechische Algebra wurde also durch Geometrie begründet, deshalb spricht man von „geometrischer Algebra“. In jüngerer Zeit ist diese Interpretation stark umstritten, vgl. dazu [Knorr 1975], [Szabo 1969] [Unguru 1975], [Fowler 1987]. Das Buch II der „Elemente“ Euklids enthält eine Reihe von algebraischen Aussagen, ausgedrückt in geometrischer Einkleidung. In geometrischen Formulierungen sind auch die Lehre von den regulären Polygonen und Polyedern und die Lehre von den Kegelschnitten beschrieben, wie sie sich bei den großen Gelehrten der damaligen Zeit, Theaetet (gest. 369 v. Chr.), Archimedes und Apollonios findet. Die Terminologie in der geometrischen Algebra der Griechen ist teilweise eine Fortsetzung der Formulierungen der mesopotamischen Algebra. Die Mesopotamier nannten das Produkt xy „Rechteck“, x^2 „Viereck“. Die Griechen nannten a^2 „das Quadrat über a“ und ab „das von a und b aufgespannte Rechteck“. Ausdrücke wie Multiplizieren und Wurzelziehen verwendeten die Griechen im Gegensatz zu den Mesopotamiern nur für ganze Zahlen und Brüche. Warum haben die Griechen geometrische (d. h. anschauliche) Beziehungen bevorzugt? Zum einen gab es „ästhetische“ Gründe, weil nach ihrer Philosophie Formen (und deshalb Geometrie) eine wichtige Rolle spielten, wie z. B. beim Tempelbau, zum anderen auf Grund praktischer Probleme, wie bei Navigationsberechnungen.

Es sind aber wichtigere Gründe, die die Griechen veranlassten, algebraische Probleme mit geometrischen Methoden zu behandeln, nämlich die Entdeckung der irrationalen Zahlen durch die Pythagoreer (nach Pappos). Seit dem 5. Jh. v. Chr. war bekannt, dass es Streckenverhältnisse wie das der Diagonale eines Quadrates zu dessen Seite gibt, die sich nicht durch das Verhältnis $p : q$ natürlicher Zahlen p und q ausdrücken lassen. Solche Strecken nannte man inkommensurabel, d. h. nicht mit dem gleichen Maß messbar. Theaetet und insbesondere Eudoxos gelang es, einen Kalkül mit Größen-Verhältnissen zu entwickeln, der unserem Rechnen mit reellen Zahlen gleichwertig ist, obwohl diese Größen-Verhältnisse nicht als Zahlen betrachtet wurden. Das Verhältnis zweier inkommensurabler Strecken kann nicht durch (natürliche) Zahlen dargestellt werden. Mangels eines noch nicht genügend weit entwickelten Zahlbegriffs und einer uns heute geläufigen Formelsprache konnten die Griechen der klassischen Zeit algebraische Probleme nur in der Sprache der von ihnen weit entwickelten Geometrie formulieren und lösen. Der Nachteil dieser „geometrischen Algebra“ ist die Beschreibung der Gleichungen (vor allem größer als 3. Grades) und der zu ihrer Lösung gefundenen Verfahren mittels der umständlichen Proportionenlehre. Vergleiche hierzu auch die Argumentation von Fowler, dass die Entdeckung inkommensurabler Größen oft als bedeutender dargestellt wird, als dies von den Griechen selbst wahr genommen wurde und die Griechen bereits vor Euklid in der Lage waren, mit diesen Größen umzugehen und Proportionen im euklidischen Sinne zu verstehen [Fowler 1987].

Erst gegen Ende der hellenistischen Periode finden sich erste Ansätze einer algebraischen Symbolik in Diophant's „Arithmetik", vermutlich fußend auf den lange zuvor in Mesopotamien entwickelten Elementen formalen algebraischen Denkens.

Im Gegensatz zur vorgriechischen Mathematik werden die Zahlzeichen der Griechen erst am Ende dieses Kapitels gebracht, da die Mathematiker bis zum Ende der Zeit des Euklid im wesentlichen keine Zahlzeichen in den formalen mathematischen Texten gebrauchten.

2.3 Lineare und quadratische Gleichungen

Die Altpythagoreer hatten die Methode der Flächenanlegung in der Geometrie entwickelt, und Euklid hat diese Methode in den Elementen (hauptsächlich im Buch VI) systematisch diskutiert. Mit dieser Methode kann man (algebraisch gesehen) gewisse lineare und quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten (geometrisch) lösen. Sie wird daher im Abschnitt 2.3.2 allgemein beschrieben, bevor in den Abschnitten 2.3.3 und 2.3.4 die linearen bzw. die rein quadratischen Gleichungen der Form $ax = c$ und $x^2 = b$ nach der Lösungsmethode Euklids behandelt werden.

Die quadratischen Gleichungen der Gestalt $ax^2 + c = bx$; $(a, b, c > 0,$ $b^2 - 4ac \geq 0)$ und $ax^2 = bx + c$ $(a, b, c > 0)$ sollen anschließend ebenfalls nach der Methode Euklids mit Hilfe der Flächenanlegung gelöst werden.

2.3.1 Die „Elemente" des Euklid

In den „Elementen" fasste Euklid große Teile des mathematischen Wissens seiner Zeit zusammen. Wesentliche Teile dieses Werkes werden auch heute noch in unseren Schulen gelehrt. Es besteht aus 13 Büchern, in denen Definitionen, Axiome (das sind nach Euklid die Behauptungen, die jeder Vernünftige ohne Beweis akzeptiert) und Postulate (geometrische Behauptungen ohne Beweis) als Grundlagen seiner Propositionen – das sind Lehrsätze mit Beweisen oder Aufgaben mit Lösungen – formuliert sind. Heute verwenden wir Axiome und Postulate als synonyme Begriffe (d. h. Behauptungen, die wir als Grundlage einer mathematischen Disziplin ohne Beweis akzeptieren, die natürlich unbedingt widerspruchsfrei und möglichst auch unabhängig sein müssen). Damit baut Euklid das eigentliche Lehrgebäude auf, wie es uns in abgewandelter, moderner Form auch heute noch als Kern einer deduktiv ausgerichteten mathematischen Theorie dient.

Abb. 2.3.1 Euklid in der rechten Archivolte des Königsportals der Kathedrale von Chartres (Frankreich). Neben Euklid sind auch Archimedes und andere griechische Gelehrte an dieser ab 1260 entstandenen frühgotischen Kathedrale dargestellt.
[Szene aus dem Videofilm „Vom Zählstein zum Computer – Mittelalter“, Wesemüller-Kock 2004]

Die Bücher beinhalten folgende Themen:

I Grundlagen (axiomatischer Aufbau)
II Geometrische Algebra
III Kreislehre
IV Reguläre Polygone
V Proportionenlehre des Eudoxos
VI Anwendung der Proportionenlehre auf ebene Geometrie
VII - IX Arithmetik
X Irrationalitäten (Theorie der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Größen)
XI – XIII Stereometrie

Eine detaillierte Beschreibung des allgemeinen Inhalts der „Elemente“ ist in dem Werk „5000 Jahre Geometrie“ [Scriba/Schreiber 2010, S. 49–61] zu finden.

Die Beiträge der „Elemente“ zur Algebra sind geometrische Lösungen der linearen Gleichungen und einiger Gattungen der quadratischen Gleichungen, die im wesentlichen aus den Büchern I, II, IV, V und VI stammen.

Das Merkmal der klassischen griechischen Mathematik (450–300 v. Chr.), jede algebraische Aussage geometrisch zu behandeln, findet sich bereits in der Formulierung des Distributivgesetzes $(a+b)a = ab + a^2$ und dessen Beweis nach Euklid in Buch II, Prop. 3[1]:

> *„Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke und einem der Abschnitte dem Rechteck aus den Abschnitten und dem Quadrat über vorgenanntem Abschnitt zusammen gleich.*[2]
>
> *Man teile die Strecke AB beliebig, in C. Ich behaupte, dass* $AB \cdot BC = AC \cdot CB + BC^2$.

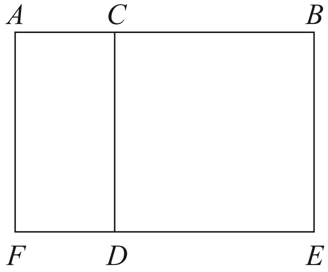


Abb. 2.3.2 Figur zum Distributivgesetz

> *Man zeichne nämlich über CB das Quadrat CDEB, verlängere ED nach F und ziehe durch A* $AF||CD$ *oder BE. Hier ist Pgm.*[3] $AE = AD + CE$. *AE ist nun* $AB \cdot BC$*; denn es wird von AB, BE umfasst, und* $BE = BC$. *Und AD ist* $AC \cdot CB$*; denn* $DC = CB$. *Und DB ist* CB^2. *Also ist* $AB \cdot BC = AC \cdot CB + BC^2$.“

Wie man aus dem Satz und dem Beweis sieht, unterschied man nicht wie heute zwischen einer Strecke und ihrer Länge (ausgedrückt durch Maßzahl und Einheit), zwischen einer Fläche und ihrem Inhalt, zwischen einem Körper und seinem Volumen. Vielmehr wurden Strecken mit ihrer Länge, Flächenstücke mit ihrem Inhalt, Körper mit ihrem Volumen identifiziert bzw. Zahlen durch Streckenlängen, Flächeninhalte oder Volumina dargestellt und deshalb nur positive Zahlen verwendet – ein Grund dafür, dass auch die Gleichung $ax = c$

[1] In diesem Kapitel benutzen wir die deutsche Übersetzung und Kommentierung der „Elemente“ aus dem Griechischen von Thaer [Euklid 1933].

[2] Im folgenden bezeichnet BC^2 das Quadrat über BC.

[3] Pgm. AE ist das Parallelogramm mit den Eckpunkten $AFEB$. Der Name Parallelogramm, wörtlich parallelliniges Flächenstück, wird bei Euklid ohne Definition benutzt. Auch AD und CE sind Parallelogramme (im Satz und in der Figur Rechtecke).

und nicht $ax + c = 0$ bzw. Gleichungen der Gestalt $ax^2 + c = bx$ aber nicht $ax^2 + bx + c = 0$ behandelt wurden. Die geometrische Algebra ist auch der Grund für die bis in die Neuzeit erhobene Forderung der „Homogenität“ bzw. „Dimensionstreue“ algebraischer Gleichungen, so dass also z. B. in $ax^2+c=bx$ folgendes gelten muss: repräsentiert x eine Länge, ebenso b, so müssen x^2 und c Flächeninhalte darstellen, jedoch muss a dimensionslos sein, etwa das Verhältnis zweier Längen bedeuten. Die Griechen konnten auch irrationale Zahlen repräsentieren, z. B. $\sqrt{2}$ als Länge der Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge 1, aber der Begriff der allgemeinen Quadratwurzel stand ihnen nicht zur Verfügung, da ihnen der Limesbegriff fehlte. Mangels geeigneter Präzisierung des Irrationalen nannten sie Strecken wie Seiten und Diagonale eines Quadrates inkommensurabel, d. h. nicht mit dem gleichen Maß messbar. Dennoch hätte Euklid beispielsweise $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ mit Hilfe von Strecken „berechnen“, d. h. wie in Abbildung 2.3.3 darstellen können.

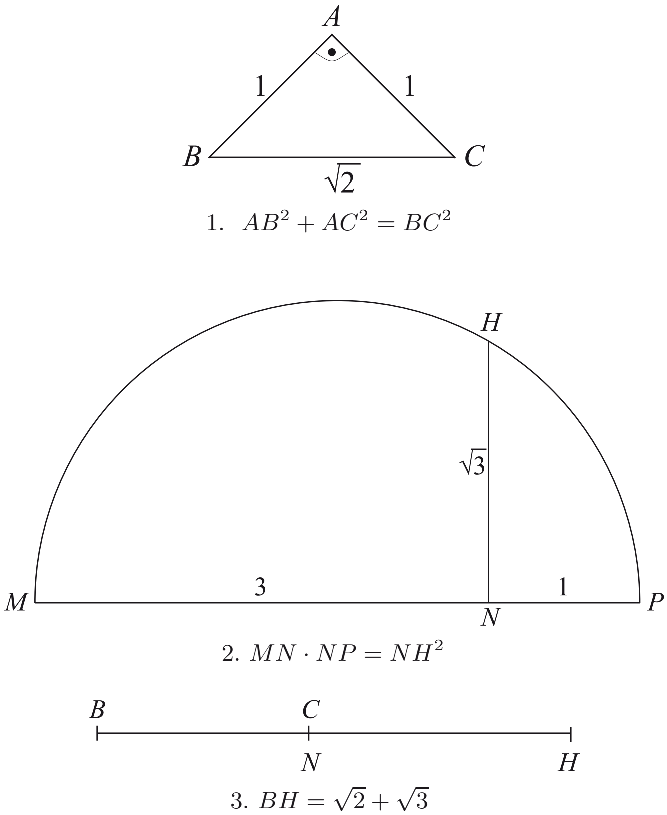


Abb. 2.3.3 Darstellung von $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ und $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ als Strecken

In den „Elementen“ des Euklid begegnet man zum ersten Mal strengen Beweisen und Formulierungen auf der Basis von Definitionen und Axiomen. Hier liegt einer der entscheidenden Unterschiede zwischen der klassischen griechischen Mathematik und ihren Vorgängern: die Strenge der Beweise.

In der vorgriechischen Mathematik stand die Anwendbarkeit und die Nützlichkeit der Mathematik im Vordergrund, in der klassischen griechischen Mathematik und Philosophie die Suche nach dem Verständnis der Wahrheit durch strenge Beweise.

Ohne die grundlegende und prägende, über zwei Jahrtausende andauernde Wirkung der „Elemente“ auf die Entwicklung der Mathematik in Abrede zu stellen, haben neuere Untersuchungen gezeigt, dass die Herausbildung des mathematischen Beweises kein spezifisches Merkmal der antiken griechischen Mathematik ist, sondern in unterschiedlichen Formen auch in anderen Kulturen (Mesopotamien, China, Indien) auftritt [Chemla 2012].

2.3.2 Die Methode der Flächenanlegung

Die in der Zeit der Pythagoreer entwickelte Methode der Flächenanlegung dient insbesondere der Verwandlung eines Polygons in ein flächengleiches Parallelogramm bzw. Rechteck, indem man das Polygon in Dreiecke zerlegt, jedes in ein flächengleiches Parallelogramm verwandelt und diese zusammenfasst.

Die drei Fälle der einfachen, der elliptischen und der hyperbolischen Flächenanlegung werden am Beispiel der Anlegung eines Parallelogramms an die Strecke AB beschrieben.

Sei AB eine gegebene Strecke, G eine gegebene geradlinig begrenzte Figur mit dem Flächeninhalt σ.

(I) Im Fall von Abb. 2.3.4 sagt man: Wir haben das Parallelogramm $ABCD$ mit Flächeninhalt σ an die Strecke AB angelegt[4].

(II) Im Fall von Abb. 2.3.5 sagt man: Wir haben das Parallelogramm AB_1C_1D mit Flächeninhalt σ an die Strecke AB (defizient = elliptisch[5]) so angelegt, dass das Parallelogramm B_1BCC_1 fehlt. Ist μ der Flächeninhalt des Parallelogramms BB_1C_1C, so sagt man entsprechend, dass wir das Parallelogramm BB_1C_1C mit Flächeninhalt μ an die Strecke AB (defizient) so angelegt haben, dass das Parallelogramm B_1ADC_1 fehlt.

[4] Das griechische Wort für anlegen ist $\pi\alpha\rho\alpha\beta\grave{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$ (paraballein); daher stammt das Wort Parabel.

[5] elliptisch: $\acute{\epsilon}\lambda\lambda\epsilon\grave{\iota}\pi\epsilon\iota\nu$ (elleipein), d. h. fehlen.

(III) Im Fall von Abb. 2.3.6 sagt man: Wir haben das Parallelogramm AB_1C_1D mit Flächeninhalt σ an die Strecke AB (hyperbolisch[6]= überschießend) so angelegt, dass das Parallelogramm BB_1C_1C überschießt.

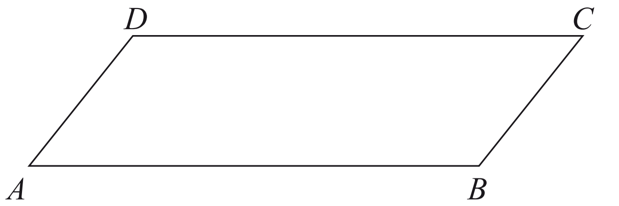


Abb. 2.3.4 Einfache Flächenanlegung

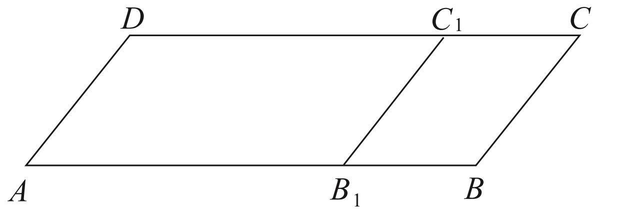


Abb. 2.3.5 Elliptische Flächenanlegung

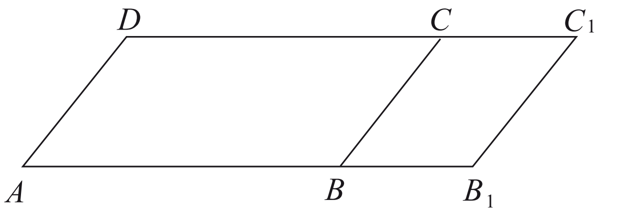


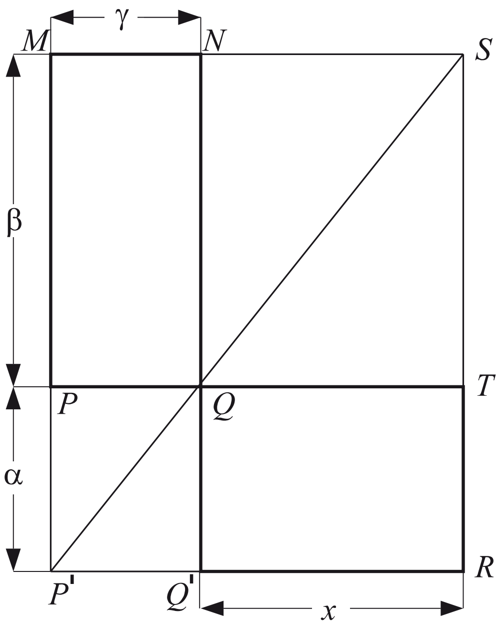
Abb. 2.3.6 Hyperbolische Flächenanlegung

[6] hyperbolisch: $\dot{\upsilon}\pi\epsilon\rho\beta\grave{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$ (hyperballein), d. h. überschießen.

2.3.3 Lineare Gleichungen

Zur Lösung der Gleichung $ax = b$ nach der geometrischen Methode Euklids muss man die Symbole a, x und b zunächst geometrisch interpretieren. Deutet man a und x als Streckenlängen, so muss b wegen der Homogenität (Dimensionstreue) einen Flächeninhalt darstellen, etwa den eines Rechtecks mit den Seitenlängen β und γ. Man betrachtet daher $\alpha x = \beta\gamma$ anstelle von $ax = b$. Geometrisch lautet dann die Aufgabe:
„Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen β und γ. Konstruiere ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite die Länge α hat".
Das gelingt mit Hilfe der Konstruktion von Prop. 44 aus Buch I der Elemente, die in deutscher Übersetzung lautet:

> „An eine gegebene Strecke ein einem gegebenen Parallelogramm gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel anzulegen."

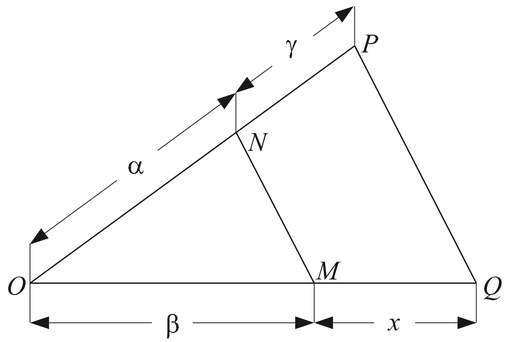


$$\beta \cdot \gamma = x \cdot \alpha$$

Abb. 2.3.7 Lösung von $\alpha x = \beta\gamma$ mit Ergänzungsparallelogrammen

In Buch VI, Prop. 12, gibt es eine andere geometrische Methode für die Lösung der Gleichung $\alpha x = \beta\gamma$:
Hier konstruiert Euklid die Strecke x mit Hilfe ähnlicher Dreiecke bzw. nach dem Strahlensatz als „vierte Proportionale" so, dass gilt:

$$\alpha : \gamma = \beta : x$$



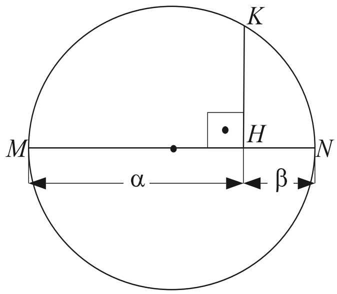
Die Gerade MN ist parallel zur Geraden PQ.

Abb. 2.3.8 Lösung der Gleichung $\alpha x = \beta\gamma$ mit dem Strahlensatz

2.3.4 Rein quadratische Gleichungen

In Buch VI, Prop. 13 formuliert Euklid die Aufgabe *„Zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu finden.“*, d. h. für zwei Strecken α und β muss x so konstruiert werden, dass $\alpha : x = x : \beta$ gilt (x heißt dann die „mittlere Proportionale“ zu α und β). Die Griechen verwendeten keine Bruchschreibweise, sondern nur Proportionen. Euklid konstruiert x (löst also die Gleichung $x^2 = \alpha\beta$) mit Hilfe des Höhensatzes (s. Abb. 2.3.9): α und β werden als Abschnitte der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks der Höhe KH gewählt; also gilt $\alpha\beta = KH^2$ deshalb $x = KH$.

Eine andere geometrische Lösungsmethode der rein quadratischen Gleichung $x^2 = \alpha\beta$ liefert Prop. 14 aus Buch VI: „In gleichen winkelgleichen Parallelogrammen sind die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional. Und winkelgleiche Parallelogramme, in denen die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional sind, sind gleich“. Man konstruiert also ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $\alpha\beta$, dessen Seite das gesuchte x ist.



Kreis mit Radius $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und Durchmesser MN

Abb. 2.3.9 Lösung der Gleichung $x^2 = \alpha\beta$ mit dem Höhensatz

2.3.5 Ein Diorismos

Schon in 2.3.1 wurde begründet, weshalb in der geometrischen Algebra der Griechen die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ nicht behandelt wurde: Die einzelnen Terme waren ihrer geometrischen Interpretation entsprechend positiv. Man musste daher die Typen (1) $ax^2 + bx = c$, (2) $ax^2 = bx + c$ und (3) $ax^2 + c = bx$ unterscheiden, wie dies auch der persische Gelehrte al-Ḫwārizmī (al-Chorezmi) (780?–850?) noch 1000 Jahre später getan hat. Auch kannten die Griechen nicht den Begriff der Null.

Bei den Typen (1) und (2) gibt es stets eine positive reelle Lösung (und eine damals nicht bekannte negative Lösung). Bei Typ (3) kann es jedoch mehrere Fälle geben: zwei verschiedene positive Lösungen, genau eine positive Lösung oder gar keine reellen (sondern zwei konjugiert komplexe) Lösungen. Der letztgenannte Fall war aus damaliger Sicht unmöglich, und man war daher bestrebt, ihn von vornherein auszuschließen, indem man Bedingungen für die Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer Lösung suchte, einen sog. Diorismos.

Einen solchen Diorismos für die Möglichkeit einer Lösung der Gleichung $ax^2 + c = bx$ liefert Euklid in Buch VI, Prop. 28, nämlich die Bedingung (modern formuliert) $b^2 - 4ac \geq 0$. Der Beweis fußt auf Prop. 27 aus Buch VI:

„Von allen Parallelogrammen, die man an eine feste Strecke so anlegen kann, dass ein Parallelogramm fehlt, welches einem über ihrer Hälfte gezeichneten ähnlich ist und ähnlich liegt, ist das über der Hälfte angelegte, das selbst dem fehlenden ähnlich ist, das größte.“

Zum Verständnis dieses Satzes muss man sich zunächst verdeutlichen, was mit „Anlegung eines Flächenstückes an eine feste Strecke“ und den dabei auftretenden Fällen gemeint ist (s. Abschnitt 2.3.2).

Der Satz lautet in moderner Formulierung:
Sei $ABNM$ (Abb. 2.3.10 und 2.3.11) ein Parallelogramm; C bzw. D Mittelpunkt der Strecke AB bzw. MN; D_0 der Schnittpunkt der Geraden durch B und D und der Geraden durch A und M; D' ein beliebiger Punkt der Strecke D_0B [7]. Dann gilt:

Der Flächeninhalt des Parallelogramms $AC'D'M'$ ist höchstens gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms $ACDM$.

Bezeichnen wir den Flächeninhalt des Parallelogramms $UVV'U'$ durch $\mu\,(UVV'U')$, so erhält die letzte Aussage die Gestalt

$$\mu\,(AC'D'M') \;\leq \mu\,(ACDM)\ . \tag{2.3.1}$$

[7] Abb. 2.3.10 zeigt den Fall, in dem D' auf der Strecke DB liegt; Abb. 2.3.11 zeigt den Fall, in dem D' auf der Strecke DD_0 liegt. „Der Punkt X liegt auf der Strecke UV“, bedeutet, dass X zwischen U und V liegt, oder U oder V ist.

Algebraische Interpretation von Buch VI, Prop. 27

Mit Hilfe der Abb. 2.3.10 und 2.3.11 lässt sich der geometrische Sachverhalt der Proposition wie folgt algebraisch in heutiger Schreibweise interpretieren (umstritten ist jedoch, ob dies schon die Griechen algebraisch interpretierten):

$$\mu\ (AC'D'M')\ = AC' \cdot C'D' \sin\alpha \tag{2.3.2}$$

$$\mu\ (ACDM)\ = \frac{1}{2} AB \cdot CD \sin\alpha \tag{2.3.3}$$

$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{BC'}{BC} = \frac{AB - AC'}{\frac{AB}{2}} = 2 - 2\frac{AC'}{AB} \quad . \tag{2.3.4}$$

Deshalb folgt (aus (2.3.2) und (2.3.4)) :

$$\begin{aligned} \mu\ (AC'D'M')\ &= AC' \cdot CD \left\{2 - 2\tfrac{AC'}{AB}\right\} \sin\alpha \\ &= 2CD \cdot AC' \sin\alpha - 2\tfrac{CD}{AB}\ (AC')^{\ 2} \sin\alpha \quad . \end{aligned}$$

Mit $\sigma = \mu\ (AC'D'M')$ und $AC' = x$ erhält man daraus die quadratische Gleichung

$$x^2 \frac{2CD}{AB} \sin\alpha - x \cdot 2CD \sin\alpha + \sigma = 0. \tag{2.3.5}$$

Die Wurzeln der Gleichung (2.3.5) sind $\frac{AB}{2CD\sin\alpha} \left\{CD\sin\alpha \pm \sqrt{\Delta}\right\}$, wobei $\Delta = CD^2 \sin^2\alpha - 2\frac{CD}{AB}\sigma \sin\alpha$ und $+$ im Fall der Abb. 2.3.10, $-$ im Fall der Abb. 2.3.11 gilt.

Wegen (2.3.1) und (2.3.3) gilt nun

$$\sigma = \mu(AC'D'M') \leq \mu(ACDM) = \frac{1}{2} AB \cdot CD \sin\alpha$$

und deshalb auch

$$\sigma \cdot 2\frac{CD}{AB} \sin\alpha \leq CD^2 \sin^2\alpha \Leftrightarrow \Delta \geq 0,$$

d. h. die Aussage (2.3.1) ist äquivalent zur Aussage

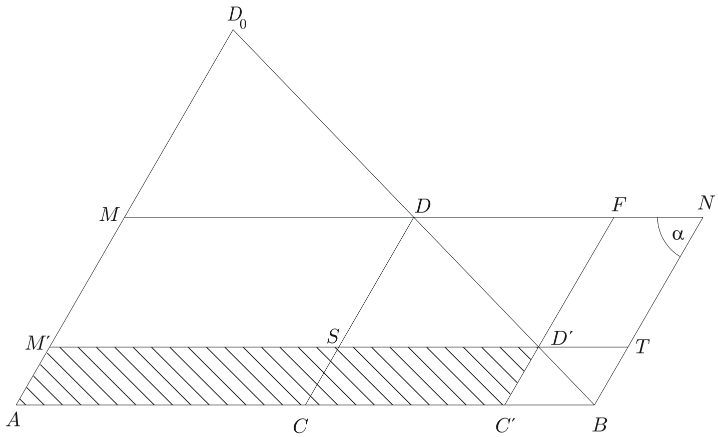
„Die quadratische Gleichung (2.3.5) hat reelle Wurzeln". (2.3.6)

Durch diese Äquivalenz der geometrischen Aussage (2.3.1) und der algebraischen Aussage (2.3.6) wird der Zusammenhang zwischen Geometrie und Algebra für den Fall quadratischer Gleichungen der Gestalt $ax^2 + c = bx$ mit

$a, b, c > 0$ hergestellt und es wird klar, weshalb anstelle dieser Gleichung zur geometrischen Lösung in 2.3.6 die Gestalt (2.3.5) verwendet wird.

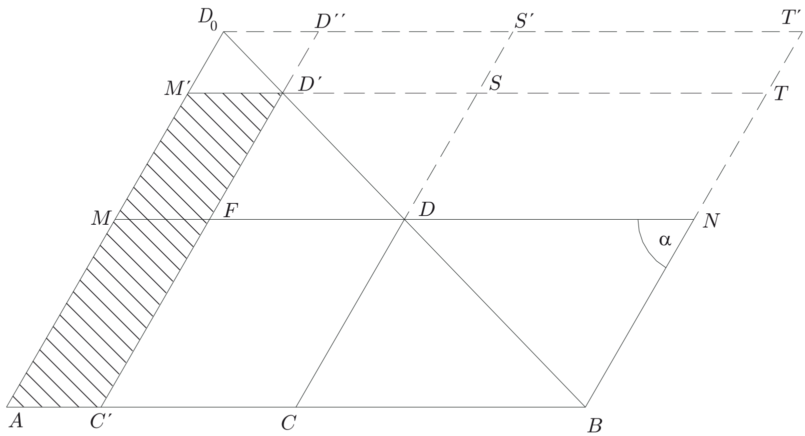
Es ist klar, dass gilt:

„Mit den Bezeichnungen aus Abb. 2.3.10 sei $0 < \sigma \leq \frac{1}{2} AB \cdot CD \sin \alpha$. Dann ist die Bestimmung aller Wurzeln der Gleichung (2.3.5) äquivalent zur Bestimmung aller Parallelogramme $AC'D'M'$ mit $\mu(AC'D'M') = \sigma$.“



$AC = CB$, $MD = DN$, $0 < \alpha < \pi$

Abb. 2.3.10 Figur 1 zu Prop. 27 aus Buch VI



$AC = CB$, $MD = DN, 0 < \alpha < \pi$

Abb. 2.3.11 Figur 2 zu Prop. 27 aus Buch VI

2.3.6 Lösung quadratischer Gleichungen nach Euklid

Aufgrund der Interpretation von Buch VI, Prop. 27 in 2.3.5 betrachten wir an Stelle der Gleichung $ax^2 + c = bx$ die Gleichung

$$x^2 \cdot \frac{2CD}{AB} \sin\alpha - x \cdot 2CD \sin\alpha + \sigma = 0 \tag{2.3.7}$$

mit der Bedingung

$$0 < \sigma \leq \frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \sin\alpha \quad . \tag{2.3.8}$$

Unter dieser Bedingung lässt sich Gleichung (2.3.7) im Wesentlichen geometrisch lösen. In der folgenden Prop. 28 des gleichen Buches gibt Euklid die konkrete geometrische Lösung der Gleichung:

„An eine gegebene Strecke ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm so anzulegen, dass ein einem gegebenen ähnliches Parallelogramm fehlt; hierbei darf die gegebene geradlinige Figur nicht größer sein als das dem fehlenden ähnliche über der Hälfte der Strecke zu zeichnende Parallelogramm.“

Seien AB und CD beliebig gegebene Strecken und σ der Flächeninhalt einer gegebenen „geradlinigen Figur“ (d. h. eines Polygons). Mit den Strecken AB, CD und einem Winkel der Größe α konstruieren wir die Parallelogramme $ABNM$ wie in den Abbildungen 2.3.10 und 2.3.11 und betrachten die Punkte C, D, D_0 wie in den erwähnten Abbildungen; nun konstruieren wir den Punkt D' auf der Strecke BD bzw. DD_0 und damit die Parallelogramme $SD'FD$ und $AC'D'M'$, so dass gilt:

$$\mu(SD'FD) = \frac{1}{2} AB \cdot CD \sin\alpha - \sigma. \tag{2.3.9}$$

Dann gilt:

(E1) Die Lösungen der Gleichung (2.3.7) mit der Bedingung (2.3.8) sind die zwei Strecken:

$$\begin{array}{cc} AC + CC', & AC - CC' \\ \text{(Abb.2.3.10)} & \text{(Abb. 2.3.11)} \end{array}$$

(E2) $\mu(AC'D'M') = \sigma$.

Die Lösungen aus (E1) sind die beiden Strecken AC' aus Abb. 2.3.10 und 2.3.11. Euklid betrachtet als Lösung der Aufgabe aus Prop. 28, Buch VI nur die Strecke $AC' = AC + CC'$ aus Abb. 2.3.10. Wie später gezeigt wird, haben die Strecken CC' in Abb. 2.3.10 und Abb. 2.3.11 gleiche Länge.

Anzumerken bleibt, dass der Fall $D = D'$ auftreten kann. In diesem Fall ist $C = C', F = D$, $\mu(SD'FD) = 0$ und $\sigma = \frac{1}{2} AB \cdot CD \sin\alpha$, d. h. die beiden Lösungen aus (E1) fallen zusammen.

Damit ist gezeigt, dass mit den Methoden der Elemente jede quadratische Gleichung der Form $ax^2 + c = bx \quad \big(a, b, c > 0, b^2 - 4ac \geq 0\big)$ geometrisch zu lösen ist.

(E1) und (E2) sind in den Aufgaben 2.3.3 und 2.3.4 zu beweisen.

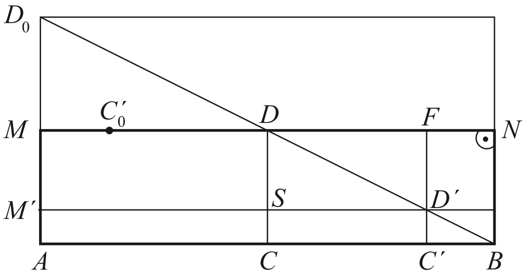
Ähnlich wie hier wird mit Hilfe von Buch VI, Prop. 29 die Gleichung $ax^2 = bx + c$ für $a, b, c > 0$ geometrisch gelöst.

Ein Beispiel

Benutzen Sie die geometrische Methode aus 2.3.5 und finden Sie die Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \quad . \tag{2.3.10}$$

Mit $CD = \frac{1}{2}, \alpha = 90°, AB = 2, \sigma = \frac{1}{4}$ erhalten wir diese Gleichung.



$ABNM$ ist ein Rechteck,
$AC = CB = MD = DN = 1$,
$AM = CD = \frac{1}{2}$

Abb. 2.3.12 Konstruktion zur Lösung von $ax^2 + c = bx$

Die Bedingung $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}AB \cdot CD \sin\alpha$ ist auch erfüllt. Jetzt konstruieren wir das Rechteck $ABNM$ wie in Abb. 2.3.12. Nun bestimmen wir den Punkt D' auf der Strecke BD, so dass gilt:

$$s = \mu(SD'FD) = \tfrac{1}{2}AB \cdot CD \cdot \sin\alpha - \sigma = \tfrac{1}{4}.$$

Dafür genügt es, DF und damit F auf der Strecke DN zu bestimmen. Nun gilt $DF : DS = CB : CD$ und $s = DF \cdot DS$. Daher gilt $DF^2 = \frac{CB}{CD} \cdot s = \frac{1}{2}$, und $DF = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ lässt sich dann geometrisch nach dem Höhensatz (als Höhe des rechtwinkligen Dreiecks mit den Hypotenusenabschnitten 1 und $\frac{1}{2}$) konstruieren. Die durch F gehende Parallele zur Geraden durch B und N schneidet die Diagonale BD_0 in D' und die Strecke AB in C'.

$AC' = AC + CC' = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist eine Wurzel der Gleichung (2.3.10). Sei $C_0^{'}$ auf der Strecke DM mit $DC_0^{'} = CC'$, dann ist die andere Wurzel der Gleichung (2.3.10) nach 2.3.6 gleich $MC_0^{'}$, also $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Bemerkung: Bei der Lösung der Gleichung $ax^2 + c = bx$ handelte es sich um eine defiziente (elliptische) Flächenanlegung (in Abb. 2.3.10 und 2.3.11 haben wir an die Strecke AB das Parallelogramm $AC'D'M'$ mit dem Flächeninhalt σ so angelegt, dass das Parallelogramm $C'BTD'$ fehlt).

2.4 Kubische und biquadratische Gleichungen

Wir machen jetzt einen Sprung von der griechischen Mathematik des vierten Jhs. v. Chr. zu der des dritten Jhs. v. Chr. und ihrem hervorragenden Vertreter Archimedes. Der um 287 v. Chr. geborene Archimedes wurde gleichermaßen als Mathematiker und Physiker und durch seine technischen Konstruktionen als Ingenieur berühmt. Bei der Eroberung von Syrakus durch die Römer im Jahre 212 v. Chr. wurde er von den Soldaten erschlagen, während er geometrische Figuren im Sand zeichnete – so die Legende. Er beschäftigte sich insbesondere auch mit der Berechnung der Rauminhalte und Oberflächen von Körpern und stieß dabei auf kubische und biquadratische Gleichungen.

Wie Euklid besaß auch Archimedes nicht die analytische Technik für die praktische Berechnung, aber auch er konnte durch die Identifizierung der Zahlen mit Strecken in einer erstaunlichen Weise Sätze beweisen, die bereits den Kern der Infinitesimalrechnung enthalten.

2.4.1 Kubische Gleichungen in „Kugel und Zylinder“ von Archimedes

Archimedes hat in seiner Schrift „Kugel und Zylinder“ [Archimedes 1922] die Lösung des folgenden Problems P auf die Lösung einer kubischen Gleichung der Form $x^2\ (\alpha - x) = \beta$ mit $\alpha, \beta > 0$ reduziert.

Für die Lösung der Gleichung gibt Archimedes die Anzahl der Wurzeln der Gleichung im Intervall $[0, \alpha]$ durch die Benutzung von Kegelschnitten an und bestimmt diese Wurzeln mittels der Schnittpunkte einer Hyperbel mit einer Parabel.

Problem *P*: Eine gegebene Vollkugel ist durch eine Ebene so zu schneiden, dass die Volumina $V_1, V_2 (V_1 > V_2)$ der zwei Kugelsegmente ein gegebenes Verhältnis zueinander haben.

Sei $\frac{V_1}{V_2} = \frac{k}{l}$ mit $k > l > 0$, dann haben wir $\frac{V_1}{V_1+V_2} = \frac{k}{k+l}$, aber $V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$, wobei r der Radius der Kugel ist. Deshalb erhält man:

$$\frac{V_1}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{k}{k+l}.$$

Archimedes hat in seinem o.g. Werk „Kugel und Zylinder“ [Archimedes 1922], in Satz 2 im Wesentlichen die folgende Aussage bewiesen:

$\boldsymbol{P_0}$: Das Volumen eines Kugelsegmentes der Höhe h mit dem Kugelradius r ist gleich $\frac{\pi h^2}{3}\ (3r-h)$, (s. Abb. 2.4.1).

Heute leiten wir diese Formel schnell durch Integralrechnung her.

Archimedes hat angekündigt, die Lösung des Problems P anzugeben, also Aussagen über die Lösungen der Gleichung

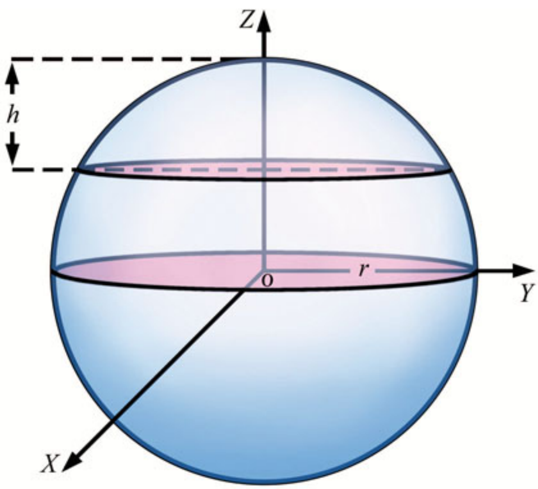
$$x^2 \cdot\ (\alpha - x)\ = \beta \tag{2.4.1}$$

zu machen. Der geometrischen Interpretation der Griechen und der damit verbundenen Forderung der Homogenität (Dimensionstreue) von Gleichungen entsprechend muss bei Deutung von x als Strecke $0 < x < \alpha$ gelten und β die Gestalt b^2c mit $b, c > 0$ haben.

Archimedes hat zwar angekündigt, die Lösung des Problems P am Schluss seiner Schriften zu geben, aber die versprochene Lösung fehlt. Eutokios (geb. ca. 480 n. Chr.) hat später eine Schrift, höchstwahrscheinlich die von Archimedes selbst, gefunden, die die versprochene Lösung im Spezialfall enthält. Die Aussagen in dieser Schrift lassen sich mit moderner Kurvendiskussion leicht gewinnen.

Sei $y = f(x) = x^2\ (\alpha - x)$, dann ist $f'(x) = 2x\alpha - 3x^2 = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \vee x = \frac{2\alpha}{3})$. Da $f'(x)$ zwischen 0 und $\frac{2\alpha}{3}$ positiv, zwischen $\frac{2\alpha}{3}$ und α negativ ist, hat die Kurve im Intervall $[0, \alpha]$ den in Abb. 2.4.2 skizzierten Verlauf.

Daraus ist ersichtlich:



O: Mittelpunkt der Kugel, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ Gleichung der Kugeloberfläche im kartesischen Koordinatensystem x, y, z.

Abb. 2.4.1 Figur zu Problem P (die Sichtachse des Betrachters liegt parallel zum „Nordpol“ der Kugel)

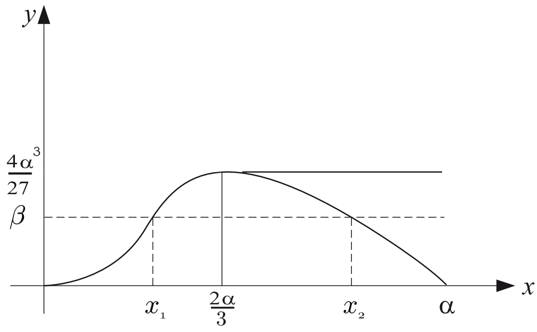


Abb. 2.4.2 Graph von $y = x^2(\alpha - x)$

1. $\beta = \frac{4\alpha^3}{27} \Rightarrow$ die Gleichung (2.4.1) hat nur eine Doppel-Wurzel im Intervall $(0, \alpha)$ und diese ist $\frac{2\alpha}{3}$.
2. $\beta > \frac{4\alpha^3}{27} \Rightarrow$ die Gleichung (2.4.1) hat keine Wurzel im Intervall $(0, \alpha)$.
3. $0 < \beta < \frac{4\alpha^3}{27} \Rightarrow$ die Gleichung (2.4.1) hat genau zwei verschiedene Wurzeln x_1, x_2 im Intervall $(0, \alpha)$ mit $0 < x_1 < \frac{2\alpha}{3} < x_2 < \alpha$.

Archimedes hingegen löst das Problem geometrisch durch die Bestimmung der Schnittpunkte bzw. des Berührungspunktes einer Hyperbel und einer Parabel wie folgt (modern formuliert):

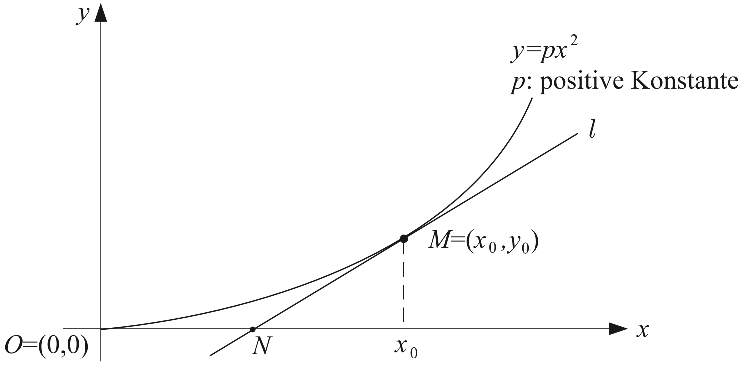
Wir betrachten das Hyperbelstück $C_1 : y = \frac{\beta}{\alpha - x}, 0 < x < \alpha$ und das Parabelstück $C_2 : y = x^2, 0 < x < \alpha$ (im kartesischen Koordinatensystem x, y). Es ist klar, dass x_0 genau dann die x-Koordinate eines Schnitt- oder Berührungspunktes von C_1 und C_2 ist, wenn x_0 eine Wurzel der Gleichung (2.4.1) zwischen 0 und α ist.

Für einen Schnittpunkt (x_0, y_0) der beiden Kurven C_1 und C_2 gilt $\frac{\beta}{\alpha - x_0} = x_0^2$ und daraus folgt (2.4.1) für $x = x_0$.

Nach Eutokios fand Archimedes den Wert von β, so dass C_1 und C_2 einander berühren. Dafür benutzte er die folgenden zwei Sätze:

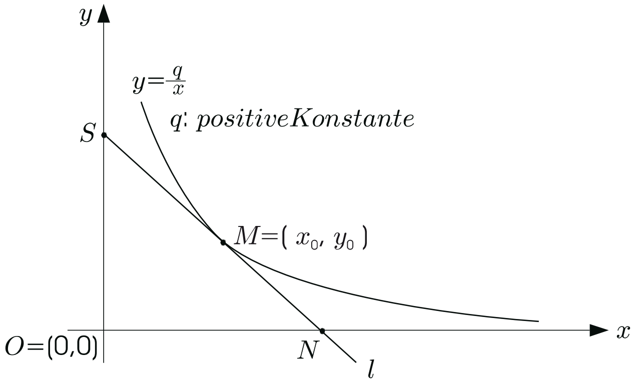
Satz 2.4.1 *Gegeben sind die Parabel $y = px^2$ und der Punkt $M = (x_0, y_0)$, $x_0 > 0$ auf der Parabel, dann gilt (s. Abb. 2.4.3):*
Der Schnittpunkt N der Tangente an die Parabel in M mit der x-Achse halbiert das Intervall $[0, x_0]$. Umgekehrt ist die Gerade l durch $(\frac{x_0}{2}, 0)$ und (x_0, y_0) die Tangente an die Parabel im Punkt (x_0, y_0).

Satz 2.4.2 *Gegeben sind die Hyperbel $y = \frac{q}{x}$, der Punkt $M = (x_0, y_0), x_0 > 0$ auf der Hyperbel und eine Gerade l, die durch M verläuft und die x- und die y-Achse schneidet, dann gilt (s. Abb. 2.4.4):*
M ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen den beiden Schnittpunkten (mit den Achsen) genau dann, wenn die Gerade die Tangente an die Hyperbel im Punkt M ist.



Sei M der Berührungspunkt der Geraden l und der Parabel; dann ist $2px_0\ (x - x_0)\ = y - px_0^2$ die Gleichung von l; für $y = 0$ folgt $x = \frac{x_0}{2}$, also $N = \left(\frac{x_0}{2}, 0\right)$.

Abb. 2.4.3 Figur zu Satz 2.4.1



Sei M der Berührungspunkt der Geraden l und der Hyperbel, dann ist $-\frac{q}{x_0^2}\ (x - x_0)\ = y - y_0$ die Gleichung von l; sei $y = 0$, bzw. $x = 0$ in dieser Gleichung, dann erhält man $x = 2x_0$, bzw. $y = 2y_0$, also ist M der Mittelpunkt der Strecke NS.

Abb. 2.4.4 Figur zu Satz 2.4.2

Hinweise zum Beweis der Sätze sind unter den beiden Abbildungen gegeben. Der Beweis der Umkehrung beider Sätze sei als Aufgabe dem Leser überlassen. Sei nun $M = (x_0, y_0)$ ein Berührungspunkt der Kurven $y = \frac{\beta}{\alpha - x}$ und $y = x^2$. Nach den Sätzen 2.4.1 und 2.4.2 gilt dann (vgl Abb. 2.4.5) $OQ = QM' = \frac{x_0}{2}$ und $QM = MR$. Deshalb sind die Dreiecke QMM' und QRU ähnlich, und es ist $QM' = M'U$ also wegen $OQ = QM'$ dann $OM' = 2\frac{\alpha}{3}$.

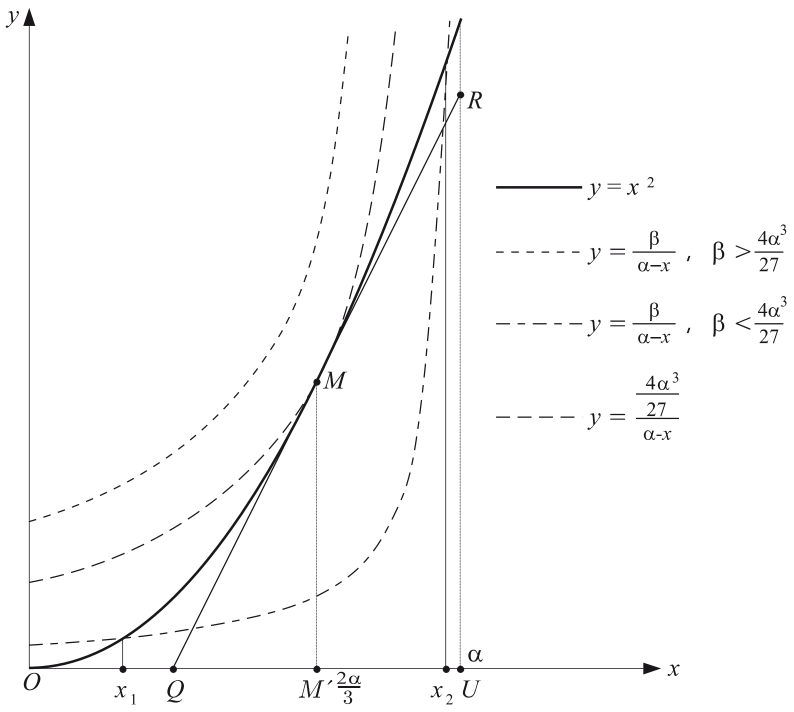


Abb. 2.4.5 Figur zu den Lösungen der Gleichung (2.4.1)

Also muss β die folgende Bedingung erfüllen:

$$\frac{\beta}{\alpha - 2\frac{\alpha}{3}} = (2\frac{\alpha}{3})^2, \text{ d. h. } \beta = \frac{4\alpha^3}{27}.$$

Dann berühren sich die Kurven C_1 mit $\beta = \frac{4\alpha^3}{27}$ und C_2 im Punkt

$$M = \left(2\frac{\alpha}{3}, 4\frac{\alpha^2}{9}\right).$$

Nun folgert Archimedes richtig, dass die Gleichung (2.4.1) genau dann mindestens eine Lösung $0 < x_0 < \alpha$ besitzt, wenn $\beta \leq \frac{4\alpha^3}{27}$ (β ist immer positiv). Wenn $\beta < \frac{4\alpha^3}{27}$, dann hat die Gleichung (2.4.1) genau zwei verschiedene Lösungen $x_1 < x_2$ im Intervall $(0, \alpha)$, und es gilt $0 < x_1 < 2\frac{\alpha}{3}$ und $2\frac{\alpha}{3} < x_2 < \alpha$. Wenn $\beta > \frac{4\alpha^3}{27}$ ($C_1 \cap C_2 = \emptyset$), dann besitzt die Gleichung keine Lösung in $(0, \alpha)$. Wenn $\beta = \frac{4\alpha^3}{27}$ ist, gibt es in $(0, \alpha)$ nur die Lösung $x = 2\frac{\alpha}{3}$. Zur Lösung des Problems P ist (2.4.1) mit $\alpha = 3r, \beta = 4r^3\frac{k}{k+l}$ zu lösen, um die Höhe $h = x$ des Kugelsegmentes V_1 zu bestimmen. Wegen

$$\beta = 4r^3\frac{k}{k+l} < 4r^3 = \frac{4\alpha^3}{27}$$

hat diese Gleichung genau eine Wurzel x_0 im Intervall $(0, 2r)$.

Archimedes hat den Berührungspunkt der Hyperbel $y = \frac{\beta}{\alpha - x}$ und der Parabel $y = x^2$ in Abhängigkeit von β betrachtet. Er hat Bedingungen gefunden, unter denen die Gleichung (2.4.1) d. h. $x^3 + \beta = \alpha x^2$ genau zwei verschiedene positive Wurzeln, keine positive Wurzel oder nur eine positive Wurzel besitzt.

In den islamischen Ländern hat sich ᶜUmar al-Ḫayyām (1048?–1131?) mit Gleichungen dritten Grades beschäftigt. Er hat sich ebenfalls mit der obigen Gleichung befasst, aber er hat dazu den Schnittpunkt der Parabel $y^2 = \sqrt[3]{\beta}(\alpha - x)$ und der Hyperbel $xy = \sqrt[3]{\beta^2}$ betrachtet und gezeigt, dass die Gleichung (2.4.1) für $\beta \leq \frac{\alpha^3}{8}$ entweder zwei Wurzeln oder eine oder gar keine (positive) Wurzel hat und für $\beta \geq \alpha^3$ gar keine (positive) Wurzel besitzt. Beide Unterscheidungen sind richtig, aber das Ergebnis von Archimedes ist befriedigender, weil seine Bedingungen sich gegenseitig auschließende Fälle kennzeichnen.

2.4.2 Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks durch „Einschiebung“ von Archimedes

Archimedes hat sich auch schon mit der Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks befasst. Seine auf „Einschiebung“ (gr. $\nu\epsilon\tilde{\upsilon}\sigma\iota\varsigma$ = neusis) beruhende geometrische Konstruktion entspricht in der Algebra der Lösung einer kubischen Gleichung und wird hier nach der vom Gelehrten Ṯābit ibn Qurra (836–901) überlieferten Beschreibung (in moderner Sprache) dargestellt, vgl. auch [Scriba/Schreiber 2010, S. 70]. Ṯābit ibn Qurra stammte aus Harran (in der heutigen Türkei), wurde 836 geboren und starb 901. Er wirkte am Hofe des Kalifen in Bagdad als Mathematiker und Astronom und übersetzte alte Schriften aus dem Griechischen und Syrischen ins Arabische.

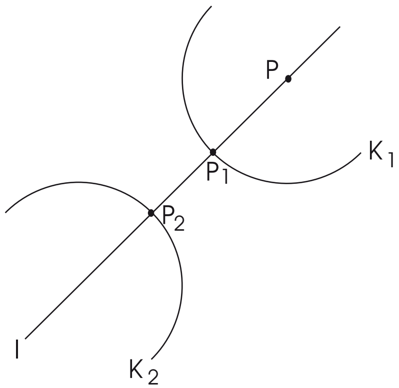
Die Methode der Einschiebung kann nach dem Mathematiker und Astronomen Pappos von Alexandria (um 300 n. Chr.) wie folgt beschrieben werden: Seien K_1 und K_2 zwei Kurven, P ein Punkt, $\alpha > 0$. Eine Gerade l durch P ist so zu bestimmen, dass l die Kurven K_1 und K_2 schneidet und der Abstand der Schnittpunkte gleich α ist (siehe Abb. 2.4.6).

Archimedes hat für die Teilung einer Strecke eine andere Methode der Einschiebung als Pappos benutzt.

Er betrachtet das Quadrat $ACRW$ wie in Abb. 2.4.7 und legt durch W eine Gerade WM, so dass:

$$(\text{Flächeninhalt von } \triangle\, WUR) = (\text{Flächeninhalt von } \triangle\, CTM) \qquad (2.4.2)$$

Die von Archimedes ersonnene Konstruktion erfolgt nach Ṯābit ibn Qurra im Wesentlichen in zwei Schritten [Tropfke 1940, S. 429]:



$K_1 \cap l = \{P_1\}$, $K_2 \cap l = \{P_2\}$, $P_1P_2 = \alpha$

Abb. 2.4.6 Zur Einschiebung nach Pappos

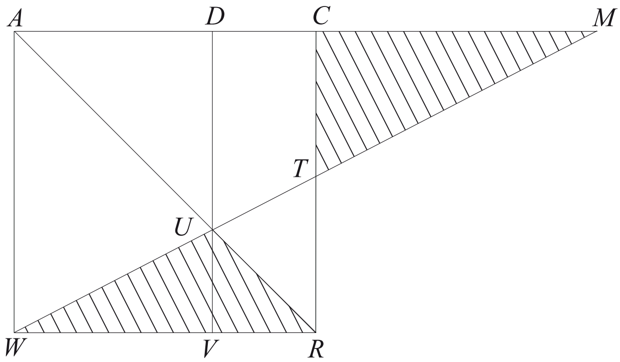


Abb. 2.4.7 Zur Einschiebung nach Archimedes

Schritt I: Sei AC eine Strecke. Wir bestimmen zwei Punkte D und M (D innerhalb und M außerhalb der Strecke, $D \neq A, C$; $M \neq A, C$ wie in Abb. 2.4.8), so dass zugleich gilt (s. Aufgabe 2.3.7):

$$CM^2 = AC \cdot AD \text{ und } AD^2 = CD \cdot DM \quad . \tag{2.4.3}$$

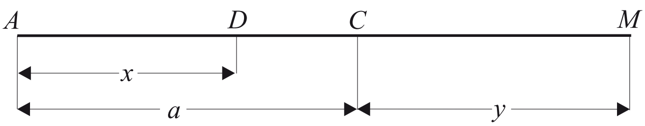


Abb. 2.4.8 Figur zu Schritt I

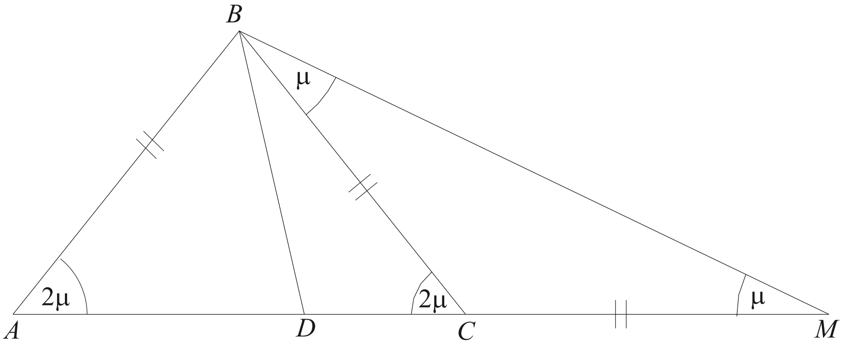


Abb. 2.4.9 Figur zu Schritt II

Schritt II: Seien A, D, C, M wie in Schritt I; es gibt B außerhalb der Geraden durch A und C, so dass $AB = BC = MC$. Es folgt, dass $\sphericalangle BMC = \mu = \frac{\pi}{7}$ (der Beweis sei dem Leser überlassen) und $\sphericalangle BAD = 2\mu = \frac{2\pi}{7}$ (siehe Abb. 2.4.9). Also ist es klar, dass AB eine Seite eines regelmäßigen Siebeneckes ist, das dem Kreis durch M, B, A einbeschrieben ist (siehe Abb. 2.4.10).

Erläuterungen: Algebraisch kann man die Bestimmung der Punkte D und M in Schritt I auf die Lösung einer kubischen Gleichung zurückführen:

Sei $AC = a$, $AD = x$, $CM = y$, dann sind die Gleichungen (2.4.3) den Gleichungen (2.4.4) äquivalent (siehe Abbildung 2.4.8):

$$y^2 = ax \text{ und } x^2 = (a-x)(y+a-x) \quad . \tag{2.4.4}$$

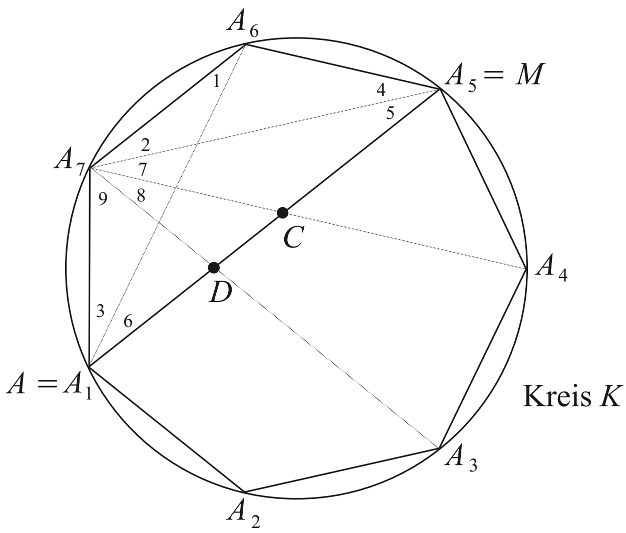
Die zweite Gleichung ist wegen $0 < x < a$ äquivalent zu $y = a\frac{2x-a}{a-x}$. Also ist die Existenz zweier Punkte D und M wie in Schritt I für $0 < x < a$ der Existenz einer Wurzel x der Gleichung $ax = a^2(\frac{2x-a}{a-x})^2$ gleichwertig.

Für $x \neq a$ ist diese der Gleichung $x(a-x)^2 = a(2x-a)^2$ äquivalent, d. h. der kubischen Gleichung

$$x^3 - 6ax^2 + 5a^2x - a^3 = 0. \tag{2.4.5}$$

Die Funktion $f(x) = x^3 - 6ax^2 + 5a^2x - a^3$ hat wegen $f(0) = f(a) = -a^3$ und $f(\frac{a}{2}) = \frac{a^3}{8}$ die beiden Nullstellen $x_1 \in (0, \frac{a}{2})$ und $x_2 \in (\frac{a}{2}, a)$ (Zwischenwertsatz für stetige Funktionen). Da $f(a) = -a^3 < 0$ und $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ muss die dritte Nullstelle von f rechts von a liegen.

Bemerkung: Das regelmäßige Siebeneck ist nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wie Carl Friedrich Gauß (1777–1855) später bewies. Er hat allgemein den folgenden Satz bewiesen:



Die Punkte D und M auf der Geraden durch A und C werden durch Einschiebung gemäß Abb. 2.4.7 konstruiert (Schritt I), sodann die Punkte A_7 und A_6 wie in Abb. 2.4.9 (Schritt II) usw. Dann sind $A_1, \ldots, A_7$ die Ecken eines regelmäßigen Siebeneckes. Es ist klar, dass die Winkel $\hat{1}, \ldots, \hat{8}$ einander kongruent sind und sie die gemeinsame Größe $\mu = \frac{\pi}{7}$ besitzen. Es ist auch klar, dass der Winkel $\hat{9} = 2\mu$ ist.

Abb. 2.4.10 Zur Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks durch Einschiebung

Satz 2.4.3 *Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, V_n ein regelmäßiges n–Eck. Dann sind die Aussagen K_1 und K_2 zueinander äquivalent:*

(K_1) *V_n ist konstruierbar mit Zirkel und Lineal.*
(K_2) *Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2^k$ oder es gibt ein $k \in \mathbb{N}_0$ und l paarweise verschiedene Fermatsche Primzahlen $p_1, \ldots, p_l$, mit $n = 2^k p_1 \ldots p_l$.*

Dabei heißt eine Primzahl p eine *Fermatsche Primzahl*, wenn sie die Gestalt $p = 2^{2^n} + 1$ hat. Für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ erhalten wir der Reihe nach die Werte $3, 5, 17, 257, 65537$, und alle sind Primzahlen, aber $2^{2^5} + 1$ ist keine Primzahl, weil sie durch 641 teilbar ist, wie Leonhard Euler (1707–1783) bewies. Es ist nicht bekannt, ob es unendlich viele Fermatsche Primzahlen gibt.

Wir wollen hier nicht den Begriff der Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal streng definieren, dieser Begriff sollte anschaulich klar sein. Als Beispiel folgt aus diesem Satz, dass die regelmäßigen n–Ecke mit $n = 3, 5, 17$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, die regelmäßigen n–Ecke mit $n = 7, 9$ hingegen nicht. Der Beweis von $(K_1) \Rightarrow (K_2)$ wurde im Jahre 1837 von P. L. Wantzel (1814–1848) vollendet.

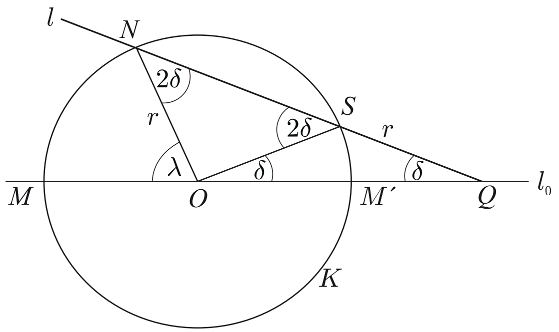
2.4.3 Dreiteilung des Winkels nach Archimedes

Eines der sog. klassischen Probleme der Mathematik ist die von vielen griechischen Mathematikern behandelte Teilung eines beliebigen Winkels in drei gleiche Teile (vgl. [Scriba/Schreiber 2010, S. 44ff.]). Mit Zirkel und Lineal allein lässt sich auch dieses Problem nicht lösen, wie man allerdings erst durch seine algebraische Betrachtung in der Neuzeit bewies: Es führt auf die Lösung einer i.a. irreduziblen kubischen Gleichung. Die Griechen suchten indes nach geometrischen Lösungen. Auch hier war Archimedes erfolgreich: Mit der oben beschriebenen Methode der „Einschiebung“ löste er die Aufgabe der Winkeldreiteilung, blieb allerdings den Beweis für seine Behauptung schuldig (vgl. Liber assumptorum, Satz VIII [Archimedes 1897]). Die Edition der Werke des Archimedes durch J. L. Heiberg (1854–1928) bzw. T. L. Heath (1861–1940) enthält aus philologischer Sicht erhebliche Mängel. Eine umfassende, verbesserte Ausgabe wurde von R. Netz begonnen [Netz 2004].

Sei $\sphericalangle MON$ ein Winkel der Größe λ, $0° < \lambda < 90°$, K der Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r, MM' ein Durchmesser des Kreises.

Archimedes behauptet, dass ein Punkt S auf K (wie in Abbildung 2.4.11) existiert, so dass die Gerade durch NS die Gerade durch MM' in einem Punkt Q mit der Eigenschaft $QS = r$ schneidet. Er gibt keinen Beweis für diese Behauptung.

Auch hier wird das Problem durch „neusis“ (Einschiebung) gelöst. Gegeben sind der Kreis K und die Gerade l_o durch M, M', und wir müssen eine Gerade l durch N so bestimmen, dass l den Kreis K und die Gerade l_o schneidet und der Abstand der Schnittpunkte S und Q gleich r ist. Angenommen, dass l existiert und $QS = r$, dann folgt, dass $\sphericalangle SQO = \frac{\lambda}{3}$. Begründung: In Abb. 2.4.11 sieht man aufgrund des Außenwinkelsatzes sofort, dass $\sphericalangle NSO = 2 \cdot \sphericalangle SOM' = 2 \cdot \sphericalangle SQM$ und $\sphericalangle MON = 3 \cdot \sphericalangle SQO$.



$\sphericalangle MON = \lambda, SQ = OM \Rightarrow \sphericalangle SQO = \frac{\lambda}{3}$

Abb. 2.4.11 Figur zur Dreiteilung des Winkels

Also hat Archimedes die Dreiteilung eines beliebigen Winkels auf die obige Einschiebung reduziert. Es kann gezeigt werden, dass die Lösung dieses Einschiebungsproblems aus der Lösung der kubischen Gleichung $x^3 - 3r^2x - 2r^3\cos\lambda = 0$ folgt, bzw. aus der Berechnung von $\cos\delta$ aus der trigonometrischen Formel $4\cos^3\delta - 3\cos\delta = \cos 3\delta$ für $3\delta = \lambda$.

2.4.4 Archimedes und die biquadratischen Gleichungen

Archimedes hat in seinem Buch „Über Spiralen“ [Archimedes 1897, S. c, ci und 156–159] in den Sätzen 5, 6 und 7 die folgende Aussage (E_0) zu einem speziellen Einschiebungsproblem ohne Beweis benutzt.

(E_0): Sei K ein Kreis mit dem Mittelpunkt O; der Punkt $N \in K$ und die Strecke der Länge $\alpha > 0$ seien vorgegeben; MM' sei ein Durchmesser von K; $N \neq M, M'$; l_0 die Gerade, die MM' enthält. Dann existiert eine Gerade l durch N, welche den Kreis in einem Punkte S und die Gerade l_0 außerhalb des Kreises in einem Punkte Q derart schneidet, dass die beiden Schnittpunkte den Abstand α haben (Abb. 2.4.12).

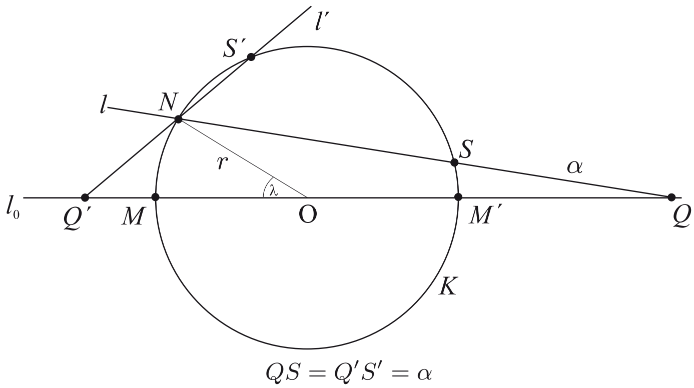


Abb. 2.4.12 Figur zu (E_0) und (E_1)

Wie Abb. 2.4.12 zeigt, gilt sogar die Verschärfung von (E_0):

(E_1): Seien K, O, N, α, MM' und l_0 vorgegeben wie in (E_0), dann existieren genau zwei verschiedene Geraden l, l' durch N, so dass l den Kreis in S und die Gerade l_0 außerhalb des Kreises in Q und l' den Kreis in S' und l_0 außerhalb des Kreises in Q' derart schneiden, dass $SQ = S'Q' = \alpha$ ist und O zwischen Q und Q' liegt. Dabei kann S oder S' mit N zusammenfallen, also l oder l' Tangente an K in N sein.

Die Behandlung dieses Einschiebungsproblems mit den Mitteln der modernen Algebra führt auf eine biquadratische Gleichung und auf den zu (E_1) äquivalenten Satz der Algebra:

Satz 2.4.4 *Die biquadratische Gleichung*

$$x^4 - (2r^2 + \alpha^2)x^2 - (2\alpha^2 r \cos\lambda)x + r^4 - \alpha^2 r^2 = 0$$

besitzt für $\alpha < 0$ *genau eine Wurzel in* $(-\infty, -r)$ *und genau eine Wurzel in* $(r, +\infty)$.

Die Herleitung dieser Gleichung erfordert geschicktes Rechnen und sei ebenso wie der Beweis des Satzes dem Leser als Aufgabe überlassen. Dieses Einschiebungsproblem und seine Lösung zeigen, dass bereits Archimedes prinzipiell in der Lage war, Wurzeln gewisser Gleichungen vierten Grades geometrisch zu bestimmen.

2.4.5 Das Delische Problem – die Würfelverdopplung

Das klassische Problem der Würfelverdoppelung hat nach Eutokios folgenden Ursprung: Wegen der Überwindung einer herrschenden Pest wandten sich die Delier (Einwohner der Insel Delos) an das Orakel von Delphi. Sie erhielten von ihm den Auftrag, einen der würfelförmigen Altäre im Tempel des Apollon zu verdoppeln, also einen gleichförmigen Altar mit doppeltem Rauminhalt zu errichten, vgl. [Scriba/Schreiber 2010, S. 41ff.].

Abb. 2.4.13 Antikes Theater in Delphi
[Foto J. Mars]

Abb. 2.4.14 Apollon-Tempel in Delphi
[Foto J. Mars]

Geometrisch gesehen ist dieses Problem die Übertragung des nach Pythagoras zu lösenden Problems der Quadratverdopplung auf den dreidimensionalen Fall, algebraisch bedeutet es den Übergang vom Ziehen einer Quadratwurzel auf die Berechnung einer Kubikwurzel.

Reduzierung des Problems auf die Bestimmung zweier mittlerer Proportionalen nach Hippokrates

Für die Griechen war dieses Problem wie folgt zu lösen:

Gegeben sei eine Strecke der Länge a. Zu konstruieren ist eine Strecke der Länge y, so dass $y^3 = 2a^3$, also $y = \sqrt[3]{2}a$.

Hippokrates von Chios (um 450–um 400 v. Chr.), ein von ca. 450–430 v. Chr. in Athen wirkender Mathematiker und Astronom, führte die Lösung des Problems zurück auf die Bestimmung zweier mittlerer Proportionalen zwischen a und $2a$, d. h. auf die Bestimmung zweier Strecken x und y, so dass

$$a : y = y : x = x : 2a. \tag{2.4.6}$$

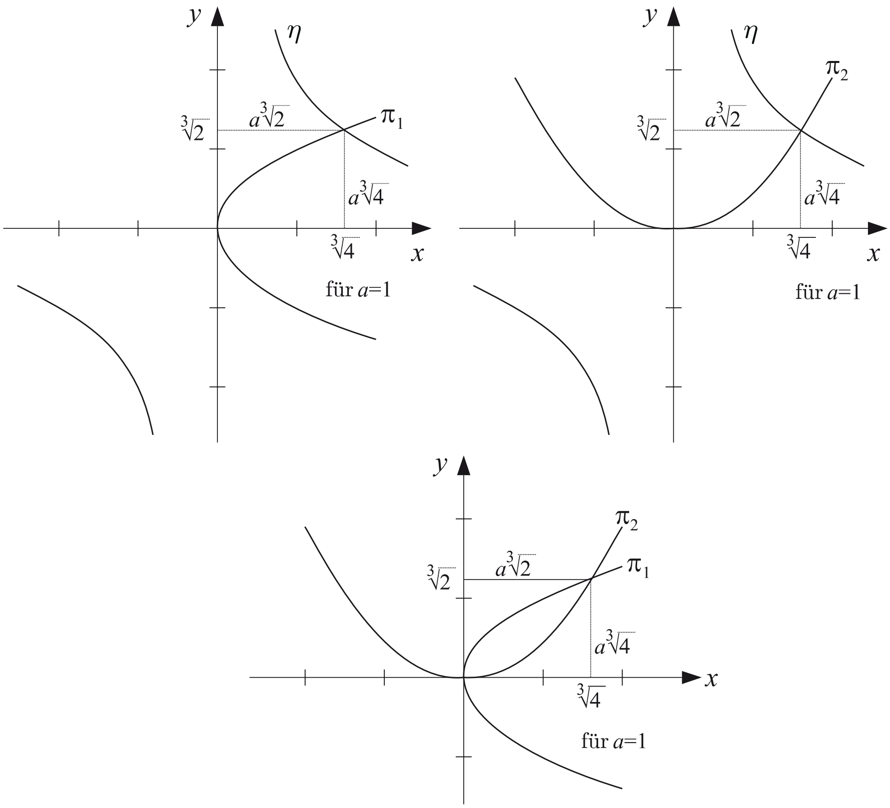
Für die griechischen Mathematiker nach Hippokrates bedeutete die Verdopplung des Kubus die Bestimmung zweier mittlerer Proportionalen zwischen zwei vorgegebenen Strecken.

Die Bestimmung zweier mittlerer Proportionalen nach Menaichmos (durch Anwendung der Kegelschnitte)

Um 360 v. Chr. konstruierte der griechische Mathematiker und Astronom Menaichmos (um 380–um 320 v. Chr.), ein Schüler des Eudoxos von Knidos, die mittleren Proportionalen x und y durch die Bestimmung der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte.

Aus (2.4.6) folgt, dass $ax = y^2, 2a^2 = xy$, deshalb ist $2a^2 = \frac{y^2}{a} \cdot y$, und daraus folgt $y^3 = 2a^3$. Es ist klar, dass die Gleichungen (2.4.6) jedem Paar der folgenden Gleichungen gleichwertig sind:

$$\underset{(\pi_1)}{y^2 = ax}, \quad \underset{(\eta)}{xy = 2a^2}, \quad \underset{(\pi_2)}{x^2 = 2ay} \quad . \tag{2.4.7}$$



$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \eta = \left\{ \left(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2}\right) \right\}$$

Abb. 2.4.15 Zur Bestimmung von mittleren Proportionalen

Demgemäß konnte Menaichmos die kubische Gleichung $y^3 = 2a^3$ geometrisch lösen, indem er die Schnittpunkte der beiden Parabeln π_1 und π_2 oder die Schnittpunkte der Hyperbel η mit einer der beiden Parabeln bestimmte (siehe Abb. 2.4.15 und Abschnitt 3.3.6).

Die Bestimmung von zwei mittleren Proportionalen nach Archytas (durch Bestimmung des Schnittpunktes dreier Flächen)

Eine interessante Konstruktion von zwei mittleren Proportionalen zwischen zwei vorgegebenen Strecken der Längen l und d (mit $l < d$) stammt von Archytas von Tarent (428?–365 v. Chr.), einem pythagoreischen Mathematiker und Philosophen, der etwa von 400 bis 360 v. Chr. wirkte und auch als Feldherr und Staatsmann in Erscheinung trat.

In diesem Zusammenhang sollen zwei weitere Mathematiker genannt werden:

1. Eudemos von Rhodos (um 370–um 300 v. Chr.) lebte in der zweiten Hälfte des vierten Jahrhunderts v. Chr., Schüler von Aristoteles, schrieb eine Geschichte der Geometrie.
2. Eutokios von Askalon: geboren ca. 480 v. Chr. in Palästina, griechischer Mathematiker.

Eutokios sagt, dass Eudemos in seiner Geschichte der Geometrie diese Konstruktion Archytas zugeschrieben hat. Es ist nebenbei interessant zu bemerken, dass Proklos Diadochos (geb. 411 oder 410, gest. 485; aus Konstantinopel, neuplatonischer Philosoph, Mathematiker und Astronom) sagt, dass Eudemos in seiner Geschichte der Geometrie die Methode der Flächenanlegung den Pythagoreern zuschreibt. Proklos' Kommentar zu Buch I der Elemente Euklids ist eine wichtige Quelle für die Geschichte der Mathematik.

Die Konstruktion des Archytas kann modern durch analytische Geometrie folgendermaßen beschrieben werden [Heath 1921, Bd. I, S. 247]:

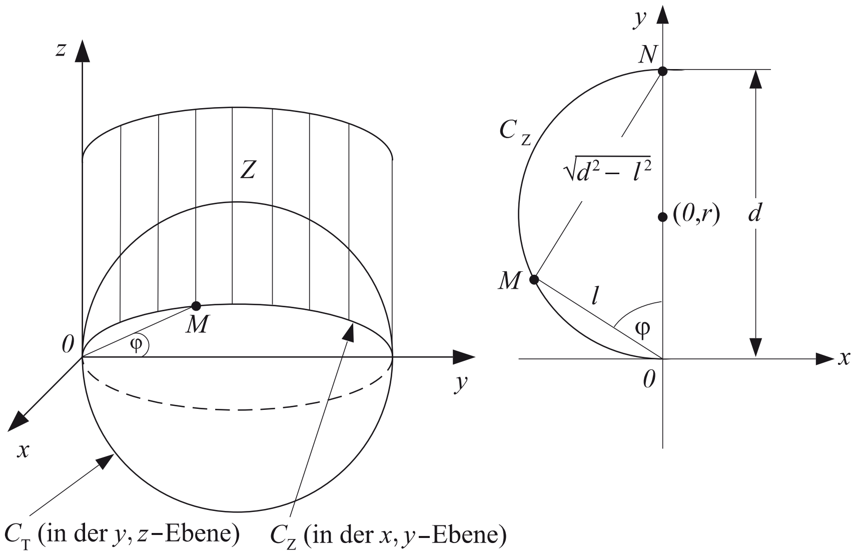
Seien $l < d$ zwei vorgegebene Strecken. Archytas betrachtet den Zylinder Z, den Torus T und den Kegel K, wie folgt durch Gleichungen in einem kartesischen x, y, z -System beschrieben:

$$\begin{cases} (y-r)^2 + x^2 = r^2 & (x \leq 0, z \geq 0) \quad Z \\ \left(\sqrt{x^2+y^2} - r\right)^2 + z^2 = r^2 & T \\ \mu y = \sqrt{x^2+z^2} & K \end{cases} \tag{2.4.8}$$

wobei $r = \frac{d}{2}, \mu = \frac{\sqrt{d^2-l^2}}{l}$ (siehe Erläuterung unten). Dann bestimmt er die gemeinsamen Punkte von Z, T und K, also $Z \cap T \cap K$.

Sei $S \in Z \cap T \cap K, S = (x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0), S_0 = (x_0, y_0, 0), O = (0,0,0)$.

Archytas gibt die Beziehung zwischen den beiden Strecken OS und OS_0 wie folgt an, wobei OS der Abstand zwischen dem Koordinatenursprung und dem



Rotation des Strahles OM um die y-Achse erzeugt den Kegel K,
Rotation des Kreises C_T um die z-Achse erzeugt den Torus T.

Abb. 2.4.16 Figur zur Konstruktion des Archytas

Schnittpunkt S der drei Flächen ist und OS_0 die Projektion von OS auf die x, y-Ebene:

$$d : OS = OS : OS_0 = OS_0 : l \quad . \tag{2.4.9}$$

Wie man leicht nachrechnet, werden diese Gleichungen durch $OS = l^{\frac{1}{3}} d^{\frac{2}{3}}$, $OS_0 = l^{\frac{2}{3}} d^{\frac{1}{3}}$ erfüllt.

Archytas hat also zwei mittlere Proportionalen zwischen l und d konstruiert und damit die Würfelverdoppelung geleistet.

Erläuterung: Z ist eine Halb-Zylinderfläche mit dem Halbkreis

$$C_Z : \ (y-r)^{\,2} + x^2 = r^2,\ z = 0,\ x \le 0$$

als Leitkurve; jede Erzeugende von Z ist parallel zur z-Achse. T ist ein Torus mit dem Innenradius 0; T entsteht durch Rotation des Kreises
$C_T : \ (y-r)^{\,2} + z^2 = r^2,\ x = 0$ um die z-Achse.

Sei M ein Punkt von C_Z mit der Eigenschaft $OM = l$. Dann ist $\tan\varphi = \frac{\sqrt{d^2-l^2}}{l}$ mit φ wie in Abb. 2.4.16. Deshalb ist $y = -\frac{l}{\sqrt{d^2-l^2}}x$ die Gleichung der Geraden g durch O und M. Die Fläche des Kegels, der durch die Rotation der Geraden l um die y-Achse (mit $y \ge 0$) entsteht, hat die Gleichung $y = \frac{l}{\sqrt{d^2-l^2}}\sqrt{x^2+z^2}$.

S_0 ist der Fußpunkt des Lotes von S auf die xy-Ebene, also $S_0 \in C_Z$.

2.5 Die Quadratur des Kreises mittels der Quadratrix

Die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal ist ein von den Griechen aufgeworfenes Problem, mit dessen Lösung sich Mathematiker vieler Generationen über 2000 Jahre beschäftigt haben, bis es im Jahre 1882 von dem deutschen Mathematiker Carl L. F. von Lindemann (1852–1939) endgültig gelöst wurde, indem er nachwies, dass eine Lösung dieses Problems mit Zirkel und Lineal allein nicht möglich ist. Dennoch versuchen sich auch heute noch Laien an diesem Problem, weil sie den Beweis von Lindemann nicht akzeptieren (bzw. nicht verstehen) oder - in den meisten Fällen - die Aufgabenstellung gar nicht richtig verstanden haben. Sie beschäftigen mit teils erstaunlichen Näherungslösungen sogar Gerichte und Politiker bis hin zum Bundespräsidenten. So ist denn „Quadratur des Kreises“ zu einem geflügelten Wort für ein besonders schwieriges bzw. unlösbares Problem geworden.

Es handelt sich dabei genauer gesagt um folgendes Problem:

Gegeben sei ein Kreis mit Radius r. Gesucht ist ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt. Dieses Quadrat soll mit alleiniger Hilfe von Zirkel und Lineal in *endlich vielen* Schritten konstruiert werden. Dabei darf der Zirkel nur zum Schlagen eines Kreises um einen gegebenen Mittelpunkt (also nicht als Stechzirkel), das Lineal nur zum Zeichnen einer Geraden durch zwei gegebene Punkte benutzt werden.

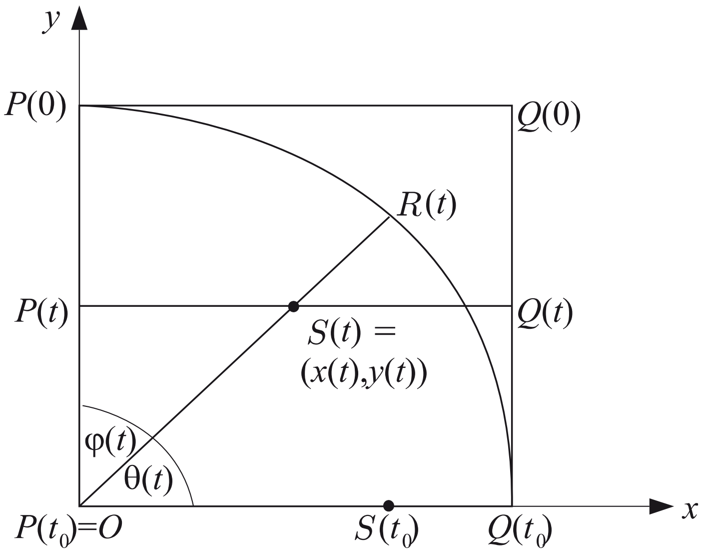
Die Griechen hatten sehr bald erkannt, dass der Flächeninhalt proportional zu r^2, also $F = cr^2$ ist, aber c keine rationale Zahl ist. Erst Lindemann zeigte 1882, dass c auch keine algebraische Irrationalzahl ist, also keiner algebraischen Gleichung genügt, d. h. es gibt keine Gleichung der Gestalt

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_k $(k = 0, \ldots, n; n \in \mathbb{N})$ mit c als Lösung. Die „Kreiszahl“ π liegt also außerhalb der Menge der algebraischen Zahlen, „überschreitet“ in diesem Sinn die Grenzen der Algebra und wird deshalb eine transzendente Zahl genannt.

Schon um 430 v. Chr. hatte Antiphon (um 480–411 v. Chr.) versucht, die Kreisfläche durch regelmäßige $3 \cdot 2^n$-Ecke oder $4 \cdot 2^n$-Ecke auszuschöpfen, die man mit bekannten Methoden in flächengleiche Quadrate verwandeln konnte. Andere Mathematiker suchten dem Problem mit speziellen Kurven zu Leibe zu rücken – so wie später die Winkeldreiteilung mit der Kissoïde des Diokles und die Würfelverdopplung mit der Konchoïde des Nikomedes gelang, vgl. [Scriba/Schreiber 2010, S. 42ff.]. Hippias von Elis hatte um 420 v. Chr. eine Kurve zur Dreiteilung des Winkels gefunden. Deinostratos (4. Jh. v. Chr.) und sein Bruder Menaichmos benutzten diese Kurve um 350 v. Chr. zur Quadratur des Kreises und nannten sie deshalb Quadratrix. Die Kenntnis dieser Kurve verdanken wir ihrer Beschreibung durch Pappos.

Wir beschreiben diese Kurve in moderner Form (vgl. Abb. 2.5.1).



$P(0)Q(0) = P(0)P(t_0) = a, \quad P(0)P(t) = vt$
$r(\theta) = |OS|$ (d. h. $r(\theta(t)) = |OS(t)|$); die Funktion $r : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine echt monoton wachsende Funktion im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Abb. 2.5.1 Kinematische Erzeugung der Quadratrix

Die Strecke $P(0)Q(0)$ der Länge a werde mit konstanter Geschwindigkeit $v > 0$ parallel zur x–Achse nach unten verschoben und erreiche zur Zeit t_0 die Endlage $P(t_0)Q(t_0)$. Gleichzeitig werde die Strecke $OP(0) = P(t_0)P(0)$ mit derselben Länge a um den Punkt O mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ im Uhrzeigersinn gedreht und erreiche zur Zeit t_0 die Endlage $P(t_0)Q(t_0)$. Der Schnittpunkt beider Strecken beschreibt dabei die Quadratrix. Zur Zeit t, $0 < t < t_0$, ist die Lage der Strecken $P(t)Q(t)$ bzw. $OR(t)$. Der Winkel $\sphericalangle\, P(t)OR(t)$ hängt von der Zeit t ab und hat die Größe $\varphi(t) = \omega t$. Es ist klar, dass $|P(0)P(t)| = vt$. Sei $S(t) = (x(t), y(t))$ der Schnittpunkt der beiden Strecken zur Zeit t.

Weil sich die beiden Strecken mit konstanter Geschwindigkeit v bzw. konstanter Winkelgeschwindigkeit ω bewegen, ist $y(t)$ proportional zu $\theta(t)$, also $y(t) = c\,\theta(t)$. Aus $y(0) = a$ und $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ folgt $y(t) = \frac{2a}{\pi}\theta(t)$. Wegen $\theta(t) = \arctan\frac{y(t)}{x(t)}$, also $y = \frac{2a}{\pi}\arctan\frac{y}{x}$ für $0 < x \le a$ oder $x = y\cot\frac{\pi}{2a}y$ für $o < y \le a$ und $\lim\limits_{y\to 0+} y\cot\frac{\pi}{2a}y = \frac{2a}{\pi}$ erhält man

$$\begin{cases} x = y\cot\frac{\pi}{2a}y & 0 < y \le a \\ x = \frac{2a}{\pi} & y = 0 \end{cases} \tag{2.5.1}$$

als Beschreibung des geometrischen Ortes von $S(t)$.

Diese Kurve nannte Deinostratos Quadratrix. Im Polarkoordinatensystem kann die Quadratrix wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{cases} r\ (\theta) &= \frac{2a}{\pi}\frac{\theta}{\sin\theta} & 0<\theta\leq\frac{\pi}{2} \\ r\ (0) &= \lim_{\theta\to 0^+}\frac{2a}{\pi}\frac{\theta}{\sin\theta}=\frac{2a}{\pi} & \end{cases} . \tag{2.5.2}$$

Wir können viele Punkte der Quadratrix mit Zirkel und Lineal allein finden, z. B. ist für $n\in\mathbb{N}$ der Winkel $\theta=\frac{\pi}{2^n}$ allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar (weil das Halbieren eines Winkels immer mit Zirkel und Lineal allein möglich ist). Ebenso ist die Strecke $y=\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2^n}\frac{a}{2^{n-1}}$ mit Zirkel und Lineal allein konstruierbar (die Strecke a ist vorgegeben). In (2.5.1) wird $a=4$ gesetzt und wir erhalten:

$$\begin{cases} x=y\cot\frac{\pi}{8}y & 0<y\leq 4 \\ x=\frac{8}{\pi} & y=0 \end{cases} .$$

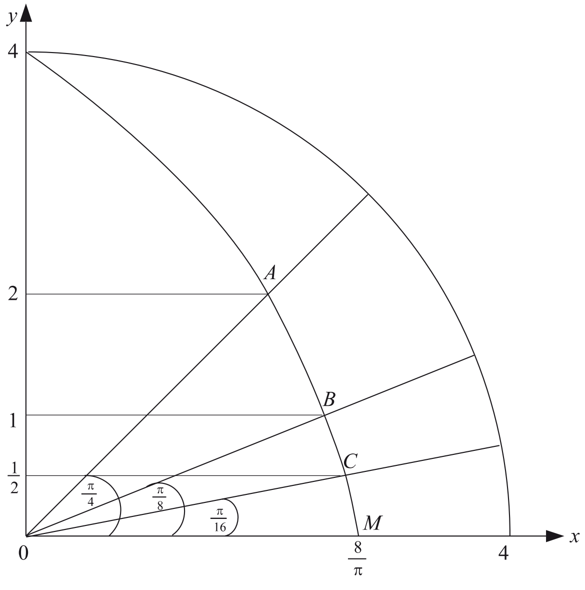


Abb. 2.5.2 Konstruktion der Quadratrix mit $a=4$

Die Strecke OM in Abb. 2.5.2 hat die Länge $\frac{8}{\pi}$. Wenn wir mehr Punkte als A, B, C auf der Quadratrix konstruieren, dann erhalten wir bessere Näherungen für $\frac{8}{\pi}$ und deshalb für π.

Sei ein Winkel $\sphericalangle MOZ$ der Größe θ rad wie in Abb. 2.5.3 gegeben, sei Q der Schnittpunkt des Strahls OZ mit der Quadratrix, dann ist nach (2.5.2) $ON=\frac{2\alpha}{\pi}\theta$ die y-Koordinate des Punktes Q.

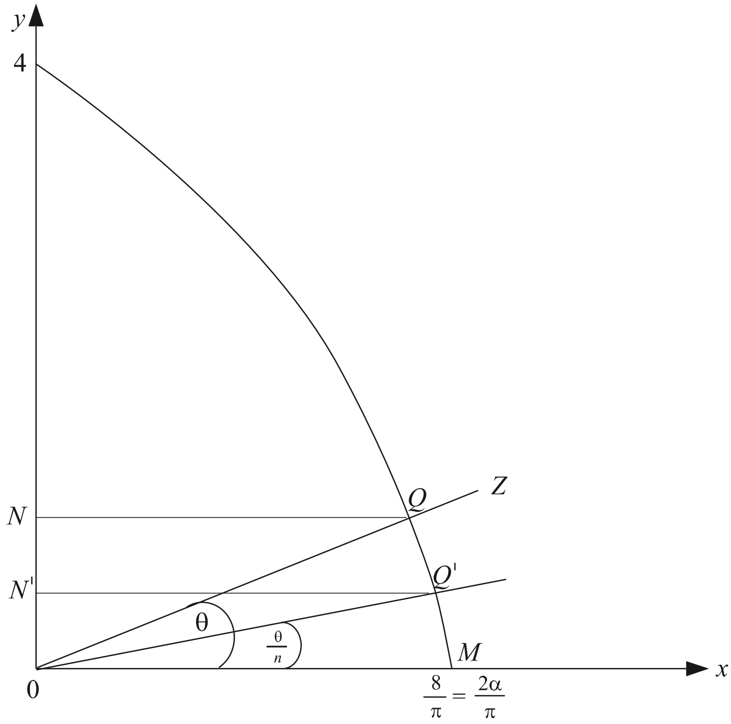


Abb. 2.5.3 Verwendung der Quadratrix zur Winkelteilung

Mittels des Strahlensatzes lässt sich (mit Zirkel und Lineal allein) für jede natürliche Zahl ein Punkt N' auf der Strecke ON so konstruieren, dass

$$ON' = \frac{1}{n} ON,$$

wobei N der Schnittpunkt der zur x-Achse parallelen Geraden durch Q ist. Sei Q' der Schnittpunkt der parallelen Geraden durch N' zur x-Achse mit der Quadratrix. Dann ist $ON' = \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{\theta}{n}$ die y-Koordinate des Punktes Q', also $\frac{\theta}{n} rad$ die Größe des Winkels $\measuredangle MOQ'$. Das bedeutet, dass wir einen beliebigen Winkel mit Hilfe der Quadratrix in n gleiche Teile teilen können; insbesondere kann man einen beliebigen Winkel mit Hilfe dieser Kurve dreiteilen.

Mit endlich vielen Schritten können mit Zirkel und Lineal nur endlich viele Punkte der Quadratrix konstruiert werden, nicht ihr gesamter Verlauf. Deshalb erlaubt diese Methode durch Konstruktion hinreichend vieler Punkte zwar die Angabe von π oder die Winkelteilung mit beliebiger Genauigkeit (mit beliebig kleinem Fehler), aber nicht die exakte Lösung des Problems.

2.6 „Formale Algebra“

Unter „formaler Algebra“ soll hier diejenige Art von Algebra verstanden werden, die – wie zuvor in Mesopotamien – zur Behandlung der im Alltag anfallenden Probleme auch in Griechenland lange Zeit neben der wissenschaftlich begründeten „geometrischen Algebra“ betrieben wurde.

2.6.1 Formale Algebra vor Diophant

Mangels hinreichender Quellen können wir heute den Einfluss der babylonischen Algebra auf die Entwicklung der formalen Mathematik in Griechenland nicht lückenlos verfolgen, aber sie existierte parallel zur geometrischen Algebra. Die formale Algebra war jedoch für praktische Probleme notwendig, z. B. bei der Landvermessung und mancherlei technischen Problemen.

Nach Iamblichos von Chalkis (geb. ca. 250 n. Chr. in Chalkis, Syrien; gest. ca. 330; Neuplatoniker, Philosoph und Wundertäter) hat bereits Thymaridas von Paros (Mathematiker in der ersten Hälfte des 4. Jahrhunderts v. Chr.) das folgende lineare Gleichungssystem, genannt „Blume von Thymaridas“, gelöst, vgl. [Cantor 1880, Bd. 1, S. 158]:

„Wenn gegebene und unbekannte Größen sich in eine gegebene teilen und eine von ihnen mit jeder anderen zu einer Summe verbunden wird, so wird die Summe aller dieser Paare nach Subtraktion der ursprünglichen Summe bei drei Zahlen der zu den übrigen addierten ganz zuerkannt, bei vier deren Hälfte, bei fünf deren Drittel, bei sechs deren Viertel und so fort.“

In heutiger Schreibweise sieht das verbal formulierte Gleichungssystem wie folgt aus:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= s \\ x_1 + x_2 &= a_1 \\ x_1 + x_3 &= a_2 \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ x_1 + x_n &= a_{n-1}, \end{aligned}$$

wobei $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ Unbekannte und $s, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ bekannt sind.

Die Lösung wird für $n = 3, 4, 5, 6$ angegeben und ist $x_1 = \frac{a_1+\ldots+a_{n-1}-s}{n-2}$, $x_2 = a_1 - x_1, \ldots, x_n = a_{n-1} - x_1$. Dieses Beispiel zeigt, dass sich die griechischen Mathematiker bereits vor Diophant mit linearen Gleichungssystemen beschäftigten.

Auf dem Gebiet der unbestimmten Gleichungen — das sind Gleichungssysteme, bei denen mehr Unbekannte als Gleichungen auftreten — ist das sog.

„Rinderproblem“ des Archimedes sehr bekannt. Es sollen die Anzahlen weißer, schwarzer, brauner und bunter Kühe und Stiere in der Rinderherde des Sonnengottes Helios bestimmt werden, die auf der Insel Trinakria (Sizilien) weiden. Dabei müssen neun Bedingungen erfüllt sein. Auf dem Weg zur Lösung stößt man schließlich auf die „Pellsche“ Gleichung:

$$t^2 - 4729494u^2 = 1$$

mit der Nebenbedingung, dass u ein Vielfaches von 9304 sein soll. Dieses Problem ist praktisch unlösbar, da die kleinste mögliche Lösung für u eine Zahl größer als $10^{200\,000}$ ist. Es wurde von Archimedes möglicherweise angegeben, um zu zeigen, dass es unvorstellbar große Zahlen gibt.

Auch von Heron von Alexandria (wahrscheinlich um 100 n. Chr.) sind unbestimmte Gleichungen überliefert. Sein Werk „Metrika“ enthält neben der Vermessungslehre, der Berechnung von Flächen und Volumina auch die Berechnung von Quadrat- und Kubikwurzeln. Er wandte sich von der geometrischen Denkweise ab, indem er Zahlen nicht mehr als Strecken betrachtete, sondern mit den Zahlen selbst abstrakt rechnete.

Die Geodäsie, die Heron mit Hilfe babylonischer Rechentechniken und ägyptischer Näherungsverfahren ergänzte, wurde an Feldmesser und Handwerker weitergegeben.

2.6.2 Synkopierte Algebra

Die in der Spätzeit von Diophant in Alexandria entwickelte Algebra nennt man auch „synkopierte Algebra“, weil sie weder symbolisch wie die heutige Algebra, noch eine „rhetorische Algebra“ ist, bei welcher jede algebraische Formel durch Worte dargestellt wird.

Diophant war wahrscheinlich der erste Mathematiker, der Symbole für die Unbekannte und ihre Potenzen, für Gleichheit, Subtrahieren usw. systematisch verwendete. Er verwendete das von den Griechen schon seit ungefähr 450 vor Chr. für Zahlen benutzte griechische Alphabet, also für das praktische Rechnen nur wenig geeignete Zahlbuchstaben wie folgt:

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	ϑ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900
$,\alpha$	$,\beta$	$,\gamma$	$,\delta$	$,\varepsilon$	$,\varsigma$	$,\zeta$	$,\eta$	$,\vartheta$
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

In dieser Tabelle sind ς (vau), ϙ (koppa), ϡ (sampi) Zeichen aus einem semitischen Alphabet.

Diese Zahlbuchstaben wurden (um sie nicht mit Wortbuchstaben zu verwechseln) manchmal überstrichen oder mit einem Strich versehen ($\overline{\alpha}$ oder α' statt des Zahlbuchstabens α), z. B. $184 = \overline{\rho\pi\delta} = \rho\pi\delta'$; $580 = \overline{\varphi\pi} = \varphi\pi'$.

M ist die Abkürzung für $\mu\upsilon\rho\iota\acute{\alpha}\varsigma$(10 000) und $n \cdot 10\,000$ ($n \in \mathbb{N}$) wurde in der Form $\overset{n}{M}$, M_n oder nM geschrieben, z. B. $85\,6980 = 85M + 6\,980 =$ $\overset{\pi\varepsilon}{M}$,ςϡπ; dagegen würde Diophant diese Zahl A so $\overline{\pi\varepsilon}$ · $\overline{,\varsigma}$ϡ$\overline{\pi}$ schreiben.

Für unbekannte Potenzen usw. benutzte Diophant folgende Bezeichnungen:

$\overset{0}{M}$	: Einheiten	$\mu o\nu\alpha\delta\varepsilon\varsigma$
ς	: Unbekannte (x)	$\acute{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu\acute{o}\varsigma$ arithmos d. h. Zahl
Δ^{Y}	: Quadrat (x^2)	$\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$, also in Antiqua $\Delta YNAMI\Sigma$, daraus Δ^{Y}.
K^{Y}	: Kubus (x^3)	$\kappa\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$, also in Antiqua $KYBO\Sigma$, daraus K^{Y}.
$\Delta^{\mathsf{Y}}\Delta$	: Quadratoquadrat (x^4)	$\delta\upsilon\nu\alpha\mu o\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$
ΔK^{Y}	: Quadratokubus (x^5)	$\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{o}\kappa\upsilon\beta o\varsigma$
$K^{\mathsf{Y}}K$	: Kubokubus (x^6)	$\kappa\upsilon\beta\acute{o}\kappa\upsilon\beta o\varsigma$
$=$	: gleich	$'\acute{\iota}\sigma o\varsigma$
$\pitchfork$	: minus	$\lambda\varepsilon\acute{\iota}\pi\varepsilon\iota\nu$; nach Heath ist $\pitchfork$ eine Kombination der griechischen Buchstaben Λ und I, die die Anfangsbuchstaben des Stammes „ $\lambda\iota\pi$“ sind. Das Verb $\lambda\bar{\varepsilon}\iota\pi\omega$ bedeutet fehlen, mangeln.

Diophant benutzte das Symbol $\pitchfork$ als Minus- bzw. als Trennungszeichen und setzte alle negativen Terme hinter die positiven Terme. Beispielsweise würde Diophant $x^4 - 3x + 10x^2 - 7$ so schreiben:

$$\Delta^{\mathsf{Y}}\Delta\overline{\alpha}\Delta^{\mathsf{Y}}\overline{\iota}\pitchfork\varsigma\overline{\gamma}\overset{0}{M}\overline{\zeta}.$$

Diophant hatte auch Bezeichnungen für negative Potenzen von x (z. B. $\frac{1}{x}$ bzw. $\frac{1}{x^2}$ bezeichnet er mit ς^{X} bzw. $\Delta^{\mathsf{Y}^{\mathsf{X}}}$) und nannte sie $\acute{\alpha}\rho\iota\vartheta o\sigma\tau\acute{o}\nu$ bzw. $\delta\upsilon\nu\alpha\mu o\sigma\tau\acute{o}\nu$. Ähnlich verhält es sich bei $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, $\frac{1}{x^5}$, $\frac{1}{x^6}$. Diophant beschreibt Multiplikation und Division verbal.

Für die Lösung des Problems

„Ein Kubus soll um 2 größer werden als ein Quadrat“

betrachtet Diophant die kubische Gleichung (in heutiger Schreibweise)

$$(x-1)^3 = (x+1)^2 + 2$$

oder äquivalent

$$x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0,$$

für deren Lösung er ohne Rechnung $x = 4$ angibt [Tropfke 1940, S. 426]. Es ist das erste Mal, dass eine kubische Gleichung in einer rein algebraischen Form behandelt wird. Diese kubische Gleichung ist die einzige überlieferte Gleichung dritten Grades mit einer Unbekannten in der griechischen „Arithmetik“.

Abb. 2.6.1 Sphinx und Pompejus-Säule im Serapeum von Alexandria. Die Säule wurde wahrscheinlich von Theodosius d. Gr. zur Erinnerung an den Sieg des Christentums an der Stelle des 391 n. Chr. zerstörten Serapeums errichtet. Im Mittelalter vermutete man hier das Grab des Pompejus, daher der Name
[Foto Gottwald]

2.6.3 „Arithmetika“ von Diophant

Diophant, der sein Werk als systematisches Lehrbuch über Algebra betrachtete, widmete seine „Arithmetika“ dem „sehr verehrten Dionysios“. Wahrscheinlich handelte es sich bei ihm um den heiligen Dionysios, der 247 n. Chr. Bischof von Alexandria wurde.

Das Werk besteht aus 13 Büchern (Teilen). Von den 13 Büchern sind sechs (I, II, III und vermutlich VIII, IX, X) griechisch überliefert. In jüngster Zeit sind weitere Teile in arabischer Sprache entdeckt worden; sie werden als Bücher IV bis VII eingeordnet. Die restlichen drei Bücher wurden bis jetzt nicht aufgefunden. Die Nummerierung der Bücher stammt nicht von Diophant. Bevor man die Teile in arabischer Sprache fand wurden die griechischen Texte mit I, II, III und XI, XII und XIII nummeriert, die anderen mit IV bis IX [Diophant 1984], [Diophant 1982] (vgl. auch [Meskens 2010], [Coquerand 2010]). Sie enthalten bestimmte Gleichungen in Buch I und Gleichungen bzw. Gleichungssysteme in den übrigen Büchern. Die Aufgaben von Buch I sind überwiegend Gleichungen (Systeme) mit nur einer positiven Lösung. Am Anfang schrieb Diophant [Diophant 1952, S. 7]:

„Nun wollen wir aber den Weg zu den Problemen, deren wir eine große Fülle haben, beschreiten. Da es sich um viele und umfangreiche Probleme handelt, und da es deswegen lange dauert, bis sie von denjenigen, die sie studieren,

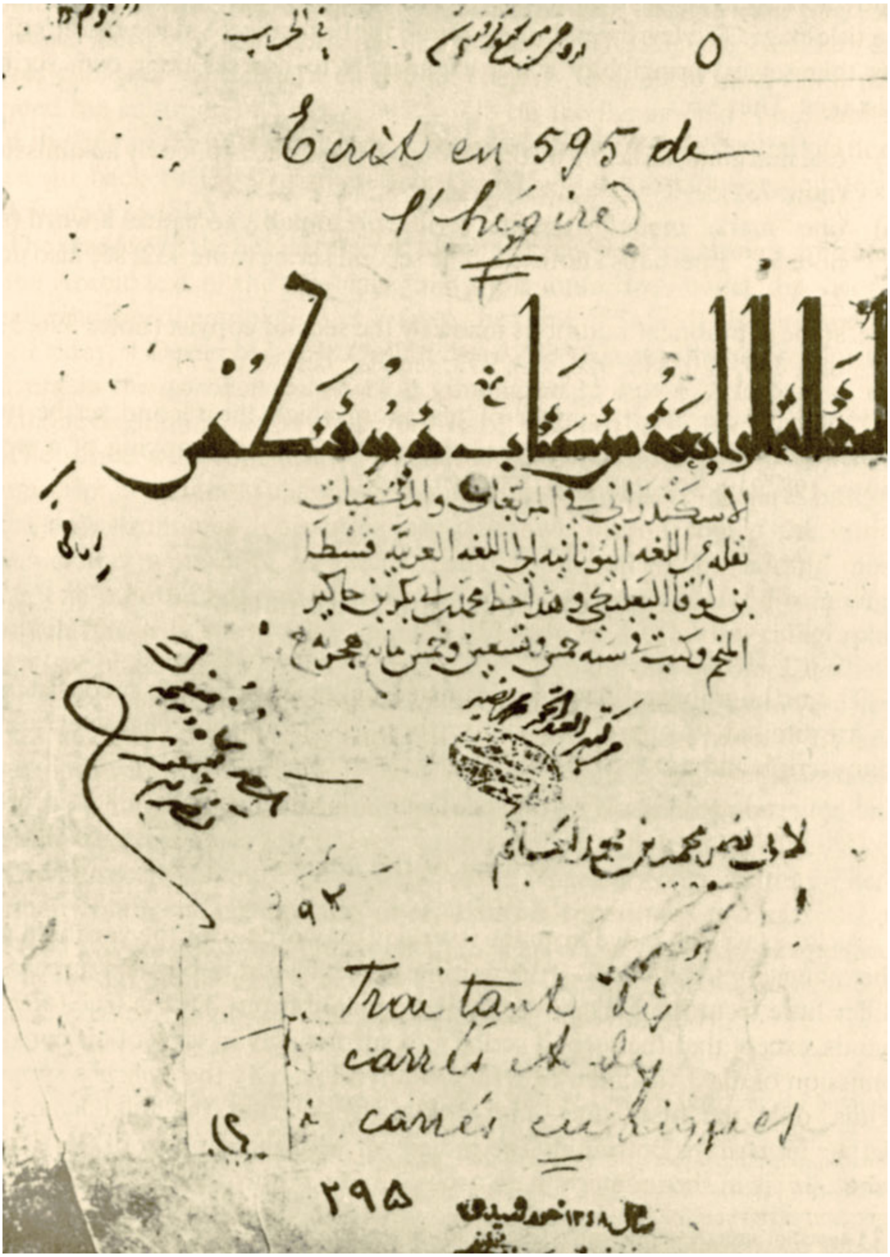


Abb. 2.6.2 Das erste Blatt der vier Bücher des Diophant, die in der Bibliothek Āstān-i Quds-i Riḍawī in Maschad (Iran) in Arabisch gefunden (wiederentdeckt) wurden

im Gedächtnis behalten und beherrscht werden, so habe ich mich entschlossen, so weit wie möglich eine Teilung der Probleme vorzunehmen, mit den elementaren Problemen anzufangen und allmählich zu den schwierigeren vorzuschreiten. So nämlich wird der Weg für den Anfänger leichter sein, und so wird der Stoff auch leichter im Gedächtnis bleiben.“

In der „Arithmetika“ bedeutet „Zahl“ eine „rationale Zahl“. Diophant sucht nur positive rationale Lösungen, obwohl er in seinen Zwischenrechnungen auch „abzuziehende Größen“ benutzt.

Im folgenden sollen drei (in moderner Form dargestellte) Beispiele Einblick in dieses Werk geben. Das erste Beispiel behandelt ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten und drei Gleichungen (Buch I, Aufgabe 18)[8].

Beispiel 2.6.1: Das System

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + 20 \\ x_1 + x_3 = x_2 + 40 \\ x_2 + x_3 = x_1 + 30 \end{cases}$$

ist gegeben. Diophant löst das Problem durch zwei Methoden:

1. Sei $x_1 + x_2 + x_3 = 2x$. Dann ist

$$\begin{aligned} &2x = 2x_3 + 20 \Rightarrow x_3 = x - 10 \\ &2x = 2x_1 + 30 \Rightarrow x_1 = x - 15 \\ &2x = 2x_2 + 40 \Rightarrow x_2 = x - 20 \end{aligned}$$

   Daraus folgt (durch Addition der drei Gleichungen) $3x = 2x + 45$, also $x = 45$, $x_1 = 30$, $x_2 = 25$, $x_3 = 35$.
2. Sei $x_3 = x$. Dann ist

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = x + 20 \\ x_2 + x = x_1 + 30 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + 2x_2 + x = x + x_1 + 50 \Rightarrow x_2 = 25$$

   Sodann gilt

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = x + 20 \\ x_1 + x = x_2 + 40 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x_1 + 5 = x \\ x_1 + x = 65 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 30, x = 35.$$

[8] In den Aufgaben 27, 28, 29, 30 im ersten Buch benutzt Diophant die babylonische Methode zur Lösung der quadratischen Gleichungen, wie in der Geschichte der Algebra in Babylonien erwähnt. In den genannten vier Aufgaben sind zwei Zahlen x, y gesucht, für die (Aufgabe 27) $x+y$ und $x \cdot y$, (Aufgabe 28) $x+y$ und x^2+y^2, (Aufgabe 29) $x+y$ und x^2-y^2 und letztlich (Aufgabe 30) $x-y$ und $x \cdot y$ gegeben sind.

Im nächsten Beispiel wird eine unbestimmte Gleichung aus Buch II, Aufgabe 9 mit Lösung zitiert.

Beispiel 2.6.2: Eine gegebene Zahl, die die Summe zweier Quadrate ist, ist in zwei andere Quadrate zu zerlegen.

Die Zahl 13, die die Summe von 9 und 4 ist, ist in die Summe zweier anderer Quadrate zu zerlegen. Es werden die Wurzeln aus den gegebenen Summanden genommen, also 3 und 2. Die Wurzel des einen gesuchten Summanden setzen wir in der Form $x+2$ an, die des anderen in der Form $ax-3$, wobei a beliebig ist, also zum Beispiel $2x-3$.

Dann werden die Quadrate x^2+4x+4 und $4x^2-12x+9$ sein. Die Summe ist dann $5x^2-8x+13$. Sie soll aber 13 sein. Also ist $x=\frac{8}{5}$. Die Wurzel des einen gesuchten Summanden ist also $x+2=\frac{18}{5}$, die des anderen $2x-3=\frac{1}{5}$. Die Quadrate aber sind $\frac{324}{25}$ und $\frac{1}{25}$. Die Summe der beiden Quadrate ist $\frac{325}{25}=13$, also gleich der gegebenen Zahl.

Das dritte Beispiel ist Aufgabe 24 aus Buch VIII „Arithmetika". Zunächst zitieren wir die Aufgabe und ihre Lösung. Wir wollen diese Aufgabe mit Hilfe moderner, analytischer Methoden diskutieren.

Beispiel 2.6.3: Eine gegebene Zahl ist als Summe zweier Summanden darzustellen, und es soll das Produkt der Summanden gleich sein einem um seine Wurzel verminderten Kubus.

Es sei die Zahl 6 gegeben. Es werde $x_1=x$ gesetzt, also $x_2=6-x$, aber $x_1x_2=6x-x^2$. Dieser Ausdruck soll gleich y^3-y sein. Ich bilde also $y=ax-1$, wo a beliebig ist, z. B. $a=2$. Ich bilde nun also $(2x-1)^3-(2x-1)=8x^3-12x^2+4x$. Dieser Ausdruck soll $6x-x^2$ sein. Wenn die Koeffizienten von x in beiden Ausdrücken gleich wären, würde sich x als rational ergeben. Die 4 ist entstanden aus $3\cdot 2-2$, die 6 aber ergibt sich aus der Gleichheit. Ich muss also a so bestimmen, dass $3a-a$ gleich 6 wird. Ich muss also $y=3x-1$ setzen und erhalte $y^3-y=27x^3-27x^2+6x$. Dieser Ausdruck muss gleich $6x-x^2$ sein. Es ergibt sich also $x=\frac{26}{27}$. Es ist also $x_1=\frac{26}{27}$, $x_2=\frac{136}{27}$.

In der heutigen Schreibweise lautet die Aufgabe: Bestimme $x_1,x_2,y\in\mathbb{Q}^+$, sodass

$$\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1\cdot x_2=y^3-y \end{cases}$$

Mit $x_1=x, x_2=6-x$ wird daraus die Aufgabe:
Bestimme $x,y\in\mathbb{Q}^+$, sodass $y^3-y=6x-x^2$.

Wie Diophant zu der oben (in moderner Formelsprache) beschriebenen Lösung gekommen ist, wird aus dieser Beschreibung nicht ohne weiteres klar. Insbesondere stellt sich die Frage nach einer Begründung für den Ansatz $y=ax-1$. Die geometrische Betrachtungsweise der Griechen legt

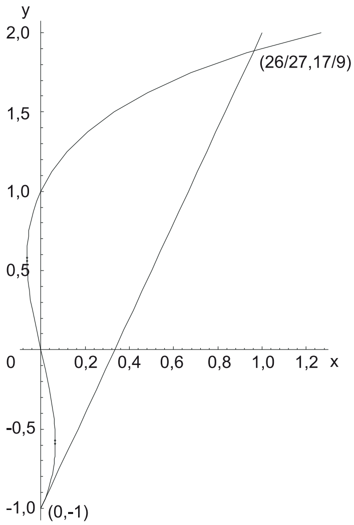


Abb. 2.6.3 Figur zu Beispiel 3

folgende Interpretation (in moderner Terminologie) nahe. Die Gleichung $f(x,y) := y^3 - y + x^2 - 6x = 0$ beschreibt eine algebraische Kurve dritter Ordnung in der x,y-Ebene. Die von Diophant gesuchte positive rationale Lösung (x_1, y_1) entspricht einem Punkt der Kurve mit positiven rationalen Koordinaten x_1, y_1. Kennt man nun bereits einen Punkt (x_0, y_0) der Kurve mit rationalen Koordinaten, so schneidet die Tangente $y - y_0 = a(x - x_0)$ mit $a = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{f}(x_0,y_0)}{\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{f}(x_0,y_0)}$ in diesem Punkt die Kurve in einem weiteren Punkt mit rationalen Koordinaten, wenn die Koeffizienten des Polynoms f rational sind. Im konkreten Fall von Aufgabe 3 ist $\mathrm{f}(0,-1) = 0$, also $(0,-1)$ ein Kurvenpunkt, daher $y = ax - 1$ eine Gerade durch diesen Punkt, welcher bei passender Wahl von a Tangente ist. Das ist für $a = 3$ (wegen $\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{f}(0,-1) = -6$, $\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{f}(0,-1) = 2$) der Fall (vgl. Abb. 2.6.3). Für $a = 2$ erhält man eine Sekante, also keine Lösung des Problems. Entwickelt man f an der Stelle $(x_0, y_0) = (0,-1)$ nach Taylor (indem man $y = (y+1) - 1$ setzt), so sieht man aus $(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 3(y+1) - (y+1) - 6x + x^2 = 0$, dass sich bei Elimination von y durch den Ansatz $y + 1 = ax$ die linearen Glieder für $a = 3$ aufheben, dann $x_0 = 0$ eine Doppelwurzel der kubischen Gleichung und die dritte Wurzel $x_1 = \frac{26}{27}$ wegen der rationalen Koeffizienten zwangsläufig rational ist. Dann sind auch $y_1 = \frac{17}{9}$ und $x_2 = \frac{136}{27}$ rational.

Seit ihrer Übersetzung ins Arabische (10. Jh.) beeinflusste die „Arithmetika“ von Diophant die Weiterentwicklung der Arithmetik, Algebra und Zahlentheorie in den islamischen Ländern. Sie nahm ihren Einzug auch in die Mathematik in Mittel- und Westeuropa zur Zeit der Renaissance und später, was besonders in den Werken von Pierre Fermat (1607/08–1665) erkennbar ist.

Als weitere Schrift Diophants ist noch ein Fragment über Polygonalzahlen erhalten, in dem er auf die elementare Zahlentheorie der Pythagoreer zurückgreift.

Wesentliche Inhalte der Algebra in Griechenland

≈ 585 v. Chr.	Thales	Durchmesser halbiert den Kreis; einbeschriebener Winkel im Halbkreis ist ein rechter; Berechnung der Höhe einer Pyramide mittels ihres Schattens
	Geometrische Algebra	
≈ 440	Hippokrates	Würfelverdopplung (delisches Problem) durch die Bestimmung von zwei mittleren Proportionalen
≈ 420	Hippias	Dreiteilung des Winkels (und Teilung eines Winkels in n gleiche Teile) mit Hilfe der Kurve Quadratrix
≈ 390	Archytas	Lösung des delischen Problems durch die Bestimmung eines Schnittpunktes dreier Flächen
≈ 350	Brüder Deinostratos u. Menaichmos	Lösung des delischen Problems durch die Bestimmung von zwei mittleren Proportionalen mit Hilfe zweier Kegelschnitte, Kreisquadratur mittels der Quadratrix von Hippias
≈ 330	Euklid	Geometrische Lösung linearer und rein quadratischer Gleichungen sowie der quadratischen Gleichungen $ax^2+b=cx$, $ax^2=bx+c$, und $ax^2+bx=c$, $(a,b,c>0)$ mittels Flächenanlegung und formalen geometrischen Beweisen
287–212	Archimedes	Probleme, die auf Gleichungen dritten oder vierten Grades führen (Kugelteilung, Dreiteilung des Winkels, Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks, Würfelverdopplung)
	Synkopierte Algebra	
≈ 250 n. Chr.	Diophant	Bestimmte und unbestimmte Gleichungen (diophantische Gleichungen) ersten und höheren Grades und Systeme solcher Gleichungen
≈ 520	Eutokios	Kommentar zu Archimedes „Über Kugel und Zylinder“, Bericht über die Geschichte des delischen Problems

2.7 Aufgaben zu Kapitel 2

Aufgabe 2.3.1: Flächenanlegung
Zeige: Für die Abbildungen 2.3.10 und 2.3.11 gilt die Gleichung

$$\mu(CC'D'S) = \mu(D'TNF) \quad .$$

Aufgabe 2.3.2: Ein Maximumproblem
Benutze Aufgabe 2.3.1 und zeige, dass gilt:

> Unter allen Rechtecken von gegebenem Umfang $4a$ hat
> das Quadrat (der Seite a) den größten Flächeninhalt.

Das bedeutet, dass die Lösung des Maximumproblems ein Ergebnis von Buch VI, Prop. 27 der „Elemente“ ist.

Aufgaben zum Diorismus

Aufgabe 2.3.3: Beweise die Aussage (E1) in 2.3.6 mit „modernen Mitteln“.

Aufgabe 2.3.4: Beweise die Aussage (E2) in 2.3.6 mit „modernen Mitteln“.

Aufgabe 2.3.5: Sei $s > 0$ und $ABCD$ ein Parallelogramm. Finde einen Punkt D' auf der Geraden durch B und D (s. Abb. 2.7.1), so dass das Parallelogramm $A'D'C'D$ den Flächeninhalt s besitzt und zeige $s < \mu(ABCD) \Leftrightarrow DC' < DC$.

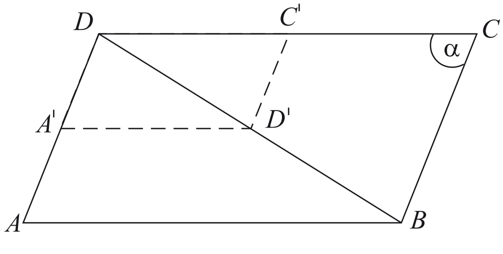


Abb. 2.7.1 Figur zur Aufgabe 2.3.5

Aufgabe 2.3.6: Mit den Bezeichnungen der Abbildungen 2.3.10 und 2.3.11 zeige man:
Sei $0 < \sigma \leq \mu\ (ACDM)$. Dann gilt in beiden Fällen

$$\mu\ (AC'D'M')\ = \sigma \iff \mu\ (SD'FD)\ = \mu\ (ACDM)\ - \sigma \quad .$$

Aufgabe 2.3.7: Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks
Man zeige:

a) Es gibt eine Gerade WM wie in Abb. 2.4.7, so dass Gleichung (2.4.2) gilt.

b) Sei $\mu = \frac{\pi}{7}$, dann gilt:

$$8\cos^4\mu + 4\cos^3\mu - 8\cos^2\mu - 3\cos\mu + 1 = 0.$$

Daraus folgt:

$$8\cos^3\mu - 4\cos^2\mu - 4\cos\mu + 1 = 0 \quad .$$

c) Seien $A_1 = A, A_2, \ldots, A_7$ die Ecken eines regelmäßigen Siebeneckes, einbeschrieben im Kreis K und A, D, C, M wie in Abbildung 2.4.10. Dann gelten die Beziehungen (2.4.3) aus 2.4.2.

d) Die Zahlen $\cos q\pi$ und $\sin q\pi$ sind für jedes $q \in \mathbb{Q}$ algebraisch[9]. Die Zahlen $\sec q\pi$ und $\tan q\pi$ sind algebraisch (falls $\cos q\pi \neq 0$). Die Zahlen $\operatorname{cosec} q\pi, \cot q\pi$ sind algebraisch (falls $\sin q\pi \neq 0$). Beispielsweise ist die Zahl $\cos\frac{\pi}{7} + \tan\frac{\pi}{13}$ algebraisch.

Hinweis zu d): Verwende die Moivreschen Formeln.

Aufgabe 2.3.8: Dreiteilung des Winkels
Zeige, dass ein Winkel von 60° allein mit Zirkel und Lineal nicht dreigeteilt werden kann.

Hinweis: Benutze die Identität $\cos 3v = 4\cos^3 v - 3\cos v$ und den Satz: Sei f ein irreduzibles Polynom über $\mathbb{Q}$ vom Grad

$$n \neq 2^k$$

und $f(\alpha) = 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). Dann ist α allein mit Zirkel und Lineal nicht konstruierbar.

Aufgabe 2.3.9: Dreiteilung eines rechten Winkels
Zeige, dass ein Winkel von 90° allein mit Zirkel und Lineal dreigeteilt werden kann.

Aufgabe 2.3.10: Zur Bestimmung von zwei mittleren Proportionalen
Zeige die Richtigkeit der Gleichungen (2.4.9).

---

[9] Eine komplexe Zahl heißt algebraisch, wenn sie einer Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

mit rationalen Koeffizienten $a_k (k = 0, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}_0)$ genügt. Die Menge $\mathcal{A}$ aller algebraischen Zahlen bildet einen algebraisch abgeschlossenen Körper, d. h. für $b_k \in \mathcal{A}$ $(k = 0, \ldots, n; n \in \mathbb{N}_0)$ sind auch alle Wurzeln der Gleichung $b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 = 0$ algebraisch.

http://www.springer.com/978-3-642-38238-3

4000 Jahre Algebra
Geschichte – Kulturen – Menschen
Alten, H.-W.; Djafari Naini, A.; Eick, B.; Folkerts, M.; Schlosser, H.; Schlote, K.-H.; Wesemüller-Kock, H.; Wußing, H.
2014, XIV, 745 S. 315 Abb., 242 Abb. in Farbe., Hardcover
ISBN: 978-3-642-38238-3