

Inhaltsverzeichnis

1	Anfänge von Arithmetik und Algebra	1
1.1	Zählen, Zahlen und Rechnen am Beginn	2
1.2	Arithmetik und Algebra im alten Ägypten	6
1.2.0	Abriss der kulturgeschichtlichen Entwicklung im Niltal	8
1.2.1	Altägyptische Zahlzeichen	12
1.2.2	Arithmetik im alten Ägypten	13
1.2.3	Primitive Algebra	16
1.3	Mesopotamische (Babylonische) Algebra	21
1.3.0	Entwicklung früher Hochkulturen in Mesopotamien . .	22
1.3.1	Zahlzeichen in Keilschrift	28
1.3.2	Die Methode des einfachen falschen Ansatzes	30
1.3.3	Lineare Gleichungssysteme	32
1.3.4	Nichtlineare Systeme und quadratische Gleichungen .	35
1.3.5	Kubische Gleichungen: Der Beginn eines 3500 Jahre alten Problems	39
1.3.6	Näherungswerte von $\sqrt{2}$	40
1.4	Aufgaben zu Kapitel 1	45
2	Die geometrische Algebra der Griechen	47
2.0	Einführung	50
2.1	Beginn des abstrakten Denkens	52
2.1.1	Ionische Periode (ca. 600–450 v. Chr.)	53
2.1.2	Athenische Periode (450–300 v. Chr.)	55
2.1.3	Hellenistische Periode (ca. 300 v. Chr.–ca. 150 n. Chr.)	59
2.1.4	Spätantike (ca. 150– ca. 500 n. Chr.)	63
2.2	Das besondere Merkmal der griechischen Algebra	65
2.3	Lineare und quadratische Gleichungen	67
2.3.1	Die „Elemente“ des Euklid	67
2.3.2	Die Methode der Flächenanlegung	71
2.3.3	Lineare Gleichungen	73
2.3.4	Rein quadratische Gleichungen	74
2.3.5	Ein Diorismos	75
2.3.6	Lösung quadratischer Gleichungen nach Euklid	78
2.4	Kubische und biquadratische Gleichungen	80
2.4.1	Kubische Gleichungen in „Kugel und Zylinder“ von Archimedes	80
2.4.2	Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks durch „Einschiebung“ von Archimedes	85
2.4.3	Dreiteilung des Winkels nach Archimedes	89
2.4.4	Archimedes und die biquadratischen Gleichungen . . .	90
2.4.5	Das Delische Problem – die Würfelverdopplung	91
2.5	Die Quadratur des Kreises mittels der Quadratrix	96

2.6	„Formale Algebra“	100
2.6.1	Formale Algebra vor Diophant	100
2.6.2	Synkopierte Algebra	101
2.6.3	„Arithmetika“ von Diophant	103
2.7	Aufgaben zu Kapitel 2	109
3	Algebra im Orient	111
3.1	Algebra in China	112
3.1.0	Geschichtlicher Abriss	113
3.1.1	Zahlzeichen	123
3.1.2	Quadrat- und Kubikwurzeln	125
3.1.3	Der doppelte falsche Ansatz (Überschuss und Fehlbetrag)	127
3.1.4	Lineare Gleichungssysteme	128
3.1.5	Algebra im 13. Jahrhundert	130
3.2	Algebra in Indien	135
3.2.0	Geschichtlicher Abriss	137
3.2.1	Zahlzeichen und das dezimale Stellenwertsystem	141
3.2.2	Algebraische Ausdrucksweise	144
3.2.3	Näherungsverfahren für Wurzeln	145
3.2.4	Lineare Gleichungen	146
3.2.5	Quadratische Gleichungen	148
3.3	Algebra in den Ländern des Islam	153
3.3.0	Geschichtlicher Abriss	155
3.3.1	Die Verbreitung der indischen Ziffern in den islamischen Ländern	169
3.3.2	Algebraische Ausdrucksweise	171
3.3.3	Lineare und unbestimmte Gleichungen	174
3.3.4	Quadratische Gleichungen	175
3.3.5	Arithmetisierung der Algebra	182
3.3.6	Die (geometrische) Theorie von ʿUmar Ḥayyām für die Gleichungen dritten Grades	184
3.3.7	Eine Abhandlung von Ḥayyām über Algebra	190
3.3.8	Gleichungen vierten Grades	193
3.3.9	Numerische Auflösung algebraischer Gleichungen	194
3.4	Aufgaben zu Kapitel 3	203
4	Algebra im Europa des Mittelalters und der Renaissance	207
4.0	Einführung	209
4.1	Übersetzungen aus dem Arabischen	216
4.2	Leonardo von Pisa	217
4.3	Jordanus Nemorarius und Johannes de Muris	222
4.4	Die Entwicklung in Italien	226
4.4.1	Luca Pacioli	231
4.5	Entwicklungen in Westeuropa	233

4.5.1	Nicolas Chuquet	233
4.5.2	Robert Recorde	234
4.5.3	Simon Stevin	236
4.5.4	Pedro Nunes	238
4.6	Frühe Algebra im deutschsprachigen Raum - die Deutsche Coß	241
4.6.1	Die sog. Deutsche Coß	243
4.6.2	Adam Ries, Abraham Ries u. Jacob Ries als Cossisten	248
4.6.3	Christoph Rudolff und Michael Stifel	254
4.7	Zur Entwicklung des Zahlbegriffes	257
4.8	Aufgaben	261
5	Algebra wird zur selbständigen Disziplin (16.-18. Jh.)	265
5.0	Historische Einführung	267
5.1	Gleichungen dritten und vierten Grades	270
5.1.1	Lösungen für Gleichungen dritten Grades	270
5.1.2	Niccolò Tartaglia	272
5.1.3	Girolamo Cardano	275
5.1.4	Auflösung von Gleichungen vierten Grades	279
5.1.5	Raffaello Bombelli	280
5.2	Viète und Descartes	284
5.2.1	François Viète (Franciscus Vieta)	284
5.2.2	René Descartes (Cartesius)	292
5.2.3	Die algebraischen Methoden von Descartes	294
5.3	Newton und Euler	301
5.3.1	Isaac Newton	301
5.3.2	Zur Vorgeschichte des Fundamentalsatzes der Algebra	303
5.3.3	Leonhard Euler und der Fundamentalsatz der Algebra	305
5.3.4	Euler und sein Algebralehrbuch	309
5.4	Aufgaben	315
6	Algebra in der 2. Hälfte des 18. und am Beginn des 19. Jahrhunderts	319
6.0	Historische Einführung	321
6.1	Die Begründung des Rechnens in gewöhnlichen Zahlbereichen	324
6.2	Die Begründung der komplexen Zahlen	329
6.3	Algebra als Methode	334
6.4	Lösbarkeit der allgemeinen Gleichung n -ten Grades in Radikalen	340
6.4.1	Die Ergebnisse von Lagrange	342
6.4.2	Die Lösungsansätze von Vandermonde und Waring . .	345
6.4.3	Ruffini und erste Ergebnisse über Permutationsgruppen	347
6.4.4	Gauß und die Auflösung der Kreisteilungsgleichung . .	349
6.4.5	Abels Beweis für die Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung 5. Grades	352

6.5	Zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra durch Gauß	355
6.6	Die Herausforderung der Algebra durch neue Objektbereiche	360
6.6.1	Determinanten	360
6.6.2	Einfluss der „Disquisitiones arithmeticae“ von Gauß .	366
6.7	Aufgaben zu Kapitel 6	371
7	Die Herausbildung erster Strukturbegriffe	373
7.0	Vorbemerkungen	375
7.1	Die Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen – Galois-Theorie	377
7.1.1	Der Beitrag von Niels Henrik Abel	377
7.1.2	Die Lösung des Problems durch Évariste Galois	381
7.2	Von Permutationen zu Permutationsgruppen	389
7.3	Auf dem Weg zur abstrakten Algebra	394
7.3.1	George Peacock	397
7.3.2	Augustus de Morgan	399
7.3.3	Duncan Farquharson Gregory	402
7.3.4	George Boole und die Algebra der Logik	404
7.4	Erste Definitionen abstrakter algebraischer Systeme	408
7.4.1	William Rowan Hamilton und die Quaternionen . . .	408
7.4.2	Arthur Cayley – Oktonionen und die erste Definition des abstrakten Gruppenbegriffs	417
7.5	Zahlentheoretische Einflüsse auf die Entwicklung der Algebra	422
7.5.1	Gaußsche ganze Zahlen und Reziprozitätsgesetze . . .	422
7.5.2	Kummers Schöpfung der idealen Zahlen	428
7.6	Die Fortschritte in der linearen Algebra	432
7.6.1	Die Entwicklung des Matrizenkalküls	436
7.6.2	Die Entwicklung der Theorie der Vektorräume	442
7.6.3	Die Arbeiten von Hermann Günther Graßmann	446
7.7	Aufgaben zu Kapitel 7	457
8	Die Entwicklungen der Algebra von 1850 bis 1880	463
8.0	Vorbemerkungen	465
8.1	Weitere Fortschritte im Verständnis der Galois-Theorie . . .	470
8.1.1	Die Rezeption der Galois-Theorie in Deutschland . . .	471
8.1.2	Die Darstellung der Galois-Theorie durch Joseph Alfred Serret und Camille Jordan	474
8.2	Die große Zeit der Invariantentheorie	483
8.2.1	Die britische Schule der Invariantentheorie	484
8.2.2	Die Weiterentwicklung und die Formulierung des Grundproblems der Invariantentheorie	487
8.3	Die Theorie der Transformationsgruppen	491
8.3.1	Kleins Erlanger Programm und die Theorie der endlichen Transformationsgruppen	491
8.3.2	Die Liesche Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen	498

8.4	Die ersten Strukturuntersuchungen bei hyperkomplexen Systemen	503
8.4.1	Hankels „Theorie der complexen Zahlensysteme“ . . .	504
8.4.2	Die Klassifikation der Algebren bei Benjamin Peirce .	505
8.5	Aufgaben zu Kapitel 8	512
9	Algebra an der Wende zum 20. Jahrhundert	513
9.0	Historische Einführung	516
9.1	Mengenlehre und Algebra der Logik	520
9.1.1	Schröders Algebra der Logik und Freges Logizismus .	523
9.1.2	Die axiomatische Methode	529
9.2	Die Herausbildung des abstrakten Gruppenbegriffs	533
9.3	Dedekind und Kronecker: Algebraische Zahlen, Ideale und Divisoren, Körper	548
9.4	Die axiomatische Fixierung des Körperbegriffs	559
9.5	Die Profilierung weiterer Teilgebiete der Algebra	572
9.5.1	Hyperkomplexe Systeme (Algebren)	572
9.5.2	Darstellungen von Gruppen und Algebren	583
9.5.3	Die algebraische Geometrie	588
9.6	Aufgaben zu Kapitel 9	594
10	Die Algebra im 20. Jahrhundert	599
10.0	Historische Einführung	603
10.1	Die Etablierung der modernen abstrakten Algebra	608
10.1.1	Aufbau einer allgemeinen Ring- und Idealtheorie . . .	609
10.1.2	„Moderne Algebra“	614
10.2	Von der Algebra zur Mathematik der Strukturen	621
10.2.1	Die Entstehung der Verbandstheorie	623
10.2.2	Bourbaki und Strukturkonzepte	629
10.3	Die Wechselwirkung der abstrakten Algebra	634
10.3.1	Die algebraische Geometrie	634
10.3.2	Anwendungen der Algebra in der Physik	639
10.3.3	Die algebraische Durchdringung der Topologie	642
10.3.4	Algebraische Methoden in anderen Bereichen	645
10.4	Computeralgebra	649
10.4.1	Vorbemerkungen	649
10.4.2	Charakterisierung der Computeralgebra	651
10.4.3	Die Entwicklung von Algorithmen	654
10.4.4	Die Entwicklung von Computeralgebrasystemen	662
10.4.5	Anwendungen der Computeralgebra, mathematische Bildung, Präsentation in der Gesellschaft	663
10.5	Computeralgebra im Jahre 2013	665
10.5.1	Algorithmen	666
10.5.1.1	Algorithmische Gruppentheorie	666
10.5.1.2	Algorithmische algebraische Zahlentheorie . . .	668

10.5.2	Software Systeme	669
10.5.3	Anwendungen	669
10.5.3.1	Der Zauberwürfel	669
10.5.3.2	Die Nullstellen eines Polynoms	671
10.5.3.3	Kristallographische Gruppen	671
10.5.3.4	Robotik	674
10.5.3.5	Kryptographie	675
10.6	Aufgaben zu Kapitel 10	678
Literaturverzeichnis		679
Abbildungsverzeichnis		715
Personenregister mit Lebensdaten		723
Index		735

Hinweise für den Leser

In den Kapiteln 1 – 5 sind die Lebensdaten der Gelehrten auch im laufenden Text enthalten, in den Kapiteln 6 – 10 wegen der großen Anzahl nur vereinzelt. Im Personenregister sind alle Lebensdaten (soweit bekannt) aufgeführt.

Runde Klammern (...) enthalten ergänzende Einschübe oder Hinweise auf Abbildungen oder Aufgaben.

Eckige Klammern [...] enthalten

- im laufenden Text Hinweise auf Literatur
- unter Abbildungen Quellenangaben.

Abbildungen sind nach Teilkapiteln nummeriert, z. B. bedeutet Abb. 7.4.1 die erste Abbildung in Teil 4 von Kapitel 7.

Aufgaben sind am Ende jedes Kapitels zusammengefaßt, aber wie die Abbildungen nach Kapiteln nummeriert, z. B. bedeutet Aufgabe 7.4.2 die zweite Aufgabe zu Teil 4 von Kapitel 7.

Die Transskriptionen chinesischer bzw. indischer Namen und Begriffe erfolgten entsprechend [Martzloff 1997] bzw. [Tropfke 1980]. Die Schreibweise von Namen und Werken islamischer Gelehrter entspricht der wissenschaftlichen Transskription aus dem Arabischen.

<http://www.springer.com/978-3-642-38238-3>

4000 Jahre Algebra

Geschichte – Kulturen – Menschen

Alten, H.-W.; Djafari Naini, A.; Eick, B.; Folkerts, M.;
Schlosser, H.; Schlote, K.-H.; Wesemüller-Kock, H.;
Wußing, H.

2014, XIV, 745 S. 315 Abb., 242 Abb. in Farbe.,
Hardcover

ISBN: 978-3-642-38238-3