2 Die Schritte zum Ziel

2.1 Ein einfaches Modell aufstellen

Um zu verstehen, wie ein Segway die Balance hält, betrachten wir ein etwas einfacheres Problem: Wir wollen herausfinden, wie sich ein inverses Pendel nur durch horizontales Bewegen seines Aufhängepunkts so beeinflussen lässt, dass es in seiner instabilen oberen Ruhelage, das heißt auf dem Kopf, stehen bleibt.

1. Stellen Sie als Vorbereitung das Thema in einer Präsentation für Nicht-Ingenieure vor:
   - Was ist ein Segway? Wie funktioniert er?
   - Was ist ein inverses Pendel? Wie funktioniert die Regelung prinzipiell? Gibt es Analogien aus dem Alltag?
   - Was sind Gemeinsamkeiten, was sind Unterschiede zwischen einem Segway und einem inversen Pendel?

   Die Präsentation soll für ein nicht fachkundiges Publikum ausgerichtet sein und 10–15 Minuten dauern.

2. Schreiben Sie einen Exkurs für ein Schulbuch, das in einem Mathe-Leistungskurs verwendet wird:
   - Was ist eine Bewegungsgleichung?
   - Was ist eine Differentialgleichung?
   - Wo kommen beide im Ingenieursalltag vor?
   - Geben Sie einfache Beispiele!

2.2 Die Bewegung des Pendels verstehen und beschreiben

Wenn wir die Bewegung des inversen Pendels nach unseren Wünschen beeinflussen wollen, müssen wir zunächst verstehen, wie das Pendel auf Bewegungen des Wagens reagiert. Der Wagen wird gemäß Abb. 1.1 über eine Kraft F angetrieben.

J. Härterich, A. Rooch, *Das Mathe-Praxis-Buch*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-642-38306-9_2,

Der Zusammenhang zwischen der Antriebskraft F, der Wagenposition x und dem Pendelwinkel α kann in guter Näherung über die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{ml}{M+m}\dot{\alpha}^2\sin\alpha + \frac{ml}{M+m}\ddot{\alpha}\cos\alpha + \frac{1}{M+m}F\\ \ddot{\alpha} &= \frac{3}{4l}\ddot{x}\cos\alpha + \frac{3g}{4l}\sin\alpha + \frac{3}{4ml^2}T\end{aligned}$$

beschrieben werden. (Diese Bewegungsgleichung lassen sich mit Hilfe des *Lagrange-Formalismus* finden, der üblicherweise im Rahmen einführender Mechanik-Kurse vorgestellt wird.) Dabei hat das Pendel die Masse m, den Schwerpunkt-Drehpunkt-abstand l und das Massenträgheitsmoment Θ, der Wagen die Masse M. Mit dem Moment T, das ebenfalls Einfluss auf das System ausübt, modellieren wir Störungen wie etwa Luftbewegungen, setzen jedoch, um die Rechnungen zu vereinfachen, $T = 0$. g bezeichnet die Schwerebeschleunigung.

1. Die Größen $x(t)$ und $\alpha(t)$ (im Folgenden oft kurz x und α) geben an, wie sich Wagenposition x und Pendelwinkel α zum Zeitpunkt t verhalten.

   Wie man schnell erkennt, beinhalten die obigen Bewegungsgleichung nicht nur die gesuchten Funktionen x und α, sondern auch ihre zeitlichen Ableitungen – die Bewegungsgleichungen sind (gekoppelte) Differentialgleichungen. Darüber hinaus sind die Gleichungen nichtlinear, da Produkte wie $\dot{\alpha}^2 = \dot{\alpha}\cdot\dot{\alpha}$ und trigonometrische Funktionen wie $\cos\alpha$ auftreten. Die analytische Lösung der Differentialgleichungen, das heißt die exakte Berechnung der Funktionen x und α, ist daher extrem schwierig, wenn nicht gar unmöglich. Haben Sie eine Idee, wie Sie dieses Problem lösen und den gesuchten Funktionen x und α auf die Spur kommen können?

2. Schreiben Sie eine Übersicht für Erstsemester in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen:
   - Was ist eine Taylorentwicklung?
   - Wozu braucht man sie?
   - Stellen Sie exemplarisch die Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ bis zur zweiten Ordnung für folgende Funktionen vor:
     a) $f_1(x) = \frac{1}{x+1}$
     b) $f_2(x) = \sin(x)$
     c) $f_3(x) = \cos(x)$
     d) $f_4(x) = x \cdot e^x$
   - Zeichnen Sie die Funktionen und die zugehörigen Näherungen zusammen in jeweils ein Koordinatensystem! Sie können dazu einen Computer benutzen (müssen es aber nicht).

3. Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Ordnung 1 der Funktionen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\dot{\alpha}^2$ und setzen Sie sie in die Bewegungsgleichung ein. Vernachlässigt man das Moment T ($T = 0$), so erhalten Sie nach einigen Umformschritten die linearisierten Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = \frac{3mg}{4M+m}\alpha + \frac{4}{4M+m}F$$
$$\ddot{\alpha} = \frac{3g(M+m)}{l(4M+m)}\alpha + \frac{3}{l(4M+m)}F.$$

Schreiben Sie die beiden Gleichungen nun in eine Vektorgleichung

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{b}F$$

mit dem Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

um. Ermitteln Sie hierzu die Systemmatrix $\mathbf{A}$ und den Vektor $\vec{b}$.

4. Schreiben Sie eine Anleitung/ein Rezept: Wie funktioniert das Diagonalisieren einer Matrix? Erklären Sie dabei mit Formeln, aber auch mit eigenen Worten: Was ist ein Eigenwert? Was ist ein Eigenvektor?

5. Im nächsten Schritt wollen wir die Bewegungsgleichungen lösen, die wir jetzt als lineares Differentialgleichungssystem dargestellt haben. Frischen Sie Ihr Wissen zu dem Thema auf und machen Sie sich mit den Methoden vertraut, um lineare Differentialgleichungssysteme zu lösen – werden Sie Experte! Schreiben Sie schließlich eine Anleitung, mit der Sie einem Anfänger anschaulich und übersichtlich erklären: Wie löst man homogene, lineare DGL-Systeme?

6. Gehen Sie zunächst davon aus, dass keine Kraft wirkt ($F = 0$). In diesem Fall gilt offensichtlich auch $\vec{b}F = 0$; die Bewegungsgleichungen gehen also in ein homogenes Differentialgleichungssystem über. Lösen Sie in dieser Situation die oben aufgestellte linearisierte Bewegungsgleichung $\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}\vec{x}$ des inversen Pendels für die folgenden konkreten Werte:
   - Die Masse des Wagens betrage $M = \frac{1}{2}\,\mathrm{kg}$,
   - die Masse des Pendels $m = 1\frac{3}{4}\,\mathrm{kg}$,
   - der Abstand von Dreh- und Schwerpunkt betrage $l = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}$
   - und die Schwerebeschleunigung $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

7. Interpretieren Sie die Lösung der linearisierten, homogenen Bewegungsgleichung: Beschreiben Sie mit eigenen Worten, was sie über die Bewegung des Pendels aussagt. Ist das Pendel stabil?

2.3 Zwischenbilanz

Wir haben die homogene, linearisierte Bewegungsgleichung des inversen Pendels gelöst und die Lösung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \alpha(t) \\ \dot{\alpha}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 7c_4e^{-6t} + 7c_3e^{6t} + c_2(1+t) \\ c_2 + 42c_4e^{-6t} + 42c_3e^{6t} \\ -18c_4e^{-6t} + 18c_3e^{6t} \\ 108c_4e^{-6t} + 108c_3e^{6t} \end{pmatrix}$$

erhalten, die uns angibt, wie sich der Aufhängepunkt x und der Winkel α zur Zeit t verhalten und ändern. Blicken Sie zurück und ziehen Sie eine Zwischenbilanz; halten Sie dazu einen kurzen Vortrag (Dauer: 10–15 Minuten):

- Wie haben Sie das Ergebnis erreicht?
- Welche Tricks und Vereinfachungen haben Sie benutzt?
- Geben Sie uns eine Einschätzung: Sind die Vereinfachungen legitim? Wie wirken sie sich Ihrer Meinung nach auf das Ergebnis aus? Berechnen Sie dazu, in welchem Wertebereich sich die Funktionen $\sin x$, $\cos x$ und x^2 höchstens um 1% von ihrer Linearisierung unterscheiden.

2.4 Regelung durch Zustandsrückführung

Wir haben die Bewegungsgleichung für das inverse Pendel gelöst und dabei festgestellt, dass die Eigenbewegung des inversen Pendels (welche sich für $F = 0$ einstellt) instabil ist. Glücklicherweise müssen wir das System nicht sich selbst überlassen, sondern können über die Kraft F Einfluss auf die Bewegung des Wagens nehmen. Ein solcher Eingriff verändert natürlich das Bewegungsverhalten des Systems – die oben berechnete Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems beschreibt die Pendelbewegung dann nicht mehr korrekt. Unser Ziel ist es, einen geeigneten Kraftverlauf $F(t)$ zu ermitteln, der zu einer stabilen Lösung der Bewegungsgleichung führt. Es ist anschaulich klar, dass so ein F keine konstante Größe sein wird: Um auf unterschiedlich Auslenkungen des Pendels reagieren zu können, muss die aktuelle Krafteinleitung offensichtlich vom Zustand des inversen Pendels abhängen (bei großen Pendelwinkeln muss der Wagen beispielsweise stärker beschleunigt werden als bei kleinen Auslenkungen). Wir suchen also eine Funktion $F(\vec{x}(t))$, die die

Kraft $F(t)$ in Abhängigkeit vom Systemzustand $\vec{x}(t)$ so festlegt, dass das inverse Pendel stabilisiert wird.

1. Wenn wir annehmen, dass die aufzuschaltende Kraft F linear von Zustandsvektor $\vec{x}$ abhängt, ergibt sich ein Ansatz für ein sogenanntes *Regelgesetz* zu $F = -\mathbf{K}\vec{x}$. Die Matrix $\mathbf{K}$ wird in diesem Zusammenhang als *Reglermatrix* bezeichnet und gibt an, wie genau der Zustandsvektor $\vec{x}$ die Kraft F beeinflusst. Das Minuszeichen in der Gleichung ist Konvention im Bereich der Regelungstechnik. Setzt man dieses Regelgesetz in das linearisierte Differentialgleichungssystem $\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{b}F$ ein, so ergibt sich

$$\dot{\vec{x}} = (\underbrace{\mathbf{A} - \vec{b}\mathbf{K}}_{\mathbf{A}'})\vec{x}.$$

Mit unseren konkreten Werten erhält man

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 36 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{16}{15} \\ 0 \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}.$$

Mit einer geschickten Wahl von $\mathbf{K}$ hat die neue DGL $\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}'\vec{x}$ eine stabile Lösung. Probieren Sie die folgenden verschiedenen Reglermatrizen $\mathbf{K}$ aus, indem sie konkret nachrechnen, ob sie bei $\mathbf{A}'$ für negative Eigenwerte sorgen:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & \frac{469}{24} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{K}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & \frac{637}{24} & \frac{-7}{2} \end{pmatrix} \\ \mathbf{K}_3 &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{25}{8} & \frac{363}{8} & \frac{25}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Erklären Sie den Zusammenhang zwischen den Eigenwerten von $\mathbf{A}$, beziehungsweise $\mathbf{A}'$, und der Stabilität des Systems.

3. Bereiten Sie eine Präsentation vor (Dauer 20–30 Minuten), in der Sie anderen Ingenieurstudenten und Mathematikern anhand des inversen Pendels erläutern, inwieweit die Stabilisierung des Segways mathematische Methoden erfordert. Achten Sie dabei auf folgende Punkte:
   - Einführung: Was ist ein Segway?
   - Was macht man mit einer nichtlinearen Bewegungsgleichung, die man analytisch nur schwer oder gar nicht lösen kann?
   - Wirken sich die Vereinfachungen auf die Ergebnisse aus?
   - Was macht eine Regelung? Was ist der mathematische Trick dahinter? Woran kann man erkennen, dass eine Bewegungsgleichung stabil ist?

- Denken Sie daran, dass das Publikum aus „interessierten Laien“ besteht, die (nur) Kenntnisse aus den grundlegenden Mathematik-Kursen besitzen.
- Gestalten Sie die Präsentation schön (nicht zu viel Text, anschauliche Grafiken, auflockernde Bilder) – so wie Sie sie als Zuhörer gerne hätten.
- Dennoch sollten alle Gruppen-Mitglieder auch Fragen zu einzelnen Details beantworten können.

http://www.springer.com/978-3-642-38305-2

Das Mathe-Praxis-Buch
Wie Ingenieure Mathematik anwenden - Projekte für die Bachelor-Phase
Härterich, J.; Rooch, A.
2014, XII, 222 S. 43 Abb., 20 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-642-38305-2