

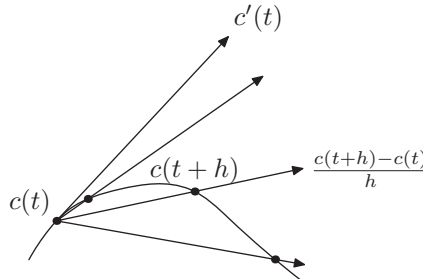
2. Kurven

2.1 Bogenlänge

Die einfachsten Immersionen sind *reguläre Kurven*. Das sind stetige differenzierbare (C^1 -) Abbildungen $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiert auf einem offenen Intervall¹ $I \subset \mathbb{R}$, mit $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Der *Ableitungsvektor*

$$c'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} \quad (2.1)$$

wird auch *Tangentenvektor* genannt, denn er zeigt in Richtung der Geraden $\tau_t = c(t) + \mathbb{R}c'(t)$, der *Tangente* an die Kurve im Punkt $c(t)$. Der Vektor $c(t+h) - c(t)$ verbindet die Punkte $c(t)$ und $c(t+h)$ und zeigt deshalb in die Richtung der *Sekante* $\sigma_{t,h}$, der Geraden durch die Kurvenpunkte $c(t)$ und $c(t+h)$, und die Tangente τ_t im Punkt t ist nach Definition die Limes-Gerade der Sekanten $\sigma_{t,h}$ für festes t und $h \rightarrow 0$.



Die Tangente ändert sich nicht bei Parameterwechsel: Ist $c = \tilde{c} \circ \phi$ für einen Diffeomorphismus $\phi : I \rightarrow J$, so ist $c'(t) = \phi'(t) \cdot \tilde{c}'(\phi(t))$ und damit ist τ_t auch die Tangente der Kurve $\tilde{c}$ im Punkte $\phi(t)$.

Die Kurven sind für die Differentialgeometrie nicht nur die einfachsten Beispiele, sondern sie sind auch von allgemeiner Bedeutung, nämlich für die Abstandsmessung. *Länge* und *Abstand* gehören zu den wichtigsten Begriffen

¹ Das Intervall braucht nicht unbedingt offen sein. Ganz allgemein werden wir eine Abbildung auf einer beliebigen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^m$ *stetig differenzierbar* (bzw. C^k) nennen, wenn sie (wenigstens lokal) zu einer stetig differenzierbaren (bzw. C^k -) Abbildung auf einer offenen Umgebung von D fortsetzbar ist.

der Geometrie. Dazu benötigen wir das *Skalarprodukt* im $\mathbb{E}^n$, das je zwei Vektoren $x = (x^1, \dots, x^n)$ und $y = (y^1, \dots, y^n)$ im $\mathbb{E}^n$ die reelle Zahl

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i \quad (2.2)$$

zuordnet, und wir bezeichnen die Größe

$$|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2} \quad (2.3)$$

als *Betrag*, *Norm* oder *Länge* des Vektors x . Die Quadratsumme unter der Wurzel spiegelt den Lehrsatz des *Pythagoras* wieder (vgl. Kapitel 1, S. 3).

Nun definieren wir die *Bogenlänge* einer (nicht notwendig regulären) stetig differenzierbaren Kurve $c : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$ als die Zahl

$$\mathcal{L}(c) = \int_a^b |c'(t)| dt. \quad (2.4)$$

Wieso entspricht diese Definition der anschaulichen Bedeutung von „Länge einer krummen Linie“? Wenn wir das Intervall genügend fein unterteilen, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$, und dann in jedem Teilintervall $[t_{i-1}, t_i]$ den Tangentenvektor $c'(t)$ durch den Sekantenvektor $\frac{c(t_i) - c(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$ ersetzen, so erhalten wir $\mathcal{L}(c) \approx \sum_{i=1}^N |c(t_i) - c(t_{i-1})|$; wir addieren also die Abstände von benachbarten Kurvenpunkten auf. Ein genaues Argument folgt weiter unten.

Lemma 2.1.1. *Die Bogenlänge ändert sich nicht bei Parameterwechseln.*

Beweis: Ist $c = \tilde{c} \circ \phi$ für einen Parameterwechsel $\phi : I \rightarrow J$, so erhalten wir mit der Substitution $u = \phi(t)$, $du = \phi'(t)dt$

$$\mathcal{L}(c) = \int_I |c'(t)| dt = \int_I |\phi'(t)| \cdot |\tilde{c}'(\phi(t))| dt = \int_J |\tilde{c}'(u)| du = \mathcal{L}(\tilde{c}). \quad \square$$

Unter den vielen möglichen Parametrisierungen einer regulären Kurve gibt es besonders ausgezeichnete, die *Bogenlängen-Parametrisierungen*. Eine differenzierbare Kurve $c : J \rightarrow \mathbb{E}^n$ heißt *nach der Bogenlänge parametrisiert*, wenn $|c'(s)| = 1$ für alle $s \in J$.

Lemma 2.1.2. *Jede reguläre Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ lässt sich nach Bogenlänge parametrisieren.*

Beweis: Wir wählen $t_o \in I$ fest und definieren eine Funktion $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\lambda(t) = \int_{t_o}^t |c'(\tau)| d\tau. \quad (2.5)$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist diese Funktion differenzierbar mit Ableitung $\lambda'(t) = |\dot{c}'(t)| > 0$. Also bildet λ das Intervall I diffeomorph und monoton wachsend auf ein Intervall J ab. Die Umkehrfunktion $\phi = \lambda^{-1} : J \rightarrow I$ wählen wir als Parameterwechsel und setzen $\tilde{c} = c \circ \phi$. Dann folgt $\phi'(s) = 1/\lambda'(\phi(s)) = 1/|\dot{c}'(\phi(s))|$ und daher $|\tilde{c}'(s)| = |\dot{c}'(\phi(s))| \cdot \phi'(s) = 1$. $\square$

Als Beispiel betrachten wir die *Strecke* zwischen zwei Punkten x und y , also die „Kurve“ $c_{xy} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^n$ mit $c_{xy}(t) = x + t(y - x)$. Dann ist $(c_{xy})'(t) = y - x$ für alle t und daher $\mathcal{L}(c_{xy}) = |y - x|$.

Satz 2.1.1. *Die Strecke ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten: Sind $x, y \in \mathbb{E}^n$ und ist $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$ eine reguläre Kurve mit $c(a) = x$ und $c(b) = y$, so ist*

$$\mathcal{L}(c) \geq \mathcal{L}(c_{xy}) = |y - x|, \quad (2.6)$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn c und c_{xy} geometrisch äquivalent sind, d.h. sich nur um einen Parameterwechsel unterscheiden. ²

Beweis: Durch Wahl der Koordinaten von $\mathbb{E}^n$ dürfen wir $x = 0$ und $y = Le_1$ mit $L = |y - x| = \mathcal{L}(c_{xy})$ annehmen. Die Komponenten von c bezeichnen wir mit c^k , d.h. $c(t)$ ist der Vektor $(c^1(t), \dots, c^n(t))$, und $|\dot{c}'(t)| \geq |(c^1)'(t)| \geq (c^1)'(t)$. Dann ist

$$\mathcal{L}(c) = \int_a^b |\dot{c}'(t)| dt \geq \int_a^b (c^1)'(t) dt = c^1(b) - c^1(a) = |y - x| = \mathcal{L}(c_{xy}).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $|\dot{c}'(t)| = (c^1)'(t)$ für alle $t \in [a, b]$, d.h. wenn $\dot{c}'(t) = \mu(t)e_1$ mit $\mu(t) > 0$. Durch Integration folgt $c(t) = \phi(t)e_1$, wobei $\phi : [a, b] \rightarrow [0, L]$ Stammfunktion von μ ist: $\phi(t) = \int_a^t \mu(\tau) d\tau$. Somit ist $c(t) = c_{xy}(\phi(t))$, also $c = c_{xy} \circ \phi$. $\square$

² Immanuel Kant (1724–1804 Königsberg) nennt in der Einleitung zur „Kritik der Reinen Vernunft“ diesen Satz als Prototyp eines „synthetischen Urteils a priori“, d.h. einer nicht nur auf Begriffsanalyse beruhenden Aussage. Zur Begründung sagt er: „Denn mein Begriff von Geradem enthält nichts von Größe, sondern nur eine Qualität. Der Begriff des Kürzesten kommt also gänzlich hinzu, und kann durch keine Zergliederung aus dem Begriffe der geraden Linie gewonnen werden.“ (Kritik der Reinen Vernunft (B), S.16.) Wir werden diesem Satz in der Geometrie der krummen Flächen wiederbegegnen, wo die geodätischen Linien die Rolle der Geraden übernehmen. Tatsächlich können auch die geodätischen Linien durch zwei verschiedene Eigenschaften charakterisiert werden, entweder dadurch, dass sie „gerade“ in dem Sinne sind, dass ihre Tangenten an verschiedenen Punkten stets zueinander „parallel“ sind, oder dadurch, dass sie auf der Fläche kürzeste Verbindungen zwischen den auf ihnen liegenden Punkten sind. Der zweite Aspekt wird aus (2.17) in diesem Abschnitt hervorgehen (vgl. die Abschnitte 5.1, 5.3) während der erste erst später unter dem Begriff „Parallelverschiebung“ auftreten wird (siehe (6.24)).

Bemerkung: Dieser Beweis erfordert einen *isometrischen* (d.h. längenerhaltenden) Koordinatenwechsel, im $\mathbb{E}^n$, eine Drehung des Koordinatenkreuzes. Dabei wird der Einheitsvektor $\frac{1}{L}(y - x)$ auf den ersten Basisvektor e_1 abgebildet. Die Argumentation wird dadurch sehr einfach: Die anderen Komponenten $(c^2)', \dots, (c^n)'$ vergrößern nur $|c'|$, ohne einen „Fortschritt“ für die entscheidende c^1 -Komponente zu erzielen.

Eine andere, von Koordinatendarstellungen unabhängige Argumentation benutzt die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*:³ Für alle $v, w \in \mathbb{E}^n$ gilt

$$\langle v, w \rangle \leq |v| |w|, \quad (2.7)$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w *gleichgerichtet* sind ($w = tv$ mit $t \geq 0$ oder $v = 0$).⁴ Eine Folgerung daraus ist die Integralabschätzung

$$\left| \int_a^b v(t) dt \right| \leq \int_a^b |v(t)| dt \quad (2.8)$$

für jede stetige Abbildung $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn alle $v(t)$ gleichgerichtet sind. Für den Vektor $w = \int_a^b v(t) dt$ gilt nämlich mit (2.7)

$$|w|^2 = \left\langle w, \int_a^b v(t) dt \right\rangle = \int_a^b \langle w, v(t) \rangle dt \leq \int_a^b |w| |v(t)| dt$$

und damit $\left| \int_a^b v(t) dt \right| = |w| \leq \int_a^b |v(t)| dt$, und Gleichheit folgt genau dann, wenn alle $v(t)$ mit w gleichgerichtet sind. Wenden wir (2.8) in der Situation von Satz 2.1.1 auf $v = c'$ an, so erhalten wir

$$\mathcal{L}(c) = \int_a^b |c'(t)| dt \geq \left| \int_a^b c'(t) dt \right| = |c(b) - c(a)| = \mathcal{L}(c_{xy}).$$

Wir wollen nun die oben angedeutete Aussage präzisieren, dass die Bogenlänge als Summe der Abstände benachbarter Kurvenpunkte aufgefasst werden kann. Dazu benötigen wir zunächst nur eine stetige Abbildung $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$. Eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$ ist eine endliche Teilmenge $Z = \{t_0, \dots, t_N\}$ mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$. Wir setzen

$$\mathcal{L}_Z(c) = \sum_{i=1}^N |c(t_i) - c(t_{i-1})|,$$

³ Hermann Amandus Schwarz, 1843 (Hermsdorf, Schlesien) – 1921 (Berlin)

Augustin Louis Cauchy, 1789 (Paris) – 1857 (Sceaux bei Paris)

⁴ Beweis: Für alle $t > 0$ gilt $0 \leq |tv - t^{-1}w|^2 = t^2|v|^2 + t^{-2}|w|^2 - 2\langle v, w \rangle$; speziell für $t^2 = |w|/|v|$ folgt die gewünschte Ungleichung $0 \leq 2(|v||w| - \langle v, w \rangle)$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn $tv = t^{-1}w$.

$$\hat{\mathcal{L}}(c) = \sup_Z \mathcal{L}_Z(c), \quad (2.9)$$

wobei Z alle Zerlegungen von $[a, b]$ durchläuft. Wir nennen c *rektifizierbar*, wenn das Supremum endlich ist, also $\hat{\mathcal{L}}(c) < \infty$.

Satz 2.1.2. *Jede stetig differenzierbare Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$ ist rektifizierbar, und es gilt $\hat{\mathcal{L}}(c) = \mathcal{L}(c)$.*

Beweis: Aus Gleichung (2.6) folgt bereits die Ungleichung $\hat{\mathcal{L}} \leq \mathcal{L}$ und damit insbesondere die Rektifizierbarkeit, denn für jede Zerlegung $Z = \{t_0, \dots, t_N\}$ von $[a, b]$ ist

$$\mathcal{L}_Z(c) = \sum_{i=1}^N |c(t_i) - c(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^N \mathcal{L}(c|_{[t_{i-1}, t_i]}) = \mathcal{L}(c). \quad (2.10)$$

Wir zeigen nun, dass die Funktion $\lambda(t) = \hat{\mathcal{L}}(c|_{[a, t]})$ differenzierbar ist mit Ableitung $\lambda'(t) = |c'(t)|$; dann folgt die Behauptung aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Wir benötigen dazu die Intervall-Additivität von $\hat{\mathcal{L}}$: Für alle $t, u \in [a, b]$ mit $u > t$ ist

$$\hat{\mathcal{L}}(c|_{[a, t]}) + \hat{\mathcal{L}}(c|_{[t, u]}) = \hat{\mathcal{L}}(c|_{[a, u]}) \quad (2.11)$$

(Supremumseigenschaft; siehe Übung 1). Also erhalten wir

$$\lambda(u) - \lambda(t) = \hat{\mathcal{L}}(c|_{[t, u]}). \quad (2.12)$$

Außerdem gilt

$$|c(u) - c(t)| \leq \hat{\mathcal{L}}(c|_{[t, u]}) \leq \mathcal{L}(c|_{[t, u]}) = \int_t^u |c'(\tau)| d\tau. \quad (2.13)$$

Die erste Ungleichung folgt aus der Definition von $\hat{\mathcal{L}}$ als Supremum, die zweite wegen $\hat{\mathcal{L}} \leq \mathcal{L}$.

Dividieren wir diese Ungleichungskette (2.13) durch die positive Zahl $u - t$ und lassen $u \searrow t$ gehen, so streben die beiden äußeren Terme gegen $|c'(t)|$, der mittlere wegen (2.12) gegen den rechtsseitigen Limes des Differenzenquotienten von λ :

$$\lim_{u \searrow t} \frac{\lambda(u) - \lambda(t)}{u - t} = |c'(t)|. \quad (2.14)$$

Ebenso erhalten wir den linksseitigen Limes, wenn wir $t \nearrow u$ streben lassen. Damit ist λ differenzierbar mit Ableitung $|c'|$, was zu zeigen war. $\square$

Beispiele: 1. Der *Kreis vom Radius r* ist die ebene Kurve $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{E}^2$, $c(t) = (r \cos t, r \sin t)$. Dann ist $c'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$, also $|c'(t)| = r$ und $\mathcal{L}(c) = 2\pi r$.

2. Die *Ellipse* mit Halbachsen a und b ist die Kurve $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{E}^2$ mit $c(t) = (a \cos t, b \sin t)$. Dann ist $c'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$ und

$$|c'(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} = a \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} \quad (2.15)$$

mit $k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$. Das Integral über $|c'(t)|$ lässt sich nicht mehr elementar auswerten (*elliptisches Integral*, vgl. [29], S.209).

2.2 Die Variation der Bogenlänge

Wir wollen sehen, wie sich die Länge einer Kurve verändert, wenn wir zu benachbarten Kurven übergehen. Gegeben sei eine nach Bogenlänge parametrisierte C^2 -Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$. Eine *Variation* von c ist eine Schar von Kurve $c_s : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$, $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, mit $c_0 = c$, wobei die Abbildung $(s, t) \mapsto c_s(t)$ ebenfalls C^2 -differenzierbar sein soll. Zur Abkürzung setzen wir

$$\delta := (\partial/\partial s)|_{s=0} \quad (2.16)$$

Das Vektorfeld⁵ δc_s heißt das *Variationsvektorfeld* längs c .

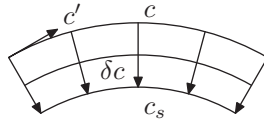
Satz 2.2.1. Erste Variation der Bogenlänge

$$\delta \mathcal{L}(c_s) = \langle \delta c_s, c' \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \langle \delta c_s, c'' \rangle \quad (2.17)$$

Beweis: Die Bogenlänge von c_s ist $\mathcal{L}(c_s) = \int_a^b |c'_s(t)| dt$. Die Ableitung des Integranden ergibt $\delta |c'_s| = \delta \sqrt{\langle c'_s, c'_s \rangle} = \langle \delta c'_s, c' \rangle / |c'| = \langle \delta c'_s, c' \rangle$, da $|c'| = 1$. Mit $\langle \delta c'_s, c' \rangle = \langle \delta c_s, c' \rangle' - \langle \delta c_s, c'' \rangle$ folgt („partielle Integration“):

$$\delta \mathcal{L}(c_s) = \int_a^b \langle \delta c'_s, c' \rangle = \int_a^b \langle \delta c_s, c' \rangle' - \int_a^b \langle \delta c_s, c'' \rangle = \langle \delta c_s, c' \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \langle \delta c_s, c'' \rangle$$

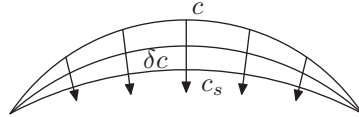
□



Die Längenänderung (2.17) setzt sich also aus zwei Anteilen zusammen: Der erste Term $\langle \delta c_s, c' \rangle \Big|_a^b$ wird durch den Winkel zwischen Tangenten- und Variationsvektor am Anfang und am Ende bestimmt, der zweite $\int_a^b \langle \delta c_s, c'' \rangle$

⁵ Ein *Vektorfeld* ist vorläufig einfach eine differenzierbare Funktion von unserem Parameterbereich $[a, b]$ nach $\mathbb{R}^n$.

durch den Anteil des Variationsvektors in Richtung von c'' . Falls die Endpunkte für alle c_s gleich sind, $c_s(a) = c(a)$ und $c_s(b) = c(b)$ für alle s , dann wird die Längenänderung allein durch den zweiten Term in (2.17) bestimmt, d.h. durch den Vektor c'' , der auch als *Krümmungsvektor* bezeichnet wird. Wenn δc_s in Richtung von c'' zeigt, ist $\delta \mathcal{L}(c_s) < 0$, d.h. die Nachbarkurven c_s sind kürzer als c .



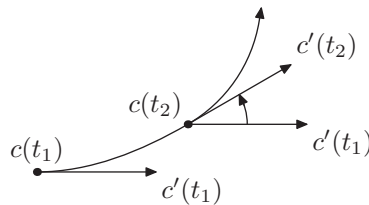
2.3 Krümmung

Die *Krümmung* einer Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ ist ein Maß dafür, wie schnell sich der Tangentenvektor c' ändert. Wird c nach Bogenlänge parametrisiert, dann ist die Ableitung $c' : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eine Kurve, deren Bild in der *Einheitssphäre* $S := S^{n-1} = \{v \in \mathbb{E}^n; |v| = 1\}$ liegt. Ihre Ableitung c'' ist der *Krümmungsvektor*, und dessen Betrag die *Krümmung* κ der Kurve c :

$$\kappa(t) = |c''(t)| \quad (2.18)$$

für alle $t \in I$. Die Krümmung verschwindet genau dann, wenn $c'' = 0$ und c daher eine (nach Bogenlänge parametrisierte) Gerade ist; allgemein stellt sie ein Maß für die Abweichung der Kurve c von der geraden Linie dar.

Im Fall $n = 2$ gibt es eine Besonderheit: Auf der *Kreislinie* $S = S^1$ kann sich der Vektor c' nur in zwei Richtungen bewegen. Deshalb können wir hier der Krümmung noch zusätzlich ein Vorzeichen geben: positiv, wenn c' sich auf dem Kreis im mathematisch positiven Sinn, also gegen den Uhrzeigersinn bewegt, andernfalls negativ. Linkskurven haben deshalb positive Krümmung, Rechtskurven negative.



Um dies etwas präziser zu machen, betrachten wir den *orientierten Einheitsnormalenvektor* der Kurve. Das ist für jedes $t \in I$ der Vektor $n(t) \in \mathbb{E}^2$ mit der Eigenschaft, dass das Paar $(c'(t), n(t))$ eine orientierte Orthonormalbasis bildet. Mit anderen Worten, $n(t)$ entsteht aus $c'(t)$ durch die 90°-Drehung nach links, also

$$n(t) = J c'(t) \quad (2.19)$$

mit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; bei der üblichen Identifizierung von $\mathbb{E}^2$ mit $\mathbb{C}$ wird J gerade die Multiplikation mit $i = \sqrt{-1}$. Weil c' ein Einheitsvektor ist, muss c'' auf c' senkrecht stehen (aus $\langle c', c' \rangle = 1$ folgt $0 = \langle c', c' \rangle' = 2\langle c'', c' \rangle$). Damit ist c'' ein Vielfaches von n , genauer $c'' = \langle c'', n \rangle n$, und dieses Vielfache

$$\kappa = \langle c'', n \rangle \quad (2.20)$$

ist die (mit Vorzeichen versehene) *Krümmung* der ebenen Kurve c . Demnach ist

$$c'' = \kappa n. \quad (2.21)$$

Aus (2.20) folgt weiterhin mit $0 = \langle c', n \rangle' = \langle c'', n \rangle + \langle c', n' \rangle$:

$$\kappa = -\langle c', n' \rangle, \quad (2.22)$$

und damit gilt auch $n' = -\kappa c'$. Die beiden Gleichungen

$$c'' = \kappa n, \quad n' = -\kappa c' \quad (2.23)$$

heißen die *Frenet-Gleichungen* der ebenen Kurve c ; vgl. (2.40).

Wenn eine reguläre Kurve nicht nach Bogenlänge, sondern beliebig parametrisiert ist, so erhalten wir für die Krümmung den Ausdruck

$$\kappa = \det(c', c'') / |c'|^3. \quad (2.24)$$

Dieser Ausdruck ist nämlich invariant unter orientiertem Parameterwechsel, d.h. für $\tilde{c} = c \circ \phi$ ist $\tilde{\kappa} = \kappa \circ \phi$, und für Bogenlängenparameter ($|c'| = 1$) ergibt sich wieder $\kappa = \langle c'', n \rangle$ (vgl. Übung 4).

Beispiel: Wir betrachten einen Kreis mit Mittelpunkt $m \in \mathbb{E}^2$ und Radius $r > 0$. Dieser wird nach Bogenlänge parametrisiert durch die Kurve

$$c(t) = m + \left(r \cos \frac{t}{r}, r \sin \frac{t}{r} \right) \quad (2.25)$$

mit den Ableitungen $c'(t) = \left(-\sin \frac{t}{r}, \cos \frac{t}{r} \right)$ und $c''(t) = -\frac{1}{r} \left(\cos \frac{t}{r}, \sin \frac{t}{r} \right)$. Der Normalenvektor ist $n(t) = Jc'(t) = -\left(\cos \frac{t}{r}, \sin \frac{t}{r} \right)$ und damit ist die Krümmung $\kappa(t) = \langle c''(t), n(t) \rangle = \frac{1}{r}$.

Etwas allgemeiner kann man einen Kreis mit Radius r und Mittelpunkt m auch mit Hilfe eines beliebigen Einheitsvektors $e \in \mathbb{E}^2$ folgendermaßen schreiben:

$$c(t) = m + e \cdot r \cos \frac{t - t_o}{r} + Je \cdot r \sin \frac{t - t_o}{r}; \quad (2.26)$$

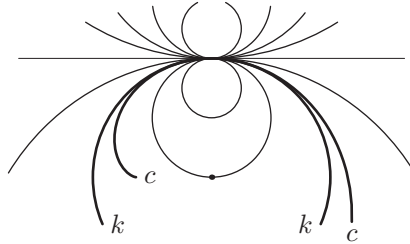
dabei ist

$$c(t_o) = m + re, \quad c'(t_o) = Je, \quad c''(t_o) = -e/r. \quad (2.27)$$

Für $e = (1, 0)$ und $t_o = 0$ ergibt sich die vorherige Darstellung (2.25).

Eine beliebige nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ mit Krümmung $\kappa \neq 0$ kann bei jedem Parameterwert $t_o \in I$ durch einen Kreis c_{t_o} approximiert werden, der bis zur zweiten Ordnung mit der Kurve übereinstimmt, dem *Krümmungskreis* von c bei t_o . Dieser hat den Radius⁶ $r = 1/\kappa(t_o)$ (*Krümmungsradius*) und Mittelpunkt $m = c(t_o) + r \cdot n(t_o)$ (*Krümmungsmittelpunkt*). Wenn wir in der Darstellung (2.26) $Je = c'(t_o)$ und damit $e = -n(t_o)$ setzen, dann stimmen nach (2.27) und (2.21) der Wert und die ersten beiden Ableitungen von c_{t_o} und c bei t_o überein.

Unter allen Kreisen, die die Kurve c im Punkt $c(t_o)$ *berühren*, also dieselbe Tangente haben, ist der Krümmungskreis folgendermaßen bestimmt: Er scheidet die Kreise, die nahe $c(t_o)$ auf der *rechten* Seite der Kurve liegen, von denen, die auf der *linken* Seite liegen. Dabei muss die Tangente ebenfalls als berührender Kreis, nämlich mit Radius ∞ , aufgefasst werden.⁷



Auf einer Eisenbahnfahrt ist der Krümmungsmittelpunkt der Bahnstrecke in der Landschaft leicht auszumachen: Wenn der Zug eine Linkskurve fährt und man zum (bezüglich der Fahrtrichtung) linken Fenster hinausschaut, dann scheinen sich die nahe an der Bahnstrecke liegenden Gegenstände gegenüber dem Fensterrahmen nach links zu bewegen, die weit entfernten dagegen nach rechts. Dazwischen gibt es einen Ort, der momentan zu ruhen scheint; das ist der Krümmungsmittelpunkt.

Wir fragen uns als nächstes, wie weit eine Kurve durch ihre Krümmung bestimmt ist: Wenn $\kappa : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die Krümmung einer nach Bogenlänge parametrisierten ebenen Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ ist, wird diese dann durch die Funktion κ eindeutig festgelegt? Sicherlich können wir sie in der Ebene verschieben oder drehen, ohne ihre Krümmung zu verändern, d.h. die Kurve $\tilde{c}(t) = Ac(t) + b$ hat für jede Drehmatrix A und jeden Verschiebungsvektor b dieselbe Krümmung; allerdings darf A keine Spiegelung sein, sonst würde eine Links- in eine Rechtskurve überführt und damit das Vorzeichen der Krümmung verändert. Bis auf solche Bewegungen ist die Kurve durch ihre Krümmung κ eindeutig bestimmt, wie wir gleich sehen werden; dabei ist $\int \kappa$ der *Winkel* φ , um den der Tangentenvektor $v = c'$ von einer Ausgangsposition aus gedreht wird. Zunächst zeigen wir, dass dieser Winkel eindeutig bestimmt ist (nicht nur bis auf Vielfache von 2π). Allgemein gilt:

⁶ Dieser „Radius“ darf auch negativ und sogar unendlich sein.

⁷ Man sieht dies am einfachsten, wenn man c und die berührenden Kreise als Graphen parametrisiert; vgl. Aufgabe 5

Lemma 2.3.1. *Jede C^1 -Abbildung $v : I \rightarrow S^1$ bestimmt eindeutig eine stetige Funktion $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$v' = \kappa Jv, \quad (2.28)$$

und umgekehrt ist v durch κ und $v_o := v(t_o)$ für ein $t_o \in I$ eindeutig bestimmt:

$$v(t) = e^{i\varphi(t)} v_o \quad (2.29)$$

$$\varphi(t) = \int_{t_o}^t \kappa(\tau) d\tau. \quad (2.30)$$

Beweis: Da $\langle v, v \rangle = 1$, ist $v' \perp v$, also sind v' und Jv linear abhängig, d.h. $v' = \kappa Jv$ mit $\kappa = \langle v', Jv \rangle$. Ist umgekehrt $v : I \rightarrow S^1$ differenzierbar mit $v' = \kappa Jv = \kappa iv$ (bei Identifizierung von $\mathbb{E}^2$ mit $\mathbb{C}$), wobei $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, so folgt $v = v_o e^{i\varphi}$ mit $\varphi(t) = \int_{t_o}^t \kappa$, denn $(ve^{-i\varphi})' = (v' - i\varphi'v)e^{-i\varphi} = (v' - \kappa iv)e^{-i\varphi} = 0$, also ist $ve^{-i\varphi} = \text{const} = v_o$ und damit $v = v_o e^{i\varphi}$. $\square$

Bemerkung: Wir können die Voraussetzung „ C^1 “ auch durch „stetig und stückweise C^1 “ abschwächen, d.h. es gibt eine Zerlegung $a = t^0 < t^1 < \dots < t^N = b$ mit der Eigenschaft, dass $c|_{[t^{i-1}, t^i]}$ stetig differenzierbar ist für $i = 1, \dots, N$. Dann wenden wir den Beweis an auf jedes der Intervalle $[t^{i-1}, t^i]$ anstelle von I und t^{i-1} anstelle von t_o .⁸

Satz 2.3.1. *Zu jeder stetigen Funktion $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es genau eine nach Bogenlänge parametrisierte C^2 -Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{E}^2 = \mathbb{C}$ mit Krümmung κ , wobei wir für ein festes $t_o \in I$ die Anfangswerte $c(t_o) = x_o$ und $c'(t_o) = v_o$ noch frei vorgeben dürfen. Und zwar ist*

$$\begin{aligned} c(t) &= x_o + \int_{t_o}^t v(\tau) d\tau, \\ v(t) &= c'(t) = e^{i\varphi(t)} v_o, \\ \varphi(t) &= \int_{t_o}^t \kappa(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Beweis: Dies folgt aus dem eben bewiesenen Lemma 2.3.1 mit (2.21) und (2.19). $\square$

Die Zahl

$$\bar{\kappa}(c|_{[t_o, t_1]}) = \int_{t_o}^{t_1} \kappa(t) dt = \varphi(t_1) - \varphi(t_o) \quad (2.32)$$

nennt man die *Totalkrümmung* der Kurve $c|_{[t_o, t_1]}$. Sie ist der Gesamtwinkel, den der Einheitsvektor $c'(t)$ für $t_o \leq t \leq t_1$ durchmisst.

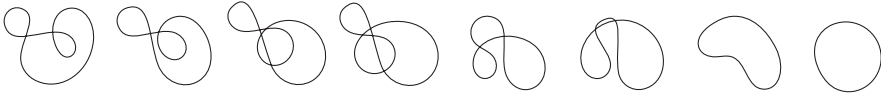
⁸ Für (2.29) reicht es sogar, wenn v nur stetig ist, denn solange $v(t)$ in einem Halbkreis bleibt, können wir leicht (ohne (2.30)) einen stetig von t abhängige Winkel $\varphi(t)$ mit (2.29) finden, und diese lokal definierten Winkel lassen sich leicht zu einer stetigen Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ zusammensetzen.

2.4 Totalkrümmung geschlossener ebener Kurven

Eine reguläre (nach Bogenlänge parametrisierte) Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$ heißt *geschlossen*, wenn $c(a) = c(b)$ und $c'(a) = c'(b)$. Setzen wir wieder $c'(t) = e^{i\varphi(t)}$ für eine stetige Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so ist $\varphi(b) - \varphi(a)$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π : Nach (2.32) ist $\varphi(b) - \varphi(a)$ die Totalkrümmung $\bar{\kappa}(c)$, also der Gesamtwinkel, den c' von a bis b durchmisst, und da $c'(a) = c'(b)$, muss dies ein Vielfaches von 2π sein. Wir erhalten demnach

$$\bar{\kappa}(c) = 2\pi k \quad (2.33)$$

für eine ganze Zahl k , die *Tangentendrehzahl* genannt wird, denn sie gibt an, wie oft der Tangentenvektor $c'(t)$ die Kreislinie umläuft, wenn wir den Parameter t das ganze Intervall $[a, b]$ durchlaufen lassen. Wenn wir die geschlossene Kurve stetig deformieren, und zwar so, dass auch der Tangentenvektor stetig deformiert wird („*reguläre Homotopie*“), kann sich diese Zahl nicht ändern, weil sie stetig vom Deformationsparameter abhängt, aber immer ganz bleiben muss. Nach dem *Satz von Whitney und Graustein*⁹ gilt auch die Umkehrung: Wenn zwei geschlossene Kurven dieselbe Tangentendrehzahl haben, lassen sie sich durch eine reguläre Homotopie ineinander deformieren, wie zum Beispiel in der folgenden Figur:



Eine geschlossene Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$ heißt *einfach geschlossen*, wenn sie injektiv auf $[a, b)$ ist, also kein Punkt doppelt durchlaufen wird (keine Selbstschnitte). Der *Umlaufsatz von Hopf*¹⁰ besagt nun:

Satz 2.4.1. *Eine einfach geschlossene Kurve hat Tangentendrehzahl ± 1 .*

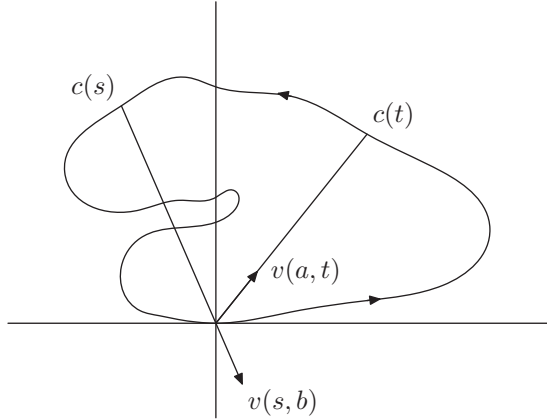
Beweis: Wir können die Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$ periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen, wobei $[a, b]$ ein Periodenintervall wird. Die Aussage bleibt dieselbe, wenn wir $[a, b]$ durch ein beliebiges anderes Intervall derselben Länge (ein anderes Periodenintervall) ersetzen. Setzen wir $c(t) = (x(t), y(t))$, so besitzt die periodische Funktion $y(t)$ ein Minimum, und wir können nun ohne Einschränkung annehmen, dass dieses bei $t = a$ liegt. Nach einer Verschiebung des Koordinatensystems (Anwendung einer Translation) können wir außerdem $c(a) = (0, 0)$ annehmen; insbesondere gilt dann $y(t) \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Da $y'(a) = 0$, ist $c'(a) = \pm e_1$; durch Wahl der Parametrisierungsrichtung dürfen wir $c'(a) = e_1$ voraussetzen.

⁹ Hassler Whitney, 1907 (New York) – 1989 (Dents Blanches, Schweiz): On Regular Closed Curves in the Plane. Compos. Math. 4, 276–284, 1937. Ein graphischer Beweis dieses Satzes wird in dem Film „Outside In“ vorgeführt, siehe <http://www.geom.uiuc.edu/docs/outreach/oi/scene6.html>

¹⁰ Heinz Hopf, 1894 (Breslau) – 1971 (Zürich)

Wir werden den Tangentenvektor $c' : I = [a, b] \rightarrow S^1$ mit Hilfe der Sekanten der Kurve zu einer Abbildung von zwei Variablen fortsetzen. Für jeden Vektor $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ betrachten wir den zugehörigen Einheitsvektor $\frac{w}{|w|}$ und insbesondere den *Sekanteneinheitsvektor*

$$v(s, t) = \frac{c(t) - c(s)}{|c(t) - c(s)|} \quad (2.34)$$



Dieser ist für alle $(s, t) \neq (a, b)$ mit $a \leq s < t \leq b$ definiert, da die Kurve $c|_{(a,b)}$ injektiv ist. Wir können ihn sogar noch auf den abgeschlossenen Bereich $\Delta := \{(s, t) \in I \times I; s \leq t\}$ stetig fortsetzen; die fehlenden Werte erhalten wir durch die Limiten

$$v(t, t) := \lim_{s \nearrow t} \frac{c(t) - c(s)}{|c(t) - c(s)|} = \lim_{s \nearrow t} \frac{\frac{c(t) - c(s)}{t - s}}{\frac{|c(t) - c(s)|}{t - s}} = \frac{c'(t)}{|c'(t)|} = c'(t),$$

$$v(a, b) := \lim_{s \searrow a} \frac{c(b) - c(s)}{|c(b) - c(s)|} = \lim_{s \searrow a} \frac{\frac{c(a) - c(s)}{a - s}}{\frac{|c(a) - c(s)|}{a - s}} = \frac{c'(a)}{-|c'(a)|} = -e_1$$

(man beachte $|c'| = 1$). Dann ist $v(s, t) = e^{i\varphi(s, t)}$ für eine stetige Funktion $\varphi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ wie im Lemma 2.3.1,¹¹ und wir erhalten

$$\kappa(c) = \varphi(b, b) - \varphi(a, a) = \varphi(b, b) - \varphi(a, b) + \varphi(a, b) - \varphi(a, a). \quad (*)$$

Nun ist $\varphi(a, b) - \varphi(a, a) = \pi$, denn die Kurve $t \mapsto v(a, t) = \frac{c(t) - c(a)}{|c(t) - c(a)|}$ der vom Punkt $c(a)$ ausgehenden Sekanteneinheitsvektoren ist am Anfang ($t = a$) gleich e_1 und am Ende ($t = b$) gleich $-e_1$ und bleibt ganz in der oberen Halbebene, sie durchmisst also den Winkel π . Ebenso durchmisst auch die

¹¹ Z.B. könnte man mit Lemma 2.3.1 zuerst $\varphi(t, t)$ für $t \in [a, b]$ und dann $\varphi(s, t)$ für $s \in [a, t]$ definieren.

Kurve $s \mapsto v(s, b) = e(c(b) - c(s))$ den Winkel π , denn sie ist am Anfang $s = a$ gleich $-e_1$ und am Ende $s = b$ gleich e_1 und sie bleibt ganz in der unteren Halbebene. Deshalb ist auch $\varphi(b, b) - \varphi(a, b) = \pi$ und die Behauptung folgt aus (*). $\square$

2.5 Totalkümmung von Raumkurven

Für eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve $c : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^3$ (wir könnten $\mathbb{E}^3$ auch durch $\mathbb{E}^n$ ersetzen) mit Krümmung $\kappa = |c''|$ definieren wir die *Totalkrümmung* als

$$\bar{\kappa}(c) = \int_I \kappa(\tau) d\tau = \int_I |c''| = \mathcal{L}(c'), \quad (2.35)$$

wobei $L(c')$ die *Länge* der vom Tangentenvektor beschriebenen Kurve $c' : I \rightarrow S^2 \subset \mathbb{E}^3$ ist. Wieder ist diese Größe besonders interessant für *geschlossene* Kurven ($c(b) = c(a)$, $c'(b) = c'(a)$). Der folgende Satz wurde 1929 von W. Fenchel¹² bewiesen:

Satz 2.5.1. *Für eine geschlossene C^2 -Raumkurve c ist $\bar{\kappa}(c) \geq 2\pi$,*

Beweis: Es sei $c : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ geschlossen und nach Bogenlänge parametrisiert. Warum kann die Länge des *Tangentenbildes*, d.h. der Kurve $v = c' : I \rightarrow S^2$ nicht kleiner als 2π sein? Die Idee dazu ist, dass eine kurze geschlossene Kurve v auf S^2 ganz in einer *Halbsphäre* $H_p := \{x \in S^2; \langle x, p \rangle > 0\}$ für einen festen Vektor $p \in S^2$ liegen müsste (siehe nachfolgendes Lemma 2.5.1). Aber das ist für $v = c'$ unmöglich, denn weil c geschlossen ist, verschwindet das Integral von v :

$$\int_I v(t) dt = \int_I c'(t) dt = c(b) - c(a) = 0.$$

Wäre $v(t) \in H_p$ für alle t , dann wäre $\langle v, p \rangle > 0$, aber $\int_I \langle v, p \rangle = \langle \int_I v, p \rangle = 0$; das ist ein Widerspruch. $\square$

Lemma 2.5.1. *Es sei v eine geschlossene rektifizierbare Kurve (z.B. C^1) in $S^2 \subset \mathbb{E}^3$ mit Länge $L < 2\pi$. Dann liegt v ganz in einer offenen Halbsphäre.*

Beweis:¹³ Wir denken uns die Kurve $v : [0, L] \rightarrow S^2$ nach Bogenlänge parametrisiert. Insbesondere gilt für alle $t \in [0, L/2]$

$$t = \mathcal{L}(v|_{[0,t]}) \geq \angle(v(0), v(t)),$$

¹² Werner Fenchel, 1905 (Berlin) – 1988 (Kopenhagen)

¹³ Dieser Beweis stammt von Jens Heber (1996)

denn der (im $\mathbb{E}^3$ gemessene) Winkel $\angle(v(0), v(t))$ ist die Länge des Großkreisbogens von $v(0)$ nach $v(t)$, der kürzesten Verbindung zwischen diesen Punkten auf der Kugeloberfläche S^2 (vgl. Kap. 5, Übung 3 und Satz 5.4.1). Im Intervall $[0, \pi]$ ist die Cosinusfunktion streng monoton fallend, und damit gilt für alle $t \in [0, L/2] \subset [0, \pi]$:

$$\cos t \leq \cos \angle(v(0), v(t)) = \langle v(0), v(t) \rangle \quad (2.36)$$

mit (1.6). Ebenso können wir vom Endpunkt $v(L)$ ausgehen und erhalten für alle $t \in [0, L/2]$:

$$t = \mathcal{L}(v|_{[L-t, L]}) \geq \angle(v(L), v(L-t))$$

und damit

$$\cos t \leq \cos \angle(v(L), v(L-t)) = \langle v(L), v(L-t) \rangle. \quad (2.37)$$

Für das Integral $p := \int_0^L v(t) dt$ ergibt sich mit (*) $v(L) = v(0)$:

$$\begin{aligned} \langle v(0), p \rangle &= \int_0^L \langle v(0), v(t) \rangle dt \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_0^{L/2} \langle v(0), v(t) \rangle dt + \int_0^{L/2} \langle v(L), v(L-t) \rangle dt \\ &\geq 2 \int_0^{L/2} \cos t \, dt = 2 \sin(L/2) > 0. \end{aligned}$$

Aber der Parameterwert 0 ist in keiner Weise ausgezeichnet: Wir können die Abbildung v periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen, und jedes Intervall der Länge L ist ein Periodenintervall. Das Integral von v über jedes Periodenintervall ist gleich (nämlich $= p$): Für das Integral über eine L -periodische Funktion gilt $\int_s^{s+L} = \int_s^L + \int_L^{L+s} = \int_s^L + \int_0^s = \int_0^L$ für alle $s \in (0, L)$. Daher folgt $\langle v(s), p \rangle > 0$ für alle $s \in [0, L]$, also verläuft die Kurve v ganz in H_p . $\square$

Bemerkung 1: Zum Satz 2.5.1 gehört auch eine Gleichheitsdiskussion:

$$\bar{\kappa}(c) = 2\pi \iff c \text{ ist eine einfach geschlossene konvexe Kurve in einer Ebene.}$$

Die drei Formelzeilen nach (2.37) gelten nämlich auch noch unter der schwächeren Voraussetzung $L \leq 2\pi$, nur das letzte „ $\geq$ “ ist durch „ $>$ “ zu ersetzen. Aber für $v = c'$ gilt $p = 0$, also tritt hier der Gleichheitsfall ein. Damit tritt Gleichheit auch in (2.36) und (2.37) ein. Diese Gleichheiten bedeuten, dass die Kurven $v(t)$ für $t \in [0, L/2]$ und für $t \in [L/2, L]$ Kürzeste sind, also Großkreisbögen. Da wir den Anfang der Periode beliebig wählen dürfen, muss die ganze Kurve $v(t)$ ein Großkreis sein. Insbesondere liegen alle Vektoren $v(t)$ in ein und derselben Ebene; die Kurve c ist damit eine geschlossene ebene Kurve. Jede Richtung $w \in S^1$ muss mindestens einmal tangential an c sein, d.h. es gibt ein $t \in [0, L]$ mit $c'(t) = \pm w$.¹⁴ Der Einheitsvektor c' durchläuft

¹⁴ Die Funktion $f_w(t) = \langle c(t), Jw \rangle$ besitzt im Intervall $[0, L]$ ein Minimum (und ein Maximum); dort ist $0 = f'_w(t) = \langle c'(t), Jw \rangle$, also $c'(t) \perp Jw$, d.h. $c'(t) = \pm w$.

also mindestens einen Halbkreis. Da die Länge der Bahn von c' gleich 2π ist, muss c' entweder den Kreis genau einmal durchlaufen – dann ist c eine konvexe ebene Kurve – oder einen Halbkreis genau einmal hin und zurück durchlaufen, aber das widerspräche der Gleichung $\int_I c' = 0$.

Bemerkung 2: Der Satz von Fenchel besitzt eine berühmte Verschärfung von Fary¹⁵ und Milnor¹⁶, welche besagt: *Wenn eine geschlossene Raumkurve verknotet ist, dann ist ihre Totalkrümmung sogar größer als 4π .*

2.6 Torsion

In höheren Dimensionen $n \geq 3$ reicht die Krümmung κ nicht mehr aus, um eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eindeutig bis auf *eigentliche Bewegungen*¹⁷ zu kennzeichnen.

Beispiel: Die Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, $c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ist nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn $a^2 + b^2 = 1$. Für $a, b \neq 0$ heißt sie *Schraubenlinie*. Sie hat konstante Krümmung $\kappa = |c''| = a$ wie der Kreis vom Radius $1/a$, liegt aber nicht in einer Ebene.

Wir benötigen also weitere Größen. Dazu setzen wir voraus, dass die Kurve nach Bogenlänge parametrisiert und $(n-1)$ -mal stetig differenzierbar (C^{n-1}) ist, und die ersten $n-1$ Ableitungen $c'(t), c''(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$ sollen an jeder Stelle t linear unabhängig sein; eine solche Kurve heißt *Frenet-Kurve*.¹⁸ Nun betrachten wir die *Gram-Schmidt-Orthonormalisierung*¹⁹ $b_1(t), \dots, b_{n-1}(t)$ der Vektoren $c'(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$; dabei ist $b_1 = c'/|c'| = c'$ und $b_j = a_j/|a_j|$ mit

$$a_j = c^{(j)} - \sum_{i=1}^{j-1} \langle c^{(j)}, b_i \rangle b_i, \quad (2.38)$$

insbesondere ist $b_1 = c'$, $a_2 = c''$ und $b_2 = c''/|c''|$. Wir nehmen noch den eindeutig bestimmten Vektor $b_n(t)$ hinzu, der $(b_1(t), \dots, b_{n-1}(t))$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis von $\mathbb{E}^n$ ergänzt.²⁰ Da $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} = \text{const}$,

¹⁵ I. Fary: Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un nœud, Bull. Soc. Math. France 77, 128–138 (1949)

¹⁶ J. Milnor: On the total curvature of knots, Ann. of Math. 52, 248–257 (1950)

¹⁷ *Eigentliche Bewegungen* sind die orientierungserhaltenden isometrischen Abbildungen des euklidischen Raums $\mathbb{E}^n$, d.h. Verkettungen von Translationen $x \mapsto x + v$ mit orthogonalen linearen Abbildungen mit $x \mapsto Ax$ mit $\det A = 1$ (*Drehungen*), vgl. Kap. 1, Übung 8.

¹⁸ Jean Frédéric Frenet, 1816–1900 (Périgueux)

¹⁹ Jorgen Pedersen Gram, 1850 (Nustrup, Dänemark) – 1916 (Kopenhagen), Erhard Schmidt, 1876 (Dorpat, jetzt Tartu, Estland) – 1959 (Berlin)

²⁰ Es gilt $b_n = b_1 \times \dots \times b_{n-1}$, wobei auf der rechten Seite das verallgemeinerte *Vektorprodukt* von $b_1, \dots, b_{n-1}$ steht; vgl. Kapitel 4, Fußnote 2, S. 46

ist $\langle b_i, b_j \rangle' = 0$, also $\langle b'_i, b_j \rangle = -\langle b'_j, b_i \rangle$. Weiterhin ist b_i eine Linearkombination von $c', \dots, c^{(i)}$, also ist b'_i eine Linearkombination von $c', \dots, c^{(i+1)}$ und damit von $b_1, \dots, b_{i+1}$. Somit ist $\langle b'_i, b_j \rangle = 0$ für $j \geq i+2$. Die antisymmetrische Matrix $(\langle b'_i, b_j \rangle)$ hat daher nur Einträge auf der ersten Nebendiagonalen oberhalb und unterhalb der Hauptdiagonalen. Diese bezeichnen wir mit

$$\kappa_i := \langle b'_i, b_{i+1} \rangle = -\langle b'_{i+1}, b_i \rangle, \quad (2.39)$$

insbesondere ist $\kappa_1 = \langle c'', \frac{c''}{|c''|} \rangle = |c''| = \kappa$. Damit ergeben sich die *Frenet-schen Gleichungen*, die in Matrixform folgendermaßen lauten:

$$(b_1, \dots, b_n)' = (b_1, \dots, b_n) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1 & & & \\ \kappa_1 & 0 & -\kappa_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \kappa_{n-2} & 0 & -\kappa_{n-1} \\ & & & \kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

also

$$b_1' = \kappa_1 b_2, \quad b_2' = -\kappa_1 b_1 + \kappa_2 b_3, \quad \dots, \quad b_n' = -\kappa_{n-1} b_{n-1}. \quad (2.41)$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung für die Matrix

$$B(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t)),$$

die zu vorgegebenen Funktionen $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ und zu jedem Anfangswert $B(t_0)$ eine auf ganz I definierte eindeutige Lösung besitzt (Satz B.2.1); insbesondere ist dann $c' = b_1$ bestimmt. Also bestimmen die Funktionen $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ die Kurve c wieder eindeutig bis auf Bewegungen.

Man nennt $b_1 = c'$ den *Tangentenvektor* und $b_2 = c''/|c''|$ den *Normalenvektor*. Die von b_1, b_2 aufgespannte Ebene wird *Schmiegeebene* der Kurve genannt. Im Fall $n = 3$ heißt $b_3 = b_1 \times b_2$ (Vektorprodukt) der *Binormalenvektor*, und die Größe

$$\tau := \kappa_2 = \langle b'_2, b_3 \rangle \quad (2.42)$$

heißt *Torsion* oder *Windung* der Kurve c . Die Frenetschen Gleichungen in $\mathbb{E}^3$ lauten damit

$$b_1' = \kappa b_2, \quad b_2' = -\kappa b_1 + \tau b_3, \quad b_3' = -\tau b_2. \quad (2.43)$$

Die Torsion misst, wie stark eine Kurve im Raum von einer ebenen Kurve abweicht:

Satz 2.6.1. *Eine Frenet-Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ (also $c \in C^2$, $|c'(t)| = 1$, $c''(t) \neq 0$ für alle $t \in I$) liegt genau dann in einer Ebene, wenn ihre Torsion τ überall verschwindet.*

Beweis: $\tau = 0 \iff b'_3 = 0$ (Frenetsche Gleichungen (2.43)) $\iff b_3 = \text{const} \iff \forall_{t \in I} c'(t) \in E_o := (b_3)^\perp \iff \forall_{t \in I} c(t) \in E = c(t_o) + E_o$. $\square$

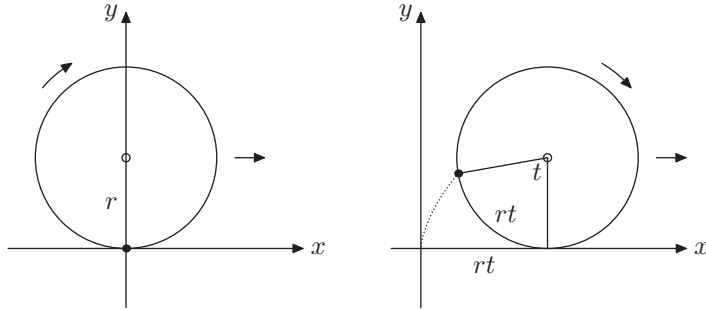
Wenn $c : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine Frenetkurve ist, die nicht mehr notwendig nach Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. $c'(t), c''(t)$ sind linear unabhängig für alle $t \in I$, dann sind Krümmung und Torsion folgendermaßen zu berechnen:

$$\kappa = |c' \times c''|/|c'|^3, \quad \tau = \det(c', c'', c''')/|c' \times c''|^2. \quad (2.44)$$

Diese Ausdrücke ändern sich nämlich nicht bei orientiertem Parameterwechsel: Für die umparametrisierte Kurve $\tilde{c} = c \circ \phi$ gilt $\tilde{\kappa} = \kappa \circ \phi$ und $\tilde{\tau} = \tau \circ \phi$, und für bogenlängenparametrisierte Kurven ergibt sich der frühere Wert (siehe Übung 16).

2.7 Übungsaufgaben

1. *Bogenlänge:* Zeigen Sie, dass die in (2.9) definierte Bogenlänge $\hat{\mathcal{L}}$ die Intervalladditivität (2.10) erfüllt.
2. *Zykloide:* Ein Rad mit Radius r rolle in der xy -Ebene auf der x -Achse nach rechts.



- a) Beschreiben Sie analytisch die Bahn eines Punktes auf der Peripherie des Rades (schwarzer Punkt) bei einer vollen Radumdrehung als Kurve $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und skizzieren Sie diese. Der Anfangspunkt $c(0)$ ist der Ursprung 0, der Parameter t von c ist der Drehwinkel des Rades. Diese Kurve heißt *Zykloide*.
 - b) Berechnen Sie die Bogenlänge von c .
Hinweis: Aus $\cos^2 s + \sin^2 s = 1$ und $\cos^2 s - \sin^2 s = \cos 2s$ folgt $2 \sin^2 s = 1 - \cos 2s$.
3. *Krümmungsmittelpunkt als momentaner Ruhepunkt:* Gegeben sei eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ mit der Normalen $n = Jc'$ und Krümmung $\kappa > 0$. Für jedes $r > 0$ betrachten wir die Parallelkurve $c_r(t) = c(t) + rn(t)$ im Abstand r . Zeigen Sie: Die Parallelkurve ist genau dort stationär, wo r der Krümmungsradius von c ist, in Formeln: $c'_r(t) = 0 \iff r = 1/\kappa(t)$.

4. *Krümmung bei beliebigen Parametern:* Für eine reguläre Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ wird die *Krümmung* wie folgt definiert:

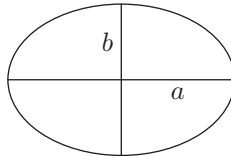
$$\kappa = \frac{\det(c', c'')}{|c'|^3}. \quad (2.45)$$

Zeigen Sie:

- a) Ist c nach Bogenlänge parametrisiert, so ist κ die früher definierte Krümmung, $\kappa = \langle c'', Jc' \rangle$.
- b) Die durch (2.45) definierte Funktion ist invariant unter orientierten Parameterwechseln: Ist $\alpha : \tilde{I} \rightarrow I$ bijektiv und C^2 mit $\alpha' > 0$ und ist $\tilde{c} = c \circ \alpha$, und ist $\tilde{\kappa}$ entsprechend wie in (2.45) definiert, so gilt $\tilde{\kappa} = \kappa \circ \alpha$. Was gilt bei Orientierungsumkehrung ($\alpha' < 0$)?
5. *Graphenkurven:* Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion und $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ der zugehörige *Graph* in der xy -Ebene, d.h. die Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{E}^2$, $c(x) = (x, f(x))$. Bestimmen Sie die Bogenlänge von $c|_{[a,b]}$ für $[a, b] \subset I$ sowie die Krümmung von c in Abhängigkeit von f und seinen Ableitungen f', f'' .
6. *Bogenlängenparameter eines Graphen:* Es sei $c(x) = (x, f(x))$ eine Graphenkurve wie in der vorigen Aufgabe und $\tilde{c}(s) = c(x(s))$ die Umparametrisierung nach Bogenlänge (mit Parameterwechsel $s \mapsto x(s)$). Zeigen Sie

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x(s))^2}}. \quad (2.46)$$

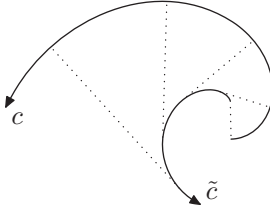
7. *Krümmung der Ellipse:*



Zeigen Sie: Der Krümmungsradius der *Ellipse* $\{(x, y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ ist $r_1 = \frac{a^2}{b}$ in den Punkten $(0, \pm b)$ und $r_2 = \frac{b^2}{a}$ in den Punkten $(\pm a, 0)$.

8. *Erdabplattung:* Die Erde ist eine um ihre kürzere Achse rotierende Ellipse mit den Halbachsen $a = 6378,137$ km und $b = 6356,752$ km, und damit $\frac{a^2}{b^2} \approx 1,00674$. Wie groß sind die Abstände von zwei um ein Grad differierenden Breitenkreisen am Äquator einerseits und am Pol andererseits? Wie groß ist demnach die Differenz, die *Maupertuis* und seine Zeitgenossen messen mussten (vergleiche S. 10)?
9. *Evolute und Evolvente:* Die *Evolute* einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit monoton wachsender positiver Krümmung ($\kappa > 0$, $\kappa' \geq 0$) und Einheitsnormale $n = Jc'$ ist die Kurve der Krümmungsmittelpunkte $\tilde{c} := c + \frac{1}{\kappa} n$. Die *Evolvente* („Abwickelnde“)

einer Kurve $\tilde{c}$ ist die Kurve c , die das lose Ende eines auf die Bahn von $\tilde{c}$ gewickelten Fadens beim Abziehen beschreibt: Die Strecke von $\tilde{c}(t)$ nach $c(t)$ ist im Punkte $\tilde{c}(t)$ tangential zur Kurve $\tilde{c}$ und die „Fadenlänge“ $l(t) = \mathcal{L}(\tilde{c}|_{[t_o, t]}) + |\tilde{c}(t) - c(t)|$ ist konstant für alle $t \geq t_o$. Zeigen Sie: Die Kurve c ist die Evolvente ihrer Evolute $\tilde{c}$. *Hinweis:* Zeigen Sie dazu $l' = 0$.



10. *Evolute der Zykloide:* Zeigen Sie, dass die Evolute der Zykloide

$$c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = r(t - \sin t, 1 - \cos t) \quad (2.47)$$

wieder eine (verschobene und gespiegelte) Zykloide ist und zeichnen Sie die beiden Kurven! *Hinweise:* Beachten Sie, dass die Zykloide nicht nach Bogenlänge parametrisiert ist; daher ist jetzt $n = Jc'/|c'|$ und $\kappa = \det(c', c'')/|c'|^3$, also

$$\tilde{c} = c + \frac{|c'|^2}{\det(c', c'')} Jc'. \quad (2.48)$$

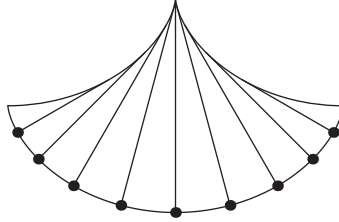
11. *Zykloide als Tautochrone:* Skizzieren Sie die (nach unten gedrehte) Zykloide $c(u) = r \cdot (u + \sin u, 1 - \cos u)$ und zeigen Sie folgende Eigenschaft: Ist $\tilde{c}$ die Umparametrisierung von c nach Bogenlänge, genauer $\tilde{c}(s) = c(u(s))$ mit $|\tilde{c}'| = 1$ und $u(0) = 0$, $u' = \frac{du}{ds} > 0$, dann gilt (mit $e_2 := (0, 1)$):

$$\langle \tilde{c}'(s), e_2 \rangle = s/(4r). \quad (2.49)$$

Hinweis: Sie brauchen die Umparametrisierung nicht explizit durchzuführen, sondern können (2.49) zu einer Beziehung für $c(u)$ umformen, die Sie direkt verifizieren können. Beachten Sie, dass u' aus der Beziehung $|\tilde{c}'| = 1$ berechnet werden kann.

Hintergrund: Wenn ein Massenpunkt am Ort $x(t)$ zur Zeit t durch Zwangskräfte an die Bahn der Kurve c oder $\tilde{c}$ gebunden ist, $x(t) = \tilde{c}(s(t))$, und sich unter dem Einfluss der Schwerkraft bewegt (diese ist konstant und zeigt nach unten, in Richtung $-e_2$), so wirkt auf den Massenpunkt bei Auslenkung aus der Ruhelage 0 als rücktreibende Kraft nur die tangentielle Komponente der Schwerkraft, $-\langle \tilde{c}'(s(t)), e_2 \rangle \stackrel{2.49}{=} -s(t)/4r$, und nach dem Newtonschen Gesetz ist $s'' = -s/(4r)$. Dies ist eine Schwingungsgleichung mit der Lösung $s(t) = s_o \cos \frac{t}{2\sqrt{r}}$, wo s_o die Auslenkung zur Zeit $t = 0$ ist. Die Bewegung ist periodisch mit Periodendauer $4\sqrt{r}\pi$,

unabhängig von der Anfangsauslenkung s_o , daher der Name „Tautochrone“ („gleiche Zeit“).²¹ Eine solche Bewegung eignet sich daher als Uhr, wenn es gelingt, einen Massenpunkt an diese Zykloidenbahn zu binden.



Eine solche Konstruktion gelang Huygens²² 1673 in seiner Schrift „Horologium Oscillatorium“ mit Hilfe der Abwicklungseigenschaft aus Übung 10: Das *Zykloidenpendel* besteht aus einem Gewicht an einem Faden, der zwischen zwei Zykloiden hängt und sich beim Schwingen auf diese aufwickelt.²³

12. *Ellipse, parametrisiert und als Gleichung:*

a) Zeigen Sie, dass die Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(\varphi) = r(\varphi)e^{i\varphi}$ mit

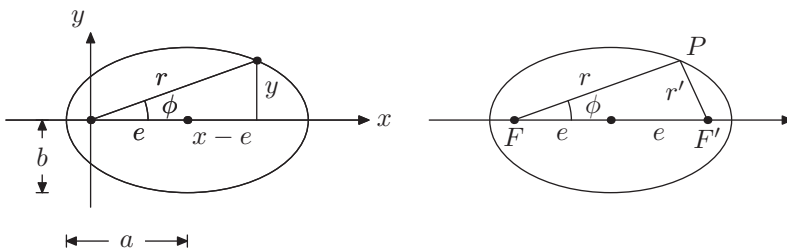
$$\frac{1}{r(\varphi)} = \frac{a}{b^2} \left(1 - \frac{e}{a} \cos \varphi\right) \quad (2.50)$$

für Zahlen $a > b > 0$ und $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ eine um e nach rechts verschobene Ellipse ist, d.h. verifizieren Sie die Gleichung

$$\frac{(x-e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.51)$$

für alle Punkte $c(\varphi) = (x, y)$ der Kurve (2.50).²⁴

Hinweis: Formen Sie (2.50) um zu $b^2 = r(a - e \cos \varphi)$ und setzen Sie $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ ein.



²¹ Als überraschende Konsequenz folgt, dass auch die Zeit bis zum tiefsten Punkt (eine Viertelperiode) unabhängig von der Auslenkung ist.

²² Christiaan Huygens, 1629–1695 (Den Haag).

²³ Die Zykloide hat noch eine weitere Eigenschaft: Sie ist auch die *Brachystochrone* („Kurve kürzester Zeit“) im homogenen Schwerfeld, d.h. ein schwerer Massenpunkt gelangt auf dem Zykloidenweg in kürzester Zeit von einem Punkt zu einem anderen, weiter unten liegenden; vgl. [10], [33].

²⁴ Siehe auch die Übungen zur Planetenbahn in Anhang B.

b) Zeigen Sie: Die Menge der Punkte P mit

$$r + r' = 2a \quad (2.52)$$

(siehe rechte Figur) bildet eine Ellipse mit Hauptachse a und $b = \sqrt{a^2 - e^2}$. Gilt auch die Umkehrung?

Hinweis: Benutzen Sie den Cosinussatz (Kapitel 1, Übung 6) für das Dreieck (F, P, F') .²⁵

13. *Rollkurven:* Gegeben sei eine konvexe, nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve $c(s)$, $s \in I$ mit $c(0) = 0$, $c'(0) = e_1 = (1, 0)$. Eine *Rollbewegung* von c (vgl. Aufgabe 2.2) ist eine differenzierbare Schar von Bewegungen $z \mapsto A(s)z + b(s)$ für eine Drehung $A(s)$ (in komplexer Notation: $A(s)z = e^{i\phi(s)}z$) und eine Verschiebung um einen Vektor $b(s) \in \mathbb{R}^2$, und zwar so, dass die bewegte Kurve $c_s = A(s)c + b(s)$ im Punkt

$$k(s) = c_s(s) = (s, 0) \quad (2.53)$$

(dem *Kontaktpunkt*) die x -Achse berührt, d.h. für alle $s \in I$ gilt

$$A(s)c(s) + b(s) = (s, 0), \quad (2.54)$$

$$A(s)c'(s) = (1, 0), \quad (2.55)$$

und durch Ableiten von (2.54) und Vergleich mit (2.55) folgt noch

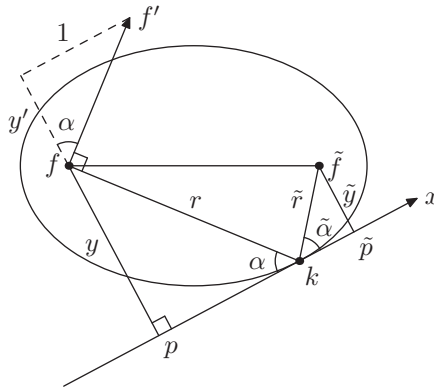
$$A'(s)c'(s) = -b'(s). \quad (2.56)$$

Für einen beliebigen Punkt $f_o \in \mathbb{E}^2$ heißt $f(s) := A(s)f_o + b(s)$ die *Rollkurve des Punktes* f_o (in der Aufgabe 2.2 ist $f_o = 0$).

Aufgabe: Zeigen Sie, dass der Tangentenvektor $f'(s)$ senkrecht auf der Verbindung von $f(s)$ zum Kontaktpunkt $k(s)$ steht:

$$\langle f', f - k \rangle = 0. \quad (2.57)$$

14. *Rollkurve des Ellipsen-Brennpunkts:*



²⁵ Es gibt einen rechenfreien Beweis dieser Tatsache mit Hilfe räumlicher Geometrie (*Dandelin'schen Kugeln*); vgl. [2], [18] oder [?], S. 62.

(Vgl. Kap. 8, Übung 7) Zur Bestimmung der Kurve $f(x)$, die ein Brennpunkt f beim Abrollen der Ellipse auf der x -Achse beschreibt, benötigen wir die folgenden Beziehungen für die Winkel $\alpha, \tilde{\alpha}$ und Abstände $y, \tilde{y}$ der Brennpunkte $f, \tilde{f}$ von der Tangente in einem Ellipsenpunkt k sowie die Entfernungen $r, \tilde{r}$ der Brennpunkte von k :²⁶

$$\alpha = \tilde{\alpha} \quad (2.58)$$

$$r + \tilde{r} = 2a, \quad (2.59)$$

$$y\tilde{y} = b^2 \quad (2.60)$$

Wir betrachten die Tangente von nun an als x -Achse. Zeigen Sie

$$\frac{y}{r} = \frac{\tilde{y}}{\tilde{r}} = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} \quad (2.61)$$

und folgern Sie daraus mit (2.59) und (2.60) die Differentialgleichung $y + b/y = 2a/\sqrt{1 + (y')^2}$ und damit

$$y^2 - \frac{2ay}{\sqrt{1 + (y')^2}} = -b^2. \quad (2.62)$$

15. *Schraubenlinie*: Eine *Schraubenlinie* ist eine Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{E}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, $c(t) = (ae^{it/\gamma}, bt/\gamma)$ für Konstanten $a, b > 0$ und $\gamma := \sqrt{a^2 + b^2}$. Zeichnen Sie diese Kurve. Zeigen Sie, dass c nach Bogenlänge parametrisiert ist. Berechnen Sie die Frenet-Basis $b_1 = c'$, $b_2 = c''/|c''|$, $b_3 = b_1 \times b_2$ sowie die Krümmung κ und die Torsion τ von c .
16. *Torsion bei beliebigen Parametern*: Zeigen Sie analog zur Aufgabe 4: Die Torsion τ einer beliebigen *Frenet-Kurve* $c : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ (d.h. $c'(t), c''(t)$ linear unabhängig für jedes $t \in I$, aber nicht notwendig $|c'| = 1$) ist gegeben durch

$$\tau = -\frac{\det(c', c'', c''')}{|c' \times c''|^2} \quad (2.63)$$

²⁶ Für die ersten beiden Beziehungen (2.58) und (2.59) vgl. Übung 12 b) und [2], Bd. II, S. 221–228. Die dritte, (2.60), folgt aus dem Cosinussatz für das Dreieck $(f, k, \tilde{f})$; das Argument verdanken wir Shimpei Kobayashi: Der Winkel bei k ist $\pi - 2\alpha$, und da $|f - \tilde{f}| = 2\sqrt{a^2 - b^2}$, gilt nach dem Cosinussatz mit (2.59):

$$4(a^2 - b^2) = r^2 + (2a - r)^2 - 2r(2a - r)\cos(\pi - 2\alpha)$$

Andererseits ist $\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -1 + 2\sin^2 \alpha$. Also ergibt sich

$$4a^2 - 4b^2 = 2r^2 - 4ar + 4a^2 + 4ar - 2r^2 - 4r(2a - r)\sin^2 \alpha$$

und damit

$$b^2 = r(2a - r)\sin^2 \alpha \stackrel{2.61}{=} y\tilde{y}.$$

Differentialgeometrie und Minimalflächen

Eschenburg, J.-H.; Jost, J.

2014, XV, 258 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-38521-6