

Vorwort

Das vorliegende Lehrbuch richtet sich an Studentinnen und Studenten der Mathematik und Physik in mittleren Studiensemestern und will ihnen eine Einführung in ein wichtiges Gebiet der reinen Mathematik anbieten, das gleichzeitig vielfältige Anwendungen in verschiedenen Bereichen der Physik besitzt und auch für viele Problemstellungen in den Ingenieurwissenschaften, in der Architektur und nicht zuletzt in der Geodäsie nützlich ist. In mathematischer Hinsicht wollen wir durch diesen Text die geometrische Vorstellungskraft der Studierenden schulen, sie auf anschauliche Weise zu den wesentlichen Begriffsbildungen der modernen Geometrie einführen und ihnen auch die in der mathematischen Forschung so wichtige Verbindung von geometrischer Anschauung und analytischen Methoden darstellen.

Schon die Entdecker der Differential- und Integralrechnung, Newton und Leibniz, und des letzteren Schüler und Nachfolger wie die Bernoulli-Brüder und Euler hatten analytische Methoden auf geometrische Fragestellungen angewandt und hierzu insbesondere die Variationsrechnung entwickelt, die die Gestalt optimaler Formen bestimmen will. Die moderne Differentialgeometrie beginnt aber eigentlich erst mit Carl Friedrich Gauß' berühmter, 1828 erschienener Abhandlung „Disquisitiones generales circa superficies curvas“^[15]. Diese Abhandlung war noch auf lateinisch geschrieben – die deutsche Übersetzung lautet: „Allgemeine Untersuchungen über gekrümmte Flächen“¹ – aber es handelt sich um eines der letzten bedeutenden mathematischen Werke, das auf lateinisch verfasst wurde, und noch zu Lebzeiten von Gauß vollzog sich die Ablösung des Lateins durch Deutsch als Wissenschaftssprache. Überhaupt markiert Gauß' Werk einen wichtigen Übergang. Gauß, der von 1777 bis 1855 lebte, löst sowohl den engen, und oft auch einengenden Bezug der Mathematik zur Naturphilosophie, die an den Akademien, den wesentlichen Forschungsstätten des 18. Jahrhunderts, eine große Bedeutung hatte, wie auch die Verbindung mit der Kriegstechnik, die in der napoleonischen Zeit für Geometer wie Gaspard Monge ein wesentlicher Antrieb für die Entwicklung der Geometrie gewesen war. Gauß wurde zu seinen bedeutenden

¹ <http://www.caressa.it/pdf/gauss00.pdf>

Eine deutsche Übersetzung erschien 1905 unter dem kürzeren und weniger aussagekräftigen Titel „Allgemeine Flächentheorie“ in der Reihe Ostwald's Klassiker der Wissenschaften bei Engelmann in Leipzig.

geometrischen Erkenntnissen durch eine friedlichere praktische Problemstellung inspiriert, nämlich die Vermessung des Königreichs Hannover, die er leitete. Daher ist es nicht verwunderlich, dass die von Gauß begründete Differentialgeometrie auch heute noch eine wesentliche Grundlage der Landvermessungslehre, der Geodäsie, darstellt. Aber die Tragweite der Gaußschen wissenschaftlichen Entdeckungen ist viel größer. Gauß hat eine allgemeine Lehre von Flächen im Raum geschaffen. Dabei hat er insbesondere die beiden wichtigsten Krümmungsbegriffe gefunden, die mittlere Krümmung und die nach ihm benannte Gaußsche Krümmung. Formal sehen die beiden eigentlich ganz ähnlich aus, wie wir in diesem Buch bald sehen werden: Die eine, die mittlere Krümmung H , ist in jedem Punkt das arithmetische Mittel, also die halbe Summe, der elementar zu definierenden Krümmungen zweier zueinander senkrechter Kurven auf der zu untersuchenden Fläche durch den gegebenen Punkt. Die andere, die Gaußsche Krümmung K , ist das Produkt zweier derartiger Kurvenkrümmungen. Trotzdem spielen H und K völlig unterschiedliche Rollen in der Differentialgeometrie, und damit sind auch schon die beiden wesentlichen Themenstränge unseres Buches angedeutet. Die mittlere Krümmung H beschreibt, wie eine Fläche im Raum liegt. Wir werden uns ausführlich mit der Klasse derjenigen Flächen befassen, deren mittlere Krümmung H überall verschwindet. Dies sind die sog. Minimalflächen, also Flächen, die, wie der Name schon sagt, den Flächeninhalt minimieren (zumindest im Kleinen, aber mit dieser Subtilität wollen wir uns in diesem Vorwort noch nicht befassen). Minimalflächen können durch eine vorgegebene Randkurve in viele verschiedene, geometrisch reichhaltige Gestalten gezwungen werden. Experimentell lassen sie sich durch Seifenfilme realisieren; mathematisch handelt es sich dabei um die Bestimmung einer Fläche mit kleinstem Flächeninhalt bei vorgegebener Randkurve. Das ist das sog. Plateausche Problem, benannt nach dem belgischen Physiker, der im 19. Jahrhundert durch seine Seifenfilmexperimente den Reichtum der geometrisch möglichen Formen von Minimalflächen vorführte. Das Plateausche Problem wird uns die Gelegenheit bieten, darzustellen, wie analytische Methoden (die wir vollständig entwickeln werden) aus dem Bereich der harmonischen Funktionen und der konformen Abbildungen zur Lösung eines geometrischen Problems eingesetzt werden können. Mit diesen analytischen Methoden können wir sowohl die lokalen als auch die globalen Eigenschaften von Minimalflächen untersuchen. Insbesondere können wir auch Minimalflächen in ihrer Gesamterstreckung verstehen. Als Beispiel werden wir den Satz von Bernstein beweisen, der besagt, dass die einzigen über der ganzen Ebene definierten minimalen Graphen im dreidimensionalen Raum die Ebenen sind. Derartige Sätze, dass nämlich global definierte geometrische Objekte durch ihre lokalen Krümmungseigenschaften stark eingeschränkt werden, nehmen einen zentralen Platz in der heutigen geometrischen Forschung ein, und der Bernsteinsche Satz ist ein mathematisch besonders fruchtbares Beispiel. Ganz allgemein bildet die Theorie der Minimalflächen ein Musterbeispiel dafür, wie man durch das Zusam-

menwirken von geometrischem Denken mit analytischen Methoden räumliche Formen und Strukturen unter globalen Kriterien, hier der Minimierung des Flächeninhaltes, optimieren kann. Dies weist auf vielfältige Anwendungen in Natur und Technik hin, die wir hier allerdings nicht systematisch verfolgen können. Für ein tiefergehendes Studium der Minimalflächen verweisen wir auf die Monographien [5, 6, 7] sowie [38].

Die andere Krümmung, die Gaußsche Krümmung K , ist dagegen, wie Gauß herausgefunden hat, von der Lage der Fläche im Raum unabhängig. Wenn wir eine Fläche im Raum verbiegen, ohne ihren inneren Maßverhältnisse zu ändern, wenn wir beispielsweise ein Stück Papier zu einem Zylinder oder Kegel zusammenrollen, so bleibt K unverändert ($= 0$ im Falle des Papierblattes). Diese Entdeckung von Gauß bedeutet, dass es nichttriviale geometrische Größen gibt, die allein von den Verhältnissen auf der Fläche, den Längen von Kurven und den Winkeln zwischen ihnen, abhängen und daher auch schon durch Messungen nur auf der Fläche selbst bestimmt werden können. Dies ist offensichtlich von großer Bedeutung für die Landvermessung, aus der Gauß, wie geschildert, seine ursprüngliche Motivation bezog. Die Tragweite dieser Entdeckung reicht allerdings wesentlich weiter. Der dreidimensionale euklidische Raum verliert seine ausgezeichnete Rolle als Träger aller Geometrie. Diese Konsequenz hat Bernhard Riemann in seinem Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ [41] gezogen, dem zweiten Schlüsseltext der Differentialgeometrie. Dieser Vortrag wurde am 10. Juni 1854 gehalten, und man kann dieses Datum als den Geburtstag der modernen Geometrie ansehen. In seinem Vortrag entwickelt Riemann die Vorstellung eines Raumes beliebiger Dimension, dessen Maßverhältnisse alleine durch geeignete infinitesimale Größen in seinen einzelnen Punkten bestimmt werden, und er deutet am Ende seines Vortrages an, dass diese Größen dann durch physikalische Kräfte bestimmt werden müssen. Bei diesen Überlegungen ist Riemann wohl auch durch naturphilosophische Spekulationen beeinflusst worden, was er aber in seinem Vortrag nicht zum Ausdruck brachte, denn die Fachwelt betrachtete so etwas zur Zeit Riemanns (der von 1826 bis 1866 lebte) schon, im Unterschied zur Situation im 18. Jahrhundert, mit großem Misstrauen. Riemanns Überlegungen hatten aber dann umgekehrt enorme Auswirkungen für die Naturphilosophie und können vor allem als grandiose Vorahnung und als mathematische Basis wesentlicher Entwicklungslinien der Physik des 20. Jahrhunderts gesehen werden. Der damals schon 77-jährige Gauss jedenfalls war durch Riemanns Vortrag außerordentlich beeindruckt. Einige Nachfolger Riemanns wie Christoffel und Lipschitz, aber insbesondere italienische Mathematiker um Beltrami, Ricci und Levi-Civita bauten dann ab der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts die oft nur skizzenhaft angedeuteten Überlegungen Riemanns (der veröffentlichte Vortrag enthielt übrigens praktisch keine Formeln, was sicher sehr ungewohnt für eine mathematische Abhandlung ist und in diesem Buch dann auch nicht nachgeahmt wird) zu einem formal durchstrukturierten Ten-

sorkalkül aus. Dieser Kalkül wiederum bildete dann das entscheidende mathematische Hilfsmittel für die Allgemeine Relativitätstheorie Einsteins. Das Prinzip ist dieses: Riemannsche Räume werden lokal durch Koordinaten beschrieben, aber im Unterschied zum kartesischen oder euklidischen Raum gibt es im Allgemeinen keine besonders ausgezeichneten Koordinaten mehr. Die Koordinatenwahl wird also beliebig. Nun hat man aber das Problem, dass man nicht mit beliebigen Größen operieren möchte, denn dann würde alles willkürlich. Man möchte also Invarianten finden, Größen, die gerade nicht von der Wahl der Koordinaten abhängen, sondern wesentliche Eigenschaften des betrachteten Raumes erfassen. Riemann hat die Lösung dieses Problems schon angegeben: Krümmungsgrößen! Damit erscheint die Gaußsche Krümmung K in einem ganz neuen Licht, als Spezialfall der Riemannschen Invarianten. Objekte der Geometrie wie Tangentialvektoren oder Ableitungen von Funktionen sehen allerdings in verschiedenen Koordinatendarstellungen auch verschieden aus, hängen also von der gewählten – und dabei, wie gesagt, eigentlich völlig willkürlichen – Beschreibung ab. Die Regeln für die Umrechnung von einer Koordinatenbeschreibung in eine andere machen dann das Wesen des Tensorkalküls aus. Dies ist nicht nur, wie angedeutet, fundamental für die Allgemeine Relativitätstheorie, sondern auch für die Quantenfeldtheorie, die theoretische Grundlage der modernen Hochenergiephysik. So wird der Tensorkalkül der Riemannschen Geometrie die Sprache der theoretischen Physik. Aber nicht nur diese, sondern auch wesentliche Teile beispielsweise der Strukturmechanik, wie die Elastizitätstheorie, benutzen diese geometrische Sprache mit großem Gewinn.

Die euklidische Geometrie hatte aber sogar schon vor Riemann ihre Einzigartigkeit, ihren Alleinvertretungsanspruch zur Wahrnehmung und Beschreibung von in Raum und Zeit ablaufenden physikalischen Prozessen verloren. Gauß, der dies allerdings aus Angst vor dem Unverständnis seiner Zeitgenossen geheimhielt, sowie Bolyai in Ungarn und Lobatschewski in Russland hatten die nichteuklidische Geometrie entdeckt, eine Alternative zur euklidischen Geometrie, die genauso konsistent wie diese war und daher im Prinzip auch genauso gut als Träger physikalischer Prozesse dienen könnte. Riemann hat anscheinend diese Entwicklung nicht gekannt, aber die nichteuklidische Geometrie lässt sich leicht als Spezialfall der Riemannschen auffassen, und zwar als der Fall, wo die Krümmung $K \equiv -1$ ist. In einem (zu präzisierenden) Sinne ist diese nichteuklidische Geometrie dual zu derjenigen auf der Kugeloberfläche, der Sphäre, die durch $K \equiv +1$ gekennzeichnet ist.

Die Differentialgeometrie bietet also spannende Themen im Überfluss, und die hoffentlich neugierig gewordenen Leserinnen und Leser mögen jetzt vielleicht fragen, wie wir diese in unserem Buch behandeln können. Daher geben wir nun einen kurzen Überblick über den Inhalt, als eine Art von Kommentierung des Inhaltsverzeichnisses.

Das erste Kapitel hat eher einleitenden Charakter und behandelt die euklidische Raumvorstellung und ruft auch einige Grundlagen der Analysis im kartesischen Raum ins Gedächtnis – schwierigere analytische Grundlagen werden wir im Anhang vollständig darlegen. Räumliche Kurven sind das – noch sehr elementare, aber für die Flächentheorie technisch unabdingbare – Thema des zweiten Kapitels. Im dritten und vierten Kapitel werden Flächen im dreidimensionalen Raum behandelt und insbesondere die wichtigen Begriffe der ersten und der zweiten Fundamentalform eingeführt. Die erste beschreibt die geometrischen Maßverhältnisse auf einer Fläche, die zweite die Lage der Fläche im umgebenden Raum, indem sie die Änderung des Normalenvektors beim Übergang von einem Punkt zu einem anderen wiedergibt. Wir werden hierbei auch auf die grundlegenden Krümmungsbegriffe, die Gaußsche und die mittlere Krümmung geführt. Beide werden zunächst durch die zweite Fundamentalform gewonnen, auch wenn, wie schon erwähnt, die Gaußsche Krümmung sich später als nur von der ersten Fundamentalform abhängig erweisen wird. Im fünften Kapitel befassen wir uns dann mit kürzesten Linien auf Flächen. Wenn man sich die Fläche S im dreidimensionalen Raum vorstellt, so handelt es sich dabei Kurven im Raum, die die kürzeste Verbindung zwischen ihren Endpunkten unter der Zwangsbedingung darstellen, dass sie ganz auf S liegen, sich also an die Gestalt der Fläche anpassen müssen. Uns geht es aber in erster Linie darum, solche Kurven intrinsisch, d.h. durch die Geometrie auf der Fläche zu charakterisieren. Im sechsten Kapitel führen wir dann diese innere Geometrie weiter und untersuchen u.a., wie man einen Begriff von Parallelität zwischen Tangentialvektoren in verschiedenen Punkten einer Kurve auf einer gekrümmten Fläche entwickeln kann. Dies werden wir dann später in Kapitel 11 wieder aufgreifen. – Auch wenn das Thema unseres Buches Flächen, also zweidimensionale Objekte sind, so lassen sich doch viele Teile des differentialgeometrischen Kalküls ohne zusätzliche Mühe in beliebiger Dimension entwickeln. Das Geschenk dieser Allgemeinheit werden wir insbesondere im siebten Kapitel nutzen, wo wir sehen werden, dass es von der Dimension 3 an viel weniger konforme Abbildungen als noch in zwei Dimensionen gibt.

Die drei nächsten Kapitel sind dann den Minimalflächen gewidmet, also Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung, oder (im Wesentlichen) äquivalent, Minima des Flächeninhaltes. Wir diskutieren zunächst verschiedene Möglichkeiten der analytischen Beschreibung und einige schöne Beispiele und beweisen dann den oben schon angesprochenen Satz von Bernstein. Das neunte Kapitel löst das ebenfalls schon genannte Plateausche Problem, eine Minimalfläche mit vorgegebener Randkurve zu finden. Wir entwickeln alle erforderlichen Hilfsmittel der Analysis, die übrigens auch in anderen Bereichen der Mathematik (partielle Differentialgleichungen, Variationsrechnung, komplexe Analysis, Funktionalanalysis,...) von großem Interesse sind. Dies macht die Differentialgeometrie dann auch interessant für Mathematikerinnen und Mathematiker, deren Interesse vornehmlich in der Analysis liegt. Eine wesent-

liche Vereinfachung geschieht durch die Einführung konformer (= winkeltreuer) Koordinaten auf der Fläche, ein Hilfsmittel, das nur für Flächen, nicht mehr für höherdimensionale Mannigfaltigkeiten zur Verfügung steht. Daher muss die hier entwickelte Theorie der Minimalflächen auch strikt zweidimensional bleiben. Ein dimensionsunabhängiges analytisches Hilfsmittel dagegen ist das Maximumprinzip (s.u.), mit dem wir im zehnten Kapitel geometrische Restriktionen für minimale Hyperflächen und sogar allgemeiner für Hyperflächen konstanter mittlerer Krümmung in beliebiger Dimension herleiten.

Im elften Kapitel greifen wir dann den Riemannschen Ansatz auf. Wir entwickeln nun alle geometrischen Konzepte und Größen allein aus inneren Maßverhältnissen, unabhängig von irgendeiner Einbettung in einen euklidischen Raum und sogar unabhängig von der Möglichkeit einer solchen Einbettung. Insbesondere führt uns dies zu dem grundlegenden Satz von Gauß, dass K eine Größe der inneren Geometrie ist. Im zwölften Kapitel betrachten wir dann Flächen mit Riemannschen Metriken in ihrer Gesamterstreckung. Nach einer ausführlichen Diskussion der nichteuklidischen oder hyperbolischen Ebene und deren verschiedenen Modellen kommen wir dann zu einem weiteren Höhepunkt der Geometrie, dem Satz von Gauß-Bonnet, der eine Beziehung zwischen dem Integral einer lokalen Größe, nämlich der Gaußschen Krümmung K , und der globalen topologischen Gestalt einer Fläche liefert. Ein Ausblick auf die höherdimensionale Situation beschließt das Buch, mit Ausnahme zweier Anhänge. Der erste von diesen liefert eine einheitliche Behandlung von Integrationsbedingungen für überbestimmte Systeme von Differentialgleichungen, die wir gleichermaßen zur Behandlung des Problems, wann ein Riemannscher Raum lokal isometrisch zu einem euklidischen Raum ist (dies ist genau dann der Fall, wenn die Krümmung identisch verschwindet) wie zur Beantwortung der Frage nutzen können, wann zwei vorgebene Formen die erste und zweite Fundamentalform einer Hyperfläche im euklidischen Raum sind – nämlich genau dann, wenn von Gauss und Codazzi und Mainardi aufgestellte Gleichungen zwischen (dem aus der ersten Fundamentalform berechneten) Krümmungstensor und der zweiten Fundamentalform sowie zwischen den Ableitungen der zweiten Fundamentalform erfüllt sind.

Der Schwierigkeitsgrad der einzelnen Abschnitte ist recht unterschiedlich. In analytischer Hinsicht ist der Höhepunkt sicher die Behandlung des Plateauproblems in Kapitel 9 (Konstruktion von Minimalflächen bei gegebenem Rand), wobei wir allerdings nur auf Konzepte der Analysis im euklidischen Raum zurückgreifen müssen. Andere Anwendungen im Bereich der Minimalflächen benötigen analytische Begriffe der Riemannschen Geometrie wie den Laplace-Beltrami-Operator; wir führen deshalb bereits in den Abschnitten 4.4, 6.3, 6.4 solche Konzepte ein, auf die man zunächst verzichten kann, wenn man die Anwendungen nicht behandeln möchte. Es handelt sich um die Existenz von isothermen (konformen) Parametern auf Minimalflächen (8.6 und 8.7) sowie das Maximumprinzip für minimale Hyperflächen (10.1). Isotherme Parameter sind ein unentbehrliches Hilfsmittel zum Verstehen von Minimal-

flächen; man kann deren Existenz natürlich ohne Beweis akzeptieren, aber bei der Untersuchung minimaler Graphen (Bernstein-Problem, 8.7) kommen wir mit der Existenz nicht mehr aus, sondern benötigen die Konstruktion. Das Maximumprinzip sagt, dass verschiedene Minimalflächen sich nicht einseitig berühren können. Dies lässt sich mit euklidischer Analysis zeigen, wenn man die Flächen als Graphen parametrisiert [29]; wir geben einen anderen Beweis, der keine spezielle Parametrisierung, sondern Riemannsche Analysis benutzt.

Auch die Übungsaufgaben haben sehr unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad. In ihrer Mehrzahl sollen sie die vorgestellten Begriffe und Methoden an Hand von Beispielen verdeutlichen und vertiefen, einige aber gehen über den Stoff hinaus und könnten auch Proseminarthemen abgeben.

Das Buch soll nicht nur zum Selbststudium geeignet sein, sondern auch als Grundlage einer Vorlesung für mittlere Studiensemester dienen können. Daher hat es auch vom Umfang und der Schwierigkeit des Inhalts her seine natürlichen Grenzen. Wir entwickeln, wie gesagt, die Geometrie von Flächen im Raum, unter Ausweitung auf beliebige Dimensionen, wann immer sich dies zwanglos anbietet, und wir führen die Leserin und den Leser hin zu den Konzepten der inneren Geometrie. Insofern bietet das Buch einen guten Einstieg in die Riemannsche Geometrie. Zu den Begrenzungen des Buches gehört allerdings, dass wir weitgehend in einer Parametrisierung arbeiten. Wir entwickeln daher nicht den allgemeinen und abstrakten Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit, sondern müssen dies weiterführenden Texten überlassen. Wir erlauben uns, als sinnvolle Fortsetzung an dieser Stelle das Werk „Riemannian Geometry and Geometric Analysis“ [30] des zweitgenannten Autors zu empfehlen.

Bei dem vorliegenden Werk handelt es sich um eine vom erstgenannten Verfasser durchgeführte vollständige und grundlegende Überarbeitung, Umgestaltung und Erweiterung in Abstimmung mit dem zweitgenannten Verfasser von dessen 1994 erschienenem Werk [26] mit dem gleichen Titel.

Wir danken Minjie Chen für das kompetente und engagierte Anfertigen der geometrischen Skizzen und Figuren, Karin Reich und Rüdiger Thiele sowie den Autoren der mathematikhistorischen Webseite der St.-Andrews-Universität² für wissenschaftsgeschichtliche Auskünfte, Hermann Karcher für das Bild der Zweiten Scherkschen Minimalfläche, das auch bei der Umschlaggestaltung Verwendung fand, Shimpei Kobayashi für die Hilfe zum Verstehen der Delaunayflächen, Friedrich Pukelsheim für die Erläuterung der Fishermetrik und Antje Vandenberg für vielfältige logistische Hilfe. Für mannigfache Hinweise auf Fehler und Ungenauigkeiten danken wir vor allem Jürgen Kampf, Peter Quast und Vladimir Matveev sowie vielen Studierenden, die mit einer Vorabversion des Textes bereits gearbeitet haben.

Die vorliegende Neuauflage enthält einige Korrekturen und Aktualisierungen.

² <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/>

Augsburg/Leipzig,
Juni 2013

*Jost-Hinrich Eschenburg,
Jürgen Jost*

Differentialgeometrie und Minimalflächen

Eschenburg, J.-H.; Jost, J.

2014, XV, 258 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-38521-6