

1.1 Lie-Gruppen und ihre Algebren

Zu den grundlegenden Objekten, die in der Eichfeldtheorie auftreten, gehören Gruppen mit differenzierbarer Struktur. Im ersten Kapitel werden wir einige grundlegende Eigenschaften und Aussagen über solche Gruppen behandeln, die wir später benötigen werden.

Definition 1.1 Eine Gruppe G , die zusätzlich mit einer differenzierbaren Struktur¹ versehen ist, heißt Lie-Gruppe, wenn die Abbildung

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, a) &\longmapsto g \cdot a^{-1} \end{aligned}$$

glatt ist.

Viele gut bekannte Gruppen sind Lie-Gruppen. Wir nennen zur Illustration zunächst einige Beispiele für Lie-Gruppen, die häufig vorkommen. Das sind:

1. Der Vektorraum \mathbb{R}^n mit der Addition von Vektoren als Gruppenoperation und der durch die Koordinaten gegebenen Mannigfaltigkeitsstruktur.
2. Die Sphäre $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ mit der Multiplikation von komplexen Zahlen als Gruppenoperation und der durch die Einbettung in den \mathbb{R}^2 gegebenen Mannigfaltigkeitsstruktur.
3. Die Gruppen $GL(n, \mathbb{R})$ bzw. $GL(n, \mathbb{C})$ als offene Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n^2} bzw. des \mathbb{R}^{2n^2} .

¹ Mit differenzierbarer Struktur meinen wir immer die Struktur einer *glatten* (d. h. C^∞) Mannigfaltigkeit. Alle in diesem Buch betrachteten Mannigfaltigkeiten sind glatt. Wir sagen deshalb oft kurz nur „Mannigfaltigkeit“.

4. Sind G und H zwei Lie-Gruppen, so ist das Gruppenprodukt $G \times H$, versehen mit dem Produkt der differenzierbaren Strukturen, ebenfalls eine Lie-Gruppe.
5. In Abschn. 1.4 werden wir zeigen, dass jede (topologisch) abgeschlossene Untergruppe einer Lie-Gruppe wieder eine Lie-Gruppe ist. Insbesondere sind also die Matrizengruppen $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$, $O(p, q)$, $SO(p, q)$, $U(p, q)$, $SU(p, q)$ und $Sp(p, q)$ Lie-Gruppen.
6. In der Riemannschen Geometrie betrachtet man Gruppen von Diffeomorphismen mit speziellen geometrischen Eigenschaften, z. B. die Gruppe aller Isometrien oder die Gruppe aller konformen Abbildungen einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit. Man kann zeigen, dass auch diese Gruppen Lie-Gruppen sind.

Definition 1.2 Sei V ein Vektorraum² und $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ eine schiefsymmetrische bilineare Abbildung, die die Jacobi-Identität

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0 \text{ für alle } u, v, w \in V$$

erfüllt. Dann heißt $(V, [\cdot, \cdot])$ Lie-Algebra und $[\cdot, \cdot]$ Kommutator oder Lie-Klammer.

Auch hier nennen wir zur Illustration zunächst einige Beispiele für gut bekannte und häufig auftretende Lie-Algebren:

1. \mathbb{R}^n mit $[\cdot, \cdot] := 0$.
2. \mathbb{R}^3 mit dem durch das Vektorprodukt gegebenen Kommutator:
 $[v, w] := v \times w$.
3. Jede assoziative Algebra (A, \cdot) mit dem Kommutator $[a, b] := a \cdot b - b \cdot a$. Insbesondere ist die Algebra $\text{End}(V)$ aller Endomorphismen eines Vektorraumes bzw. die Algebra $M(n, \mathbb{K})$ aller $(n \times n)$ -Matrizen eine Lie-Algebra.
4. Die spurfreien Matrizen $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid \text{Tr}(X) = 0\}$.
5. Die schiefsymmetrischen Matrizen $\mathfrak{so}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid X^t = -X\}$.
6. Der Vektorraum $\mathfrak{X}(M)$ der glatten Vektorfelder einer glatten Mannigfaltigkeit M mit dem Vektorfeld-Kommutator.
7. Der Vektorraum aller Killingfelder einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit mit dem Vektorfeld-Kommutator.
8. Der Vektorraum aller konformen Vektorfelder einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit mit dem Vektorfeld-Kommutator.

Wir wollen nun jeder Lie-Gruppe G eine endlich-dimensionale reelle Lie-Algebra zuordnen. Dazu führen wir zunächst folgende Bezeichnungen ein. Für ein festes Element $g \in G$ heißen die Diffeomorphismen

² Wir werden in diesem Buch nur reelle und komplexe Vektorräume betrachten.

$$\begin{aligned}
L_g &: x \in G \longrightarrow g \cdot x \in G && \text{Linkstranslation,} \\
R_g &: x \in G \longrightarrow x \cdot g \in G && \text{Rechtstranslation,} \\
\alpha_g = L_g \circ R_g^{-1} &: G \longrightarrow G && \text{innerer Automorphismus.}
\end{aligned}$$

Ist M eine Mannigfaltigkeit, $F : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld auf M , dann bezeichne $dF(X)$ das durch

$$dF(X)(x) := dF_{F^{-1}(x)}X(F^{-1}(x)), \quad x \in M,$$

definierte Vektorfeld. Bekanntlich gilt

$$dF([X, Y]) = [dF(X), dF(Y)] \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.1)$$

Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(G)$ auf einer Lie-Gruppe G heißt *linksinvariant* (*rechtsinvariant*), falls $dL_g(X) = X$ (bzw. $dR_g(X) = X$) für alle $g \in G$ gilt. Wegen (1.1) ist der Vektorraum

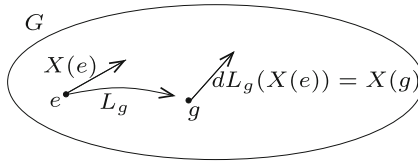
$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathfrak{X}(G) \mid X \text{ ist linksinvariant}\}$$

mit dem Vektorfeld-Kommutator $[\cdot, \cdot]$ eine Lie-Algebra.

Definition 1.3 Die Lie-Algebra der linksinvarianten Vektorfelder $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ heißt Lie-Algebra der Lie-Gruppe G .

Offensichtlich ist jedes linksinvariante Vektorfeld $X \in \mathfrak{g}$ durch den Vektor $X(e) \in T_e G$ im Tangentialraum an das 1-Element $e \in G$ eindeutig bestimmt, denn es gilt

$$X(g) = dL_g(X(e)) \quad \text{für } g \in G. \quad (1.2)$$



Deshalb werden wir im Folgenden oft \mathfrak{g} und $T_e G$ in diesem Sinne identifizieren.

Beispiel 1.1 Sei $G = GL(n, \mathbb{R})$ die Lie-Gruppe aller invertierbaren reellen $(n \times n)$ -Matrizen. Die zugehörige Lie-Algebra ist der Vektorraum $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ aller reellen $(n \times n)$ -Matrizen mit dem Kommutator

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X, \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Dies ist leicht einzusehen: Da $G = GL(n, \mathbb{R})$ eine offene Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n^2} ist, kann man den Tangentialraum $T_E G$ an die Einheitsmatrix E mit dem $\mathbb{R}^{n^2} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ identifizieren. Sei $X \in T_E G$ und $\gamma_X : I \rightarrow G$ eine glatte Kurve in $G = GL(n, \mathbb{R})$ mit

$\gamma_X(0) = E$ und $\gamma'_X(0) = X$. Für das durch X gemäß (1.2) erzeugte linksinvariante Vektorfeld \tilde{X} gilt dann

$$\begin{aligned}\tilde{X}(A) &= dL_A(X) = \frac{d}{dt}(L_A(\gamma_X(t)))_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(A \circ \gamma_X(t))_{t=0} = A \circ X.\end{aligned}$$

Da der Kommutator von Vektorfeldern auf Untermannigfaltigkeiten durch Richtungsableitungen berechnet werden kann, folgt:

$$\begin{aligned}[X, Y] &= [\tilde{X}, \tilde{Y}](E) = \tilde{X}(\tilde{Y})(E) - \tilde{Y}(\tilde{X})(E) \\ &= \frac{d}{dt}(\tilde{Y}(\gamma_X(t)))_{t=0} - \frac{d}{dt}(\tilde{X}(\gamma_Y(t)))_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma_X(t) \circ Y - \gamma_Y(t) \circ X)_{t=0} \\ &= X \circ Y - Y \circ X.\end{aligned}$$

Beispiel 1.2 Sind $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$ und $(\mathfrak{h}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h}})$ Lie-Algebren, so ist die direkte Summe $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ der Vektorräume mit dem Kommutator

$$[X_1 + Y_1, X_2 + Y_2] := [X_1, X_2]_{\mathfrak{g}} + [Y_1, Y_2]_{\mathfrak{h}}, \quad X_1, X_2 \in \mathfrak{g}, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{h}$$

eine Lie-Algebra. Sind G und H zwei Lie-Gruppen mit den zugehörigen Lie-Algebren \mathfrak{g} und \mathfrak{h} , so ist $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ die Lie-Algebra der Lie-Gruppe $G \times H$.

Definition 1.4 1. Seien G_1 und G_2 zwei Lie-Gruppen und $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ ein Gruppen-Homomorphismus. Ist ψ zusätzlich glatt, so nennt man ψ einen Lie-Gruppen-Homomorphismus.

2. Seien $(V_1, [\cdot, \cdot]_1), (V_2, [\cdot, \cdot]_2)$ zwei Lie-Algebren und $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ eine lineare Abbildung. φ heißt Lie-Algebren-Homomorphismus, falls

$$[\varphi(v), \varphi(w)]_2 = \varphi([v, w]_1) \quad \text{für alle } v, w \in V_1.$$

Satz 1.1 Sei $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus und seien \mathfrak{g}_1 bzw. \mathfrak{g}_2 die Lie-Algebren der Lie-Gruppen G_1 bzw. G_2 . Für $X \in \mathfrak{g}_1$ bezeichne $\psi_*X \in \mathfrak{g}_2$ das durch den Vektor $d\psi_e(X(e)) \in T_eG_2$ definierte linksinvariante Vektorfeld. Dann ist die Abbildung

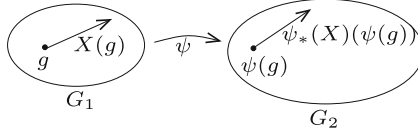
$$\begin{aligned}\psi_* : \mathfrak{g}_1 &\longrightarrow \mathfrak{g}_2 \\ X &\longmapsto \psi_*X\end{aligned}$$

ein Lie-Algebren-Homomorphismus.

Beweis Sei e das neutrale Element von G_1 . Da das Differential $d\psi_e$ linear ist, ist auch ψ_* eine lineare Abbildung. Wir zeigen, dass die Vektorfelder X und ψ_*X ψ -verknüpft sind,

d. h., dass

$$(\psi_* X)(\psi(g)) = (d\psi_g)(X(g)) \quad \text{für alle } g \in G_1.$$



Auf Grund der Definition von $\psi_* X$ gilt:

$$\begin{aligned} (\psi_* X)(\psi(g)) &= dL_{\psi(g)}(d\psi_e(X(e))) \\ &= d(L_{\psi(g)} \circ \psi)_e X(e) \\ &= d(\psi \circ L_g)_e X(e) \\ &= d\psi_g(dL_g X(e)) = d\psi_g(X(g)). \end{aligned}$$

Für den Kommutator ψ -verknüpfter Vektorfelder gilt also

$$[\psi_* X, \psi_* Y] = \psi_* [X, Y].$$

Folglich ist ψ_* ein Lie-Algebren-Homomorphismus. □

1.2 Die Exponential-Abbildung einer Lie-Gruppe

Im folgenden Abschnitt beweisen wir spezielle Eigenschaften von linksinvarianten Vektorfeldern auf Lie-Gruppen, die es uns gestatten, angepasste Koordinaten einzuführen.

Satz 1.2 Sei G eine Lie-Gruppe und \mathfrak{g} ihre Lie-Algebra. φ_X bezeichne die maximale Integralkurve eines linksinvarianten Vektorfeldes $X \in \mathfrak{g}$ durch das neutrale Element $e \in G$. Dann gilt:

1. φ_X ist auf ganz \mathbb{R} definiert.
2. $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ ist ein Homomorphismus der Lie-Gruppen, d. h.

$$\varphi_X(0) = e \quad \text{und} \quad \varphi_X(s+t) = \varphi_X(s) \cdot \varphi_X(t) \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

3. $\varphi_{sX}(t) = \varphi_X(s \cdot t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Beweis Sei $\varphi_X : I = (t_{\min}, t_{\max}) \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ die maximale Integralkurve von X durch e , d. h. $\varphi_X(0) = e$ und $\dot{\varphi}_X(t) = X(\varphi_X(t))$, wobei $\dot{\varphi}$ die Ableitung von φ nach t bezeichnet. Wir zeigen zunächst, dass für alle $s, t \in I$ mit $s+t \in I$

$$\varphi_X(s+t) = \varphi_X(s) \cdot \varphi_X(t)$$

gilt. Sei dazu $s \in I$ ein fester Parameter und $g := \varphi_X(s) \in G$. Wir betrachten die glatten Kurven

$$\begin{aligned}\eta : \tau \in I &\longrightarrow g \cdot \varphi_X(\tau) \in G, \\ \tilde{\eta} : \tau \in (t_{\min} - s, t_{\max} - s) &\longrightarrow \varphi_X(\tau + s) \in G.\end{aligned}$$

η und $\tilde{\eta}$ sind Integralkurven von X durch $g \in G$, denn $\eta(0) = g \cdot \varphi_X(0) = g$, $\tilde{\eta}(0) = \varphi_X(s) = g$ und

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(\tau) &= dL_g(\dot{\varphi}_X(\tau)) = dL_g(X(\varphi_X(\tau))) = X(g \cdot \varphi_X(\tau)) = X(\eta(\tau)), \\ \dot{\tilde{\eta}}(\tau) &= \dot{\varphi}_X(\tau + s) = X(\varphi_X(\tau + s)) = X(\tilde{\eta}(\tau)).\end{aligned}$$

Auf Grund der Eindeutigkeit von Integralkurven stimmen η und $\tilde{\eta}$ auf dem gemeinsamen Definitionsbereich $I \cap (t_{\min} - s, t_{\max} - s)$ überein. Somit gilt für alle $t \in I$ mit $t + s \in I$:

$$\eta(t) = \varphi_X(s) \cdot \varphi_X(t) = \tilde{\eta}(t) = \varphi_X(s + t).$$

Wir zeigen nun, dass φ_X auf ganz \mathbb{R} definiert ist.

Angenommen, $t_{\max} < \infty$. Sei $\alpha := \min(t_{\max}, |t_{\min}|)$. Wir betrachten die Kurve $\eta(s) := \varphi_X(\frac{\alpha}{2}) \cdot \varphi_X(s - \frac{\alpha}{2})$. Dann ist $\eta(0) = \varphi_X(\frac{\alpha}{2}) \cdot \varphi_X(-\frac{\alpha}{2}) = \varphi_X(0) = e$ und mit $g := \varphi_X(\frac{\alpha}{2})$ gilt:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(s) &= dL_g\left(\dot{\varphi}_X\left(s - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = dL_g\left(X\left(\varphi_X\left(s - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right) \\ &= X\left(g \cdot \varphi_X\left(s - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = X\left(\varphi_X\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \varphi_X\left(s - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ &= X(\eta(s)).\end{aligned}$$

Das bedeutet aber, dass η die Integralkurve φ_X von X über t_{\max} hinaus fortsetzt, was im Widerspruch zur Maximalität von φ_X steht. Also war die Annahme $t_{\max} < \infty$ falsch. Analog zeigt man, dass $t_{\min} = -\infty$. Die Integralkurve φ_X ist folglich auf ganz \mathbb{R} definiert. Wir zeigen abschließend, dass $\varphi_{sX}(t) = \varphi_X(s \cdot t)$.

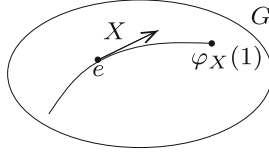
Sei dazu $\delta(t) := \varphi_X(s \cdot t)$. Dann ist $\delta(0) = \varphi_X(0) = e$ und

$$\dot{\delta}(t) = s\dot{\varphi}_X(s \cdot t) = sX(\varphi_X(s \cdot t)) = sX(\delta(t)).$$

Folglich ist δ die Integralkurve von sX durch e , d. h. $\varphi_{sX}(t) = \varphi_X(s \cdot t)$. □

Definition 1.5 Sei \mathfrak{g} die Lie-Algebra von G . Die Abbildung

$$\begin{aligned}\exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \varphi_X(1)\end{aligned}$$



heißt *Exponentialabbildung der Lie-Gruppe G*.

Nach Satz 1.2 ist die Kurve $t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_X(t) = \varphi_{tX}(1) = \exp tX$ die maximale Integralkurve von X durch $e \in G$ und die Kurve $t \in \mathbb{R} \mapsto g \cdot \exp tX$ die maximale Integralkurve von X durch $g \in G$.

Beispiel 1.3 Wir betrachten als Beispiel wieder die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ aller invertierbaren Matrizen mit ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Für diese Gruppe stimmt die Exponentialabbildung mit dem üblichen Exponential von Matrizen überein, d. h., es gilt

$$\exp X = e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}.$$

Der folgende Satz beschreibt eine sehr wichtige Beziehung zwischen Lie-Gruppen-Homomorphismen und ihren Ableitungen.

Satz 1.3 Sei $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Dann gilt

$$\psi(\exp X) = \exp(\psi_* X)$$

für alle Elemente X in der Lie-Algebra von G_1 .

Beweis Wir betrachten $\gamma(t) := \psi(\exp tX)$. Dann gilt $\gamma(0) = \psi(e_1) = e_2$, wobei e_i das neutrale Element in G_i bezeichnet, und

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= d\psi_{\exp tX}(X(\exp tX)) = d\psi_{\exp tX}(dL_{\exp tX}(X(e_1))) \\ &= dL_{\psi(\exp tX)}d\psi_{e_1}(X(e_1)) = (\psi_* X)(\psi(\exp tX)) \\ &= (\psi_* X)(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Folglich ist γ die Integralkurve des linksinvarianten Vektorfeldes $\psi_* X$ durch das neutrale Element $e_2 \in G_2$, was die Behauptung liefert. \square

Als nächstes beweisen wir einige grundlegende Eigenschaften der Exponentialabbildung.

Satz 1.4 Die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ ist glatt und ein lokaler Diffeomorphismus um den Nullvektor $o \in \mathfrak{g}$. Weiterhin gilt:

1. $\exp(o) = e$,
2. $\exp(-X) = (\exp X)^{-1}$,
3. $\exp((t+s)X) = \exp(sX) \cdot \exp(tX)$, $s, t \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{g}$.

Beweis Die Glattheit der Exponentialabbildung folgt aus den Standardsätzen über die glatte Abhängigkeit der Lösung von linearen Differentialgleichungen von den Anfangswerten. Die Eigenschaften 1., 2., 3. folgen aus Satz 1.2. Es bleibt zu zeigen, dass

$$d \exp_o : T_o \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g} \longrightarrow T_e G \simeq \mathfrak{g}$$

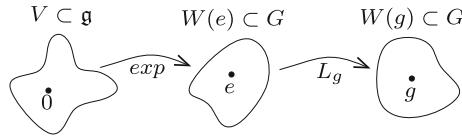
ein Isomorphismus, d. h., dass \exp ein lokaler Diffeomorphismus um $o \in \mathfrak{g}$ ist. Um das zu zeigen, wählen wir ein linksinvariantes Vektorfeld $X \in \mathfrak{g}$. Dann gilt

$$d \exp_o(X) = \frac{d}{dt} (\exp(o + tX))_{t=0} = \frac{d}{dt} (\exp tX)_{t=0} = X(e).$$

Identifizieren wir $T_e G$ mit \mathfrak{g} , so erhalten wir sogar $d \exp_o = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$. \square

Mit Hilfe der Exponentialabbildung können wir spezielle Koordinaten auf der Lie-Gruppe G einführen. Sei $W(e) \subset G$ eine offene Menge in G , die das diffeomorphe Bild einer bzgl. o sternförmigen Umgebung $V(o) \subset \mathfrak{g}$ ist. Für $g \in G$ setzen wir

$$W(g) := L_g(W(e)) \quad \text{und} \quad \varphi_g := \exp^{-1} \circ L_{g^{-1}} : W(g) \longrightarrow V(o) \subset \mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^n.$$



Dann ist $(W(g), \varphi_g)$ eine zulässige Karte der Mannigfaltigkeit G um g . Die Umgebung $W(g)$ heißt *Normalenumgebung von g* und die durch die Kartenabbildung φ_g gegebenen Koordinaten *Normalkoordinaten um g* .

Satz 1.5 Sei G eine Lie-Gruppe und bezeichne G^0 die Zusammenhangskomponente des neutralen Elementes e von G . Dann ist G^0 eine Untergruppe von G . Sie ist offen, abgeschlossen und bogenzusammenhängend in G und wird von einer beliebigen Umgebung³ des neutralen Elementes e erzeugt. Insbesondere gilt für jede Normalenumgebung $W = \exp(V)$ von e

$$G^0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} W^k = \{w_1 \cdot \dots \cdot w_k \mid w_1, \dots, w_k \in W, k \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis Da die Abbildung $(g, a) \in G \times G \rightarrow g \cdot a^{-1} \in G$ stetig ist und das Bild zusammenhängender Mengen bei stetigen Abbildungen zusammenhängend bleibt, ist G^0 eine Untergruppe von G . Die Teilmenge $G^0 \subset G$ ist offen, abgeschlossen und bogenzusammenhängend, da dies für jede Zusammenhangskomponente einer Mannigfaltigkeit gilt. Die letzte Aussage des Satzes folgt dann aus einem allgemeinen Resultat für topologische Grup-

³ Unter einer Umgebung eines Punktes x verstehen wir in diesem Buch immer eine *offene* Menge, die x enthält.

pen: Eine zusammenhängende topologische Gruppe wird von einer beliebigen Umgebung ihres neutralen Elementes erzeugt (siehe Aufgabe 1.1). \square

Für spätere Anwendungen beweisen wir die folgende Produktformel für die Exponentialabbildung.

Satz 1.6 *Sei G eine Lie-Gruppe und \mathfrak{g} ihre Lie-Algebra. Dann gilt*

$$\exp tX \cdot \exp tY = \exp(t(X + Y) + O(t^2)),$$

wobei $X, Y \in \mathfrak{g}$ und $|t| < \varepsilon$, ε hinreichend klein.

Beweis Wir wählen Normalkoordinaten (W, φ) um $e \in G$. Sei (X_1, \dots, X_n) eine Basis in \mathfrak{g} und $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Karte

$$\varphi(\exp(x_1 X_1 + \dots + x_n X_n)) = (x_1, \dots, x_n).$$

Da die Multiplikation in G stetig ist, gibt es eine Umgebung U des neutralen Elementes mit $U \cdot U \subset W$. Wir betrachten die Gruppenmultiplikation in den Karten $(U \times U, \varphi \times \varphi)$ und (W, φ) :

$$\begin{array}{ccc} U \times U \subset G \times G & \xrightarrow{\cdot} & W \subset G \\ \downarrow \varphi \times \varphi & & \downarrow \varphi \\ \tilde{U} \times \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \tilde{W} \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Dabei ist $\tilde{\mu}(x, 0) = x$ und $\tilde{\mu}(0, y) = y$. Die Taylorformel für $\tilde{\mu}$ um $(0, 0)$ ergibt:

$$\tilde{\mu}(x, y) = \tilde{\mu}(0, 0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_j}(0, 0) x_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial y_j}(0, 0) y_j + O(2) = 0 + x + y + O(2),$$

wobei $O(2)$ für Ableitungen ab der zweiten Ordnung steht. Damit ist gezeigt, dass

$$\exp(X) \cdot \exp(Y) = \exp(X + Y + O(2))$$

für hinreichend kleine Vektoren X und Y . \square

Satz 1.6 ist ein Spezialfall der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel.⁴ Liegen mit $X, Y \in \mathfrak{g}$ zwei Vektoren vor, für die das Produkt $\exp(X) \cdot \exp(Y)$ in einer Normalenumgebung $W(e) \subset G$ liegt, so existiert nach Satz 1.4 genau ein Vektor $X \star Y \in \exp^{-1}(W) \subset \mathfrak{g}$ mit $\exp(X) \cdot \exp(Y) = \exp(X \star Y)$. Der Vektor $X \star Y$ heißt *Campbell-Hausdorff-Produkt von X und Y* und hat die folgende Darstellung:

⁴ Die genaue Formel findet man z. B. im Buch von S. Helgason [He01].

$$X \star Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] - \frac{1}{12}\{[[X, Y], X] + [[Y, X], Y]\} \\ + \text{weitere Kommutatoren.}$$

Aus Satz 1.4 folgt insbesondere, dass die durch ein Element $X \in \mathfrak{g}$ definierte Abbildung

$$f : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \exp tX \in G$$

ein glatter Gruppenhomomorphismus ist. Wir zeigen als nächstes, dass jeder stetige Gruppenhomomorphismus von \mathbb{R} nach G in dieser Form darstellbar ist.

Satz 1.7 *Sei G eine Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra \mathfrak{g} und $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Dann gibt es ein Element $X \in \mathfrak{g}$ mit $\psi(t) = \exp tX$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ auch glatt.*

Beweis Es sei $W = \exp(V(o))$ eine Normalenumgebung um $e \in G$. Da $\psi : \mathbb{R} \rightarrow G$ stetig ist und $\psi(0) = e$ gilt, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\psi(t) \in W$ für alle t mit $|t| \leq \varepsilon$. Sei $Y \in V(o)$ der Vektor mit $\exp(Y) = \psi(\varepsilon)$ und $X := \frac{Y}{\varepsilon}$. Wir zeigen

$$\psi(t) = \exp(tX) =: f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Dazu betrachten wir die Menge $K := \{t \in \mathbb{R} \mid f(t) = \psi(t)\} \subset \mathbb{R}$. Da die Abbildungen $f, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ Gruppenhomomorphismen sind, ist $K \subset \mathbb{R}$ eine Untergruppe. K ist außerdem abgeschlossen und enthält 0 und ε . Jede nicht-triviale Untergruppe von \mathbb{R} ist entweder \mathbb{R} selbst oder eine diskrete Gruppe der Form $K_d := \{n \cdot d \mid n \in \mathbb{Z}\}$, wobei d das kleinste positive Element von K ist. Wir zeigen, dass $K = \mathbb{R}$ gilt.

Angenommen, es wäre $K = K_d$. Da $\varepsilon \in K$, ist $\frac{d}{2} < \varepsilon$. Somit folgt:

$$\left(f\left(\frac{d}{2}\right)\right)^2 = \left(\exp \frac{d}{2}X\right)^2 = \exp dX = f(d) = \psi(d) = \left(\psi\left(\frac{d}{2}\right)\right)^2.$$

Die Gruppenelemente $f(d)$ und $\psi(d)$ liegen in W . Aus

$$2 \exp^{-1}\left(f\left(\frac{d}{2}\right)\right) = \exp^{-1}\left(f\left(\frac{d}{2}\right)^2\right) = \exp^{-1}\left(\psi\left(\frac{d}{2}\right)^2\right) = 2 \exp^{-1}\left(\psi\left(\frac{d}{2}\right)\right)$$

folgt $\psi\left(\frac{d}{2}\right) = f\left(\frac{d}{2}\right)$. Dann wäre aber d nicht das kleinste Element von K . Also war die Annahme $K = K_d$ falsch. Somit gilt $K = \mathbb{R}$. \square

In Verallgemeinerung des eben bewiesenen Resultates zeigen wir, dass jeder stetige Gruppenhomomorphismus zwischen beliebigen Lie-Gruppen glatt ist. Zunächst verallgemeinern wir Satz 1.4.

Satz 1.8 *Sei G eine Lie-Gruppe und \mathfrak{g} ihre Lie-Algebra, für die eine Vektorraumzerlegung $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ gegeben ist. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned}\phi : \mathfrak{g} = V_1 \oplus \dots \oplus V_r &\longrightarrow G \\ v_1 + \dots + v_r &\longmapsto \exp(v_1) \cdot \dots \cdot \exp(v_r)\end{aligned}$$

ein lokaler Diffeomorphismus um $o \in \mathfrak{g}$.

Beweis Der Beweis verläuft analog zu Satz 1.4. Wir betrachten das Differential

$$d\phi_o : T_0\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g} = V_1 \oplus \dots \oplus V_r \rightarrow T_e G \simeq \mathfrak{g} = V_1 \oplus \dots \oplus V_r.$$

Für $X_i \in V_i$ erhalten wir

$$\begin{aligned}d\phi_o(X_i) &= \frac{d}{dt}(\phi(tX_i))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\exp(o) \cdot \dots \cdot \exp(tX_i) \cdot \dots \cdot \exp(o))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\exp(tX_i))|_{t=0} = X_i.\end{aligned} \quad \square$$

Satz 1.9 Jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ zwischen Lie-Gruppen G_1 und G_2 ist glatt.

Beweis Sei \mathfrak{g}_1 die Lie-Algebra von G_1 und \mathfrak{g}_2 die Lie-Algebra von G_2 . Wir fixieren eine Basis (X_1, \dots, X_n) in \mathfrak{g}_1 . Dann ist $\psi_i : t \in \mathbb{R} \rightarrow \psi(\exp tX_i) \in G_2$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Nach Satz 1.7 existiert ein $Y_i \in \mathfrak{g}_2$, so dass

$$\psi_i(t) = \psi(\exp tX_i) = \exp tY_i.$$

Die Abbildung $\chi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow G_2$, definiert durch

$$\chi(t_1X_1 + \dots + t_nX_n) := \exp(t_1Y_1) \cdot \dots \cdot \exp(t_nY_n),$$

ist glatt. Sei $\phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow G_1$ die in Satz 1.8 betrachtete Abbildung

$$\phi(t_1X_1 + \dots + t_nX_n) = \exp(t_1X_1) \cdot \dots \cdot \exp(t_nX_n).$$

Da ϕ ein lokaler Diffeomorphismus um $o \in \mathfrak{g}_1$ ist, gilt $\psi = \chi \circ \phi^{-1}$ auf einer Normalenumgebung $W(e) \subset G_1$. Das zeigt, dass ψ auf $W(e)$ glatt ist. Da

$$\psi(g \cdot a) = \psi(g) \cdot \psi(a) = L_{\psi(g)}(\psi(a)),$$

ist ψ auch glatt auf der Normalenumgebung $W(g) = L_g(W(e))$ des Punktes $g \in G_1$. \square

Als weitere Folgerung aus den Eigenschaften der Exponentialabbildung erhalten wir die folgende Aussage über die Struktur abelscher Lie-Gruppen. Dabei nennen wir eine Lie-Gruppe *abelsch*, wenn ihr Gruppenprodukt kommutativ ist.

Satz 1.10 Sei G eine zusammenhängende abelsche Lie-Gruppe. Dann ist G diffeomorph zu einem Produkt $T^k \times \mathbb{R}^m$ aus einem Torus und einem Euklidischen Raum.

Beweis Wir zeigen zunächst, dass die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ im Fall abelscher Gruppen ein Gruppenhomomorphismus ist. Für $X, Y \in \mathfrak{g}$ und hinreichend großes $N \in \mathbb{N}_0$ gilt nach Satz 1.4 und 1.6

$$\begin{aligned} \exp(X) \cdot \exp(Y) &= \left(\exp\left(\frac{X}{N}\right) \right)^N \cdot \left(\exp\left(\frac{Y}{N}\right) \right)^N \\ &= \left(\exp\left(\frac{X}{N}\right) \cdot \exp\left(\frac{Y}{N}\right) \right)^N \\ &= \left(\exp\left(\frac{1}{N}(X + Y) + o\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) \right)^N \\ &= \exp\left(X + Y + o\left(\frac{1}{N}\right)\right). \end{aligned}$$

Mit $N \rightarrow \infty$ folgt $\exp(X) \cdot \exp(Y) = \exp(X + Y)$. Da G eine zusammenhängende Lie-Gruppe ist, wird sie von der Normalenumgebung $W(e) \subset G$ erzeugt, d. h., jedes $g \in G$ ist in der Form

$$g = \exp(X_1) \cdot \exp(X_2) \cdot \dots \cdot \exp(X_n) = \exp(X_1 + \dots + X_n), \quad X_i \in \mathfrak{g},$$

darstellbar. Folglich ist $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Da $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, ist $K = \text{Ker } \exp \subset \mathfrak{g}$ ein diskreter Normalteiler. Also gilt

$$G \simeq \mathfrak{g}/K = T^k \times \mathbb{R}^m. \quad \square$$

Sei $v \in T_e G$ und X das von v erzeugte linksinvariante Vektorfeld auf G . Dann ist $g(t) = \exp(tX)$ die Integralkurve von X durch $e \in G$, d. h., $g(t)$ ist eine glatte Kurve mit

$$\dot{g}(t) = X(g(t)) = dL_{g(t)}(v) \quad \text{und} \quad g(0) = e.$$

Abschließend wollen wir die Existenz solcher Kurven $g(t)$ für nichtkonstante Kurven $v(t)$ in $T_e G$ beweisen.

Satz 1.11 *Es sei G eine Lie-Gruppe und $v : [0, 1] \rightarrow T_e G$ eine stetige Kurve. Dann existieren eindeutig bestimmte C^1 -Kurven $g, a : [0, 1] \rightarrow G$, die folgende Differentialgleichungen lösen:*

$$\dot{g}(t) = dL_{g(t)}(v(t)) \quad \text{und} \quad g(0) = e, \quad (1.3)$$

$$\dot{a}(t) = dR_{a(t)}(v(t)) \quad \text{und} \quad a(0) = e. \quad (1.4)$$

Beweis Wir beweisen nur die Existenz und Eindeutigkeit von $g(t)$. Der Beweis für $a(t)$ wird analog geführt. OBdA können wir annehmen, dass die stetige Kurve v auf ganz \mathbb{R} definiert ist. Der Beweis der Existenz der Lösung $g(t)$ von (1.3) basiert auf dem Studium der Integralkurven des Vektorfeldes Z auf $G \times \mathbb{R}$, das mittels

$$Z(g, s) = \left(dL_g(v(s)), \frac{\partial}{\partial s}(s) \right) \in T_{(g,s)}(G \times \mathbb{R})$$

definiert ist. Wir bezeichnen mit $\phi_t(z)$ die Integralkurve von Z durch $z \in G \times \mathbb{R}$. Für die Integralkurve $\phi_t(e, 0) = (g(t), t)$ gilt $\dot{g}(t) = dL_{g(t)}(v(t))$ und $g(0) = e$. Lokale Lösungen $g(t)$ von (1.3) existieren also immer, es bleibt zu zeigen, dass g auf dem ganzen Intervall $[0, 1]$ definiert ist. Sei $(e, s) \in G \times \mathbb{R}$. Da $\{e\} \times [0, 1] \subset G \times \mathbb{R}$ kompakt ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass die Integralkurven $\phi_t(e, s)$ für alle $s \in [0, 1]$ und $|t| < \delta$ existieren. Wir fixieren eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ von $[0, 1]$ mit $|t_r - t_{r-1}| < \delta$. Auf dem Intervall $[0, t_1]$ haben wir bereits eine Lösung $g(t)$ von (1.3). Die Integralkurve $\phi_t(e, t_1)$ mit $0 \leq t \leq t_2 - t_1$ hat die Form $\phi_t(e, t_1) = (b(t), t + t_1)$, wobei $\dot{b}(t) = dL_{b(t)}(v(t + t_1))$ und $b(0) = e$ gilt. Wir setzen nun die Kurve $g(t)$ auf das Intervall $[t_1, t_2]$ stetig durch

$$g(t) := g(t_1) \cdot b(t - t_1), \quad t \in [t_1, t_2],$$

fort. Differenzieren ergibt

$$\dot{g}(t) = dL_{g(t_1)} \dot{b}(t - t_1) = dL_{g(t_1)} dL_{b(t-t_1)}(v(t)) = dL_{g(t)}(v(t)),$$

folglich haben wir die Lösung von (1.3) auf dem Intervall $[0, t_2]$. Wir fahren auf diese Weise für jeden Teilungsschritt fort und erhalten insgesamt eine C^1 -Lösung $g : [0, 1] \rightarrow G$ von (1.3). Die Eindeutigkeit folgt aus Standardsätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen. \square

Die Lösungen der Anfangswertprobleme (1.3) und (1.4) sind glatt bzw. stückweise glatt, falls die Kurve $v(t)$ diese Eigenschaft hat.

1.3 Die adjungierte Darstellung

Die adjungierte Darstellung ist ein spezieller Homomorphismus einer Lie-Gruppe G in die Gruppe $GL(\mathfrak{g})$ aller invertierbaren linearen Abbildungen auf der Lie-Algebra \mathfrak{g} von G . Bevor wir diese Darstellung betrachten, stellen wir einige grundlegende Begriffe und Fakten über Darstellungen zusammen.

Definition 1.6 Sei G eine Lie-Gruppe, $(A, [\cdot, \cdot])$ eine Lie-Algebra und V ein Vektorraum über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen. Ein Lie-Gruppen-Homomorphismus $\rho : G \rightarrow GL(V)$ heißt auch Darstellung der Lie-Gruppe G über dem Vektorraum V . Unter einer Darstellung der Lie-Algebra A über V versteht man einen Lie-Algebren-Homomorphismus $\varphi : A \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, d. h. eine lineare Abbildung, für die gilt

$$\varphi([X, Y]) = \varphi(X) \circ \varphi(Y) - \varphi(Y) \circ \varphi(X), \quad X, Y \in A.$$

Der Vektorraum V heißt dann Darstellungsraum.

Im Folgenden werden wir für Darstellungen oft abkürzend die Symbolik (G, ρ) oder (V, ρ) benutzen.

Sei G eine Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra \mathfrak{g} . Ist $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ eine Darstellung der Lie-Gruppe G über V , so ist nach Satz 1.1 das Differential $\rho_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung der Lie-Algebra \mathfrak{g} über V .

Aus gegebenen Darstellungen kann man neue erzeugen. Sind z. B. (V, ρ) und (W, σ) zwei Darstellungen der Lie-Gruppe G über dem Vektorraum V bzw. W , so ergibt sich eine Darstellung von G über der direkten Summe $V \oplus W$

$$\begin{aligned} \rho \oplus \sigma : G &\longrightarrow GL(V \oplus W) \\ g &\longmapsto (\rho \oplus \sigma)(g) \end{aligned}$$

durch

$$(\rho \oplus \sigma)(g)(v \oplus w) := \rho(g)v \oplus \sigma(g)w.$$

Wir nennen diese Darstellung direkte Summe der Darstellungen (V, ρ) und (W, σ) und bezeichnen sie auch mit $(V, \rho) \oplus (W, \sigma)$. Auf die analoge Weise werden Darstellungen von G über dem Tensorprodukt $V \otimes W$, den Homomorphismen $\text{Hom}(V, W)$, dem dualen Raum V^* bzw. dem Raum der k -Formen $\Lambda^k(V^*)$ definiert. Wir geben hier nur kurz die dem Element $g \in G$ jeweils zugeordneten linearen Abbildungen an:

$$\begin{aligned} (\rho \otimes \sigma)(g)(v \otimes w) &:= \rho(g)v \otimes \sigma(g)w, \\ \text{hom}_{\rho, \sigma}(g)(F)(v) &:= \sigma(g)F(\rho(g^{-1})v), \\ \rho^*(g)(L)(v) &:= L(\rho(g^{-1})v), \\ \rho_k(g)(L_1 \wedge \dots \wedge L_k) &:= \rho^*(g)L_1 \wedge \dots \wedge \rho^*(g)L_k. \end{aligned}$$

Definition 1.7 Eine Darstellung $\rho : G \rightarrow GL(V)$ über einem n -dimensionalen euklidischen bzw. hermiteschen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ heißt orthogonal bzw. unitär, falls das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ G -invariant ist, d. h., falls

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle_V = \langle v, w \rangle_V \quad \text{für alle } v, w \in V, g \in G.$$

Wir zeigen als nächstes, dass jede Darstellung einer kompakten Lie-Gruppe orthogonal bzw. unitär ist.

Satz 1.12 Sei G eine kompakte Lie-Gruppe und $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ eine Darstellung von G über einem reellen oder komplexen Vektorraum V . Dann existiert ein G -invariantes euklidisches bzw. hermitesches Skalarprodukt auf V , d. h., die Darstellung ist orthogonal bzw. unitär.

Beweis Sei (X_1, \dots, X_n) eine Basis in $T_e G$ und bezeichne $X_i^* \in \mathfrak{X}(G)$ die durch X_i definierten rechtsinvarianten Vektorfelder: $X_i^*(g) := dR_g(X_i)$. Wir betrachten die dualen

1-Formen $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ zu (X_1^*, \dots, X_n^*) . Dann ist die n -Form $\omega = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$ eine rechtsinvariante Volumenform auf G . Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein beliebiges positiv definites Skalarprodukt auf V . Da G kompakt ist, definiert

$$(v, w) := \int_G \langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle \omega_g$$

ein neues positiv definites Skalarprodukt auf V und wegen der Rechtsinvarianz von ω gilt:

$$\begin{aligned} (\rho(a)v, \rho(a)w) &= \int_G \langle \rho(ga)v, \rho(ga)w \rangle \omega_g \\ &= \int_G R_a^* (\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle \omega_g) \\ &= \int_{R_a(G)} \langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle \omega_g \\ &= (v, w). \end{aligned}$$

□

Ergänzend bemerken wir den folgenden Fakt.

Satz 1.13 Ist $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung einer Lie-Gruppe und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein G -invariantes Skalarprodukt⁵ auf V , d. h.

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall g \in G, v, w \in V. \quad (1.5)$$

Dann gilt

$$\langle \rho_*(X)v, w \rangle + \langle v, \rho_*(X)w \rangle = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}, v, w \in V. \quad (1.6)$$

Ist G zusammenhängend, so sind (1.5) und (1.6) äquivalent.

Beweis Seien $X \in \mathfrak{g}$ und $v, w \in V$. Aus (1.5) folgt mit Satz 1.3

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle \rho(\exp(tX))v, \rho(\exp(tX))w \rangle \\ &= \langle e^{t\rho_*(X)}v, e^{t\rho_*(X)}w \rangle. \end{aligned}$$

Leiten wir diese Gleichung nach t ab und setzen $t = 0$, so folgt (1.6). Sei nun G zusammenhängend und gelte (1.6). Die Gruppe G wird von einer Normalenumgebung ihres neutralen Elementes e erzeugt (siehe Satz 1.5). Da ρ ein Homomorphismus ist, genügt es zum Nachweis von (1.5) zu zeigen, dass

$$\langle \rho(\exp(tX))v, \rho(\exp(tX))w \rangle = \langle v, w \rangle \quad (1.7)$$

für jedes $X \in \mathfrak{g}$, $t \in \mathbb{R}$ und $v, w \in V$ gilt. Setzen wir für fixierte $X \in \mathfrak{g}$, $v, w \in V$

⁵ In diesem Buch benutzen wir den Begriff *Skalarprodukt* für eine *nichtausgeartete* bilineare bzw. hermitesche Form auf V . Positiv definit wird nicht gefordert.

$$F(t) := \langle \rho(\exp(tX))v, \rho(\exp(tX))w \rangle = \langle e^{t\rho_*(X)}v, e^{t\rho_*(X)}w \rangle,$$

so folgt für die Ableitung von F

$$F'(t) = \langle \rho_*(X)e^{t\rho_*(X)}v, e^{t\rho_*(X)}w \rangle + \langle e^{t\rho_*(X)}v, \rho_*(X)e^{t\rho_*(X)}w \rangle.$$

Die Invarianzeigenschaft (1.6) liefert $F'(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. F ist also konstant und $F(t) = F(0) = \langle v, w \rangle$. Damit ist (1.7) gezeigt. \square

Definition 1.8 Eine Darstellung $\rho : G \rightarrow GL(V)$ heißt *irreduzibel*, falls kein echter Unterraum $W \subset V$ existiert, für den $\rho(G)W \subset W$ gilt.

Satz 1.14 Sei $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung einer kompakten Lie-Gruppe über einem endlich-dimensionalen Vektorraum. Dann zerlegt sich (V, ρ) in die direkte Summe von irreduziblen orthogonalen bzw. unitären G -Darstellungen, d. h.

$$(V, \rho) = (V_1, \rho_1) \oplus \dots \oplus (V_n, \rho_n),$$

wobei (V_i, ρ_i) irreduzible orthogonale bzw. unitäre G -Darstellungen sind.

Beweis Nach Satz 1.12 gibt es auf V ein G -invariantes euklidisches bzw. hermitesches Skalarprodukt (\cdot, \cdot) . Angenommen $\rho : G \rightarrow GL(V)$ ist nicht irreduzibel. Dann existiert ein echter $\rho(G)$ -invarianter Unterraum $W \subset V$. Sei W^\perp das orthogonale Komplement von W bezüglich des G -invarianten Skalarproduktes (\cdot, \cdot) . Dann gilt $\rho(G)W^\perp \subset W^\perp$, d. h., wir haben eine Zerlegung $V = W \oplus W^\perp$ in zwei $\rho(G)$ -invariante Teilräume, die wir dann gegebenenfalls weiter zerlegen können. Die Einschränkung von $\rho(g)$ und (\cdot, \cdot) auf diese Teilräume liefert die G -Darstellungen (V_i, ρ_i) . Da V endlich-dimensional ist, folgt die Behauptung. \square

Satz 1.14 gilt im Allgemeinen nicht mehr, wenn die Gruppe G nicht kompakt ist. Betrachten wir zum Beispiel die Wirkung der Gruppe $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ durch Matrizenmultiplikation auf \mathbb{R}^2 . Dann ist ein 1-dimensionaler Unterraum $W \subset \mathbb{R}^2$ genau dann G -invariant, wenn er vom Vektor $(1, 0)^t$ erzeugt wird. Der invariante Unterraum $\mathbb{R}(1, 0)^t$ hat folglich kein invariantes Komplement.

Wir kommen nun zur Definition der adjungierten Darstellung einer Lie-Gruppe G über ihrer eigenen Lie-Algebra \mathfrak{g} . Für ein Element $g \in G$ betrachten wir den inneren Automorphismus

$$\alpha_g := L_g \circ R_{g^{-1}} : G \rightarrow G.$$

Das Differential $(\alpha_g)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ist ein Isomorphismus der Lie-Algebra \mathfrak{g} von G und wir erhalten

Satz 1.15 1. Die Abbildung $\text{Ad} : g \in G \longrightarrow (\alpha_g)_* \in GL(\mathfrak{g})$ ist eine Darstellung der Lie-Gruppe G .

2. Für das Differential $\text{ad} := \text{Ad}_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ von Ad gilt

$$\text{ad}(X)(Y) = [X, Y].$$

3. Sei $Z(G)$ das Zentrum der Lie-Gruppe G . Dann gilt $Z(G) \subset \text{Ker Ad}$ und $Z(G) = \text{Ker Ad}$, falls G zusammenhängend ist.

Beweis Die Abbildung $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ ist ein Homomorphismus, da

$$\text{Ad}(ga) = (\alpha_{ga})_* = (\alpha_g \circ \alpha_a)_* = (\alpha_g)_* \circ (\alpha_a)_* = \text{Ad}(g) \circ \text{Ad}(a).$$

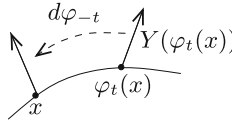
Für $X \in \mathfrak{g}$ und hinreichend kleine $t \in \mathbb{R}$ folgt aus Satz 1.3

$$\text{Ad}(g)X = \frac{1}{t} \left(\exp^{-1}(\alpha_g(\exp tX)) \right) = \frac{1}{t} \left(\exp^{-1}(g \cdot \exp tX \cdot g^{-1}) \right).$$

Dies zeigt die Stetigkeit von Ad . Wegen Satz 1.9 ist Ad auch glatt.

Wir zeigen als nächstes $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$ für $X, Y \in \mathfrak{g}$. Wir benutzen dazu die Darstellung des Kommutators zweier Vektorfelder als Lie-Ableitung. Sei $t \in \mathbb{R} \rightarrow \varphi_t(x) \in G$ die Integralkurve des linksinvarianten Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(G)$ durch $x \in G$. Dann ist

$$[X, Y](x) = \frac{d}{dt} (d\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(x)))|_{t=0}.$$



Wie wir in Abschn. 1.2 gesehen hatten, ist $\varphi_t(g) = g \cdot \exp(tX) = R_{\exp(tX)}(g)$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{ad}(X)Y &= \text{Ad}_*(X)Y = \frac{d}{dt} (\text{Ad}(\exp tX))|_{t=0} Y \\ &= \frac{d}{dt} (dR_{\exp(-tX)} \circ dL_{\exp tX}(Y))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (dR_{\exp(-tX)}(Y(\exp tX)))|_{t=0} \\ &= [X, Y]. \end{aligned}$$

Zum Beweis der 3. Behauptung bemerken wir, dass g genau dann im Zentrum von G liegt, wenn $\alpha_g = \text{Id}_G$ gilt. Folglich ist $Z(G) \subset \text{Ker Ad}$. Sei nun G zusammenhängend und $g \in \text{Ker Ad}$. Da G als zusammenhängende Lie-Gruppe von einer Normalenumgebung des 1-Elementes erzeugt wird (Satz 1.5), genügt es zu zeigen, dass $\exp tX = \alpha_g(\exp tX)$ für alle

$X \in \mathfrak{g}, t \in \mathbb{R}$. Wir betrachten den Homomorphismus

$$\psi : t \in \mathbb{R} \rightarrow \alpha_g(\exp tX) \in G.$$

Nach Satz 1.7 existiert ein $Y \in \mathfrak{g}$ so, dass $\exp tY = \alpha_g(\exp tX)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Differenzieren wir diese Gleichung in $t = 0$, so folgt

$$\begin{aligned} Y(e) &= \frac{d}{dt}(\exp tY) |_{t=0} = (d\alpha_g)_e(X(e)) \\ &= \text{Ad}(g)(X(e)) = X(e). \end{aligned}$$

Demnach ist $X = Y$ und somit $\alpha_g = \text{Id}_G$. □

Definition 1.9 Die Darstellung $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ heißt adjungierte Darstellung der Lie-Gruppe G . Die Darstellung $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ heißt adjungierte Darstellung der Lie-Algebra \mathfrak{g} .

Als erste Anwendung der adjungierten Darstellung erhalten wir die folgende Beziehung zwischen abelschen Lie-Gruppen und abelschen Lie-Algebren. Eine Lie-Gruppe ist *abelsch*, wenn das Gruppenprodukt kommutativ ist. Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} nennt man *abelsch*, wenn für ihren Kommutator $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} = 0$ gilt.

Folgerung 1.1 Ist G eine abelsche Lie-Gruppe, so ist ihre Lie-Algebra \mathfrak{g} abelsch. Ist umgekehrt G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit abelscher Lie-Algebra \mathfrak{g} , so ist G abelsch.

Beweis Ist G eine abelsche Lie-Gruppe, so gilt $G = Z(G) = \text{Ker Ad}$. Folglich ist $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ eine konstante Abbildung und somit $\text{ad} = \text{Ad}_* = 0$. Aus Satz 1.15 folgt für den Kommutator von $\mathfrak{g} : [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} = 0$, also ist \mathfrak{g} abelsch.

Sei nun G zusammenhängend und die Lie-Algebra \mathfrak{g} abelsch. Dann gilt $\text{ad} = 0 = (\text{Ad})_*$ und folglich

$$\text{Ad}(\exp tX) = \exp(t \text{Ad}_*(X)) = \exp(0) = \text{Id} \in GL(\mathfrak{g})$$

für alle $t \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{g}$. Da G zusammenhängend ist, wird G von einer Normalenumgebung des 1-Elementes erzeugt. Folglich gilt $\text{Ad}(g) = \text{Id}$ für alle $g \in G$. Da G zusammenhängend ist, folgt außerdem nach Satz 1.15, dass $G = \text{Ker Ad} = Z(G)$. Somit ist die Gruppe G abelsch. □

Abschließend beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt mit speziellen Skalarprodukten auf Lie-Algebren und den Eigenschaften der von ihnen erzeugten Metriken auf den zugehörigen Lie-Gruppen. Dazu betrachten wir zunächst die sogenannte kanonische Form einer Lie-Gruppe G - eine 1-Form auf G , die jeden Tangentialvektor an G durch Linkstranslation in das 1-Element von G verschiebt.

Definition 1.10 Sei G eine Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra \mathfrak{g} . Die 1-Form $\mu_G \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$,⁶ definiert durch

$$(\mu_G)_g(X_g) := dL_{g^{-1}}(X_g) \in T_e G \simeq \mathfrak{g} \quad \forall g \in G, X_g \in T_g G,$$

heißt *kanonische Form* von G . Andere, häufig benutzte Namen für μ_G sind *Strukturform* oder *Maurer-Cartan-Form*.

Die kanonische Form μ_G ordnet jedem linksinvarianten Vektorfeld X auf G den erzeugenden Vektor $X(e)$ zu, sie beschreibt also die Identifizierung von \mathfrak{g} mit $T_e G$.

Satz 1.16 Die kanonische Form μ_G von G hat die folgenden Invarianz-Eigenschaften bei Links- und Rechtstranslation:

$$\begin{aligned} L_g^* \mu_G &= \mu_G, \\ R_g^* \mu_G &= \text{Ad}(g^{-1}) \circ \mu_G \quad \text{für alle } g \in G. \end{aligned}$$

Beweis Die Linksinvarianz folgt unmittelbar aus der Definition. Zum Nachweis der 2. Formel wählen wir $v \in T_a G$ und $g \in G$ und erhalten

$$\begin{aligned} (R_g^* \mu_G)_a(v) &= (\mu_G)_{ag}(dR_g(v)) = dL_{(ag)^{-1}} dR_g(v) \\ &= dL_{g^{-1}} dR_g dL_{a^{-1}}(v) = \text{Ad}(g^{-1})(\mu_G)_a(v). \end{aligned} \quad \square$$

Eine Metrik h auf einer Lie-Gruppe G heißt *linksinvariant* (bzw. *rechtsinvariant*), wenn $L_g^* h = h$ (bzw. $R_g^* h = h$) für alle $g \in G$ gilt. Ist h sowohl links- als auch rechtsinvariant, so nennt man h *biinvariant*. Aus jedem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf \mathfrak{g} erhält man eine linksinvariante Metrik $h_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ durch

$$h_{\langle \cdot, \cdot \rangle}(X, Y) := \langle \mu_G(X), \mu_G(Y) \rangle, \quad X, Y \text{ Vektorfelder auf } G,$$

oder mit anderen Worten durch

$$(h_{\langle \cdot, \cdot \rangle})_g(v, w) := \langle dL_{g^{-1}}v, dL_{g^{-1}}w \rangle, \quad g \in G, v, w \in T_g G.$$

Andererseits ist für eine linksinvariante Metrik h auf G die Bilinearform $h_e : T_e G \times T_e G \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{g} \simeq T_e G$. Die Menge der linksinvarianten Metriken auf einer Lie-Gruppe G steht also in bijektiver Beziehung zur Menge der Skalarprodukte auf ihrer Lie-Algebra \mathfrak{g} .

Satz 1.17 Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} und h eine linksinvariante Metrik auf G . Dann ist h genau dann biinvariant, wenn das zu h gehörende Skalarprodukt $h_e =: \langle \cdot, \cdot \rangle$

⁶ $\Omega^k(N, V)$ bezeichnet den Raum der glatten k -Formen auf der Mannigfaltigkeit N mit Werten im Vektorraum V . Leser, die mit diesem Begriff nicht vertraut sind, finden eine Erklärung im Anhang A.2.

Ad-invariant ist, d. h., wenn

$$\langle \text{Ad}(g)v, \text{Ad}(g)w \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall g \in G, v, w \in \mathfrak{g}.$$

Beweis Seien X und Y zwei Vektorfelder auf G . Wir erhalten mit Satz 1.16:

$$\begin{aligned} (R_g^*h)(X, Y) &= h(dR_g(X), dR_g(Y)) = \langle \mu_G(dR_g(X)), \mu_G(dR_g(Y)) \rangle \\ &= \langle \text{Ad}(g^{-1})\mu_G(X), \text{Ad}(g^{-1})\mu_G(Y) \rangle. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes. \square

Biinvariante Metriken auf Lie-Gruppen haben sehr schöne geometrische Eigenschaften. Wir verweisen den mit Riemannscher Geometrie vertrauten Leser dazu auf die Aufgaben 1.9 und 1.10 am Ende des Kapitels. Abschließend lernen wir eine spezielle Ad-invariante Bilinearform auf Lie-Algebren kennen, die sogenannte *Killing-Form*, die sich auch als wichtiges Hilfsmittel für die Untersuchung der Struktur von Lie-Algebren erwiesen hat.

Definition 1.11 Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra über dem Körper \mathbb{K} . Die Bilinearform

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (X, Y) &\longmapsto \text{Tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y)) \end{aligned}$$

heißt *Killing-Form*⁷ von \mathfrak{g} . Dabei bezeichnet Tr die Spur des Endomorphismus. Ist G eine Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra \mathfrak{g} , so nennt man $B_{\mathfrak{g}}$ auch oft die Killing-Form von G und bezeichnet sie mit $B_G := B_{\mathfrak{g}}$.

Die Killing-Form hat die folgenden Invarianz-Eigenschaften.

Satz 1.18 Sei G eine Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra \mathfrak{g} und bezeichne $B_{\mathfrak{g}}$ die dazu gehörige Killing-Form. Des Weiteren sei $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ein Lie-Algebren-Isomorphismus. Dann gilt

$$B_{\mathfrak{g}}(\sigma(X), \sigma(Y)) = B_{\mathfrak{g}}(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (1.8)$$

Insbesondere gilt für die adjungierten Darstellungen

$$B_{\mathfrak{g}}(\text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y) = B_{\mathfrak{g}}(X, Y), \quad (1.9)$$

$$B_{\mathfrak{g}}(\text{ad}(X)(Y), Z) + B_{\mathfrak{g}}(Y, \text{ad}(X)(Z)) = 0, \quad (1.10)$$

wobei $g \in G$ und $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Beweis Da $\sigma([X, Y]) = [\sigma X, \sigma Y]$ und $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$, folgt

$$\text{ad}(\sigma X)Y = [\sigma X, Y] = \sigma([X, \sigma^{-1}Y]) = \sigma \circ \text{ad}(X)(\sigma^{-1}(Y))$$

⁷ Der Name Killing-Form geht auf Wilhelm Karl Joseph Killing (10.05.1847–11.02.1923) zurück und hat demnach nichts mit Mord und Totschlag zu tun.

und somit $\text{ad}(\sigma X) = \sigma \circ \text{ad}(X) \circ \sigma^{-1}$. Für die Killing-Form erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{g}}(\sigma X, \sigma Y) &= \text{Tr}(\text{ad}(\sigma X) \circ \text{ad}(\sigma Y)) \\ &= \text{Tr}(\sigma \circ \text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y) \circ \sigma^{-1}) \\ &= \text{Tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y)) \\ &= B_{\mathfrak{g}}(X, Y). \end{aligned}$$

Für jedes $g \in G$ ist $\text{Ad}(g) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ein Isomorphismus der Lie-Algebra. Formel (1.9) ist also ein Spezialfall von (1.8). Die Formel (1.10) ist wegen $\text{Ad}_* = \text{ad}$ eine Folgerung aus Satz 1.13. \square

Die in den folgenden Beispielen aufgeführten Formeln für die Killing-Form erhält man durch direktes Nachrechnen.

Beispiel 1.4 Ist G abelsch, so gilt $B_{\mathfrak{g}} = 0$.

Beispiel 1.5 Für die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ gilt

$$B_{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})}(X, Y) = 2n \text{Tr}(X \circ Y) - 2 \text{Tr}(X) \cdot \text{Tr}(Y).$$

Beispiel 1.6 Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra. Einen Unterraum $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ mit $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h}$ nennt man *Ideal* von \mathfrak{g} . Ein Ideal ist mit der Einschränkung des Kommutators von \mathfrak{g} offensichtlich selbst eine Lie-Algebra.

Ist $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal, so gilt

$$B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}} = B_{\mathfrak{h}}.$$

Als Anwendung erhält man für die Lie-Algebra der spurfreien Matrizen

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \text{Tr}(X) = 0\},$$

die ein Ideal in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ bilden,

$$B_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})}(X, Y) = 2n \text{Tr}(X \circ Y).$$

Beispiel 1.7 Die Einschränkungsgel aus dem letzten Beispiel gilt im Allgemeinen nicht. Betrachten wir zum Beispiel die Lie-Algebra der schief-symmetrischen Matrizen

$$\mathfrak{so}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + X^t = 0\}.$$

$\mathfrak{so}(n)$ ist kein Ideal in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ und es gilt

$$B_{\mathfrak{so}(n)}(X, Y) = (n - 2) \text{Tr}(X \circ Y).$$

Die Killing-Formen von $SL(n, \mathbb{R})$ ($n \geq 2$) bzw. von $SO(n)$ ($n \geq 3$) sind nicht-ausgeartet. Lie-Gruppen bzw. Lie-Algebren mit nicht-ausgearteter Killing-Form nennt man auch *halbeinfach*. Diese Klasse von Lie-Gruppen bzw. Lie-Algebren kann man vollständig klassifizieren. Wir verweisen den interessierten Leser dazu auf Bücher über Lie-Gruppen-Theorie, z. B. auf [K02]. Insbesondere besitzen solche Lie-Gruppen eine von der Killing-Form erzeugte biinvariante semi-Riemannsche Einstein-Metrik (siehe Aufgabe 1.10).

Wir beweisen hier noch

Satz 1.19 *Sei G eine kompakte Lie-Gruppe. Dann ist ihre Killing-Form negativ semidefinit.*

Beweis Sei \mathfrak{g} die Lie-Algebra der kompakten Lie-Gruppe G und $B_{\mathfrak{g}}$ ihre Killing-Form. Nach Satz 1.12 existiert auf \mathfrak{g} ein $\text{Ad}(G)$ -invariantes Euklidisches Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Durch Differenzieren erhält man

$$\langle \text{ad}(X)Y, Z \rangle + \langle Y, \text{ad}(X)Z \rangle = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Sei $X \in \mathfrak{g}$ und (X_{ij}) die zu $\text{ad}(X)$ gehörende Matrix bzgl. einer fixierten orthonormalen Basis in $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dann ist (X_{ij}) schiefsymmetrisch und es gilt

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{g}}(X, X) &= \text{Tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(X)) = \text{Tr}((X_{ij}) \circ (X_{kl})) \\ &= \sum_{j,k=1}^n X_{kj}X_{jk} = - \sum_{j,k=1}^n X_{kj}^2 \leq 0. \end{aligned} \quad \square$$

Insbesondere ist die Killing-Form jeder kompakten, halbeinfachen Lie-Gruppe negativ definit.

1.4 Lie-Untergruppen

In diesem Abschnitt betrachten wir Untergruppen von Lie-Gruppen. Wir geben Kriterien dafür an, dass eine Untergruppe einer Lie-Gruppe selbst eine Lie-Gruppe ist.

Definition 1.12 *Es sei G eine Lie-Gruppe und $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$ eine Lie-Algebra.*

1. *Eine Untergruppe $H \subset G$, die zusätzlich mit einer glatten Mannigfaltigkeitsstruktur versehen ist, heißt Lie-Untergruppe von G , wenn die Gruppenoperationen in H glatt sind und die Inklusionsabbildung $\iota : H \hookrightarrow G$ eine glatte Immersion ist, d. h., wenn H mit dieser Mannigfaltigkeitsstruktur sowohl eine Lie-Gruppe als auch eine Untermannigfaltigkeit⁸ von G ist.*

⁸ Achtung: Der Begriff *Untermannigfaltigkeit* wird in der Literatur nicht einheitlich benutzt. Zu dem hier benutzten Begriff der Untermannigfaltigkeit verweisen wir auf den Anhang A.3.

2. Eine Lie-Untergruppe $H \subset G$ heißt *topologische Lie-Untergruppe*, falls die Mannigfaltigkeitstopologie von H mit der durch G induzierten Topologie übereinstimmt.
3. Einlinearer Unterraum $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ heißt *Lie-Unteralgebra von \mathfrak{g}* , falls $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h}$ gilt.

Lie-Unteralgebren $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ sind also mit dem auf \mathfrak{h} eingeschränkten Kommutator von \mathfrak{g} selbst Lie-Algebren. Ist $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, so ist das Bild von φ eine Lie-Unteralgebra in \mathfrak{g}_2 und der Kern von φ ein Ideal in \mathfrak{g}_1 .

Seien H eine Lie-Untergruppe der Lie-Gruppe G und \mathfrak{h} bzw. \mathfrak{g} die Lie-Algebren von H bzw. G . Da die Inklusionsabbildung $\iota : H \hookrightarrow G$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus ist, ist ihr Differential $\iota_* : \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus. $\iota_*(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ ist also eine Lie-Unteralgebra von \mathfrak{g} . ι_* ist außerdem injektiv. Im Folgenden identifizieren wir die Lie-Algebra \mathfrak{h} immer mit ihrem Bild $\iota_*(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ und betrachten \mathfrak{h} als Lie-Unteralgebra von \mathfrak{g} . Wenden wir Satz 1.3 auf die Inklusion $\iota : H \hookrightarrow G$ an, so erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{\iota_*} & \mathfrak{g} \\ \exp^H \downarrow & & \downarrow \exp^G \\ H & \xrightarrow{\iota} & G \end{array}$$

d. h., es gilt $\exp^H = \exp^G|_{\mathfrak{h}}$.

Nun zum ersten Resultat dieses Abschnitts:

Satz 1.20 Sei G eine Lie-Gruppe und $H \subset G$ eine topologische Lie-Untergruppe. Dann ist H abgeschlossen in G .

Beweis Sei $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen von H , die in G gegen $g \in G$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $g \in H$ ist. Sei $U \subset H$ eine Normalumgebung von $e \in H$ und $\tilde{U} := (\exp^H)^{-1}(U) \subset \mathfrak{h}$. Wir wählen eine offene Umgebung $0 \in \tilde{V} \subset \tilde{U}$ mit kompaktem Abschluss $\text{cl}(\tilde{V}) \subset \tilde{U}$. Dann ist $V = \exp(\tilde{V}) \subset H$ offen und $\text{cl}(V) = \exp(\text{cl}(\tilde{V})) \subset H$ kompakt. Da $H \subset G$ mit der Teilraumtopologie versehen ist, existiert eine offene Umgebung $W \subset G$ von $e \in G$ mit $W \cap H = V$. Sei nun $\tilde{W} \subset \mathfrak{g}$ eine offene Umgebung von $0 \in \mathfrak{g}$ mit $\exp(-\tilde{W}) \cdot \exp(\tilde{W}) \subset W$.

Wegen $h_n \rightarrow g$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $h_n \in g \cdot \exp(\tilde{W})$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist

$$h_{n_0}^{-1} \cdot h_n \in \left(\exp(-\tilde{W}) g^{-1} g \exp(\tilde{W}) \right) \cap H \subset W \cap H = V.$$

Nach Konstruktion von V existiert demnach eine Folge (x_n) in \tilde{V} mit $h_{n_0}^{-1} \cdot h_n = \exp(x_n)$ für $n \geq n_0$. Wegen der Kompaktheit von $\text{cl}(\tilde{V})$ existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n_j} \rightarrow z \in \text{cl}(\tilde{V}) \subset \mathfrak{h}$. Dann folgt wegen $\exp(z) \in H$:

$$h_{n_j} = h_{n_0} \cdot \exp(x_{n_j}) \rightarrow h_{n_0} \cdot \exp(z) \in H.$$

Andererseits ist nach Voraussetzung $h_{n_j} \rightarrow g$, d. h. $g = h_{n_0} \cdot \exp(z) \in H$. □

Unser Ziel ist es nun, die Umkehrung von Satz 1.20 zu zeigen, also dass jede *abgeschlossene* Untergruppe H einer Lie-Gruppe G eine topologische Lie-Untergruppe ist. Das liefert uns ein reiches Beispielreservoir für Lie-Gruppen und eine Methode, deren Lie-Algebren zu berechnen.

Ein Kandidat für die zu H gehörige Lie-Algebra ist offensichtlich

$$\mathfrak{h} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp(tX) \in H \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}.$$

Zunächst werden wir zeigen, dass \mathfrak{h} tatsächlich ein Vektorraum ist. Danach werden wir auf H einen glatten Atlas definieren, mit dem H eine topologische Lie-Untergruppe mit der Lie-Algebra \mathfrak{h} wird.

Lemma 1.1 *Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge von nichttrivialen Vektoren in \mathfrak{g} mit $\exp(X_n) \in H$ für jedes n . Wir setzen voraus, dass der Grenzwert $X := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\|X_n\|}$ existiert. Dann gilt*

$$\exp(tX) \in H \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Beweis Sei $t \in \mathbb{R}$ eine fixierte Zahl und $c_n := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \cdot \|X_n\| < t\}$. Dann gilt: $c_n \|X_n\| < t \leq (c_n + 1) \|X_n\|$. Da $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \|X_n\| = t$. Mit Satz 1.14 erhalten wir

$$\exp(c_n X_n) = (\exp X_n)^{c_n} = \exp\left(c_n \|X_n\| \cdot \frac{X_n}{\|X_n\|}\right) \in H.$$

Somit konvergiert die Folge $(\exp(c_n X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\exp tX$. Da H abgeschlossen ist, folgt $\exp tX \in H$ für alle $t \in \mathbb{R}$. \square

Lemma 1.2 *Die Menge $\mathfrak{h} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp tX \in H \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$ ist ein linearer Unterraum von \mathfrak{g} .*

Beweis Ist $X \in \mathfrak{h}$ und $s \in \mathbb{R}$, so folgt aus der Definition von \mathfrak{h} , dass $sX \in \mathfrak{h}$. Seien $X, Y \in \mathfrak{h}$. Nach Satz 1.6 gilt für hinreichend kleine t

$$\exp tX \cdot \exp tY = \exp(t(X + Y) + O(t^2)) \in H.$$

Sei $t(X + Y) + O(t^2) = t(X + Y + Z(t))$. Wir wählen eine Nullfolge hinreichend kleiner positiver Zahlen $t_n \rightarrow 0$ so, dass

$$X_n = t_n(X + Y + Z(t_n)) \neq 0.$$

Dann gilt $\exp X_n \in H$ und

$$\frac{X_n}{\|X_n\|} = \frac{X + Y + Z(t_n)}{\|X + Y + Z(t_n)\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{X + Y}{\|X + Y\|}.$$

Aus Lemma 1.1 folgt $\exp(t \frac{X+Y}{\|X+Y\|}) \in H$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d. h. $X + Y \in \mathfrak{h}$. \square

Lemma 1.3 Sei $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp tX \in H \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$ und $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ ein algebraisches Komplement zu \mathfrak{h} , d. h. $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$. Dann existiert eine offene Umgebung $V_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ des Nullvektors $o \in \mathfrak{m}$ so, dass $\exp(V_{\mathfrak{m}} \setminus \{o\}) \cap H = \emptyset$.

Beweis Angenommen, für jede Umgebung $V_{\mathfrak{m}}$ des Nullvektors in \mathfrak{m} gilt $\exp(V_{\mathfrak{m}} \setminus \{o\}) \cap H \neq \emptyset$. Dann gibt es eine Nullfolge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{m} mit $\exp(X_n) \in H$. Sei \mathfrak{k} die Menge

$$\mathfrak{k} := \{X \in \mathfrak{m} \mid 1 \leq \|X\| \leq 2\}$$

und sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $c_n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $c_n X_n \in \mathfrak{k}$ gilt. Da \mathfrak{k} kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(c_{n_i} X_{n_i})_i$, die gegen ein $X \in \mathfrak{k}$ konvergiert. Dann gilt

$$\frac{X_{n_i}}{\|X_{n_i}\|} = \frac{c_{n_i} X_{n_i}}{\|c_{n_i} X_{n_i}\|} \longrightarrow \frac{X}{\|X\|}.$$

Aus dem Lemma 1.1 folgt $\exp(t \frac{X}{\|X\|}) \in H$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und somit $X \in \mathfrak{h}$.

Da aber $X \in \mathfrak{k} \subset \mathfrak{m}$ im Komplement von \mathfrak{h} liegt, erhalten wir $X = o$ im Widerspruch zu $1 \leq \|X\| \leq 2$. \square

Mit diesen Vorbereitungen beweisen wir.

Satz 1.21 Sei G eine Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra \mathfrak{g} und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe von G . Dann ist H eine topologische Lie-Untergruppe von G , insbesondere selbst eine Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp tX \in H \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}.$$

Beweis Sei r die Dimension von \mathfrak{h} . Wir zeigen, dass H eine r -dimensionale topologische Untermannigfaltigkeit von G ist. Dazu müssen wir um jeden Punkt $a \in H$ eine Karte $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ von G angeben mit

$$\varphi(U \cap H) = \varphi(U) \cap \{x_1 = \dots = x_{n-r} = 0\}. \quad (1.11)$$

Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ und $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow G$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} &\longrightarrow G \\ X \oplus Y &\longmapsto \exp(X) \cdot \exp(Y). \end{aligned}$$

Nach Satz 1.8 ist ϕ ein Diffeomorphismus auf einer Umgebung $V = V_{\mathfrak{m}} \times V_{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ um den Nullvektor, wobei $V_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ entsprechend Lemma 1.3 so gewählt werden kann, dass $\exp(V_{\mathfrak{m}} \setminus \{o\}) \cap H = \emptyset$ gilt. Dann ist $(U = \phi(V), \phi^{-1})$ eine zulässige Karte von G um $e \in G$ mit der Eigenschaft

$$\phi^{-1}(U \cap H) = \{o\} \times V_{\mathfrak{h}} = \phi^{-1}(U) \cap (\{o\} \times \mathbb{R}^r).$$

(U, ϕ^{-1}) ist also eine Untermannigfaltigkeitskarte um $e \in H$. Für ein beliebiges Element $a \in H$ erfüllt die Karte $(L_a(U), \phi^{-1} \circ L_{a^{-1}})$ die Bedingung (1.11). Folglich ist H eine r -dimensionale topologische Untermannigfaltigkeit von G , also eine topologische Lie-Untergruppe. Die Elemente $X \in \mathfrak{h}$ sind linksinvariante Vektorfelder auf H , die Dimension des Vektorraumes \mathfrak{h} und der Mannigfaltigkeit H stimmen übereinstimmen. Also ist \mathfrak{h} die Lie-Algebra von H . \square

Beispiel 1.8 *Die spezielle lineare Gruppe*

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}.$$

$SL(n, \mathbb{R})$ ist eine abgeschlossene Untergruppe der Lie-Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$. Nach Satz 1.8 ist $SL(n, \mathbb{R})$ eine Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R}) \mid \det(e^{tX}) = 1 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}.$$

Aus $\det(e^X) = e^{\text{Tr}(X)}$ folgt insbesondere $\frac{d}{dt}(\det(e^{tX}))|_{t=0} = \text{Tr}(X)$. Also ist eine Matrix X genau dann in $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, wenn $\text{Tr}(X) = 0$ gilt:

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \text{Tr}(X) = 0\}.$$

Beispiel 1.9 *Invarianzgruppen nichtausgearteter Formen*

Sei \mathbb{K} der Körper der reellen oder komplexen Zahlen oder der Schiefkörper der Quaternionen und bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine nichtausgeartete bilineare ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) oder hermitesche ($\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$) Form auf \mathbb{K}^n . Die Invarianzgruppe dieser Form, die sogenannte *Automorphismengruppe von* $(\mathbb{K}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$,

$$H = \text{Aut}(\mathbb{K}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

$$:= \{A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \mid A \text{ linear und } \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{K}^n\},$$

ist eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, \mathbb{K})$, also eine Lie-Gruppe. Wir wollen ihre Lie-Algebra \mathfrak{h} bestimmen. Für eine lineare Abbildung $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ gibt es eine eindeutig bestimmte adjungierte Abbildung A^* mit

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{K}^n.$$

Für die adjungierte Abbildung gilt offensichtlich

$$\frac{d}{dt}(A(t)^*) = (A'(t))^* \quad \text{und} \quad e^{A^*} = (e^A)^*,$$

wobei $A(t)$ eine differenzierbare Familie von linearen Abbildungen bezeichnet. Wir zeigen

$$\mathfrak{h} \simeq \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid X = -X^*\}. \quad (1.12)$$

Aus der Definition von H und A^* folgt bei Identifizierung der linearen Abbildungen mit Matrizen

$$H \simeq \{A \in GL(n, \mathbb{K}) \mid A^*A = E\}. \quad (1.13)$$

Somit ist nach Satz 1.21 die Matrix X genau dann in \mathfrak{h} , wenn sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Bedingung

$$(e^{tX})^* e^{tX} = e^{tX^*} e^{tX} = E$$

erfüllt. Die Ableitung dieser Bedingung liefert für Matrizen X aus \mathfrak{h} die Eigenschaft $X^* = -X$. Ist andererseits Letzteres erfüllt, so kommutieren X und X^* und es gilt $e^{tX^*} e^{tX} = e^{t(X+X^*)} = e^0 = E$ für alle $t \in \mathbb{R}$. X liegt folglich in \mathfrak{h} . Damit haben wir (1.12) bewiesen.

Wir betrachten als erstes Beispiel den \mathbb{R}^n mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,q}$

$$\langle x, y \rangle_{p,q} := -x_1 y_1 - \cdots - x_p y_p + x_{p+1} y_{p+1} + \cdots + x_n y_n.$$

Hierbei ist $n = p + q$ und $0 \leq p \leq n$. Die Invarianzgruppe dieses Skalarproduktes heißt (pseudo-)orthogonale Gruppe und wird mit $O(p, q)$ bezeichnet. Für eine Matrix $A \in O(p, q)$ gilt $A^* = J_{p,q} A^t J_{p,q}$, wobei $J_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ und I_k die Einheitsmatrix in $GL(k, \mathbb{R})$ ist. Entsprechend den Formeln (1.13) und (1.12) gilt für die Lie-Gruppe $O(p, q)$ und ihre Lie-Algebra $\mathfrak{o}(p, q)$

$$\begin{aligned} O(p, q) &= \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^t J_{p,q} A = J_{p,q}\}, \\ \mathfrak{o}(p, q) &= \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X^t J_{p,q} + J_{p,q} X = 0\}. \end{aligned}$$

Als zweites Beispiel betrachten wir den \mathbb{R}^{2n} mit der symplektischen Form ω_0

$$\omega_0(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_{n+j} - x_{n+j} y_j.$$

Die Invarianzgruppe dieser nichtausgearteten Form heißt symplektische Gruppe und wird mit $Sp(2n, \mathbb{R})$ bezeichnet. Für eine Matrix $A \in Sp(2n, \mathbb{R})$ gilt $A^* = -F_n A^t F_n$, wobei $F_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Aus (1.13) und (1.12) folgt für die symplektische Gruppe und ihre Lie-Algebra

$$\begin{aligned} Sp(2n, \mathbb{R}) &= \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid A^t F_n A = F_n\}, \\ \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) \mid X^t F_n + F_n X = 0\}. \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Lie-Algebren für andere Automorphismengruppen geht analog. Wir fassen einige Spezialfälle in der folgenden Tabelle zusammen.

H	$Relation$	\mathfrak{h}	$Relation$
$SL(n, \mathbb{K}) \subset GL(n, \mathbb{K})$	$\det A = 1$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$	$\text{Tr } X = 0$
$Sp(2n, \mathbb{K}) \subset GL(2n, \mathbb{K})$	$A^t F A = F$	$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{K})$	$X^t F + F X = 0$
$O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$	$A^t A = E$	$\mathfrak{o}(n)$	$X^t + X = 0$
$SO(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$	$A^t A = E, \det A = 1$	$\mathfrak{so}(n)$	$X^t + X = 0$
$U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$	$\bar{A}^t A = E$	$\mathfrak{u}(n)$	$\bar{X}^t + X = 0$
$SU(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$	$\bar{A}^t A = E, \det A = 1$	$\mathfrak{su}(n)$	$\bar{X}^t + X = 0, \text{Tr } X = 0$
$Sp(n) \subset GL(n, \mathbb{H})$	$\bar{A}^t A = E$	$\mathfrak{sp}(n)$	$\bar{X}^t + X = 0$
$O(p, q) \subset GL(n, \mathbb{R})$	$A^t J A = J$	$\mathfrak{o}(p, q)$	$X^t J + J X = 0$
$SO(p, q) \subset GL(n, \mathbb{R})$	$A^t J A = J, \det A = 1$	$\mathfrak{so}(p, q)$	$X^t J + J X = 0$
$U(p, q) \subset GL(n, \mathbb{C})$	$\bar{A}^t J A = J$	$\mathfrak{u}(p, q)$	$\bar{X}^t J + J X = 0$
$SU(p, q) \subset GL(n, \mathbb{C})$	$\bar{A}^t J A = J, \det A = 1$	$\mathfrak{su}(p, q)$	$\bar{X}^t J + J X = 0, \text{Tr } X = 0$
$Sp(p, q) \subset GL(n, \mathbb{H})$	$\bar{A}^t J A = J$	$\mathfrak{sp}(p, q)$	$\bar{X}^t J + J X = 0$

In dieser Tabelle ist $J = J_{p,q}$, $F = F_n$ und $\text{Tr } X$ die Spur der Matrix X .

Eine ausführliche Behandlung der Eigenschaften der klassischen Lie-Gruppen findet der interessierte Leser in dem Buch [He90].

Ist H eine Lie-Untergruppe einer Lie-Gruppe G , so ist ihre Lie-Algebra \mathfrak{h} eine Lie-Unteralgebra der Lie-Algebra \mathfrak{g} von G . Wir wollen im Folgenden die Umkehrung dieser Aussage beweisen:

Satz 1.22 *Sei G eine Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra \mathfrak{g} und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra. Dann existiert eine eindeutig bestimmte zusammenhängende Lie-Untergruppe $H \subset G$ mit der Lie-Algebra \mathfrak{h} .*

Beweis Für den Beweis benutzen wir den Satz von Frobenius, der im Anhang A.4 zu finden ist. Wir fixieren eine Basis (X_1, \dots, X_r) von \mathfrak{h} und betrachten die folgende geometrische Distribution E auf der Lie-Gruppe G :

$$E : g \in G \longrightarrow E_g := \{X(g) \in T_g G \mid X \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}\} = \text{span}(X_1(g), \dots, X_r(g)).$$

Wir zeigen zunächst, dass E involutiv ist: Zwei Vektorfelder X und Y auf G mit Werten in E lassen sich in der Form

$$X(g) = \sum_{i=1}^r f_i(g) X_i(g) \quad \text{und} \quad Y(g) = \sum_{i=1}^r h_i(g) X_i(g)$$

darstellen, wobei f_i und h_i glatte Funktionen auf G sind. Dann folgt für den Kommutator:

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^r f_i h_j [X_i, X_j] + f_i X_i(h_j) X_j - h_j X_j(f_i) X_i.$$

Wegen $[X_i, X_j] \in \mathfrak{h}$ nimmt das Vektorfeld $[X, Y]$ seine Werte ebenfalls in E an, E ist also involutiv. Nach dem Satz von Frobenius existiert dann eine maximale zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit $H \subset G$ von E durch $e \in G$. Wir zeigen, dass H eine Untergruppe von G ist: Sei $a \in H$. Dann ist $L_{a^{-1}}(H)$, versehen mit der durch die Linkstranslation $L_{a^{-1}}$ übertragenen Mannigfaltigkeitsstruktur ebenfalls eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit von G . Wegen der Linksinvarianz der Vektorfelder in \mathfrak{h} gilt

$$\begin{aligned} T_{a^{-1}h}(L_{a^{-1}}H) &= dL_{a^{-1}}(T_hH) = dL_{a^{-1}}(\{X(h) \mid X \in \mathfrak{h}\}) \\ &= \{X(a^{-1}h) \mid X \in \mathfrak{h}\} = E_{a^{-1}h}, \end{aligned}$$

also ist $L_{a^{-1}}H$ ebenfalls eine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit von E durch $e \in G$. Da H maximal mit dieser Eigenschaft ist, folgt $L_{a^{-1}}H \subset H$ für alle $a \in H$. Also liegt mit zwei Elementen $a, h \in H$ auch $a^{-1}h \in H$, H ist demnach eine Untergruppe von G . Da H eine Untermannigfaltigkeit von G ist, ist die Inklusion $\iota : H \hookrightarrow G$ ein regulärer Gruppenhomomorphismus. Es bleibt zu zeigen, dass H selbst eine Lie-Gruppe ist, d. h., dass die Gruppenmultiplikation $\mu : (a, h) \in H \times H \mapsto a^{-1}h \in H$ glatt ist. Sei $\tilde{\mu} : G \times G \rightarrow G$ die entsprechende Gruppenmultiplikation in G . $\tilde{\mu}$ ist glatt, da G eine Lie-Gruppe ist, außerdem kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H \times H & \xrightarrow{\mu} & H \\ & \searrow \tilde{\mu} & \downarrow \iota \\ & & G \end{array}$$

Die Glattheit von μ folgt dann aus dem zweiten Teil des Satzes von Frobenius. Da $\mathfrak{h} = E_e = T_eH$, ist die Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ die Lie-Algebra der Lie-Gruppe H . Damit ist die Existenzaussage des Satzes bewiesen.

Es bleibt die Eindeutigkeit von H zu zeigen. Sei \tilde{H} eine weitere zusammenhängende Lie-Untergruppe von G mit der Lie-Algebra \mathfrak{h} . Dann ist \tilde{H} ebenfalls eine Integralmannigfaltigkeit von E durch $e \in G$. Wegen der Maximalität von H ist $\tilde{H} \subset H$. Nun sind die Normalumgebungen $U(e) := \{\exp(tX) \mid X \in \mathfrak{h}, |t| < \varepsilon\}$ in H und \tilde{H} enthalten. Da H und \tilde{H} zusammenhängend sind, erzeugt $U(e)$ sowohl H als auch \tilde{H} , d. h. $H = \tilde{H}$. \square

Wie wir aus Satz 1.21 wissen, ist jede *abgeschlossene* Untergruppe einer Lie-Gruppe eine Lie-Untergruppe. Wir wollen das gleiche jetzt für eine weitere Klasse zusammenhängender aber nicht notwendig abgeschlossener Untergruppen beweisen.

Satz 1.23 *Sei G eine Lie-Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe von G , die folgende Eigenschaft hat: Zu jedem $h \in H$ gibt es eine stückweise glatte Kurve $\gamma : I \rightarrow G$ mit Bild in H , die das neutrale Element e mit h verbindet. Dann ist H eine Lie-Untergruppe von G .*

Beweis Wir identifizieren im Folgenden wie üblich den Tangentialraum T_eG mit der Lie-Algebra \mathfrak{g} von G und betrachten die Teilmenge

$$S := \left\{ X \in T_e G \mid \begin{array}{l} \text{es existiert } \gamma : I \rightarrow G \text{ stückweise glatt} \\ \gamma(0) = e, \gamma'(0) = X, \text{Im}(\gamma) \subset H \end{array} \right\} \subset \mathfrak{g}.$$

Wir zeigen zunächst, dass S eine Unteralgebra von \mathfrak{g} ist:

Seien $X, Y \in S$ und $x(t)$ bzw. $y(t)$ entsprechende Kurven in H mit $x'(0) = X$ und $y'(0) = Y$. Für $r \in \mathbb{R}$ ist die Kurve $z(t) := x(rt)$ glatt mit $z(0) = e$ und $z'(0) = rX$. Also ist $rX \in S$. Die Kurve $\eta(t) = x(t) \cdot y(t)$ ist ebenfalls glatt mit Bild in H und erfüllt $\eta(0) = e$ und $\eta'(0) = x'(0) + y'(0)$. Folglich ist $X + Y \in S$. Damit ist S ein Unterraum. Es bleibt zu zeigen, dass $[X, Y] \in S$. Dazu betrachten wir ein Element $h \in H$ und die Kurve $\mu(t) = hx(t)h^{-1} = \alpha_h(x(t))$. Die Kurve μ ist glatt, das Bild liegt in H , $\mu(0) = e$ und $\mu'(0) = \text{Ad}(h)x'(0)$. Folglich gilt $\text{Ad}(h)X \in S$ für alle $h \in H$. Für die Kurve $y(t)$ folgt damit $\text{Ad}(y(t))X \in S$. Die Ableitung dieser Kurve ergibt

$$\text{ad}(y'(0))X = \text{ad}(Y)X = [Y, X] \in S.$$

Damit ist bewiesen, dass S eine Lie-Unteralgebra von \mathfrak{g} ist. Nach Satz 1.22 existiert eine Lie-Untergruppe K von G mit der Lie-Algebra S . Es bleibt zu zeigen, dass $K = H$.

Wir zeigen zuerst $H \subset K$. Sei $h \in H$ und $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ eine stückweise glatte Kurve mit Bild in H und $\gamma(0) = e, \gamma(1) = h$. Sei $s \in [0, 1]$ ein fixierter Parameter und v_s die Kurve $v_s(t) = \gamma(s)^{-1}\gamma(t)$. Dann ist $v'_s(s) = dL_{\gamma(s)^{-1}}(\gamma'(s)) \in S$ und folglich $\gamma'(s) \in dL_{\gamma(s)}S$. Entsprechend dem Beweis von Satz 1.22 ist

$$g \in G \longrightarrow S_g := dL_g(S)$$

die geometrische Distribution, die die Lie-Gruppe K als maximale Integralmannigfaltigkeit hat. Nach dem Satz von Frobenius liegt jede stückweise glatte Kurve, deren Tangentialvektoren alle in der Distribution S liegen, vollständig in K . Folglich ist $\text{Im}(\gamma) \subset K$, also insbesondere $h \in K$.

Um $K \subset H$ zu zeigen, fixieren wir eine Basis (X_1, \dots, X_r) von S und entsprechende Kurven $x_1(t), \dots, x_r(t)$ in H mit $x_j(0) = e$ und $x'_j(0) = X_j$. Die Abbildung $f : U \longrightarrow H \subset K$

$$f(t_1, \dots, t_r) := x_1(t_1) \cdot \dots \cdot x_r(t_r) \in H \subset K$$

bildet stückweise glatt von einer offenen Umgebung U des Nullvektors im \mathbb{R}^r in die Untermannigfaltigkeit K von G ab. Da die Vektoren X_1, \dots, X_r eine Basis in S bilden, ist das Differential von f im Nullvektor regulär, also f ein lokaler Diffeomorphismus um 0. Wählen wir U hinreichend klein, so können wir annehmen, dass f die Menge U diffeomorph auf die offene Teilmenge $f(U) \subset K$ abbildet. Da K zusammenhängend ist, wird K von $f(U)$ erzeugt. Da aber nach Definition von f die Menge $f(U)$ in H liegt, ist $K \subset H$. \square

1.5 Transformationsgruppen und homogene Räume

In diesem Abschnitt betrachten wir Mannigfaltigkeiten, auf denen eine Lie-Gruppe G glatt und transitiv wirkt. Wir werden zeigen, dass sich solche Mannigfaltigkeiten als Faktorräume G/H für eine abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ darstellen lassen. Andererseits trägt jeder solche Faktorraum G/H eine kanonische Mannigfaltigkeitsstruktur, so dass G glatt und transitiv wirkt.

Definition 1.13 Sei M eine Mannigfaltigkeit und G eine Lie-Gruppe. Man sagt: G wirkt von links auf M , falls eine glatte Abbildung

$$\phi : (g, x) \in G \times M \longmapsto g \cdot x \in M$$

gegeben ist, für die folgende Eigenschaften gelten:

1. Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $l_g : x \in M \longmapsto g \cdot x \in M$ ein Diffeomorphismus.
2. $x = e \cdot x$ für alle $x \in M$, wobei e das 1-Element von G ist.
3. $g \cdot (a \cdot x) = (g \cdot a) \cdot x$ für alle $x \in M$, $g, a \in G$.

Ist eine solche Wirkung von G auf M gegeben, so nennt man das Paar $[M, G]$ auch *Liesche Transformationsgruppe*. Eine G -Wirkung $\phi : G \times M \rightarrow M$ heißt *transitiv*, falls zu jedem Paar $x, y \in M$ ein $g \in G$ existiert mit $g \cdot x = y$. Die Wirkung heißt *einfach-transitiv*, falls sie transitiv ist und das Element g eindeutig bestimmt ist. Sie heißt *frei*, falls $l_g : M \rightarrow M$ fixpunktfrei für alle $g \neq e$ ist. Die Wirkung heißt *effektiv*, falls $l_g = \text{Id}_M$ nur für $g = e$ gilt. Analog definiert man diese Begriffe für eine Rechtswirkung $\phi : M \times G \rightarrow M$. In diesem Fall bezeichnet r_g den Diffeomorphismus $r_g : x \in M \mapsto x \cdot g := \phi(x, g) \in M$.

Definition 1.14 Eine Mannigfaltigkeit M , auf der eine Lie-Gruppe G transitiv wirkt, heißt *homogener Raum*.

Beispiel 1.10 Die Lie-Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ wirkt von links auf \mathbb{R}^n durch die Matrizenmultiplikation $\phi(A, x) := Ax$. Diese Wirkung ist transitiv auf $\mathbb{R}^n \setminus \{o\}$, wobei o den Nullvektor von \mathbb{R}^n bezeichnet.

Beispiel 1.11 Die orthogonale Gruppe $O(n)$ wirkt transitiv auf der Kugel $S^{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}$ vom Radius r im \mathbb{R}^n , aber nicht transitiv auf $\mathbb{R}^n \setminus \{o\}$.

Beispiel 1.12 Wir betrachten die spezielle unitäre Gruppe $SU(2)$ und ihre 3-dimensionale Lie-Algebra

$$\begin{aligned} \mathfrak{su}(2) &= \{X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \mid \bar{X}^t + X = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix} \mid (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \right\} \simeq \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Wir identifizieren einen Vektor $x = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$ mit der durch ihn definierten Matrix $X(x) \in \mathfrak{su}(2)$ und bezeichnen mit $\varphi(X(x)) = x$ die inverse Zuordnung. Dann gilt $\det(X(x)) = \langle x, x \rangle_{\mathbb{R}^3}$. Die adjungierte Darstellung von $SU(2)$ über $\mathfrak{su}(2)$ liefert eine Wirkung von $SU(2)$ über dem 3-dimensionalen Euklidischen Raum \mathbb{R}^3 :

$$(A, x) \in SU(2) \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow l_A(x) = \varphi(AX(x)A^{-1}) \in \mathbb{R}^3.$$

Die Abbildung $l_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist speziell-orthogonal. Man kann zeigen, dass der Homomorphismus

$$\rho : A \in SU(2) \longrightarrow l_A \in SO(3)$$

eine 2-fache Überlagerung der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3)$ ist.

Beispiel 1.13 Wir betrachten die spezielle lineare Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ und definieren eine Wirkung dieser Gruppe auf dem 4-dimensionalen Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{1,3}$. Dazu identifizieren wir zunächst den Minkowski-Raum mit dem Vektorraum $\mathcal{H}(2)$ der hermiteschen (2×2) -Matrizen: Seien

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Pauli-Matrizen und $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^{1,3} \longrightarrow \mathcal{H}(2)$$

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \longmapsto X(x) := \sum_{k=0}^3 x^k \sigma_k = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus. Die inverse Abbildung ist durch

$$X \in \mathcal{H}(2) \longmapsto \left(x^k := \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_k \circ X) \right)_{k=0, \dots, 3} \in \mathbb{R}^{1,3}$$

gegeben. Ist $X \in \mathcal{H}(2)$ und $A \in SL(2; \mathbb{C})$, so ist $AX\bar{A}^t$ ebenfalls in $\mathcal{H}(2)$. Dies gestattet es, die folgende Wirkung von $SL(2, \mathbb{C})$ auf dem Minkowski-Raum zu definieren:

$$\begin{aligned} \phi : SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{1,3} &\longrightarrow \mathbb{R}^{1,3} \simeq \mathcal{H}(2) \\ (A, x) &\longmapsto AX(x)\bar{A}^t. \end{aligned}$$

Für die Determinante der hermiteschen Matrix $X(x)$ gilt

$$\det X(x) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Folglich erhält die Transformation

$$l_A : \mathbb{R}^{1,3} \longrightarrow \mathbb{R}^{1,3}$$

$$x \longmapsto \phi(A, x)$$

die Minkowski-Metrik $\eta(x, y) = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$. Man kann zeigen, dass der Lie-Gruppen-Homomorphismus

$$\rho : A \in SL(2, \mathbb{C}) \longmapsto l_A \in SO_0(1, 3)$$

eine 2-fache Überlagerung der eigentlichen Lorentzgruppe $SO^0(1, 3)$, d. h. der Zusammenhangskomponente des 1-Elementes von $O(1, 3)$, ist.

Sei G eine Lie-Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Wir nennen zwei Elemente $g_1, g_2 \in G$ äquivalent ($g_1 \sim_H g_2$), falls es ein $h \in H$ mit $g_1 = g_2 \cdot h$ gibt. Mit $[g] := \{g \cdot h \mid h \in H\} = gH$ sei die Äquivalenzklasse eines Elementes $g \in G$ bezeichnet.

$$G/H := \bigcup_{g \in G} [g]$$

sei die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : G \rightarrow G/H$ die natürliche Projektion $\pi(g) = [g]$. Wir zeigen nun, dass der Faktorraum G/H ein homogener Raum ist.

Satz 1.24 *Sei H eine abgeschlossene Untergruppe einer Lie-Gruppe G . Dann existiert auf dem Faktorraum G/H eine Mannigfaltigkeitsstruktur, so, dass gilt:*

1. *Die Projektion $\pi : G \rightarrow G/H$ ist glatt.*
2. *Mit der Linkswirkung $(g, [a]) \in G \times G/H \mapsto [ga] \in G/H$ ist G/H ein homogener Raum.*
3. *Es existieren „lokale Schnitte in $\pi : G \rightarrow G/H$ “, d. h., zu jeder Äquivalenzklasse $[a] \in G/H$ existiert eine Umgebung $W([a]) \subset G/H$ und eine glatte Abbildung $s_{[a]} : W([a]) \rightarrow G$ mit $\pi \circ s_{[a]} = \text{Id}_{W([a])}$.*

Beweis Wir versehen die Menge der Äquivalenzklassen G/H mit der durch $\pi : G \rightarrow G/H$ definierten Faktortopologie. Da H eine abgeschlossene Teilmenge von G und π eine offene Abbildung ist, ist G/H ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis. Wir definieren nun um jeden Punkt $[g] \in G/H$ eine Karte: Dazu verfahren wir wie im Beweis von Satz 1.21. Sei \mathfrak{h} die Lie-Algebra von H , $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ ein algebraisches Komplement von \mathfrak{h} in \mathfrak{g} und ϕ der lokale Diffeomorphismus um den Nullvektor $o \in \mathfrak{g}$

$$\phi : \mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} \longrightarrow G$$

$$X \oplus Y \longmapsto \exp(X) \cdot \exp(Y).$$

Wir verkleinern die im Beweis von Satz 1.21 angegebene Umgebung $V = V_{\mathfrak{m}} \times V_{\mathfrak{h}}$ noch einmal auf eine Umgebung $W = W_{\mathfrak{m}} \times W_{\mathfrak{h}} \subset V_{\mathfrak{m}} \times V_{\mathfrak{h}}$ derart, dass $(\exp W)^{-1} \cdot \exp W \subset U$. Dann prüft man leicht nach, dass für jedes $g \in G$ die Abbildung

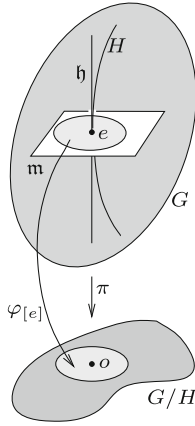
$$\varphi_{[g]} : W_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\exp} G \xrightarrow{L_g} G \xrightarrow{\pi} G/H$$

ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist. Folglich ist $(\varphi_{[g]}(W_{\mathfrak{m}}), \varphi_{[g]}^{-1})$ eine Karte um $[g] \in G/H$. Für zwei solche Karten, deren Kartenbereiche einen gemeinsamen Durchschnitt haben, gilt

$$\varphi_{[a]}^{-1} \circ \varphi_{[g]}(X) = pr_{\mathfrak{m}} \circ \phi^{-1}(L_{a^{-1}g} \exp(X)), \quad X \in W_{\mathfrak{m}},$$

wobei $pr_{\mathfrak{m}}$ die Projektion von \mathfrak{g} auf \mathfrak{m} bezeichnet. Da alle Abbildungen auf der rechten Seite glatt sind, sind die Kartenübergänge glatte Abbildungen. Demnach ist

$$\mathcal{A} = \{(\varphi_{[g]}(W_{\mathfrak{m}}), \varphi_{[g]}^{-1}) \mid g \in G\}$$



ein glatter Atlas auf G/H .

Wir zeigen nun, dass die Projektion $\pi : G \rightarrow G/H$ bezüglich dieser Mannigfaltigkeitsstruktur glatt ist. Dazu betrachten wir die Kartendarstellung von π um $g \in G$ in den Karten $(L_g \circ \phi(W), (L_g \circ \phi)^{-1})$ um $g \in G$ und $(\varphi_{[g]}(W_{\mathfrak{m}}), \varphi_{[g]}^{-1})$ um $[g] \in G/H$. Benutzt man die Definition von $\varphi_{[g]}$, so erhält man für die Kartendarstellung der Projektion π

$$\varphi_{[g]}^{-1} \circ \pi \circ (L_g \circ \phi) = pr_{\mathfrak{m}}.$$

π ist folglich glatt. Auf analoge Weise zeigt man die Glattheit der Linkswirkung von G auf G/H . Die Transitivität der Wirkung folgt aus den Gruppeneigenschaften von G . Somit ist G/H ein homogener Raum.

Lokale Schnitte für $\pi : G \rightarrow G/H$ erhält man auf folgende Weise:

Für $[g] \in G/H$ betrachten wir den Kartenbereich $W([g]) := \varphi_{[g]}(W_{\mathfrak{m}})$ und die glatte Abbildung

$$s_{[g]} := L_g \circ \exp \circ \varphi_{[g]}^{-1} : W([g]) \longrightarrow G.$$

Sei $[a] \in W([g])$. Dann existiert genau ein $X_{\mathfrak{m}} \in W_{\mathfrak{m}}$ mit

$$[a] = \varphi_{[g]}(X_m) = \pi L_g \exp X_m = \pi L_g \exp \varphi_{[g]}^{-1}[a] = \pi(s_{[g]}[a]).$$

Folglich ist $s_{[g]}$ ein lokaler Schnitt. \square

Wenn wir im Folgenden von abgeschlossenen Untergruppen H einer Lie-Gruppe G und von homogenen Räumen G/H reden, so seien diese immer mit den in Satz 1.21 und 1.24 beschriebenen Mannigfaltigkeitsstrukturen versehen.

Wir zeigen als nächstes, dass sich jeder homogene Raum $[M, G]$ in der Form $M = G/H$ für eine geeignete abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ darstellen lässt. Für einen Punkt $x \in M$ bezeichnet $G_x \subset G$ den Stabilisator von x :

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}.$$

G_x ist offensichtlich eine abgeschlossene Untergruppe von G . Es gilt

Satz 1.25 *Sei G eine Lie-Gruppe, die von links transitiv auf M wirkt, und $x \in M$. Dann ist die Abbildung*

$$\Psi : [a] \in G/G_x \longmapsto a \cdot x \in M$$

ein G -äquivarianter Diffeomorphismus, d. h., es gilt $\Psi(g \cdot [a]) = g \cdot \Psi([a])$ für alle $a, g \in G$.

Beweis Da G transitiv auf M wirkt, ist Ψ korrekt definiert und bijektiv. Die Vertauschbarkeit von Ψ mit der G -Wirkung folgt aus der Definition. Es bleibt zu zeigen, dass Ψ ein Diffeomorphismus ist. Sei $\beta : G \rightarrow M$ die glatte Abbildung $\beta(g) = g \cdot x$. β ist ein Lift von Ψ , d. h. $\Psi \circ \pi = \beta$. Analog wie im Beweis von Satz 1.24 zeigt man, dass die Kartendarstellungen von Ψ glatt sind. Es genügt nun zu zeigen, dass für jeden Punkt $[a] \in G/G_x$ das Differential

$$d\Psi_{[a]} : T_{[a]}G/G_x \rightarrow T_{\Psi([a])}M$$

ein Isomorphismus ist. Bezeichnen wir die Linkswirkung des Elementes $a \in G$ auf G/G_x und auf M der Einfachheit halber in beiden Fällen mit l_a , so gilt

$$d\Psi_{[a]} \circ (dl_a)_{[e]} = (dl_a)_x \circ d\Psi_{[e]}.$$

Es reicht also aus, die Isomorphie von $d\Psi_{[e]}$ für das triviale Element $e \in G$ zu zeigen.

Aus Satz 1.24 folgt $T_{[e]}(G/G_x) = d\varphi_{[e]}(\mathfrak{m})$, wobei $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ ein algebraisches Komplement der Lie-Algebra \mathfrak{h} von G_x ist. Für $X \in \mathfrak{m}$ erhalten wir

$$d\Psi_{[e]}(d\varphi_{[e]}(X)) = d(\Psi \circ \pi \circ \exp)(X) = d(\beta \circ \exp)(X) = d\beta_e(X).$$

Die Abbildung $d\beta_e : \mathfrak{g} \rightarrow T_x M$ hat den Kern \mathfrak{h} , folglich ist

$$d\Psi_{[e]} : T_{[e]}(G/G_x) \rightarrow T_x M$$

ein Isomorphismus. \square

Beispiel 1.14 Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Sphäre vom Radius 1. Die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n+1)$ wirkt transitiv auf S^n . Der Stabilisator des Vektors $e_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)^t$ ist die Untergruppe $SO(n) \hookrightarrow SO(n+1)$, eingebettet durch $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Folglich kann man S^n als homogenen Raum $S^n = SO(n+1)/SO(n)$ darstellen.

Beispiel 1.15 Sei $\mathbb{R}P^n$ der n -dimensionale reell-projektive Raum. $\mathbb{R}P^n$ ist die Mannigfaltigkeit aller Geraden durch o im \mathbb{R}^{n+1} . Die Gruppe $SO(n+1)$ wirkt transitiv auf $\mathbb{R}P^n$. Der Stabilisator der Geraden $\mathbb{R}e_{n+1}$ ist die Untergruppe

$$O(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} \mid A \in O(n) \right\} \subset SO(n+1).$$

Also haben wir

$$\mathbb{R}P^n = SO(n+1)/O(n).$$

Beispiel 1.16 Sei $\mathbb{C}P^n$ der n -dimensionale komplex-projektive Raum. $\mathbb{C}P^n$ ist die Mannigfaltigkeit aller 1-dimensionalen komplexen Unterräume des \mathbb{C}^{n+1} . Wie im Beispiel 2 erhält man

$$\mathbb{C}P^n = SU(n+1)/S(U(1) \times U(n)).$$

Beispiel 1.17 Bezeichne \mathbb{K} die reellen oder komplexen Zahlen oder die Quaternionen und $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{K}^n}$ das entsprechende Standard-Skalarprodukt. Unter der Stiefel-Mannigfaltigkeit $V_k(\mathbb{K}^n)$ versteht man die Menge der k -Tupel von orthonormalen Vektoren im \mathbb{K}^n

$$V_k(\mathbb{K}^n) = \{(v_1, \dots, v_k) \mid v_i \in \mathbb{K}^n, \langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{K}^n} = \delta_{ij}\}.$$

Diese Menge kann man mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur versehen. Die orthogonale Gruppe $O(n)$ wirkt transitiv auf $V_k(\mathbb{R}^n)$ durch

$$A \cdot (v_1, \dots, v_k) = (Av_1, \dots, Av_k).$$

Der Stabilisator des k -Tupels (e_{n-k+1}, \dots, e_n) ist die Untergruppe

$$O(n-k) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \mid A \in O(n-k) \right\} \subset O(n).$$

(Hierbei bezeichnet $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ und E die Einheitsmatrix.) Demnach ist $V_k(\mathbb{R}^n)$ als homogener Raum

$$V_k(\mathbb{R}^n) = O(n)/O(n-k)$$

darstellbar. Analog erhält man

$$V_k(\mathbb{C}^n) = U(n)/U(n-k),$$

$$V_k(\mathbb{H}^n) = Sp(n)/Sp(n-k).$$

Beispiel 1.18 Unter der Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_k(\mathbb{K}^n)$ versteht man die Menge aller k -dimensionalen Unterräume von \mathbb{K}^n . Auch diese Menge trägt eine Mannigfaltigkeitsstruktur und ist auf folgende Weise als homogener Raum darstellbar:

$$\begin{aligned} G_k(\mathbb{R}^n) &= O(n)/(O(k) \times O(n-k)), \\ G_k(\mathbb{C}^n) &= U(n)/(U(k) \times U(n-k)), \\ G_k(\mathbb{H}^n) &= Sp(n)/(Sp(k) \times Sp(n-k)). \end{aligned}$$

Man kann eine Mannigfaltigkeit M ggf. auf verschiedene Weise in der Form G/H darstellen, da verschiedene Gruppen transitiv auf M wirken können. Eine besonders nützliche Darstellung als Faktorraum ist die als sogenannter *reduktiver homogener Raum*.

Definition 1.15 Sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe einer Lie-Gruppe, \mathfrak{h} die Lie-Algebra von H und \mathfrak{g} die Lie-Algebra von G . Der homogene Raum G/H heißt *reduktiv*, falls es eine Vektorraum-Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ der Lie-Algebra \mathfrak{g} gibt, so dass

$$\text{Ad}(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$$

gilt.

Die Sphäre S^n hat z. B. die reduktive Darstellung $S^n = SO(n+1)/SO(n)$ (Beispiel 1.14). Eine weitere (nicht-reduktive) Darstellung von S^n als homogener Raum ist in Aufgabe 1.11. am Ende des Kapitels beschrieben.

1.6 Fundamentale Vektorfelder

Wirkt eine Lie-Gruppe G auf einer glatten Mannigfaltigkeit M , so definiert jedes Element der Lie-Algebra \mathfrak{g} von G ein spezielles Vektorfeld auf M , das sogenannte *fundamentale Vektorfeld*, das auch in der Eichfeldtheorie eine wichtige Rolle spielt.

Definition 1.16 Sei $[M, G]$ eine Links-Transformationsgruppe und $X \in \mathfrak{g}$. Das Vektorfeld \tilde{X} auf M ,

$$\tilde{X}(x) := \frac{d}{dt}(\exp(-tX) \cdot x)|_{t=0},$$

heißt das zu X gehörende *fundamentale Vektorfeld*. Ist $[M, G]$ eine Rechtstransformationsgruppe, so ist das fundamentale Vektorfeld definiert durch

$$\tilde{X}(x) := \frac{d}{dt}(x \cdot \exp(tX))|_{t=0}.$$

Satz 1.26 Sei $[M, G]$ eine Liesche Transformationsgruppe.

1. Die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ X &\longmapsto \widetilde{X}\end{aligned}$$

ist linear und es gilt $\widetilde{[X, Y]} = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$. Insbesondere bildet die Menge der fundamentalen Vektorfelder eine Lie-Unteralgebra der Lie-Algebra aller Vektorfelder.

2. Wirkt die Zusammenhangskomponente der Einheit von G effektiv auf M , so ist

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \{\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M) \mid X \in \mathfrak{g}\}$$

ein Lie-Algebren-Isomorphismus.

3. Wirkt G von rechts auf M , so gilt für alle $a \in G$ und $X \in \mathfrak{g}$

$$(dr_a)(\widetilde{X}) = \widetilde{\text{Ad}(a^{-1})X}.$$

Für eine Linkswirkung gilt

$$(dl_a)(\widetilde{X}) = \widetilde{\text{Ad}(a)X}.$$

Beweis Wir führen den Beweis hier für Rechtswirkungen. Für Linkswirkungen schließt man analog. Sei $x \in M$ fixiert und bezeichne $\varphi_x : G \rightarrow M$ die Abbildung $\varphi_x(g) = x \cdot g$. Für ein linksinvariantes Vektorfeld $X \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\begin{aligned}(d\varphi_x)_a(X(a)) &= d\varphi_x(dL_a(X(e))) = \frac{d}{dt}(\varphi_x(L_a(\exp tX)))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(x \cdot a \cdot \exp tX)|_{t=0} = \widetilde{X}(x \cdot a) = \widetilde{X}(\varphi_x(a)).\end{aligned}$$

Folglich sind $X \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}(G)$ und $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ φ_x -verknüpft für alle $x \in M$. Damit erhält man

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}.$$

Die Linearität der Zuordnung $X \in \mathfrak{g} \rightarrow \widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ folgt aus der Linearität des Differentials $(d\varphi_x)_a$. Sei G^0 die Zusammenhangskomponente von $e \in G$. Wir zeigen, dass die Zuordnung $X \in \mathfrak{g} \rightarrow \widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ injektiv ist, falls G^0 effektiv wirkt.

Sei $\widetilde{X} = 0$. Dann ist jeder Punkt von M eine Nullstelle von \widetilde{X} , folglich bewegt der Fluss von \widetilde{X} die Punkte von M nicht. Wir erhalten

$$x \cdot \exp tX = x \quad \text{für alle } x \in M, t \in \mathbb{R}.$$

Für hinreichend kleine $t_0 \in \mathbb{R}$ liegt $g_0 = \exp t_0 X$ in einer Normalenumgebung des 1-Elementes von G^0 . Da G^0 effektiv auf M wirkt, folgt aus $r_{g_0} = \text{Id}_M$ dass $g_0 = e$, also $X = 0$ ist. Sei nun $x \in M$, $a \in G$ und $X \in \mathfrak{g}$. Dann gilt:

$$(dr_a(\widetilde{X}))(x) = (dr_a)_{xa^{-1}}(\widetilde{X}(xa^{-1}))$$

$$\begin{aligned}
&= (dr_a)_{xa^{-1}} \left(\frac{d}{dt} (xa^{-1} \cdot \exp tX) \Big|_{t=0} \right) \\
&= \frac{d}{dt} (x \cdot (a^{-1} \cdot \exp tX \cdot a)) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} (x \cdot (\alpha_{a^{-1}} \exp tX)) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} (x \cdot \exp(t \operatorname{Ad}(a^{-1})X)) \Big|_{t=0} \\
&= \widetilde{(\operatorname{Ad}(a^{-1})X)}(x).
\end{aligned}$$

□

Wir beweisen abschließend eine im Folgenden häufig benutzte Ableitungsregel für Transformationsgruppen.

Satz 1.27 *Es sei $[M, G]$ eine von rechts wirkende Transformationsgruppe. Sei $x(t)$ eine Kurve in der Mannigfaltigkeit M mit $x(0) = x$, $g(t)$ eine Kurve in der Lie-Gruppe G mit $g(0) = g$ und bezeichne $z(t)$ die Kurve $z(t) := x(t) \cdot g(t)$ in M . Dann gilt folgende Formel für den Tangentialvektor der Kurve $z(t)$ in $t = 0$:*

$$\dot{z}(0) = dr_g(\dot{x}(0)) + \widetilde{(dL_{g^{-1}}\dot{g}(0))} (x \cdot g). \quad (1.14)$$

Dabei bezeichnet \widetilde{X} das von einem Element X der Lie-Algebra von G erzeugte fundamentale Vektorfeld auf M .

Beweis Sei $\phi : M \times G \rightarrow M$ die G -Wirkung auf M . In den folgenden Rechnungen benutzen wir die kanonische Identifizierung des Tangentialraums von $M \times G$ mit denen der Faktoren M und G

$$T_{(x,g)}(M \times G) \simeq T_x M \oplus T_g G.$$

Mit $r_g : M \rightarrow M$ und $\varphi_x : G \rightarrow M$ bezeichnen wir die durch $r_g(x) := x \cdot g$ und $\varphi_x(g) := x \cdot g$ definierten Abbildungen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\dot{z}(0) &= \frac{d}{dt} (\phi(x(t), g(t))) \Big|_{t=0} = d\phi_{(x,g)}(\dot{x}(0), \dot{g}(0)) \\
&= d\phi_{(x,g)}(\dot{x}(0), 0) + d\phi_{(x,g)}(0, \dot{g}(0)) \\
&= \frac{d}{dt} (\phi(x(t), g)) \Big|_{t=0} + \frac{d}{dt} (\phi(x, g(t))) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} (r_g(x(t))) \Big|_{t=0} + \frac{d}{dt} (\varphi_x(g(t))) \Big|_{t=0} \\
&= dr_g(\dot{x}(0)) + d\varphi_x(\dot{g}(0)).
\end{aligned}$$

Sei $X \in \mathfrak{g}$ das vom Vektor $dL_{g^{-1}}\dot{g}(0) \in T_e G$ erzeugte linksinvariante Vektorfeld in \mathfrak{g} . Aus dem Beweis von Satz 1.26 wissen wir, dass

$$\tilde{X}(x \cdot g) = d\varphi_x(X(g)) = d\varphi_x(\dot{g}(0)).$$

Damit ist die Formel (1.14) bewiesen. \square

1.7 Aufgaben zu Kapitel 1

1.1. Eine Gruppe G , die zusätzlich mit einer Topologie versehen ist, heißt *topologische Gruppe*, wenn die Abbildung

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, a) &\longmapsto g \cdot a^{-1} \end{aligned}$$

stetig ist. Sei G eine zusammenhängende topologische Gruppe und U eine beliebige Umgebung des neutralen Elementes von G . Zeigen Sie, dass die Menge U die Gruppe G erzeugt.

1.2. Zeigen Sie, dass es genau zwei 2-dimensionale, zueinander nicht isomorphe reelle Lie-Algebren gibt. Geben Sie in beiden Fällen eine Lie-Gruppe mit der entsprechenden Lie-Algebra an.

1.3. Zeigen Sie, dass die Sphäre S^3 die Struktur einer Lie-Gruppe trägt. Warum kann es keine Lie-Gruppen-Struktur auf der Sphäre S^2 geben?

1.4. Zeigen Sie, dass die Lie-Algebra der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3)$ isomorph zur Lie-Algebra (\mathbb{R}^3, \times) ist, wobei \times das Vektorprodukt im \mathbb{R}^3 bezeichnet.

1.5. Für $A \in GL(n, \mathbb{R})$ und $v \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $F_{A,v}$ die folgende Abbildung auf dem \mathbb{R}^n :

$$F_{A,v}(x) := Ax + v, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass die affine Gruppe $\text{Aff}(\mathbb{R}^n) := \{F_{A,v} \mid A \in GL(n, \mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n\}$ eine Lie-Gruppe ist und bestimmen Sie ihre Lie-Algebra.

1.6. Sei $SO(n)$ die spezielle orthogonale Gruppe und $\mathfrak{so}(n)$ ihre Lie-Algebra, betrachtet als Menge der schiefssymmetrischen Abbildungen des \mathbb{R}^n . Weiterhin bezeichne ρ_2 die durch die Matrizenwirkung von $SO(n)$ auf \mathbb{R}^n induzierte Darstellung von $SO(n)$ auf dem Raum der alternierenden Tensoren $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n$. Wir betrachten die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{so}(n)$, die durch

$$\phi(v \wedge w) = X_{v,w}, \quad \text{wobei } X_{v,w}(z) := \langle v, z \rangle w - \langle w, z \rangle v \quad \text{für } z \in \mathbb{R}^n,$$

gegeben ist. Zeigen Sie, dass ϕ ein linearer Isomorphismus ist, der mit der Wirkung $(\rho_2)_*$ von $\mathfrak{so}(n)$ auf $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n$ und der durch die adjungierte Darstellung ad definierten Wirkung von $\mathfrak{so}(n)$ auf $\mathfrak{so}(n)$ kommutiert.

1.7. Bestimmen Sie die Signatur der Killing-Formen von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ und von $\mathfrak{su}(2)$.

1.8. Es sei $\mathfrak{so}(p, q)$ die Lie-Algebra der pseudo-orthogonalen Gruppe $O(p, q)$. Zeigen Sie, dass für die Killing-Form von $\mathfrak{so}(p, q)$ die Formel

$$B_{\mathfrak{so}(p,q)}(X, Y) = (n - 2) \text{Tr}(X \circ Y)$$

mit $n = p + q$ gilt. Zeigen Sie, dass die Killing-Form $B_{\mathfrak{so}(p,q)}$ nicht-ausgeartet ist und bestimmen Sie ihre Signatur.

1.9. (*Metriken konstanter Krümmung auf Lie-Gruppen.*)

a) Es sei h die linksinvariante Metrik auf $SU(2)$, die durch das Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle_{\mathfrak{su}(2)} := -\frac{1}{2} \text{Tr}(X \circ Y)$$

auf der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$ von $SU(2)$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass $(SU(2), h)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, die isometrisch zur Sphäre S^3 mit der Standardmetrik ist. (Insbesondere ist $(SU(2), h)$ eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung 1.)

b) Es sei b die linksinvariante Metrik auf $SU(1, 1)$, die durch das Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle_{\mathfrak{su}(1,1)} := +\frac{1}{2} \text{Tr}(X \circ Y)$$

auf der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(1, 1)$ von $SU(1, 1)$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass durch $(SU(1, 1), b)$ eine Lorentz-Mannigfaltigkeit gegeben ist, die isometrisch zum 3-dimensionalen AdS-Raum $H^{1,2} := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \langle x, x \rangle_{2,2} = -1\}$ mit der durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,2}$ induzierten Lorentz-Metrik ist. (Insbesondere ist $(SU(1, 1), b)$ eine vollständige Lorentz-Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung -1 .)

1.10. (*Geometrie von Lie-Gruppen mit biinvarianter Metrik.*)

Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra \mathfrak{g} und sei h eine biinvariante Metrik auf G . Zeigen Sie:

a) Für den Levi-Civita-Zusammenhang und die Krümmung von (G, h) gilt

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \frac{1}{2}[X, Y], & X, Y \in \mathfrak{g}, \\ R(X, Y)Z &= -\frac{1}{4}[[X, Y], Z], & X, Y, Z \in \mathfrak{g}, \\ Ric(X, Y) &= -\frac{1}{4}B_{\mathfrak{g}}(X, Y), & X, Y \in \mathfrak{g}.\end{aligned}$$

(Ist also h insbesondere die durch die Killing-Form einer halbeinfachen Lie-Gruppe G definierte biinvariante semi-Riemannsche Metrik, dann ist (G, h) ein Einstein-Raum.)

b) Die Geodäten von (G, h) stimmen mit den Integralkurven der linksinvarianten Vektorfelder überein, d. h., jede Geodäte γ mit $\gamma(0) = g \in G$ hat die Form

$$\gamma(t) = g \cdot \exp(tX), \quad t \in \mathbb{R},$$

für ein $X \in \mathfrak{g}$. Insbesondere ist die semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (G, h) geodätisch vollständig.

c) (G, h) ist ein symmetrischer Raum, d. h., für jedes $a \in G$ existiert eine Isometrie $s_a : G \rightarrow G$ mit

$$s_a(a) = a \quad \text{und} \quad (ds_a)_a = -\text{Id}_{T_a G}.$$

(Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung s_a mit $s_a(g) := a \cdot g^{-1} \cdot a$.)

d) Ist die Killing-Form $B_{\mathfrak{g}}$ der Lie-Gruppe G negativ definit, so ist G kompakt und ihre Fundamentalgruppe endlich.

(Hinweis: Hierzu benötigt man den Satz von Bonnet-Myers, der eine Aussage über den Zusammenhang zwischen Topologie und Krümmung macht.)

1.11. Es bezeichne $C := \{x \in \mathbb{R}^{1,n+1} \mid \langle x, x \rangle_{1,n+1} = 0\}$ den Lichtkegel im $(n+2)$ -dimensionalen Minkowski-Raum und $PC := \{\mathbb{R}x \mid x \in C \setminus \{0\}\}$ seine Projektivierung.

- Zeigen Sie, dass PC diffeomorph zur Sphäre S^n ist. Veranschaulichen Sie dies an einem Bild.
- Zeigen Sie, dass die pseudo-orthogonale Gruppe $O(1, n+1)$ transitiv auf PC wirkt. Bestimmen Sie den Stabilisator des Punktes $\mathbb{R}(1, 0, \dots, 0, 1) \in PC$.

1.12. Es sei $[F, G]$ eine Liesche Transformationsgruppe, wobei die Lie-Gruppe G von links auf F wirke. Zeigen Sie, dass durch

$$(g, X) \in G \times TF \longrightarrow dl_g(X) \in TF$$

eine G -Wirkung auf dem Tangentialbündel von F gegeben ist. Das Paar $[TF, G]$ ist also eine Liesche Transformationsgruppe.

1.13. Formulieren und beweisen Sie die zu Satz 1.27 analoge Produktformel für von links wirkende Lie-Gruppen.

Eichfeldtheorie

Eine Einführung in die Differentialgeometrie auf
Faserbündeln

Baum, H.

2014, XIV, 380 S. 38 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-38538-4